

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я.721

Г 36

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И.
Геометрия. 8 класс. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 240 с. —
ISBN 5-9221-0573-6.

Настоящее издание является второй частью учебно-методического пособия, содержащего решения задач из учебника «Геометрия 7–9» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Данный выпуск содержит решения задач, относящихся к 8 классу.

© ФИЗМАТЛИТ, 2005

© Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина, 2005

ISBN 5-9221-0573-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Четырехугольники	5
§ 1. Многоугольники	5
§ 2. Параллелограмм и трапеция	7
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	19
Дополнительные задачи	28
Задачи повышенной трудности	36
Глава 2. Площадь	49
§ 1. Площадь многоугольника	49
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	53
§ 3. Теорема Пифагора	61
Дополнительные задачи	68
Задачи повышенной трудности	85
Глава 3. Подобные треугольники	97
§ 1. Определение подобных треугольников	97
§ 2. Признаки подобия треугольников	102
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	109
Задачи на построение	116
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	119
Дополнительные задачи	124
Задачи повышенной трудности	138
Глава 4. Окружность	161
§ 1. Касательная к окружности	161
§ 2. Центральные и вписанные углы	166
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника	174
§ 4. Вписанная и описанная окружности	177
Дополнительные задачи	184
Задачи повышенной трудности	191

Глава 5. Векторы	209
§ 1. Понятие вектора	209
§ 2. Сложение и вычитание векторов	213
§ 3. Умножение вектора на число	221
Применение векторов к решению задач	225
Средняя линия трапеции	227
Дополнительные задачи	229
Задачи повышенной трудности	234

Глава 1

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. Многоугольники

364. Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

Решение. а) $S_5 = 180^\circ \cdot (5 - 2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$;

б) $S_6 = 180^\circ \cdot (6 - 2) = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$;

в) $S_{10} = 180^\circ \cdot (10 - 2) = 180^\circ \cdot 8 = 1440^\circ$.

Ответ. а) 540° ; б) 720° ; в) 1440° .

365. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90° ; б) 60° ; в) 120° ; г) 108° ?

Решение. Пусть выпуклый многоугольник имеет n сторон и:

а) каждый угол его равен 90° , тогда

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 90^\circ \cdot n,$$

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 90^\circ \cdot n, \quad 90^\circ \cdot n = 360^\circ, \quad n = 4;$$

б) каждый угол его равен 60° , тогда

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 60^\circ \cdot n,$$

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 60^\circ \cdot n, \quad 120^\circ \cdot n = 360^\circ, \quad n = 3;$$

в) каждый угол его равен 120° , тогда

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 120^\circ \cdot n,$$

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 120^\circ \cdot n, \quad 60^\circ \cdot n = 360^\circ, \quad n = 6;$$

г) каждый угол его равен 108° , тогда

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 108^\circ \cdot n,$$

$$72^\circ \cdot n = 360^\circ, \quad n = 5.$$

Ответ. а) 4; б) 3; в) 6; г) 5.

366. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

Решение. Пусть большая сторона, например, AB четырехугольника $ABCD$, равна x мм, тогда $BC = (x - 3)$ мм, $CD = (x - 4)$ мм, $DA = (x - 5)$ мм.

По условию периметр его равен $8 \text{ см} = 80 \text{ мм}$, следовательно,
 $AB + BC + CD + DA = x + (x - 3) + (x - 4) + (x - 5) = 80$,
 $4x - 12 = 80$, $4x = 92$, $x = 23$, т. е. $AB = 23 \text{ мм}$, $BC = 20 \text{ мм}$,
 $CD = 19 \text{ мм}$, $DA = 18 \text{ мм}$.

Ответ. 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм.

367. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвертая — в три раза больше второй.

Решение. Пусть первая сторона четырехугольника равна x см, тогда его вторая сторона $(x - 8)$ см, третья сторона $(x + 8)$ см, а четвертая сторона равна $3 \cdot (x - 8)$ см. По условию периметр этого четырехугольника равен 66 см, следовательно,

$$x + (x - 8) + (x + 8) + 3(x - 8) = 66,$$

$$x + x - 8 + x + 8 + 3x - 24 = 66, 6x = 90, x = 15.$$

Ответ. 15 см, 7 см, 23 см, 21 см.

368. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они равны друг другу.

Решение. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° , и так как все они равны друг другу, то каждый из них равен $360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Ответ. 90° .

369. Найдите углы A , B и C выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135^\circ$.

Решение. Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° и по условию $\angle D = 135^\circ$, то $\angle A + \angle B + \angle C = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$.

$\angle A = \angle B = \angle C$ по условию, а их сумма равна 225° , следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 225^\circ : 3 = 75^\circ$.

Ответ. 75° .

370. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

Решение. Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° и по условию они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5, то $\angle 1 = 360^\circ : (1 + 2 + 4 + 5) \cdot 1 = 30^\circ$,

$$\angle 2 = 360^\circ : 12 \cdot 2 = 60^\circ,$$

$$\angle 3 = 360^\circ : 12 \cdot 4 = 120^\circ,$$

$$\angle 4 = 360^\circ : 12 \cdot 5 = 150^\circ.$$

Ответ. 30° , 60° , 120° , 150° .

§ 2. Параллелограмм и трапеция

371. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

Решение. а) Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC . Равные углы BAC и ACD являются накрест лежащими при пересечении прямых AB и CD секущей AC , поэтому $AB \parallel CD$, а равные углы BCA и DAC являются накрест лежащими при пересечении прямых BC и AD секущей AC , поэтому $BC \parallel AD$.

Итак, противоположные стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, по определению этот четырехугольник — параллелограмм.

б) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D — односторонние при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD , поэтому $\angle A + \angle D = 180^\circ$, а так как по условию $\angle A = \angle C$, то $\angle C + \angle D = 180^\circ$. Углы C и D являются односторонними углами при пересечении прямых BC и AD секущей CD , и их сумма равна 180° , поэтому $BC \parallel AD$.

Итак, в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

372. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 3 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.

Решение. а) Пусть сторона AD параллелограмма $ABCD$ на 3 см больше стороны AB , тогда по условию

$$2(AB + AD) = 48 \text{ см и } AD = AB + 3 \text{ см.}$$

Имеем:

$$AB + AD = 24 \text{ см, } AB + AB + 3 \text{ см} = 24 \text{ см,}$$

$$2AB = 21 \text{ см, } AB = 10,5 \text{ см, } AD = 13,5 \text{ см.}$$

б) Пусть разность сторон AD и AB параллелограмма $ABCD$ равна 7 см, тогда по условию имеем

$$2(AB + AD) = 48 \text{ см и } AD - AB = 7 \text{ см.}$$

Получаем:

$$AB + AD = 24 \text{ см, } AD = AB + 7 \text{ см, откуда}$$

$$2AB + 7 \text{ см} = 24 \text{ см, } 2AB = 17 \text{ см, } AB = 8,5 \text{ см, } AD = 8,5 \text{ см} + 7 \text{ см} = 15,5 \text{ см.}$$

в) Пусть сторона AD параллелограмма $ABCD$ в два раза больше стороны AB , тогда по условию имеем

$$2(AB + AD) = 48 \text{ см и } AD = 2AB.$$

Получаем:

$AB + AD = 24$ см, $AB + 2AB = 24$ см, $3AB = 24$ см, $AB = 8$ см,
 $AD = 16$ см.

Ответ. а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см.

373. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C = 30^\circ$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

Решение. Пусть BH — высота параллелограмма $ABCD$ (рис. 1). В прямоугольном треугольнике CBH $\angle C = 30^\circ$, поэтому катет BH , лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы и $CB = 13$ см. Так как периметр параллелограмма равен 50 см, то $CB + CD = 25$ см и $CD = 25$ см $- 13$ см = 12 см.

Ответ. $AB = CD = 12$ см, $AD = BC = 13$ см.

374. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15$ см, $KC = 9$ см.

Решение. Обозначим углы BAK , KAD и BKA цифрами 1, 2, 3, как показано на рисунке 2.

$\angle 1 = \angle 2$, так как луч AK — биссектриса угла A , $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AK , следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Треугольник ABK — равнобедренный, так как два его угла 1 и 3 равны, поэтому $AB = BK = 15$ см.

Так как точка K лежит на стороне BC , то $BC = BK + KC = 15$ см + 9 см = 24 см.

Итак, $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(15 + 24)$ см = 78 см.

Ответ. 78 см.

375. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

Решение. Возможны два случая.

а) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K так, что $BK = 7$ см, $KC = 14$ см, и обозначим углы BAK , KAD и AKB цифрами 1, 2, 3, как показано на рисунке 2.

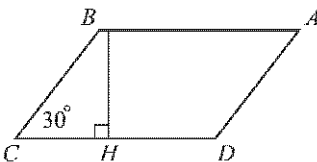


Рис. 1

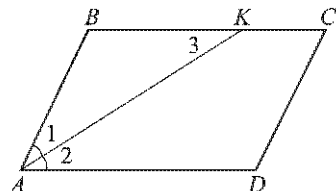


Рис. 2

$\angle 1 = \angle 2$, так как луч AK — биссектриса угла A ; $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AK . Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и треугольник ABK — равнобедренный, поэтому $AB = BK = 7$ см.

Так как точка K лежит на стороне BC и $BK = 7$ см, $KC = 14$ см, то

$$BC = BK + KC = 7 \text{ см} + 14 \text{ см} = 21 \text{ см.}$$

Итак, $P_{ABCD} = 2(7 + 21)$ см = 56 см.

б) Пусть в параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K так, что $BK = 14$ см, $KC = 7$ см. Треугольник ABK — равнобедренный (см. п. а), поэтому

$$AB = BK = 14 \text{ см, } BC = 21 \text{ см.}$$

Итак, $P_{ABCD} = 2(14 + 21)$ см = 70 см.

Ответ. 56 см или 70 см.

376. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если: а) $\angle A = 84^\circ$; б) $\angle A - \angle B = 55^\circ$; в) $\angle A + \angle C = 142^\circ$; г) $\angle A = 2\angle B$; д) $\angle CAD = 16^\circ$, $\angle ACD = 37^\circ$.

Решение. а) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle A = 84^\circ$. Так как $\angle A$ и $\angle C$ — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, то $\angle C = \angle A = 84^\circ$.

Углы A и B — односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB , поэтому $\angle A + \angle B = 180^\circ$, откуда $\angle B = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$. Углы B и D — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, поэтому они равны, т. е. $\angle B = \angle D = 96^\circ$.

б) $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (см. п. а), а по условию $\angle A - \angle B = 55^\circ$, следовательно, $2\angle A = 235^\circ$, $\angle A = 117^\circ 30'$, $\angle B = 62^\circ 30'$.

Противоположные углы параллелограмма равны, поэтому $\angle A = \angle C = 117^\circ 30'$, $\angle B = \angle D = 62^\circ 30'$.

в) Так как $\angle A$ и $\angle C$ — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, то они равны, а так как по условию $\angle A + \angle C = 142^\circ$, то $\angle A = \angle C = 142^\circ : 2 = 71^\circ$.

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ (см. п. а), следовательно, $\angle B = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$.

Углы B и D — противоположные углы параллелограмма, поэтому $\angle B = \angle D = 109^\circ$.

г) $\angle A + \angle B = 180^\circ$, а так как $\angle A = 2 \cdot \angle B$ по условию, то $2 \cdot \angle B + \angle B = 180^\circ$, $3 \cdot \angle B = 180^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, а $\angle A = 120^\circ$.

Итак, $\angle A = \angle C = 120^\circ$, $\angle B = \angle D = 60^\circ$.

д) Рассмотрим треугольник ADC . По условию в этом треугольнике $\angle A = 16^\circ$, $\angle C = 37^\circ$, поэтому $\angle D = 180^\circ - (16^\circ + 37^\circ) = 127^\circ$.

Углы D и B — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, поэтому $\angle B = \angle D = 127^\circ$.

$\angle D + \angle C = 180^\circ$ (см. п. а), следовательно, $\angle C = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

Углы A и C — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, поэтому $\angle A = \angle C = 53^\circ$.

Ответ. а) $84^\circ, 96^\circ, 84^\circ, 96^\circ$; б) $117^\circ 30', 62^\circ 30', 117^\circ 30', 62^\circ 30'$; в) $71^\circ, 109^\circ, 71^\circ, 109^\circ$; г) $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$; д) $53^\circ, 127^\circ, 53^\circ, 127^\circ$.

377. В параллелограмме $MNPQ$ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ , причем точка H лежит на стороне MQ . Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30^\circ$.

Решение. Точка H лежит на отрезке MQ (рис. 3), поэтому $MH + HQ = MQ = 8$ см и $NP = MQ = 8$ см.

В прямоугольном треугольнике MNH $\angle MNH = 30^\circ$, следовательно, $\angle M = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, а катет MH , лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

Итак, $MN = PQ = 6$ см.

Так как противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle P = \angle M = 60^\circ$, $\angle N = 180^\circ - \angle M = 120^\circ$, $\angle Q = \angle N = 120^\circ$.

Ответ. 6 см, 8 см, 6 см, 8 см; $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

379. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и $\angle A$ острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC . Докажите, что четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ углы BAK, DCM, BKM, DMK обозначены цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно (рис. 4).

Рассмотрим прямоугольные треугольники AKB и CMD . Эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу ($AB = DC$ по свойству противоположных сторон параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $BK = DM$.

По условию $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$, и эти углы — накрест лежащие при пересечении прямых BK и DM секущей KM , поэтому $BK \parallel DM$.

Итак, в четырехугольнике $BMDK$ стороны BK и DM равны и параллельны, поэтому четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм (признак 1° параллелограмма, п. 43 учебника).

380. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP, BN = DQ, BM = DP, NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

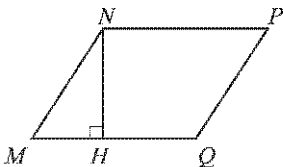


Рис. 3

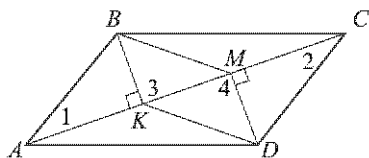


Рис. 4

Решение. 1) Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 5). Так как $AB = AM + MB$, $DC = DP + PC$ и по условию $AM = PC$, $MB = DP$, то $AB = DC$. Аналогично можно доказать $BC = AD$. Итак, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно равны, поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (признак 2°, п. 43 учебника).

2) Треугольники MAQ и PCN равны по двум сторонам и углу между ними ($AM = CP$, $AQ = CN$ — по условию, углы A и C равны как противоположные углы параллелограмма $ABCD$), следовательно, $MQ = PN$. Аналогично можно доказать, что треугольники MBN и PDQ равны и, следовательно, $MN = PQ$.

Итак, в четырехугольнике $MNPQ$ противоположные стороны попарно равны, поэтому $MNPQ$ — параллелограмм.

381. На рисунке 163 учебника изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB , длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колес, передает движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим положение стержня AB , показанное на рисунке 6. Четырехугольник O_1ABO_2 — параллелограмм, так как его противоположные стороны равны: $O_1A = O_2B$ и $O_1O_2 = AB$ (по условию), поэтому $AB \parallel O_1O_2$.

Так как $\angle AO_1O_2 = \angle BO_2B_1$, где угол BO_2B_1 — смежный с углом BO_2O_1 , то при повороте колеса на угол AO_1O_2 точка A совместится с некоторой точкой A_1 прямой O_1O_2 , а точка B — с некоторой точкой B_1 этой прямой и, следовательно, отрезки AB и O_1O_2 будут лежать на одной прямой. Итак, отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

382. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA , OB , OC и OD , — параллелограмм.

Решение. Так как диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, то $BO = OD$, а так как точки B_1 и D_1 — середины отрезков BO и OD , то $B_1O = OD_1$. Аналогично можно доказать, что $A_1O = OC_1$. Таким образом, в четырехугольнике

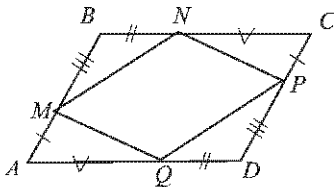


Рис. 5

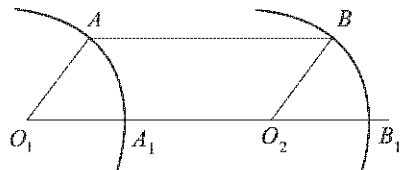


Рис. 6

$A_1B_1C_1D_1$ диагонали A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в точке O и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм (признак 3° параллелограмма, п. 43 учебника).

383. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм.

Решение. Возможны два случая.

1) Точка P лежит между точками B и Q (рис. 7, а). Так как $AB \parallel CD$, то $\angle ABD = \angle CDB$ и $\triangle ABP = \triangle CDQ$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, $PB = QD$, $\angle ABP = \angle CDQ$). Отсюда следует, что $AP = CQ$. Аналогично доказывается, что $\triangle ADQ = \triangle CBP$ и поэтому $AQ = CP$.

Итак, в четырехугольнике $APCQ$ противоположные стороны попарно равны ($AP = CQ$, $AQ = CP$), поэтому $APCQ$ — параллелограмм (признак 2°, п. 43 учебника).

2) Точка Q лежит между точками B и P (рис. 7, б).

В этом случае из равенства $BP = DQ$ получаем: $PD = QB$, после чего доказательство утверждения, что четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм, проводится так же, как в первом случае.

386. Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

Решение. Пусть точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Проведем через точку M прямую, параллельную основаниям AD и BC трапеции $ABCD$. Эта прямая по теореме Фалеса (задача 385 учебника) пересечет отрезок CD в его середине, т. е. пройдет через точку N . Таким образом, отрезок MN , соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

387. Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , если $\angle A = 36^\circ$, $\angle C = 117^\circ$.

Решение. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC параллельны, углы A и B , углы C и D — односторонние углы при пересечении

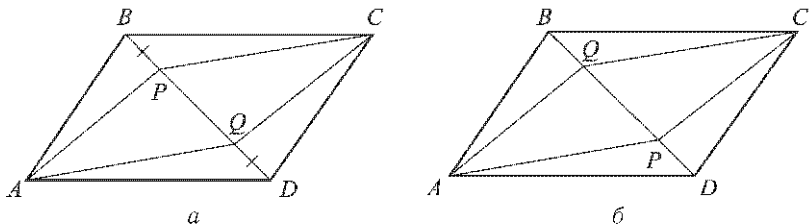


Рис. 7

параллельных прямых AD и BC секущими AB и CD соответственно, поэтому

$$\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ,$$

$$\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

Ответ. $\angle B = 144^\circ$, $\angle D = 63^\circ$.

388. Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны.

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть $AD > BC$.

а) Проведем прямую BE , параллельную прямой CD , E — точка на отрезке AD (рис. 8, а). Так как $BCDE$ — параллелограмм, то $CD = BE$. Но $CD = AB$ ($ABCD$ — равнобедренная трапеция), поэтому $AB = BE$, т. е. треугольник ABE равнобедренный и, значит, $\angle A = \angle BEA$.

Так как $BE \parallel CD$, то $\angle BEA = \angle D$, следовательно, $\angle A = \angle D$, т. е. углы при основании AD равны.

Далее, $\angle B = 180^\circ - \angle A$, $\angle C = 180^\circ - \angle D$, поэтому $\angle B = \angle C$. Итак, углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны.

б) Треугольники ABD и DCA равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD — общая сторона, $\angle A = \angle D$ по доказанному в п. а) (рис. 8, б), следовательно, $BD = AC$.

389. Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

Решение. а) Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $BC < AD$, $\angle A = \angle D$ (рис. 9, а).

Проведем прямую CE , параллельную прямой AB (точка E лежит на прямой AD). Тогда $\angle 1$ и $\angle 3$ — соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CE секущей AD , поэтому $\angle 3 = \angle 1$.

По условию $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$ и поэтому треугольник ECD — равнобедренный: $CD = CE$.

Так как четырехугольник $ABCE$ — параллелограмм, то $CE = AB$, а так как $CE = CD$, то $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

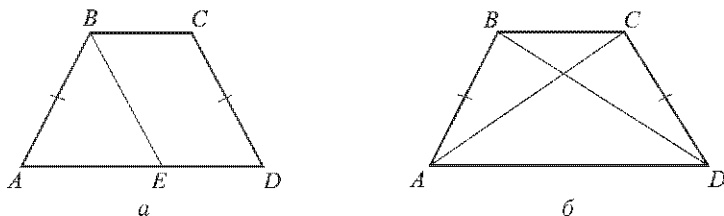


Рис. 8

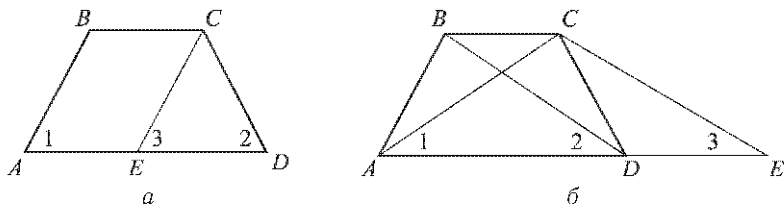


Рис. 9

б) Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD равны (рис. 9, б).

Через вершину C проведем прямую CE , параллельную диагонали BD (точка E лежит на прямой AD). Образовавшийся четырехугольник $BCED$ — параллелограмм ($BC \parallel DE$ и $BD \parallel CE$), поэтому $CE = BD = AC$ и, следовательно, треугольник ACE — равнобедренный с основанием AE , а значит, $\angle 1 = \angle 3$.

Так как $\angle 2 = \angle 3$ (соответственные углы при пересечении параллельных прямых BD и CE секущей AE) и $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 2$.

$\triangle ACD = \triangle DBA$ по двум сторонам и углу между ними ($AC = DB$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$), следовательно, $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

390. Один из углов равнобедренной трапеции равен 68° . Найдите остальные углы трапеции.

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = 68^\circ$. Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны (задача 388, а), то $\angle D = \angle A = 68^\circ$.

Углы A и B — односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB , поэтому

$$\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ, \quad \angle C = \angle B = 112^\circ.$$

Ответ. $68^\circ, 112^\circ, 112^\circ$.

391. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

Решение. Рассмотрим две плитки — две равные равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle D = \angle A_1 = \angle D_1$, $\angle B = \angle C = \angle B_1 = \angle C_1$ (рис. 10, а)).

Приложим эти трапеции друг к другу так, чтобы совместились их равные боковые стороны CD и C_1D_1 , причем точка C совместилась с D_1 , а точка D — с C_1 (рис. 10, б). Тогда основания BC и A_1D_1 будут лежать на одной прямой, так как сумма углов C и D_1 равна 180° . Действительно, $\angle C + \angle D = 180^\circ$, а $\angle D = \angle D_1$, поэтому

$$\angle C + \angle D_1 = 180^\circ.$$

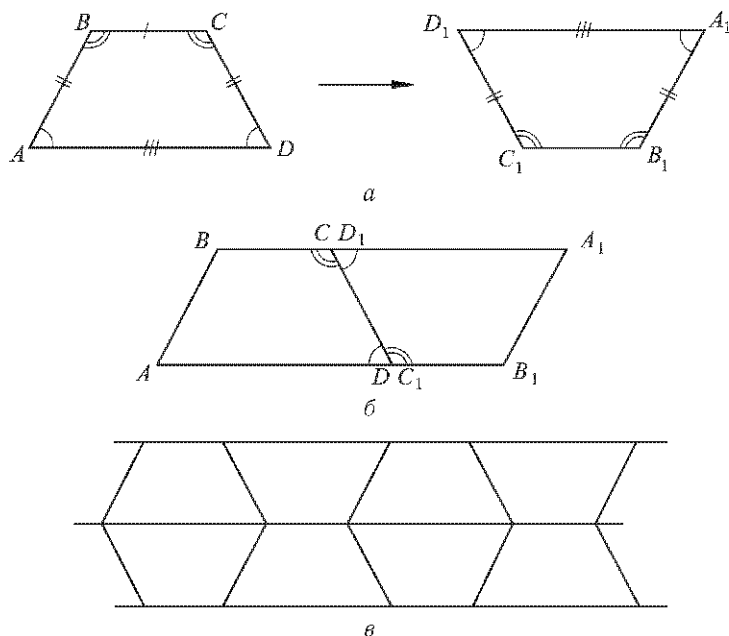


Рис. 10

Аналогично, основания AD и B_1C_1 также будут лежать на одной прямой, причем $BA_1 \parallel AB_1$ (см. рис. 10, б).

Приставляя последовательно указанным способом равные трапеции, можно покрыть любую часть полосы между параллельными прямыми AB_1 и BA_1 . В свою очередь, с помощью таких параллельных полос можно покрыть любую часть плоскости (рис. 10, в).

392. Основания прямоугольной трапеции равны a и b , один из углов равен α . Найдите: а) большую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60^\circ$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Пусть в прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = b$ и $BC = a$ ($AD > BC$): $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle D = \alpha$ (рис. 11).

а) Проведем прямую CE , параллельную AB (E — точка на стороне AD), тогда четырехугольник $ABCE$ — параллелограмм, поэтому $AE = BC = a = 4$ см, $AB = CE$ и так как $\angle A = 90^\circ$, то $\angle CEA = 90^\circ$.

В прямоугольном треугольнике CED

$ED = AD - AE = b - a = 7$ см $- 4$ см $= 3$ см. $\angle C = 90^\circ - \angle D = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, поэтому $CD = 2 \cdot ED = 6$ см.

Так как CD — гипотенуза, а CE — катет прямоугольного треугольника CED , то

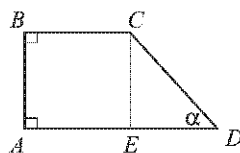


Рис. 11

$CD > CE = AB$, поэтому CD — бóльшая боковая сторона трапеции $ABCD$. Итак, бóльшая боковая сторона трапеции равна 6 см.

б) В прямоугольном треугольнике CED

$ED = AD - AE = b - a = 15 \text{ см} - 10 \text{ см} = 5 \text{ см}$, $\angle D = \alpha = 45^\circ$,
поэтому

$$\angle C = 90^\circ - \angle D = 45^\circ$$

и, значит, треугольник CED — равнобедренный: $CE = ED = 5 \text{ см}$. Следовательно, $AB = CE = 5 \text{ см}$, т. е. меньшая боковая сторона трапеции равна 5 см.

Ответ: а) 6 см; б) 5 см.

393. Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними.

Решение. а) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk . Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем, AB и AD , равны соответственно отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 , а угол BAD равен данному углу hk .

Сначала построим треугольник ABD по двум заданным сторонам и углу между ними (п. 38, задача 1), а затем достроим его до параллелограмма.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1 и P_2Q_2 и неразвернутом угле hk задача имеет единственное решение.

б) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk . Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого диагонали AC и BD равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 , угол между ними равен углу hk .

Сначала построим угол AOB , равный данному углу hk , а затем на сторонах этого угла и их продолжениях отложим отрезки $OA = OC = \frac{1}{2} P_1Q_1$, $OB = OD = \frac{1}{2} P_2Q_2$. Четырехугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1 и P_2Q_2 и неразвернутом угле hk задача имеет единственное решение.

394. Даны три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

Решение. Пусть A , B , C — данные точки, не лежащие на одной прямой. Соединим попарно эти точки отрезками и через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противоположной стороне (рис. 12) (задача 222). Четырехугольники A_1BAC , C_1ACB , B_1ABC — параллелограммы, так как их противоположные стороны попарно параллельны. Каждый из них удовлетворяет условию задачи. Задача, очевидно, имеет только эти три решения, так

как не существует других прямых, проходящих через точки A , B , C и параллельных прямым BC , AC , AB соответственно.

Ответ. Три.

395. Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2 . Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1 , $AB = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

Решение. Построим прямоугольный треугольник ADE по катету $DE = P_1Q_1$ и противолежащему острому углу A , равному данному углу hk (задача 314, б). На луче AE отложим отрезок AB , равный данному отрезку P_2Q_2 (рис. 13). Через точки B и D проведем прямые, параллельные прямым AD и AB соответственно. Они пересекаются в некоторой точке C . Четырехугольник $ABCD$ — по построению параллелограмм, в котором $AB = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$, и так как $DE \perp AB$, то DE — расстояние между параллельными прямыми AB и CD , причем $DE = P_1Q_1$.

Итак, построенный параллелограмм $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи. Ясно, что если $\angle A < 180^\circ$, то задача имеет единственное решение.

397. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$: а) по основанию AD , углу A и боковой стороне AB ; б) по основанию BC , боковой стороне AB и диагонали BD .

Решение. а) Пусть даны $\angle hk$ и отрезки MN и M_1N_1 (рис. 14, а). Требуется построить трапецию $ABCD$ такую, что

$$AD \parallel BC, AB = CD, AD = MN, AB = M_1N_1, \angle A = \angle hk.$$

Построение. а) Построим $\triangle ABD$ так, чтобы $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle hk$ (см. п. 38, задача 1) (рис. 14, б).

Через точку B проведем прямую a , параллельную прямой AD . Затем от луча DA отложим угол ADE , равный углу A (см. рис. 14, б). Точку пересечения луча DE с прямой a обозначим буквой C . Четырехугольник $ABCD$ и есть искомая трапеция. Действительно, по построению $BC \parallel AD$, а стороны AB и CD не параллельны (если допустить,

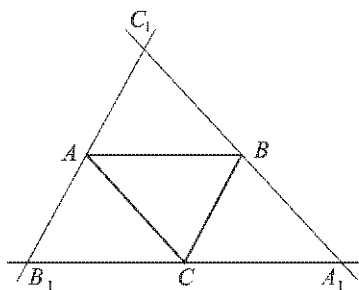


Рис. 12

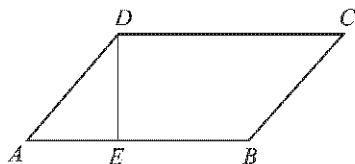


Рис. 13

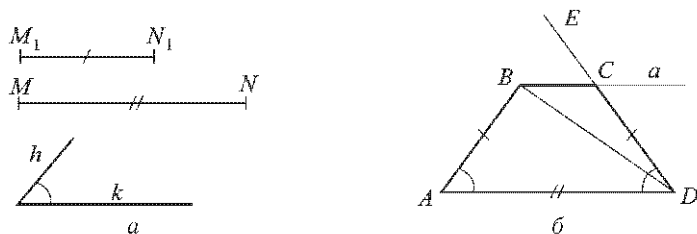


Рис. 14

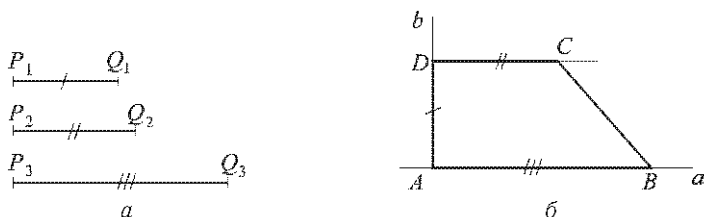


Рис. 15

что $AB \parallel CD$, то $\angle A + \angle D = 180^\circ$, а так как $\angle A = \angle D$ и $\angle A + \angle D = 180^\circ$, то $\angle A = \angle D = 90^\circ$, но угол равнобедренной трапеции не может быть прямым).

По построению $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle h k$, а так как $\angle D = \angle A$ (по построению), то трапеция $ABCD$ — равнобедренная (задача 389, а). Таким образом, трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Если угол hk — тупой, то задача имеет единственное решение. Если же угол hk — острый, то задача имеет единственное решение, если луч DE лежит во внешней области угла ADB , и не имеет решения, если луч DE лежит внутри угла ABD или совпадает с лучом DB .

б) Пусть даны отрезки MN , M_1N_1 и M_2N_2 . Требуется построить трапецию $ABCD$ такую, что

$$AD \parallel BC, AB = CD, BC = MN, AB = M_1N_1, BD = M_2N_2.$$

Построение. Сначала построим треугольник BCD по трем сторонам так, чтобы $BC = MN$, $DC = M_1N_1$, $BD = M_2N_2$, а затем достроим его до равнобедренной трапеции $ABCD$ (см. п. а).

Задача не будет иметь решения, если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других отрезков.

398. Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AD , перпендикулярной к основаниям.

Решение. Пусть даны отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 (рис. 15, а). Требуется построить прямоугольную трапецию $ABCD$ так, чтобы ее бо-

ковая сторона AD , перпендикулярная к основаниям, была равна P_1Q_1 , а основания DC и AB были равны соответственно P_2Q_2 и P_3Q_3 .

Проведем две взаимно перпендикулярные прямые a и b , пересекающиеся в точке A , и от точки A на прямой a отложим отрезок AB , равный данному отрезку P_3Q_3 , а на прямой b — отрезок AD , равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 15, б).

Через точку D проведем прямую, параллельную прямой AB (задача 222), и от точки D отложим на ней отрезок DC , равный данному отрезку P_2Q_2 так, чтобы точка C лежала по ту же сторону от прямой AD , что и точка B . Соединив точки B и C отрезком, получим трапецию $ABCD$. Построенная трапеция удовлетворяет всем условиям задачи. Задача имеет единственное решение.

§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

399. Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$. Тогда и $\angle C = 90^\circ$, так как противоположные углы параллелограмма равны.

$$\angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ, \quad \angle D = \angle B = 90^\circ.$$

Итак, все углы параллелограмма $ABCD$ прямые, поэтому этот параллелограмм — прямоугольник (по определению).

400. Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то четырехугольник является прямоугольником.

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ все углы прямые. Так как $\angle A = \angle B = 90^\circ$, то $AD \parallel BC$, а так как $\angle A = \angle D = 90^\circ$, то $AB \parallel DC$. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны, поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, а так как все его углы прямые, то $ABCD$ — прямоугольник.

401. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит: а) сторону BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) сторону DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

Решение. а) Возможны два случая.

1) Пусть биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E так, что $BE = 45,6$ см, $EC = 7,85$ см (рис. 16).

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 2 = \angle 3$, а $\angle 2 = \angle 1$ — по условию, поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Следовательно, $\triangle ABE$ — равнобедренный и поэтому $AB = BE = 45,6$ см, $BC = BE + EC = 45,6$ см + 7,85 см = 53,45 см.

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(45,6 + 53,45) \text{ см} = 2 \cdot 99,05 \text{ см} = 198,1 \text{ см}.$$

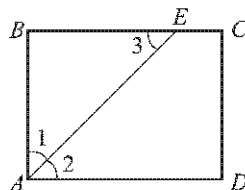


Рис. 16

2) Пусть $BE = 7,85$ см, $EC = 45,6$ см, тогда $AB = BE = 7,85$ см и $P_{ABCD} = 2(7,85 \text{ см} + 53,45 \text{ см}) = 2 \cdot 61,3 \text{ см} = 122,6 \text{ см}$.

б) Возможны два случая.

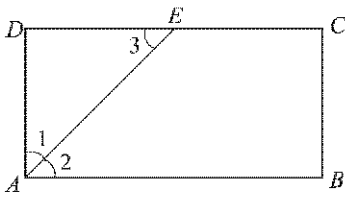


Рис. 17

1) $DE = 4,5$ дм, $CE = 2,7$ дм (рис. 17). Так как $\triangle ADE$ равнобедренный (см. п. а), то $AD = DE = 4,5$ дм; $DC = 4,5 \text{ дм} + 2,7 \text{ дм} = 7,2 \text{ дм}$.

$P_{ABCD} = 2(4,5 \text{ дм} + 7,2 \text{ дм}) = 2 \times 11,7 \text{ дм} = 23,4 \text{ дм}$.

2) $DE = 2,7$ дм, $CE = 4,5$ дм. В этом случае $AD = DE = 2,7$ дм, $DC = 7,2$ дм.

$P_{ABCD} = 2(2,7 + 7,2) \text{ дм} = 2 \cdot 9,9 \text{ дм} = 19,8 \text{ дм}$.

Ответ. а) 198,1 см или 122,6 см; б) 23,4 дм или 19,8 дм.

402. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

Решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали равны, а так как прямоугольник является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому $AO = OD$ и $AO = OB$, т. е. треугольники AOD и AOB — равнобедренные.

403. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Найдите периметр треугольника AOB , если $\angle CAD = 30^\circ$, $AC = 12$ см.

Решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому $\triangle AOB$ — равнобедренный, боковая сторона которого равна 6 см.

$\triangle ADC$ — прямоугольный с гипотенузой AC , равной 12 см, и острым углом A , равным 30° , поэтому катет $CD = \frac{1}{2}AC = 6$ см. $AB = CD = 6$ см. Таким образом, $\triangle AOB$ — равносторонний и $P_{AOB} = 3 \cdot 6 \text{ см} = 18 \text{ см}$.

Ответ. 18 см.

404. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Решение. Пусть BM — медиана прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе AC . Докажем, что $BM = \frac{1}{2}AC$.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 18), в котором D — точка, симметричная точке B относительно точки M .

В четырехугольнике $ABCD$ $BM = MD$ (так как точки B и D симметричны относительно точки M), $AM = MC$ по условию, поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (признак 3°, п. 43).

Так как в параллелограмме $ABCD$ угол B — прямой по условию, то параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник (задача 399), а в прямоугольнике диагонали равны.

Итак, $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

405. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

Решение. Пусть в ромбе $ABCD$ диагональ BD равна его стороне (рис. 19).

а) Треугольник ABD — равносторонний, поэтому все его углы равны между собой и каждый равен 60° , в частности, $\angle A = 60^\circ$.

$$\angle C = \angle A = 60^\circ; \quad \angle B = \angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

б) $\angle 1 = 60^\circ$ (см. п. а), $\angle 2 = \angle 1 = 60^\circ$; так как диагонали ромба делят его углы пополам, то $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

Итак, диагонали ромба составляют с его сторонами углы, равные 60° и 30° .

Ответ. а) 60° и 120° ; б) 60° и 30° .

406. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 60^\circ$, $AC = 10,5$ см.

Решение. В треугольнике ABC $AB = BC$ (так как стороны ромба равны) и угол B равен 60° . Следовательно, этот треугольник — равносторонний, а так как $AC = 10,5$ см по условию, то и $AB = 10,5$ см.

$$P_{ABCD} = 4 \cdot 10,5 \text{ см} = 42 \text{ см}.$$

Ответ. 42 см.

407. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45° .

Решение. Пусть угол A ромба $ABCD$ равен 45° (см. рис. 19). Тогда $\angle D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, так как диагонали ромба делят его углы пополам. Поэтому $\angle 1 = \angle 2 = 67^\circ 30'$, $\angle 3 = \angle 4 = 22^\circ 30'$.

Ответ. $22^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$.

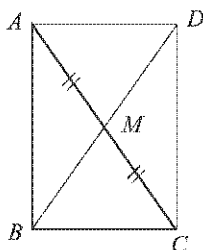


Рис. 18

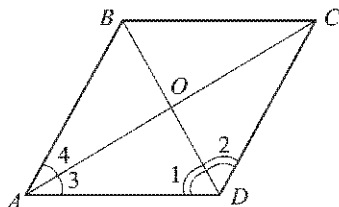


Рис. 19

408. Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла.

Решение. а) Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ взаимно перпендикулярны, O — точка их пересечения (см. рис. 19). Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, то прямоугольные треугольники AOB и BOC , COD и DOA равны друг другу по двум катетам. Отсюда следует, что равны их гипотенузы: $AB = BC = CD = DA$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является ромбом.

б) Пусть диагональ AC параллелограмма $ABCD$ является биссектрисой его угла A (см. рис. 19). Тогда в треугольнике ABD медиана AO является биссектрисой и поэтому $\triangle ABD$ — равнобедренный (задача 342), т. е. $AB = AD$. Но $AB = CD$, $AD = BC$ и, следовательно, в параллелограмме $ABCD$ все стороны равны, т. е. параллелограмм $ABCD$ — ромб.

409. Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

Решение. Согласно задаче 399 ромб, у которого один угол прямой, является прямоугольником, а так как у этого прямоугольника все стороны равны, то это квадрат.

410. Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

Решение. а) Нет. Например, в четырехугольнике $ABCD$ на рисунке 20 диагонали AC и BD равны и взаимно перпендикулярны, но точка их пересечения не является серединой отрезка AC , и поэтому $AB \neq BC$. Значит, четырехугольник $ABCD$ не является квадратом.

б) Нет. Например, диагонали ромба взаимно перпендикулярны и имеют общую середину, но ромб может не быть квадратом.

в) Докажем, что в этом случае четырехугольник является квадратом.

Так как диагонали четырехугольника имеют общую середину, т. е. пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм, а параллелограмм, в котором диагонали равны, — прямоугольник. С другой стороны, параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, — ромб (задача 408, а), т. е. все его стороны равны.

Итак, в данном случае четырехугольник является прямоугольником, у которого все стороны равны, т. е. это квадрат.

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.

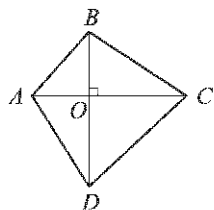


Рис. 20

411. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник — квадрат.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены биссектриса CD и прямые DE и DF , параллельные катетам BC и AC соответственно (рис. 21).

Тогда четырехугольник $CEDF$ — параллелограмм ($DE \parallel FC$ и $CE \parallel FD$), а так как $\angle C = 90^\circ$, то параллелограмм $CEDF$ — прямоугольник (задача 399).

По условию $\angle 1 = \angle 2$, т. е. диагональ CD делит угол C пополам. Отсюда следует, что $CEDF$ — ромб (задача 408, б).

Итак, четырехугольник $CEDF$ является прямоугольником и ромбом, поэтому этот четырехугольник — квадрат.

412. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$ такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

Решение. Так как треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный (рис. 22), то $\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$. В прямоугольном треугольнике ADE $\angle A = 45^\circ$ и, следовательно, $AD = DE$. Но $DE = DC$ (так как $CDEF$ — квадрат), поэтому $AD = DC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 12$ см = 6 см; $P_{CDEF} = 6$ см \cdot 4 = 24 см.

Ответ. 24 см.

413. Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

Решение. а) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 23, а). Требуется построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$.

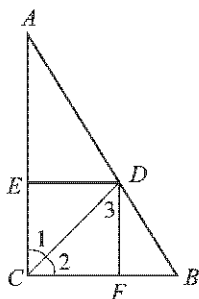


Рис. 21

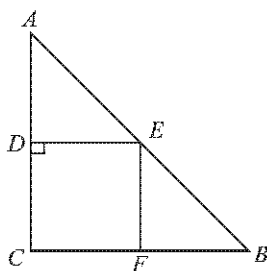


Рис. 22

Проведем прямую AE , а затем построим прямую AF , перпендикулярную к прямой AE (см. п. 23 учебника). На луче AE отложим отрезок AB , равный P_1Q_1 , а на луче AF — отрезок AD , равный P_2Q_2 (рис. 23, б). Через точку B проведем прямую, параллельную AD , а через точку D — прямую, параллельную AB (задача 222). Проведенные прямые пересекаются в некоторой точке C . Четырехугольник $ABCD$ — искомый прямоугольник.

В самом деле, по построению четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм ($BC \parallel AD$ и $DC \parallel AB$), а так как $\angle A = 90^\circ$, то $ABCD$ — прямоугольник (задача 399), причем $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, т. е. построенный прямоугольник $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

б) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 . Требуется построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы $AB = P_1Q_1$ и $BD = P_2Q_2$.

Сначала построим прямоугольный треугольник ABD с прямым углом A , в котором $AB = P_1Q_1$, $BD = P_2Q_2$ (задача 314, в).

Затем через вершины B и D проведем прямые, параллельные прямым AD и AB соответственно. Они пересекаются в некоторой точке C . Полученный четырехугольник $ABCD$ является искомым прямоугольником.

В самом деле, по построению $ABCD$ — параллелограмм, у которого угол A — прямой. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник, причем $AB = P_1Q_1$, $BD = P_2Q_2$, т. е. прямоугольник $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

в) Задача решается так же, как задача 393, б, в случае, когда диагонали равны.

414. Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

Решение. а) Задача решается так же, как задача 393, б, в случае, когда угол между диагоналями — прямой.

б) Задача решается так же, как задача 393, а, в случае, когда смежные стороны равны.

415. Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

Решение. а) Задача решается так же, как задача 413, а, в случае, когда смежные стороны равны.

б) Задача решается так же, как задача 414, а, в случае, когда диагонали равны.

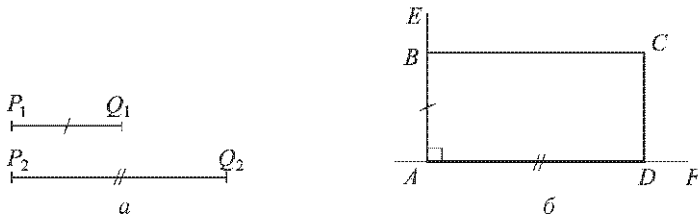


Рис. 23

416. Даны две точки A и B , симметричные относительно некоторой прямой, и точка M . Постройте точку, симметричную точке M относительно той же прямой.

Решение. Построим прямую a , проходящую через середину отрезка AB и перпендикулярную к нему (см. п. 23 учебника). Точки A и B симметричны относительно прямой a (рис. 24, а). Если точка M лежит на прямой a , то она симметрична самой себе относительно этой

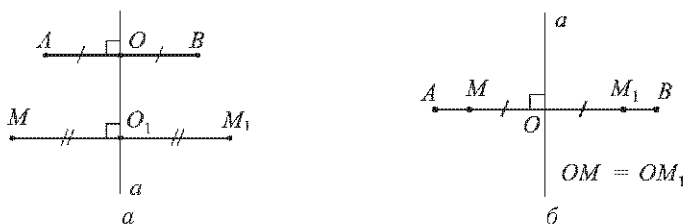


Рис. 24

прямой и поэтому является искомой точкой. Если же точка M не лежит на прямой a , то через точку M проведем прямую, перпендикулярную к прямой a (задача 153). Пусть эта прямая пересекается с прямой a в точке O_1 (рис. 24, а). На продолжении луча O_1M отложим отрезок O_1M_1 , равный O_1M . Очевидно, точка M_1 симметрична точке M относительно прямой a , т. е. M_1 — искомая точка.

417. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

Решение. а) Отрезок имеет две оси симметрии. Одной осью симметрии отрезка AB является прямая a , проходящая через середину этого отрезка и перпендикулярная к нему (рис. 24, б). В самом деле, для любой точки M отрезка AB симметричная ей относительно прямой a точка M_1 также принадлежит отрезку AB (см. рис. 24, б), а это и означает, что прямая a — ось симметрии отрезка AB . Другой осью симметрии отрезка AB является прямая AB , так как каждая точка этого отрезка симметрична самой себе относительно прямой AB .

б) Прямая имеет бесконечное множество осей симметрии. Любая прямая, перпендикулярная к прямой a , и сама прямая a являются осями симметрии прямой a . Это доказывается так же, как в п. а).

в) Луч имеет одну ось симметрии. Осью симметрии луча OA является прямая OA , так как любая точка луча OA симметрична самой себе относительно прямой OA .

Ответ. а) Две; б) бесконечно много; в) одну.

418. Какие из следующих букв имеют ось симметрии: **А, Б, Г, Е, О, F**?

Решение. Одну ось симметрии имеют буквы **А** и **Е** (прямые a и b на рисунках 25 и 26). Две оси симметрии имеет буква **О** (прямые m и n на рисунке 27).

Ответ. **А, Е, О.**

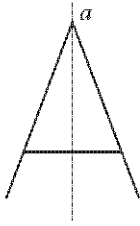


Рис. 25

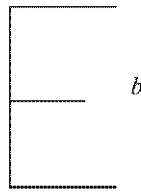


Рис. 26

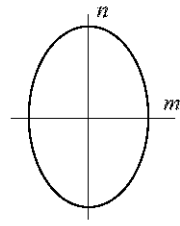


Рис. 27

419. Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

Решение. Пусть прямая EF проходит через середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ (рис. 28). Докажем, что она является осью симметрии этого прямоугольника.

Так как $BE = AF$ и $BE \parallel AF$, то четырехугольник $BEFA$ — параллелограмм, а так как в этом параллелограмме $\angle A = 90^\circ$ (по условию), то четырехугольник $BEFA$ — прямоугольник, откуда следует, что $\angle E = \angle F = 90^\circ$.

Итак, прямая EF перпендикулярна к сторонам BC и AD и проходит через их середины. Поэтому для любой точки M стороны BC (и также стороны AD) симметричная ей относительно прямой EF точка M_1 лежит на этой стороне (см. рис. 28).

Возьмем теперь произвольную точку N на стороне AB прямоугольника $ABCD$ и на стороне DC отметим точку N_1 так, что $DN_1 = AN$. Так как $AN \parallel DN_1$, $AN = DN_1$ и $\angle A = 90^\circ$, то ANN_1D — прямоугольник. Прямая EF , параллельная прямым AB и CD , проходит через середину отрезка AD и по теореме Фалеса делит отрезок NN_1 пополам, т. е. $NP = PN_1$. Кроме того, прямая EF , перпендикулярная к прямой AD , перпендикулярна и к прямой NN_1 . Таким образом, точки N и N_1 симметричны относительно прямой EF .

Итак, для каждой точки N на стороне AB прямоугольника $ABCD$ симметричная ей относительно прямой EF точка N_1 лежит на стороне DC этого прямоугольника. Точно так же для любой точки на стороне DC симметричная ей относительно прямой EF точка лежит на стороне AB .

Мы доказали, что для каждой точки прямоугольника $ABCD$ симметричная ей относительно прямой EF точка также принадлежит этому прямоугольнику. Это и означает, что прямая EF — ось симметрии прямоугольника $ABCD$.

420. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.

Решение. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC и BD — его биссектриса (рис. 29).

Тогда отрезок BD является также высотой и медианой треугольника, т. е. $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Следовательно, точки A и C симметричны относительно прямой BD . Точка B симметрична самой себе относительно прямой BD , так как лежит на этой прямой.

Возьмем произвольную точку M на основании AC . Пусть, например, точка M лежит между точками A и D (см. рис. 29). Отметим точку M_1 между точками D и C так, что $DM_1 = DM$. Очевидно, точка M_1 симметрична точке M относительно прямой BD .

Итак, для каждой точки на основании AC симметричная ей относительно BD точка также лежит на основании AC .

Возьмем теперь произвольную точку N на одной из боковых сторон треугольника ABC , например, на стороне AB . Отложим от вершины B на луче BC отрезок BN_1 , равный BN . Так как $BN < AB$, то $BN_1 < BC$ и точка N_1 лежит на стороне BC . Треугольник BNN_1 — равнобедренный, BK — его биссектриса, следовательно, $NN_1 \perp BK$, $NK = N_1K$, и поэтому точки N и N_1 симметричны относительно прямой BD . Мы доказали, что для каждой точки треугольника ABC точка, симметричная ей относительно прямой BD , также принадлежит этому треугольнику. Это и означает, что прямая BD — ось симметрии треугольника ABC .

422. Имеет ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых; г) квадрат?

Решение. а) Середина отрезка является его центром симметрии.

б) Луч не имеет центра симметрии.

в) Центром симметрии двух пересекающихся прямых является их точка пересечения.

г) Точка пересечения диагоналей квадрата является его центром симметрии.

Ответ. а) Да; б) нет; в) да; г) да.

423. Какие из следующих букв имеют центр симметрии: **А, О, М, Х, К**?

Решение. Центром симметрии буквы **О** является точка пересечения двух ее осей симметрии (см. рис. 27). Из остальных букв центр симметрии имеет, очевидно, только буква **Х**.

Ответ. **О, Х**.

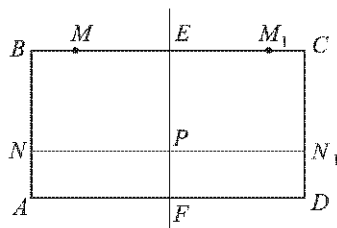


Рис. 28

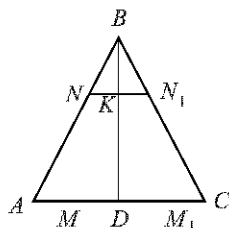


Рис. 29

Дополнительные задачи

424. Докажите, что если не все углы выпуклого четырехугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

Решение. Пусть не все углы выпуклого четырехугольника равны друг другу. Если допустить, что среди них нет тупого угла, то их сумма будет меньше 360° , чего не может быть. Следовательно, хотя бы один из углов тупой.

425. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $AB = 14$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла A ? Найдите отрезки, которые образуются при этом пересечении.

Решение. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 46$ см, откуда $AB + AD = 23$ см и $AD = 23$ см $- AB = 23$ см $- 14$ см $= 9$ см.

Пусть луч AF (биссектриса угла A) пересекает прямую DC в некоторой точке E (рис. 30), тогда $\triangle ADE$ — равнобедренный ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \angle 3$, поэтому $\angle 1 = \angle 3$), и, следовательно, $DE = AD = 9$ см.

Так как $DE < DC$ ($DE = 9$ см, $DC = AB = 14$ см), то точка E лежит на отрезке DC , т. е. биссектриса угла A пересекает сторону DC и делит ее на отрезки $DE = 9$ см и $EC = DC - DE = 14$ см $- 9$ см $= 5$ см.

Ответ. Сторону DC ; 9 см и 5 см.

426. Стороны параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.

Решение. Пусть биссектрисы углов A и D , прилежащих к большей стороне AD параллелограмма $ABCD$, пересекают противоположную сторону BC в точках E и F (рис. 31) и тем самым делят ее на три отрезка: BE , EF и FC .

Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то $BC = AD = 10$ см, $AB = DC = 3$ см.

Треугольники ABE и DCF — равнобедренные ($\angle 1 = \angle 2$, так как луч AE — биссектриса угла A , $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей

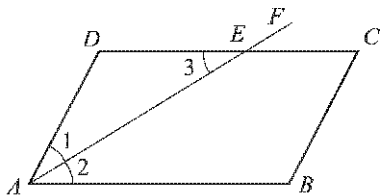


Рис. 30

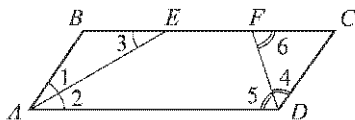


Рис. 31

AE , поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Аналогично $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$), тогда $BE = BA = 3$ см и $FC = CD = 3$ см.

$$EF = BC - (BE + FC) = 10 \text{ см} - 6 \text{ см} = 4 \text{ см}.$$

Ответ. 3 см, 4 см, 3 см.

427. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырехугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

Решение. Пусть прямые, проведенные через произвольную точку M основания BC равнобедренного треугольника ABC параллельно боковым сторонам, пересекают эти стороны в точках D и E (рис. 32).

Так как $DM \parallel AC$, то $\angle 1 = \angle C$, а так как $EM \parallel AB$, то $\angle 2 = \angle B$. Но $\angle B = \angle C$, поскольку $\triangle ABC$ — равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle B$ и $\angle 2 = \angle C$, а значит, треугольники BMD и MCE равнобедренные, т. е. $MD = DB$ и $ME = EC$.

Если P — периметр четырехугольника $ADME$, то $P = AD + DM + ME + EA = AD + DB + EC + EA = AB + AC$, что и требовалось доказать.

428. В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при пересечении образуется прямоугольник.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A , B , C и D при пересечении образуют четырехугольник $PEFQ$ (рис. 33).

$\angle 1 = \angle 2$, так как луч AP — биссектриса угла A , $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AQ , а угол 2, в свою очередь, равен углу 4, так как это половины равных углов параллелограмма, поэтому $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4$.

Равные углы 3 и 4 — соответственные углы при пересечении прямых AQ и CE секущей BC , следовательно, $AQ \parallel CE$. Аналогично можно доказать, что $BE \parallel DQ$.

Таким образом, $PEFQ$ — параллелограмм.

Так как $\angle 1 = \angle 3$, то $\triangle ABT$ — равнобедренный. Отрезок BP — биссектриса, а значит, и высота этого треугольника, т. е. $BP \perp AQ$. Итак, в параллелограмме $PEFQ$ один угол прямой, поэтому он является прямоугольником (задача 399).

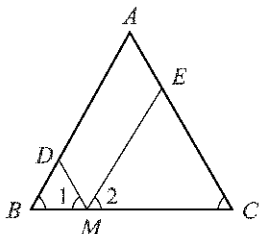


Рис. 32

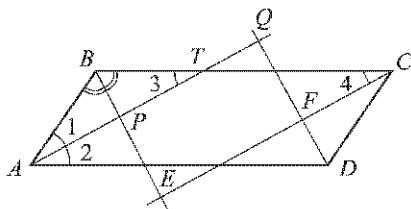


Рис. 33

429. Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180° .

Решение. Пусть углы A и B , прилежащие к стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$, в сумме составляют 180° , и углы A и D , прилежащие к смежной стороне AD , также в сумме составляют 180° . Углы A и B — односторонние при пересечении прямых AD и BC секущей AB , поэтому $AD \parallel BC$. Углы A и D — односторонние при пересечении прямых AB и DC секущей AD , поэтому $AB \parallel DC$.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

430. Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные углы попарно равны.

Решение. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы попарно равны, т. е. $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° , поэтому $2(\angle A + \angle B) = 360^\circ$, откуда $\angle A + \angle B = 180^\circ$, и, следовательно, $\angle A + \angle D = 180^\circ$. Из двух последних равенств следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (см. задачу 429).

431. Точка K — середина медианы AM треугольника ABC . Прямая BK пересекает сторону AC в точке D . Докажите, что $AD = \frac{1}{3} AC$.

Решение. Проведем через середину стороны BC (точку M) прямую MF , параллельную BK (рис. 34). Тогда по теореме Фалеса (задача 385) $AD = DF$ и $CF = DF$. Отсюда $AD = DF = FC$, поэтому $AD = \frac{1}{3} AC$.

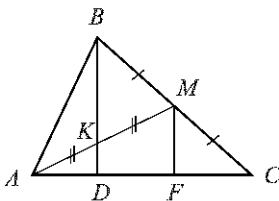


Рис. 34

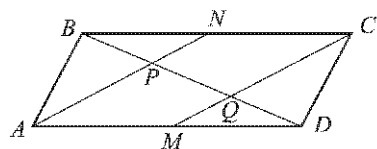


Рис. 35

Четырехугольник $ANCM$ — параллелограмм, так как две его противоположные стороны NC и AM равны и параллельны, поэтому $AN \parallel CM$.

В треугольнике BCQ через середину N стороны BC проведена прямая NP , параллельная CQ , следовательно, $BP = PQ$ (см. задачу 384).

В треугольнике ADP через середину M стороны AD проведена прямая MQ , параллельная AP , следовательно, $PQ = QD$.

Таким образом, $BP = PQ = QD$, т. е. прямые AN и CM делят диагональ BD на три равные части.

433. Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC . Докажите, что луч BD является биссектрисой угла KBM .

Решение. Так как диагональ BD ромба делит угол D пополам, то $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 36).

Прямоугольные треугольники BKD и BMD равны по гипотенузе и острому углу (BD — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$). Отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 4$, т. е. луч BD — биссектриса угла KBM .

434. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD ромба $ABCD$ (рис. 37) и пусть $OF \perp AD$, $OP \perp BC$, $OE \perp AB$, $OQ \perp DC$.

Диагональ AC ромба делится точкой O пополам ($OA = OC$) и, в свою очередь, делит пополам равные углы ромба A и C , т. е. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники AEO , AFO , CPO и CQO равны друг другу по гипотенузе и острому углу. Поэтому $OE = OF = OP = OQ$, т. е. точка O равноудалена от сторон ромба.

435. Докажите, что середина отрезка, соединяющего вершину треугольника с любой точкой противоположной стороны, лежит на отрезке с концами в серединах двух сторон.

Решение. Пусть D — произвольная точка стороны AC треугольника ABC и P — середина отрезка BD (рис. 38).

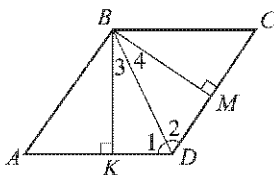


Рис. 36

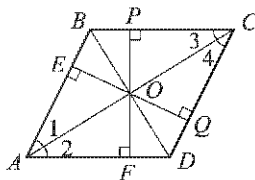


Рис. 37

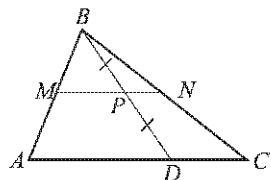


Рис. 38

Проведем через точку P прямую, параллельную стороне DC . Она пересекает стороны AB и BC в некоторых точках M и N . Согласно задаче 384, $BM = MA$ и $BN = NC$, т. е. точка P лежит на отрезке MN , концы которого являются серединами сторон AB и BC , что и требовалось доказать.

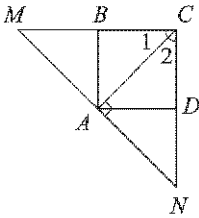


Рис. 39

436. Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC , пересекает прямые BC и CD соответственно в точках M и N . Найдите MN .

Решение. Так как диагональ AC делит угол C пополам, то $\angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$ (рис. 39). Отсюда следует, что углы M и N в прямоугольных треугольниках CAM и CAN также равны 45° . Поэтому эти треугольники равнобедренные и, следовательно, $AM = AC$ и $AN = AC$, а значит, $MN = 2AC = 2 \cdot 18,4 \text{ см} = 36,8 \text{ см}$.

Ответ. 36,8 см.

437. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H . Докажите, что $BH = HM = MC$.

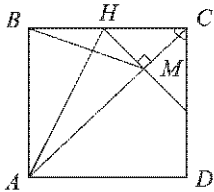


Рис. 40

Решение. Прямоугольные треугольники ABH и AMH (рис. 40) равны по катету и гипотенузе ($AB = AM$ по условию, AH — общая гипотенуза), поэтому $BH = HM$.

Треугольник CMH — прямоугольный и равнобедренный ($\angle HCM = 45^\circ$, так как диагональ AC делит угол C пополам, и $\angle CHM = 45^\circ$, так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°), поэтому $HM = MC$.

Итак, $BH = HM = MC$, что и требовалось доказать.

438. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD , $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD , если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60^\circ$.

Решение. В прямоугольном треугольнике ACD $\angle D = 60^\circ$ (рис. 41), поэтому $\angle 2 = 30^\circ$, а так как по условию $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle A = 2 \cdot \angle 2 = 60^\circ$, т. е. $\angle A = \angle D$.

Отсюда следует, что трапеция $ABCD$ — равнобедренная (задача 389, а), значит, $AB = CD$.

Так как в прямоугольном треугольнике ACD угол 2 равен 30° , то катет CD , лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы, т. е.

$$CD = \frac{1}{2}AD, \text{ или } AD = 2CD = 2AB.$$

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 3$ и, значит, треугольник ABC — равнобедренный, т. е. $BC = AB$.

Итак,

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 5AB,$$

поэтому $5AB = 20$ см, откуда $AB = 4$ см, а $AD = 2AB = 8$ см.

Ответ. 8 см.

439* Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

Решение. Пусть сумма углов A и D при основании AD трапеции $ABCD$ равна 90° , а точки M и N — середины ее оснований BC и AD .

Проведем прямые MP и MQ , соответственно параллельные боковым сторонам AB и CD (рис. 42). Тогда образовавшиеся четырехугольники $ABMP$ и $DCMQ$ — параллелограммы, поэтому $BM = AP$, $CM = DQ$, а так как по условию $\angle A + \angle D = 90^\circ$, то $\angle P + \angle Q = 90^\circ$. Отсюда следует, что $PN = NQ$, т. е. точка N — середина отрезка PQ . Кроме того,

$$PQ = AD - (AP + DQ) = AD - BC.$$

Так как $MP \parallel AB$, то $\angle 1 = \angle A$, а так как $MQ \parallel CD$, то $\angle 2 = \angle D$. Но $\angle A + \angle D = 90^\circ$ (по условию), поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ и, значит, треугольник MNP — прямоугольный с прямым углом M .

Отрезок MN — медиана этого треугольника, поэтому $MN = \frac{1}{2}PQ$ (задача 404), т. е. $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

440* На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

Решение. На сторонах AB и AC треугольника ABC (вне треугольника) построены квадраты, отрезок EF соединяет концы сторон этих квадратов, выходящих из вершины A , отрезок AM — медиана треугольника ABC . Требуется доказать, что $EF = 2AM$.

Пусть точка D симметрична точке A относительно точки M . Докажем, что треугольники ABD и EAF равны (рис. 43).

Так как $\triangle BMD = \triangle CMA$ (по двум сторонам и углу между ними), то $BD = AC$ и $\angle 1 = \angle ACB$. Следовательно,

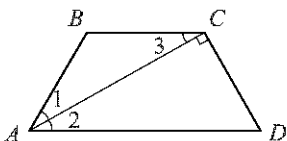


Рис. 41

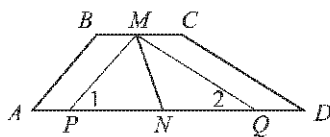


Рис. 42

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle 1 = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC.$$

С другой стороны, $\angle EAF = 180^\circ - \angle BAC$, поэтому $\angle ABD = \angle EAF$.

Треугольники ABD и EAF равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = AE$, $BD = AC = AF$, $\angle ABD = \angle EAF$). Отсюда следует, что $EF = AD = 2AM$.

441. Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD ромба $ABCD$ (рис. 44). Треугольник BAD — равнобедренный и AO —

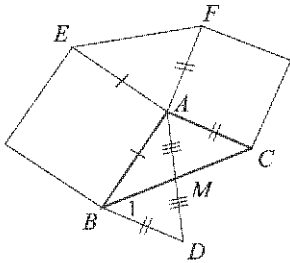


Рис. 43

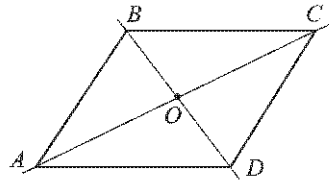


Рис. 44

его биссектриса, проведенная к основанию, поэтому прямая AO является осью симметрии треугольника BAD (задача 420). Также и прямая CO является осью симметрии треугольника BCD . Так как AO и CO — одна и та же прямая, то прямая AC — ось симметрии ромба $ABCD$. Аналогично можно доказать, что прямая BD является осью симметрии ромба $ABCD$. Итак, прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

442. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, тогда $OA = OC$, $OB = OD$ и поэтому вершины A и C (и также B и D) симметричны относительно точки O .

Рассмотрим теперь произвольную точку M , лежащую на одной из сторон параллелограмма, например на стороне AB (рис. 45), и покажем, что точка, симметричная точке M относительно точки O , лежит на стороне CD параллелограмма $ABCD$.

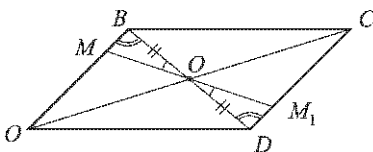


Рис. 45

Проведем прямую MO и обозначим через M_1 точку ее пересечения со стороной CD . $\triangle BOM = \triangle DOM_1$

по стороне и двум прилежащим к ней углам (см. рис. 45), следовательно, $OM = OM_1$, и, значит, точки M и M_1 симметричны относительно точки O .

Итак, для каждой точки M параллелограмма симметричная ей относительно точки O точка M_1 также принадлежит параллелограмму. Это и означает, что точка O пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

443. Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

Решение. Пусть a и b — данные параллельные прямые. Рассмотрим прямую m , параллельную прямым a и b и находящуюся на равных расстояниях от этих прямых (рис. 46). Докажем, что любая точка O прямой m является центром симметрии пары параллельных прямых a и b .

Проведем через точку O прямую HH_1 , перпендикулярную к прямым a и b . Так как прямая m находится на одинаковых расстояниях от прямых a и b , то $OH = OH_1$, т. е. точки H и H_1 симметричны относительно точки O .

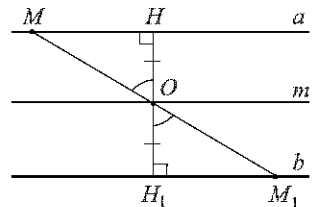


Рис. 46

Возьмем теперь произвольную точку M на одной из данных прямых, например, на прямой a , причем точка M отлична от H . Проведем прямую OM и обозначим через M_1 точку пересечения прямых OM и b . Прямоугольные треугольники MHO и M_1H_1O равны по катету и прилежащему острому углу (см. рис. 46), поэтому $OM = OM_1$, т. е. точки M и M_1 симметричны относительно точки O .

Итак, для любой точки M одной из данных параллельных прямых симметричная ей относительно точки O точка M_1 лежит на другой данной прямой. Это означает, что точка O — центр симметрии пары параллельных прямых a и b . Таким образом, любая точка прямой m является центром симметрии прямых a и b , т. е. пара параллельных прямых имеет бесконечное множество центров симметрии.

Ответ. Бесконечно много.

444*. Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

Решение. Пусть взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 — оси симметрии фигуры F . Докажем, что точка O пересечения прямых l_1 и l_2 является центром симметрии этой фигуры.

Возьмем сначала произвольную точку A фигуры F , не лежащую на прямых l_1 и l_2 . Построим точку A' , симметричную точке A относительно l_1 , а затем точку A_1 , симметричную точке A' относительно l_2 (рис. 47, а). Так как l_1 и l_2 — оси симметрии фигуры F , то точки A' и A_1 принадлежат этой фигуре. Рассмотрим треугольник $AA'A_1$. Поскольку $l_2 \perp l_1$ и $AA' \perp l_1$, то $l_2 \parallel AA'$, а так как l_2 проходит

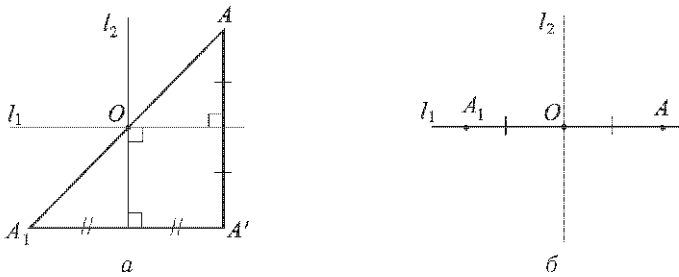


Рис. 47

через середину стороны A_1A' , то l_2 пересекает сторону AA_1 в ее середине (задача 384). Аналогично можно доказать, что и прямая l_1 пересекает сторону AA_1 в ее середине. Следовательно, середина отрезка AA_1 совпадает с точкой O , и, значит, точка A_1 симметрична точке A относительно точки O .

Тем самым мы доказали, что точка A_1 , симметричная точке A фигуры F относительно точки O , также принадлежит этой фигуре. При этом мы рассмотрели случай, когда точка A не лежит на прямых l_1 и l_2 . Если точка A фигуры F лежит на какой-то из этих прямых, например, на прямой l_1 (рис. 47, б), то симметричная ей относительно точки O точка A_1 является также симметричной точке A относительно прямой l_2 и, значит, точка A_1 принадлежит фигуре F . Таким образом, для любой точки A фигуры F симметричная ей относительно O точка A_1 также принадлежит этой фигуре. Это и означает, что точка O — центр симметрии фигуры F .

Задачи повышенной трудности

811. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Докажите, что $A_1A_2 - A_4A_5 = A_5A_6 - A_2A_3 = A_3A_4 - A_6A_1$.

Решение. Пусть $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_5 = a_4$, $A_5A_6 = a_5$, $A_6A_1 = a_6$. Продолжив стороны данного шестиугольника так, как показано на рисунке 48, получим треугольник $B_1B_2B_3$. Так как все углы данного шестиугольника равны друг другу, то каждый из них равен 120° , поэтому смежные с ними углы равны 60° . Отсюда следует, что треугольники $A_1A_2B_1$, $A_3A_4B_2$, $A_5A_6B_3$, $B_1B_2B_3$ — равносторонние, т. е.

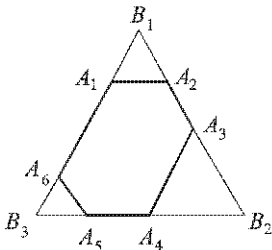


Рис. 48

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_1, \text{ или}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1.$$

Из этих равенств получаем:

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5, \quad a_3 + a_4 = a_6 + a_1,$$

или

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6,$$

т. е.

$$A_1A_2 - A_4A_5 = A_5A_6 - A_2A_3 = A_3A_4 - A_6A_1.$$

812. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 удовлетворяют условиям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Докажите, что существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны, причем $A_1A_2 = a_1, A_2A_3 = a_2, A_3A_4 = a_3, A_4A_5 = a_4, A_5A_6 = a_5, A_6A_1 = a_6$.

Решение. По условию

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6,$$

поэтому

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5, \quad a_3 + a_4 = a_6 + a_1$$

и, следовательно,

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1. \quad (1)$$

Построим равносторонний треугольник $B_1B_2B_3$, сторона которого равна $a_1 + a_2 + a_3$ (см. рис. 48). На стороне B_1B_2 этого треугольника отметим точки A_2 и A_3 так, что

$$B_1A_2 = a_1, \quad A_2A_3 = a_2, \quad A_3B_2 = a_3.$$

Далее, на стороне B_2B_3 отметим точки A_4 и A_5 так, что

$$B_2A_4 = a_3, \quad A_4A_5 = a_4, \quad A_5B_3 = a_5,$$

а на стороне B_3B_1 — точки A_6 и A_1 так, что

$$B_3A_6 = a_5, \quad A_6A_1 = a_6, \quad A_1B_1 = a_1.$$

В силу равенств (1) такие точки существуют (см. рис. 48).

Так как по построению $A_1B_1 = B_1A_2, A_3B_2 = B_2A_4, A_5B_3 = B_3A_6$ и $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3 = 60^\circ$, то треугольники $B_1A_1A_2, B_2A_3A_4, B_3A_5A_6$ — равносторонние. Отсюда следует, что каждый угол шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равен 120° (т. е. углы равны друг другу), а стороны удовлетворяют условию: $A_1A_2 = a_1, A_2A_3 = a_2, A_3A_4 = a_3, A_4A_5 = a_4, A_5A_6 = a_5, A_6A_1 = a_6$.

813. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного выпуклого четырехугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

Решение. Пусть плитки имеют форму выпуклого четырехугольника $ABCD$. Через вершины A и C проведем прямую a , а через вершины B и D — прямые b и c , параллельные прямой a (рис. 49).

Затем проведем прямые d и e , параллельные прямой a , так, что расстояние между прямыми b и d равно расстоянию между прямыми a и c (обозначим его r_1), а расстояние между прямыми c и e равно расстоянию между прямыми a и b (обозначим его r_2). Продолжая этот процесс неограниченно, мы разобьем всю плоскость на полосы, причем ширина полос (расстояние между соседними параллельными прямыми) принимает попеременно значения r_1 и r_2 . Четыре такие полосы представлены на рисунке 49.

Разобьем полосу, заключенную между прямыми a и b , на треугольники, равные треугольнику ABC , так, как показано на рисунке 49, а полосу между прямыми a и c — на треугольники, равные треугольнику ADC . То же самое сделаем и с другими полосами (см. рис. 49).

В результате всю плоскость можно представить себе разбитой на четырехугольники, причем каждый из них равен четырехугольнику $ABCD$. Докажем, например, что четырехугольник $ECBF$ равен четырехугольнику $ABCD$. Стороны этих четырехугольников соответственно равны, и также углы соответственно равны (на рис. 49 равные углы отмечены одинаковыми цифрами).

Отсюда следует, что эти четырехугольники можно совместить наложением, а это и означает, что они равны.

Таким образом, любую часть плоскости можно покрыть паркетом из одинаковых плиток, равных четырехугольнику $ABCD$.

814. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются.

Решение. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажем, что его диагонали AC и BD пересекаются.

Так как четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то точка C лежит по ту же сторону от прямой AB , что и точка D , и по ту же сторону от прямой AD , что и точка B . Поэтому точка C лежит внутри угла BAD . Следовательно, луч AC проходит внутри этого угла и поэтому пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла, в частности, пересекает отрезок BD . Аналогично можно доказать, что луч BD

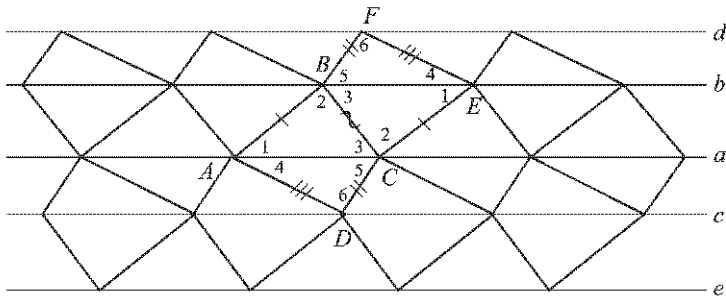


Рис. 49

пересекает отрезок AC . Отсюда следует, что точка пересечения луча AC и отрезка BD лежит на отрезке AC , т. е. отрезки AC и BD пересекаются.

815. Докажите, что в любом четырехугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

Решение. Если данный четырехугольник выпуклый, то согласно задаче 814 его диагонали пересекаются, поэтому любые две противоположные вершины четырехугольника лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

Пусть $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник. Тогда одна из прямых, содержащих сторону четырехугольника, например прямая AB , пересекает сторону CD в некоторой точке M . Отрезки AB и CD не пересекаются, поэтому возможны два случая:

а) Точка A лежит на отрезке BM (рис. 50, а). В этом случае точки B и M лежат по разные стороны от прямой AC . Отрезок MD не пересекается с прямой AC , поэтому точка D лежит по ту же сторону от прямой AC , что и точка M . Итак, вершина B лежит по одну сторону от прямой AC , а противоположная вершина D — по другую сторону от этой прямой.

б) Точка B лежит на отрезке AM (рис. 50, б). Аналогично случаю а) можно доказать, что противоположные вершины A и C лежат по разные стороны от прямой BD .

816. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD . Прямая, проведенная через точку D перпендикулярно к AD , пересекает прямую AC в точке E . Точки M и K — основания перпендикуляров, проведенных из точек B и D к прямой AC . Найдите MK , если $AE = a$.

Решение. Пусть P — точка пересечения прямых DE и AB , $DO \parallel AC$, $O \in AB$, а N — точка пересечения прямых DO и BM (рис. 51).

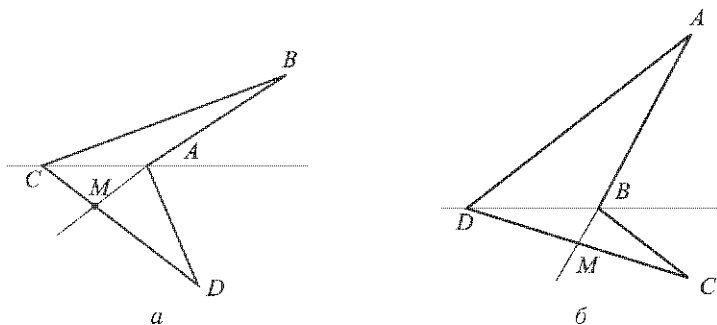


Рис. 50

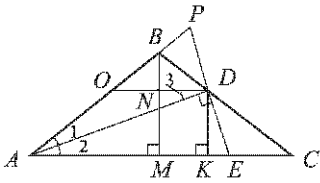


Рис. 51

Прямоугольные треугольники ADP и ADE равны по катету и прилежащему острому углу (AD — общий катет, $\angle 1 = \angle 2$ по условию), поэтому $AP = AE = a$ и $PD = DE$, т. е. точка D — середина отрезка PE .

Рассмотрим прямую OD , параллельную AC (см. рис. 51). Эта прямая проходит через середину стороны PE треугольника APE и $OD \parallel AC$, поэтому $AO = OP$ (задача 384) и, следовательно,

$$AO = \frac{1}{2} AP = \frac{a}{2}.$$

Так как $OD \parallel AC$, то $\angle 2 = \angle 3$, а поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 1 = \angle 3$, откуда следует, что $\triangle AOD$ — равнобедренный и, значит, $OD = AO = \frac{a}{2}$.

Кроме того, так как $OD \parallel AC$, то углы O и D треугольника $OB D$ равны соответственно углам A и C треугольника ABC . Но углы A и C равны, поскольку $\triangle ABC$ — равнобедренный. Следовательно, углы O и D треугольника $OB D$ также равны, и поэтому $\triangle OB D$ — равнобедренный с основанием OD .

Наконец, так как $OD \parallel AC$ и $BM \perp AC$, то $BN \perp OD$ (см. рис. 51), т. е. отрезок BN — высота равнобедренного треугольника $OB D$, проведенная к основанию, а значит, и медиана. Итак, $ND = NO = \frac{1}{2} OD = \frac{a}{4}$.

Четырехугольник $MNDK$, очевидно, является прямоугольником, поэтому $MK = ND = \frac{a}{4}$.

Ответ. $\frac{a}{4}$.

817. Докажите, что в треугольнике сумма трех медиан меньше периметра, но больше половины периметра.

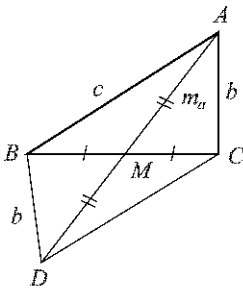


Рис. 52

Решение. Пусть в треугольнике ABC : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, а медианы, проведенные к сторонам BC , CA и AB , равны соответственно m_a , m_b и m_c .

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 52. Тогда в треугольнике ABD : $BD = b$, $AD = 2m_a$. Используя неравенство треугольника, получим

$$AD < AB + BD, \text{ или } 2m_a < b + c,$$

откуда $m_a < \frac{b+c}{2}$.

Аналогичные неравенства имеют место для m_b и m_c :

$$m_b < \frac{a+c}{2}, \quad m_c < \frac{a+b}{2}.$$

Сложив три последних неравенства, получим

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c,$$

т. е. сумма трех медиан треугольника меньше его периметра.

Напишем теперь неравенство треугольника для $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$, учитывая, что $BM = CM = \frac{a}{2}$:

$$m_a + \frac{a}{2} > c, \quad m_a + \frac{a}{2} > b.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$2m_a + a > b + c,$$

откуда

$$m_a > \frac{b+c-a}{2}.$$

Аналогичные неравенства имеют место для m_b и m_c :

$$m_b > \frac{a+c-b}{2}, \quad m_c > \frac{a+b-c}{2}.$$

Сложив три последних неравенства, приходим к неравенству

$$m_a + m_b + m_c > \frac{1}{2}(a + b + c),$$

т. е. сумма трех медиан треугольника больше половины его периметра.

818. Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный выпуклый четырехугольник, а O — точка пересечения его диагоналей. Докажем сначала, что $AO = OC$, $BO = OD$. Предположим, что это не так. Тогда возможны два случая:

а) Точка O — середина одной из диагоналей и не является серединой другой диагонали. Пусть для определенности $AO = OC$, $BO < OD$.

Отметим на отрезке OD точку B_1 так, что $OB_1 = OB$, и рассмотрим треугольник OB_1C (рис. 53, а). Так как $\triangle ABO = \triangle CB_1O$ (по двум сторонам и углу между ними), то $AB = CB_1$.

По условию $P_{ABO} = P_{CDO}$, или

$$AB + AO + OB = OB_1 + B_1D + DC + CO.$$

Отсюда, учитывая равенства $AO = OC$ и $OB = OB_1$, получаем

$$AB = B_1D + DC, \text{ или } CB_1 = B_1D + DC.$$

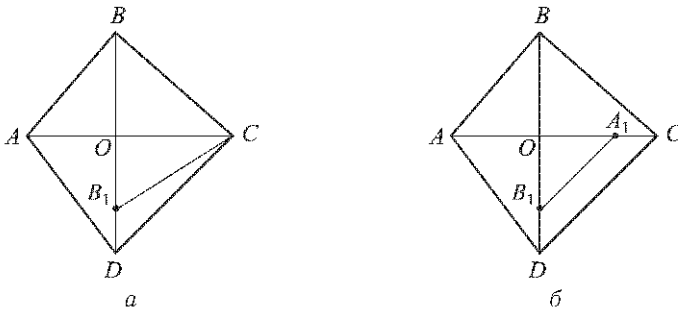


Рис. 53

Но в треугольнике CB_1D : $CB_1 < B_1D + DC$. Мы пришли к противоречию и, значит, случай а) не может иметь места.

б) Точка O не является серединой ни одной из диагоналей. Пусть, например, $AO < OC$, $BO < OD$.

Отметим точки A_1 и B_1 на отрезках OC и OD так, что $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, и рассмотрим треугольник OA_1B_1 (рис. 53, б). Так как $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$, то $AB = A_1B_1$.

По условию $P_{ABO} = P_{CDO}$, или

$$AB + AO + OB = OB_1 + B_1D + DC + CA_1 + A_1O.$$

Отсюда, учитывая равенства $OA_1 = OA$ и $OB = OB_1$, получаем

$$AB = B_1D + DC + CA_1, \text{ или } A_1B_1 = B_1D + DC + CA_1.$$

Но в четырехугольнике A_1B_1DC $A_1B_1 < B_1D + DC + CA_1$. Мы пришли к противоречию, и, значит, случай б) также не может иметь места.

Итак, $AO = OC$, $BO = OD$, и поэтому $ABCD$ — параллелограмм (признак 3°, п. 43). Но из условия $P_{AOB} = P_{COB}$ следует, что $AB = BC$, т. е. смежные стороны параллелограмма $ABCD$ равны.

Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

819. Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

Решение. Пусть A и a — данные точка и прямая, AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a , точка B — середина отрезка AH (рис. 54). Через точку B проведем прямую p , параллельную прямой a , и докажем, что искомого множество точек есть прямая p .

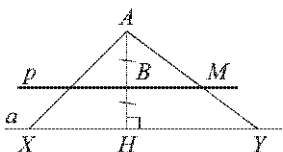


Рис. 54

Если X — произвольная точка прямой a , то прямая p пересекает отрезок AX в его середине (см. задачу 384). Следовательно, середины отрезков, соединяющих точку A со всеми точками прямой a , лежат на прямой p .

Докажем теперь, что любая точка M прямой p является серединой отрезка, соединяющего точку A с какой-то точкой прямой a . Пусть прямая AM пересекает прямую a в точке Y (см. рис. 54). Согласно задаче 384 прямая p пересекает отрезок AU в его середине, т. е. точка M — середина отрезка AU .

Итак, искомым множеством точек является прямая p .

Ответ. Прямая, параллельная данной прямой и проходящая через середину перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

820. Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна к основаниям. Сформулируйте и докажьте обратное утверждение.

Решение. Пусть O_1O_2 — прямая, проходящая через середины O_1 и O_2 оснований AB и CD равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 55). Согласно задаче 388, а $\angle A = \angle B$, поэтому $\triangle AO_1D = \triangle BO_1C$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $O_1D = O_1C$, т. е. $\triangle O_1DC$ равнобедренный. Отрезок O_1O_2 — медиана этого треугольника, следовательно, O_1O_2 — высота, т. е. $O_1O_2 \perp CD$, а так как прямые AB и CD параллельны, то $O_1O_2 \perp AB$, что и требовалось доказать.

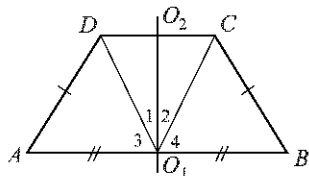


Рис. 55

Обратное утверждение сформулируем так: если прямая, проходящая через середины оснований трапеции, перпендикулярна к основаниям, то трапеция — равнобедренная.

Докажем это утверждение. Воспользуемся рисунком 55, на котором точки O_1 и O_2 — середины оснований AB и CD трапеции $ABCD$ и $O_1O_2 \perp AB$, $O_1O_2 \perp CD$. В треугольнике O_1CD отрезок O_1O_2 — медиана и высота, поэтому этот треугольник равнобедренный, т. е. $O_1D = O_1C$ и, кроме того, $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 55). Отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\triangle AO_1D = \triangle BO_1C$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно $AD = BC$, т. е. трапеция $ABCD$ равнобедренная.

821. При пересечении биссектрис всех углов прямоугольника образовался четырехугольник. Докажите, что этот четырехугольник — квадрат.

Решение. Пусть $MNPQ$ — четырехугольник, образованный при пересечении биссектрис углов прямоугольника $ABCD$ (рис. 56).

Согласно задаче 428 четырехугольник $MNPQ$ — прямоугольник. Докажем, что

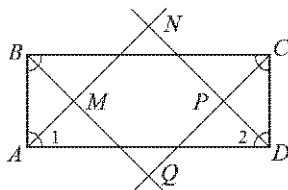


Рис. 56

$MN = NP$. Треугольник AND — равнобедренный, так как $\angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$, поэтому $AN = DN$. Но $AM = DP$, так как $\triangle ABM = \triangle DPC$ (по стороне и прилежащим к ней углам). Таким образом,

$$MN = AN - AM = DN - DP = NP.$$

Итак, в прямоугольнике $MNPQ$ две смежные стороны равны, следовательно, $MNPQ$ — квадрат.

822. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являются вершинами квадрата.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма $ABCD$ вне его (рис. 57). Сначала докажем, что

$$\triangle AO_1O_4 = \triangle BO_1O_2 = \triangle CO_3O_2 = \triangle DO_3O_4. \quad (1)$$

Сравним треугольники AO_1O_4 и BO_1O_2 : $AO_1 = BO_1$ и $AO_4 = BO_2$, так как эти отрезки являются половинами диагоналей соответствующих квадратов; $\angle O_1AO_4 = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$, где $\alpha = \angle BAD$; так как $\angle O_1BO_2 = 90^\circ + \alpha$, то $\angle O_1AO_4 = \angle O_1BO_2$.

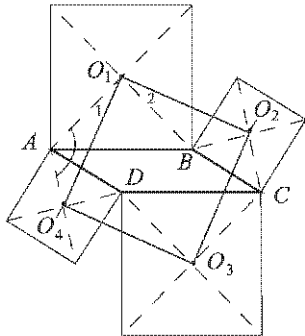


Рис. 57

Следовательно, $\triangle AO_1O_4 = \triangle BO_1O_2$ по двум сторонам и углу между ними. Остальные равенства в (1) доказываются аналогично.

Из равенств (1) следует, что

$$O_1O_4 = O_1O_2 = O_3O_2 = O_3O_4,$$

т. е. четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — ромб.

Из равенства треугольников AO_1O_4 и BO_1O_2 следует, что $\angle 1 = \angle 2$, поэтому угол $O_2O_1O_4$ — прямой, а значит, ромб $O_1O_2O_3O_4$ является квадратом.

823. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M . Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что $AM = BK + DM$.

Решение. На луче AB отложим отрезок AN , равный отрезку AM , проведем отрезок NM , а затем в треугольнике AMN проведем высоту NS (рис. 58). Пусть $\angle MAK = \angle NAK = \alpha$.

Прямоугольные треугольники ASN и MDA равны по гипотенузе и острому углу ($AN = AM$ по построению, $\angle NAS = 2\alpha$, $\angle AMD = 90^\circ - \angle DAM = 2\alpha$ и, следовательно, $\angle NAS = \angle AMD$), поэтому

$$AS = DM, \quad NS = AD. \quad (1)$$

Прямоугольные треугольники ABK и NSM равны по катету и острому углу ($NS = AD = AB$, $\angle BKA = 90^\circ - \alpha$, $\angle AMN = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$, поэтому $\angle BKA = \angle AMN$). Отсюда следует, что

$$BK = SM. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем:

$$AM = AS + SM = DM + BK,$$

что и требовалось доказать.

824. На рисунке 59 (рис. 268 учебника) изображены три квадрата. Найдите сумму $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.

Решение. Пусть D_1 — точка, симметричная точке D относительно точки E . Тогда $DD_1 = 2 \cdot DE = FC$ и поэтому $\triangle AFC = \triangle CDD_1$ по двум катетам.

Отсюда следует, что $AC = CD_1$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Так как $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$, то $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$, следовательно, $\angle ACD_1 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 90^\circ$ и, значит, $\triangle ACD_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием AD_1 . Поэтому $\angle CAD_1 = 45^\circ$.

Так как $\triangle DAE = \triangle D_1AE$ (по двум катетам), то $\angle DAE = \angle D_1AE$. Итак,

$$\begin{aligned} \angle BAE + \angle CAE + \angle DAE &= 45^\circ + \angle CAE + \angle D_1AE = \\ &= 45^\circ + \angle CAD_1 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Ответ. 90° .

825. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

Решение. На луче AM (рис. 60) отложим отрезок AK , равный AB , и докажем, что точки K и M совпадают.

Так как $AK = AB$ и $\angle BAK = 60^\circ$, то треугольник ABK — равнобедренный, т. е. $BK = AB = AK$.

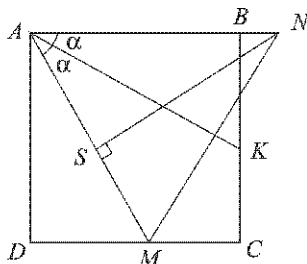


Рис. 58

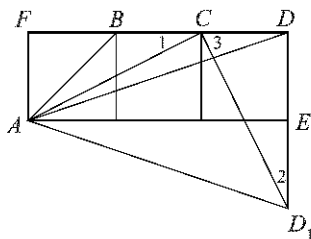


Рис. 59

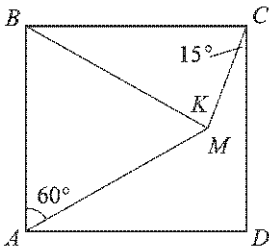


Рис. 60

Ответ. 30° .

826. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ — прямоугольный и равнобедренный.

Решение. На рисунке 61 изображена данная фигура. Сначала докажем, что

$$\triangle BKP = \triangle ABC = \triangle CQT. \quad (1)$$

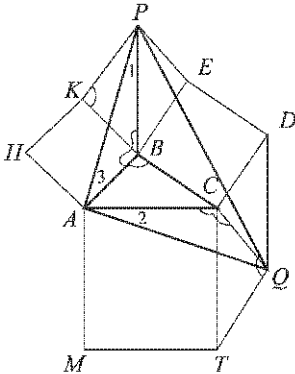


Рис. 61

Треугольники BKP и ABC равны по двум сторонам и углу между ними ($BK = AB$, $KP = BE = BC$, $\angle BKP = \angle ABC$, так как $\angle BKP = 180^\circ - \angle KBE$ и $\angle ABC = 180^\circ - \angle KBE$, см. рис. 61).

Поэтому $BP = CA$ и $\angle KBP = \angle BAC$. Треугольники ABC и CQT также равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = CT$, $BC = CD = QT$, $\angle ACB = \angle CTQ$, так как $\angle CTQ = 180^\circ - \angle DCT$ и $\angle ACB = 180^\circ - \angle DCT$, см. рис. 61).

Поэтому $AB = CQ$, $\angle BAC = \angle TCQ$. Так как $\angle ABP = 90^\circ + \angle KBP = 90^\circ + \angle BAC$, $\angle ACQ = 90^\circ + \angle TCQ = 90^\circ + \angle BAC$, то $\angle ABP = \angle ACQ$. Отсюда и из равенств $BP = CA$, $AB = CQ$ следует, что $\triangle ABP = \triangle QCA$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $AP = AQ$, т. е. $\triangle APQ$ — равнобедренный.

Далее, поскольку $\angle BAC = \angle ABP - 90^\circ$, то

$$\begin{aligned} \angle PAQ &= \angle 3 + \angle BAC + \angle 2 = \\ &= (\angle 3 + \angle ABP + \angle 1) - 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Итак, $\triangle APQ$ — равнобедренный и прямоугольный.

Так как $AB = BC$, то $BK = BC$, и, значит, треугольник BKC равнобедренный, а поскольку $\angle KBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, то $\angle BCK = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Отсюда следует, что $\angle DCK = 15^\circ$. Но по условию $\angle DCM = 15^\circ$, следовательно, $\angle DCM = \angle DCK$. Это означает, что лучи CM и CK совпадают, поэтому совпадают точки M и K . Итак,

$$\angle MBC = \angle KBC = 30^\circ.$$

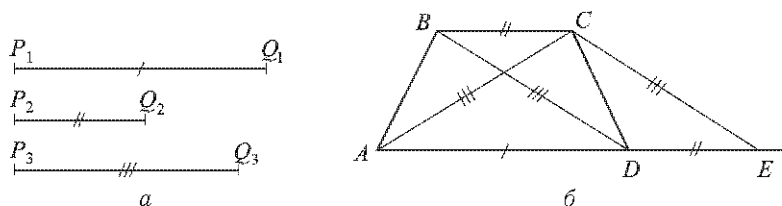


Рис. 62

827. Постройте равнобедренную трапецию по основаниям и диагоналям.

Решение. Пусть P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 — данные отрезки (рис. 62, а). Требуется построить равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC так, что $AD = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $AC = BD = P_3Q_3$.

Анализ. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция (рис. 62, б). На прямой AD отложим отрезок DE , равный BC , так, как показано на рисунке 62, б. Так как $DE = BC$ и $DE \parallel BC$, то $DECB$ — параллелограмм и поэтому $CE = BD = P_3Q_3$. Таким образом, в треугольнике ACE

$$AC = CE = P_3Q_3, \quad AE = AD + DE = P_1Q_1 + P_2Q_2. \quad (1)$$

Формулы (1) показывают, что по данным отрезкам P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 можно построить треугольник ACE . Это дает возможность построить затем искомую трапецию $ABCD$.

Построение. Построим треугольник ACE , стороны которого выражаются формулами (1). На стороне AE отметим точку D так, что $AD = P_1Q_1$, и проведем через точку D прямую, параллельную CE , а через точку C — прямую, параллельную AE . Эти прямые пересекаются в некоторой точке B .

Трапеция $ABCD$ — искомая.

Доказательство. По построению $AD = P_1Q_1$, $DE = P_2Q_2$, $AC = CE = P_3Q_3$. Так как $BC \parallel DE$ и $BD \parallel CE$ (по построению), то $DECB$ — параллелограмм, и поэтому $BC = DE = P_2Q_2$, $CE = BD = P_3Q_3$. Таким образом, трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

828. Докажите, что если треугольник имеет: а) ось симметрии, то он равнобедренный; б) более чем одну ось симметрии, то он равносторонний.

Решение. а) Пусть прямая a — ось симметрии треугольника ABC . Тогда прямая a имеет по крайней мере одну общую точку с треугольником (объясните, почему). Более того, прямая a пересекает хотя бы одну из сторон треугольника, так как в противном случае точка, симметричная вершине треугольника, не лежащей на прямой a , не может принадлежать треугольнику (рис. 63, а).

Пусть, например, прямая a пересекает сторону BC в точке M . Тогда вершина A лежит на прямой a . В самом деле, если допустить, что $A \notin a$, то прямая a пересекает наряду со стороной BC еще какую-то сторону треугольника. Пусть, например, прямая a пересекает сторону

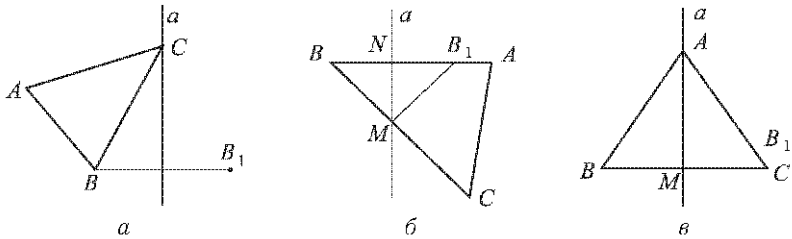


Рис. 63

AB в точке N (рис. 63, б) и пусть точка B_1 симметрична точке B относительно прямой a . Тогда множеством точек, симметричных точкам отрезков BM и BN относительно прямой a , будут отрезки B_1M и B_1N . Но хотя бы один из этих отрезков не принадлежит треугольнику ABC . Следовательно, прямая a проходит через вершину A .

Рассмотрим снова точку B_1 , симметричную точке B относительно прямой a (рис. 63, в). Очевидно, $AB_1 = AB$ и точки, симметричные точкам стороны AB , лежат на отрезке AB_1 . Поэтому отрезок AB_1 лежит на стороне AC и, следовательно, $AB_1 = AB \leq AC$. Аналогично, если точка C_1 симметрична точке C относительно прямой a , то отрезок AC_1 лежит на стороне AB и $AC_1 = AC \leq AB$.

Отсюда следует, что $AB = AC$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный.

Отметим, что ось симметрии (прямая a) пересекает сторону BC в ее середине.

б) Пусть треугольник ABC имеет более чем одну ось симметрии. Тогда согласно доказанному в п. а) каждая из осей симметрии проходит через вершину треугольника и пересекает противоположную сторону в ее середине. Пусть, например, одна ось симметрии проходит через вершину A , а другая — через вершину B . Тогда $AB = AC$ и $BA = BC$, т. е. $AB = AC = BC$ и, значит, треугольник ABC — равносторонний.

Глава 2

ПЛОЩАДЬ

§ 1. Площадь многоугольника

445. Вырежьте из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур.

Решение. Пусть площадь первого вырезанного прямоугольного треугольника равна S , тогда по свойству 1⁰ площадей многоугольников площадь второго треугольника тоже равна S . Площадь каждой полученной фигуры по свойству 2⁰ площадей многоугольников равна $2S$ (рис. 64).

Ответ. Площади фигур равны.

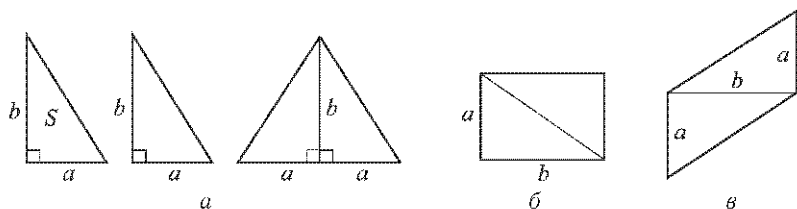


Рис. 64

446. Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) отличный от квадрата прямоугольник, площадь которого выражается числом 4; в) треугольник, площадь которого выражается числом 2.

Решение. Смотри рисунок 65.

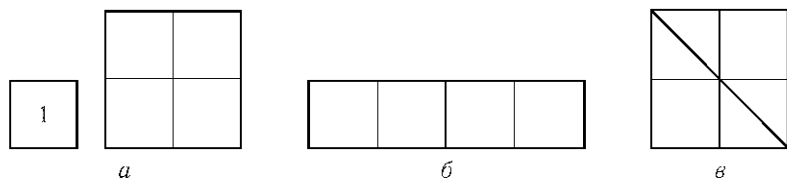


Рис. 65

447. Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M , симметричную точке D относительно точки C . Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

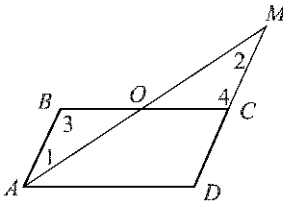


Рис. 66

Решение. Пусть O — точка пересечения отрезков AM и BC (рис. 66).

$\triangle ABO = \triangle MCO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB = CD = CM$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AM и BC соответственно), поэтому $S_{ABO} = S_{MCO}$.

По свойству 2° площадей многоугольников

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{AOC} + S_{DOC} + S_{BOC}, \quad S_{ADM} = S_{MOC} + S_{AOC} + S_{DOC}.$$

Итак, $S_{ABCD} = S_{ADM}$.

448. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N , причем точка M — середина отрезка AE . Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

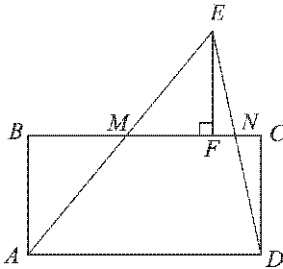


Рис. 67

Решение. Проведем перпендикуляр EF к прямой BC (рис. 67).

$\triangle ABM = \triangle EFM$ по гипотенузе и острому углу ($AM = ME$ по условию, $\angle AMB = \angle EMF$, так как эти углы вертикальные), поэтому $S_{ABM} = S_{EFM}$.

$\triangle DCN = \triangle EFN$ по катету и острому углу ($CD = AB = EF$, так как треугольники ABM и EFM равны, $\angle CDN = \angle FEN$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых CD и EF секущей DE). Следовательно, $S_{DCN} = S_{EFN}$.

$$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{DCN},$$

$$S_{AED} = S_{EFM} + S_{AMND} + S_{EFN}.$$

Так как $S_{ABM} = S_{EFM}$, $S_{DCN} = S_{EFN}$, то

$$S_{ABCD} = S_{AED}.$$

449. Найдите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 1,2 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

Решение. Так как площадь квадрата со стороной a равна a^2 , то:

а) $S = (1,2 \text{ см})^2 = 1,44 \text{ см}^2$;

б) $S = \left(\frac{3}{4} \text{ дм}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ дм}^2$;

$$в) S = (3\sqrt{2} \text{ м})^2 = 18 \text{ м}^2.$$

Ответ. а) $1,44 \text{ см}^2$; б) $\frac{9}{16} \text{ дм}^2$; в) 18 м^2 .

450. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 16 см^2 ; б) $2,25 \text{ дм}^2$; в) 12 м^2 .

Решение. Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2 , то $a = \sqrt{S}$: а) $a = \sqrt{16} \text{ см} = 4 \text{ см}$; б) $a = \sqrt{2,25} \text{ дм} = 1,5 \text{ дм}$; в) $a = \sqrt{12} \text{ м} = 2\sqrt{3} \text{ м}$.

Ответ. а) 4 см ; б) $1,5 \text{ дм}$; в) $2\sqrt{3} \text{ м}$.

451. Площадь квадрата равна 24 см^2 . Выразите площадь этого же квадрата: а) в квадратных миллиметрах; б) в квадратных дециметрах.

Решение. а) $S = 24 \text{ см}^2 = 24 \cdot 100 \text{ мм}^2 = 2400 \text{ мм}^2$;

б) $S = 24 \text{ см}^2 = 24 : 100 \text{ дм}^2 = 0,24 \text{ дм}^2$.

Ответ. а) 2400 мм^2 ; б) $0,24 \text{ дм}^2$.

452. Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Вычислите: а) S , если $a = 8,5 \text{ см}$, $b = 3,2 \text{ см}$; б) S , если $a = 2\sqrt{2} \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$; в) b , если $a = 32 \text{ см}$, $S = 684,8 \text{ см}^2$; г) a , если $b = 4,5 \text{ см}$, $S = 12,15 \text{ см}^2$.

Решение. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон, поэтому:

а) $S = ab = 8,5 \text{ см} \cdot 3,2 \text{ см} = 27,2 \text{ см}^2$;

б) $S = 2\sqrt{2} \text{ см} \cdot 3 \text{ см} = 6\sqrt{2} \text{ см}^2$;

в) $684,8 \text{ см}^2 = 32 \text{ см} \cdot b$, $b = 684,8 \text{ см}^2 : 32 \text{ см} = 21,4 \text{ см}$;

г) $12,15 \text{ см}^2 = a \cdot 4,5 \text{ см}$, $a = 12,15 \text{ см}^2 : 4,5 \text{ см} = 2,7 \text{ см}$.

Ответ. а) $27,2 \text{ см}^2$; б) $6\sqrt{2} \text{ см}^2$; в) $21,4 \text{ см}$; г) $2,7 \text{ см}$.

453. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну пару противоположных сторон увеличить в 2 раза; б) каждую сторону увеличить в 2 раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в 2 раза, а другую уменьшить в 2 раза?

Решение. Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь, тогда $S = ab$.

а) $S_1 = 2a \cdot b = 2ab$, т. е. $S_1 = 2S$;

б) $S_2 = 2a \cdot 2b = 4ab$, т. е. $S_2 = 4S$;

в) $S_3 = 2a \cdot \frac{b}{2} = ab$, т. е. $S_3 = S$.

Ответ. а) Увеличится в 2 раза; б) увеличится в 4 раза; в) не изменится.

454. Найдите стороны прямоугольника, если: а) его площадь равна 250 см^2 , а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9 м^2 , а периметр равен 12 м .

Решение. Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, S — его площадь, а P — периметр.

а) По условию $a = 2,5b$, $S = 250 \text{ см}^2$, поэтому $S = ab = 2,5b^2$, т. е. $250 \text{ см}^2 = 2,5b^2$, откуда

$$b = 10 \text{ см}, a = 2,5 \cdot 10 \text{ см} = 25 \text{ см}.$$

б) По условию $S = ab = 9 \text{ м}^2$, $P = 2(a + b) = 12 \text{ м}$, т. е. $ab = 9 \text{ м}^2$, $a + b = 6 \text{ м}$. Из этих равенств находим a и b :

$$a = b = 3 \text{ м}.$$

Ответ. а) 25 см, 10 см; б) $a = b = 3 \text{ м}$.

455. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

Решение. Площадь пола равна $5,5 \text{ м} \cdot 6 \text{ м} = 33 \text{ м}^2 = 330\,000 \text{ см}^2$.

Площадь одной дощечки паркета равна $30 \text{ см} \cdot 5 \text{ см} = 150 \text{ см}^2$.

Для покрытия пола нужно

$$330\,000 \text{ см}^2 : 150 \text{ см}^2 = 2200 \text{ (дощечек)}.$$

Ответ. 2200 дощечек.

456. Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

Решение. Площадь части стены равна

$$3 \text{ м} \cdot 2,7 \text{ м} = 8,1 \text{ м}^2 = 81\,000 \text{ см}^2.$$

Площадь одной кафельной плитки $(15 \text{ см})^2 = 225 \text{ см}^2$.

Для облицовки стены потребуется

$$81\,000 \text{ см}^2 : 225 \text{ см}^2 = 360 \text{ (плиток)}.$$

Ответ. 360 плиток.

457. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 8 м и 18 м.

Решение. Площадь прямоугольника равна $8 \text{ м} \cdot 18 \text{ м} = 144 \text{ м}^2$, поэтому и площадь квадрата равна 144 м^2 . Пусть сторона квадрата равна a .

Тогда $a^2 = 144 \text{ м}^2$, откуда $a = 12 \text{ м}$.

Ответ. 12 м.

458. Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а второй имеет форму квадрата. Площадь какого участка больше и на сколько?

Решение. Пусть S — площадь участка, имеющего форму прямоугольника, P — его периметр, S_1 — площадь участка, имеющего форму квадрата, a — его сторона. Тогда $S = 220 \text{ м} \cdot 160 \text{ м} = 35\,200 \text{ м}^2$,

$P = 2(220 + 160) \text{ м} = 760 \text{ м}$, $4a = P = 760 \text{ м}$, откуда $a = 190 \text{ м}$,
а $S_1 = a^2 = 36100 \text{ м}^2$.

$$S_1 - S = 36100 \text{ м}^2 - 35200 \text{ м}^2 = 900 \text{ м}^2.$$

Ответ. Площадь квадрата на 900 м^2 больше площади прямоугольника.

§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

459. Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь параллелограмма. Найдите: а) S , если $a = 15 \text{ см}$, $h = 12 \text{ см}$; б) a , если $S = 34 \text{ см}^2$, $h = 8,5 \text{ см}$; в) a , если $S = 162 \text{ см}^2$, $h = \frac{1}{2}a$; г) h , если $h = 3a$, $S = 27$.

Решение. а) $S = ah = 15 \text{ см} \cdot 12 \text{ см} = 180 \text{ см}^2$;

б) Так как $S = ah$, то $a = S : h = 34 \text{ см}^2 : 8,5 \text{ см} = 4 \text{ см}$;

в) Так как $S = 162 \text{ см}^2$, $h = \frac{1}{2}a$, то $162 \text{ см}^2 = ah = a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2$,
откуда $a^2 = 324 \text{ см}^2$, $a = 18 \text{ см}$;

г) Так как $S = 27$, $h = 3a$, то $a = \frac{1}{3}h$ и $27 = ah = \frac{1}{3}h^2$, откуда $h^2 = 81$, $h = 9$.

Ответ. а) 180 см^2 ; б) 4 см ; в) 18 см ; г) 9 .

460. Диагональ параллелограмма, равная 13 см , перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см . Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть S — площадь параллелограмма. Так как по условию диагональ параллелограмма перпендикулярна к его стороне, то она является его высотой (рис. 68) и, следовательно,

$$S = 12 \text{ см} \cdot 13 \text{ см} = 156 \text{ см}^2.$$

Ответ. 156 см^2 .

461. Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см , а его острый угол равен 30° . Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$: $AB = 12 \text{ см}$, $AD = 14 \text{ см}$, BE — высота, $\angle A = 30^\circ$ (рис. 69). Треугольник ABE —

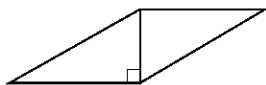


Рис. 68

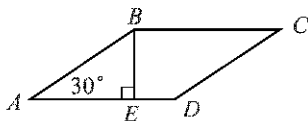


Рис. 69

прямоугольный с острым углом в 30° , поэтому $BE = \frac{1}{2}AB = 6$ см (так как катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы).

$$S_{ABCD} = AD \cdot BE = 14 \text{ см} \cdot 6 \text{ см} = 84 \text{ см}^2.$$

Ответ. 84 см^2 .

462. Сторона ромба равна 6 см, а один из его углов равен 150° . Найдите площадь ромба.

Решение. Пусть в ромбе $ABCD$ $AB = 6$ см, BE — высота, $\angle D = 150^\circ$ (рис. 70). Так как сумма углов, прилежащих к одной стороне ромба, равна 180° , то $\angle A = 180^\circ - \angle D = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника ABE с острым углом в 30° находим $BE = \frac{1}{2}AB = 3$ см.

$$S_{ABCD} = AD \cdot BE = 6 \text{ см} \cdot 3 \text{ см} = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ. 18 см^2 .

463. Сторона параллелограмма равна 8,1 см, а диагональ, равная 14 см, образует с ней угол в 30° . Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$: $AD = 8,1$ см, $AC = 14$ см, $\angle CAD = 30^\circ$ (рис. 71).

Проведем высоту CE к стороне AD и рассмотрим прямоугольный треугольник ACE . Катет CE этого треугольника равен половине гипотенузы AC , т. е. $CE = 7$ см. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 8,1 \text{ см} \cdot 7 \text{ см} = 56,7 \text{ см}^2.$$

Ответ. $56,7 \text{ см}^2$.

464. Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, h_1 и h_2 — его высоты. Найдите: а) h_2 , если $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см, $h_2 > h_1$; б) h_1 , если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см, $h_2 > h_1$; в) h_1 и h_2 , если $S = 54 \text{ см}^2$, $a = 4,5$ см, $b = 6$ см.

Решение. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне, поэтому высота, проведенная к большей стороне, меньше высоты, проведенной к меньшей стороне.

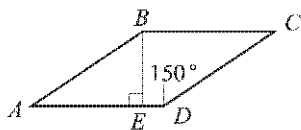


Рис. 70

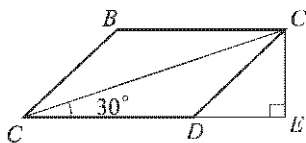


Рис. 71

а) По условию $h_2 > h_1$, $a = 18$ см, $b = 30$ см, т. е. $b > a$, следовательно, h_1 — высота, проведенная к стороне b . Можно записать: $ah_2 = bh_1$, откуда

$$h_2 = \frac{bh_1}{a} = \frac{30 \cdot 6}{18} \text{ см} = 10 \text{ см.}$$

б) Аналогично п. а) получаем: $ah_2 = bh_1$, откуда

$$h_1 = \frac{ah_2}{b} = \frac{10 \cdot 6}{15} \text{ см} = 4 \text{ см.}$$

в) $h_1 = \frac{S}{a} = \frac{54}{4,5}$ см = 12 см, $h_2 = \frac{S}{b} = \frac{54}{6}$ см = 9 см.

Ответ. а) 10 см; б) 4 см; в) 12 см, 9 см.

465. Острый угол параллелограмма равен 30° , а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, BE и BF — высоты, проведенные к сторонам AD и CD (рис. 72). По условию $BE = 2$ см, $BF = 3$ см.

В прямоугольном треугольнике ABE $\angle A = 30^\circ$, поэтому $AB = 2BE = 4$ см.

$AB = CD = 4$ см,

$$S_{ABCD} = CD \cdot BF = 4 \text{ см} \cdot 3 \text{ см} = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ. 12 см^2 .

466. Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если большая его сторона равна 15,2 см, а один из его углов равен 45° .

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$: $BD = AD$ (рис. 73). Тогда угол A — острый, так как треугольник ABD — равнобедренный. По условию $\angle A = 45^\circ$, поэтому $\angle ABD = 45^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$.

В треугольнике ABD : AB — гипотенуза, AD — катет, поэтому $AB > AD$, т. е. AB — большая сторона параллелограмма.

По условию $AB = 15,2$ см. Высота DK равнобедренного треугольника ADB является медианой, поэтому $DK = \frac{1}{2} AB = 7,6$ см (см. задачу 404).

$$S_{ABCD} = AB \cdot DK = 15,2 \text{ см} \cdot 7,6 \text{ см} = 115,52 \text{ см}^2.$$

Ответ. $115,52 \text{ см}^2$.

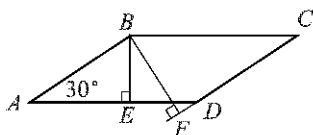


Рис. 72

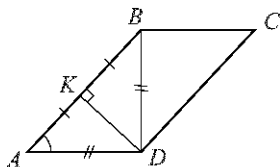


Рис. 73

467. Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

Решение. Пусть S — площадь квадрата, S_1 — площадь ромба. Так как по условию квадрат и ромб имеют равные периметры, то их стороны равны. Пусть сторона квадрата и сторона ромба равны a , высота ромба равна h . Тогда $S = a^2$, $S_1 = ah$.

Так как ромб не является квадратом, то $h < a$, поэтому $S_1 < S$.

Ответ. Площадь квадрата больше.

468. Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь треугольника. Найдите: а) S , если $a = 7$ см, $h = 11$ см; б) S , если $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см; в) h , если $S = 37,8$ см², $a = 14$ см; г) a , если $S = 12$ см², $h = 3\sqrt{2}$ см.

Решение.

$$\text{а) } S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} \cdot 7 \text{ см} \cdot 11 \text{ см} = 38,5 \text{ см}^2;$$

$$\text{б) } S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \text{ см} \cdot 5 \text{ см} = 5\sqrt{3} \text{ см}^2;$$

$$\text{в) Так как } S = \frac{1}{2} ah, \text{ то}$$

$$h = \frac{2S}{a} = 2 \cdot 37,8 \text{ см}^2 : 14 \text{ см} = 5,4 \text{ см};$$

$$\text{г) Так как } S = \frac{1}{2} ah, \text{ то}$$

$$a = \frac{2S}{h} = 2 \cdot 12 \text{ см}^2 : 3\sqrt{2} \text{ см} = 4\sqrt{2} \text{ см}.$$

Ответ. а) 38,5 см²; б) $5\sqrt{3}$ см²; в) 5,4 см; г) $4\sqrt{2}$ см.

469. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведенная к стороне AB , равна 11 см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC .

Решение. Пусть CD и AE — высоты, проведенные к сторонам AB и BC соответственно. Так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \text{ и } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE,$$

то $AB \cdot CD = BC \cdot AE$, т. е. $16 \text{ см} \cdot 11 \text{ см} = 22 \text{ см} \cdot AE$, откуда $AE = 8$ см.

Ответ. 8 см.

470. Две стороны треугольника равны 7,5 см и 3,2 см. Высота, проведенная к большей стороне, равна 2,4 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей стороне.

Решение. Пусть высота, проведенная к меньшей из заданных сторон, равна h . Тогда

$$7,5 \text{ см} \cdot 2,4 \text{ см} = 3,2 \text{ см} \cdot h,$$

откуда $h = 7,5 \cdot 2,4 \text{ см} : 3,2 \text{ см} = 5,625 \text{ см}$.

Ответ. 5,625 см.

471. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если катеты равны:
а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

Решение. Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, S — его площадь, то

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

а) $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ см} \cdot 11 \text{ см} = 22 \text{ см}^2$;

б) $S = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \text{ дм} \cdot 3 \text{ дм} = 1,8 \text{ дм}^2$.

Ответ. а) 22 см^2 ; б) $1,8 \text{ дм}^2$.

472. Площадь прямоугольного треугольника равна 168 см^2 . Найдите катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

Решение. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, S — его площадь. По условию $\frac{a}{b} = \frac{7}{12}$, поэтому $a = \frac{7b}{12}$.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}b \cdot b = \frac{7}{24}b^2,$$

и так как $S = 168 \text{ см}^2$, то $168 \text{ см}^2 = \frac{7}{24}b^2$, откуда $b^2 = 168 \text{ см}^2 \cdot \frac{24}{7} = 576 \text{ см}^2$, откуда $b = 24 \text{ см}$, $a = \frac{7}{12}b = \frac{7}{12} \cdot 24 \text{ см} = 14 \text{ см}$.

Ответ. 24 см, 14 см.

473. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m , параллельная стороне AB . Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

Решение. Пусть высота треугольника ABC , проведенная к стороне AB , равна h . Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h$. Рассмотрим треугольник ABM , где M — произвольная точка прямой m , параллельной AB и проходящей через точку C (рис. 74). Так как все точки прямой m равноудалены от прямой AB (см. п. 37 учебника), то высота, проведенная из точки M к прямой AB , равна h , и поэтому

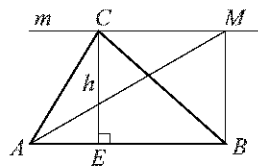


Рис. 74

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot h = S_{ABC}.$$

Итак, все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

474. Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведены медиана BD и высота BE (рис. 75). Так как BD — медиана, то $AD = DC$. Отрезок BE — высота треугольников ABD и CBD ,

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE = \frac{1}{2} DC \cdot BE = S_{CBD}.$$

Итак, $S_{ABD} = S_{CBD}$.

Ответ. Площади треугольников равны.

475. Начертите треугольник ABC . Через вершину A проведите две прямые так, чтобы они разделили этот треугольник на три треугольника, имеющие равные площади.

Решение. Разделим сторону BC на три равные части: $BE = EF = FC$ и проведем через вершину A прямые AE и AF (рис. 76). Они разделят треугольник ABC на три треугольника, имеющие равные площади. Действительно, эти три треугольника имеют равные основания и одну и ту же высоту AD (см. рис. 76), поэтому их площади равны.

476. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

Решение. Пусть в ромбе $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O (рис. 77). Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO, \quad S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DO, \text{ и поэтому}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \end{aligned}$$

Итак, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

а) $S = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \text{ дм} \cdot 1,4 \text{ дм} = 2,24 \text{ дм}^2 = 224 \text{ см}^2$;

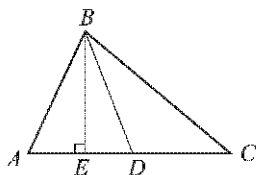


Рис. 75

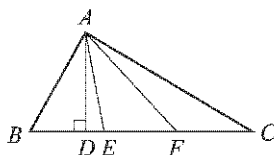


Рис. 76

$$\text{б) } S = \frac{1}{2} \cdot 4,6 \text{ дм} \cdot 2 \text{ дм} = 4,6 \text{ дм}^2.$$

Ответ. а) 224 см^2 ; б) $4,6 \text{ дм}^2$.

477. Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 см^2 .

Решение. Пусть S — площадь ромба. Согласно задаче 476 $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$, где d_1 и d_2 — диагонали ромба. По условию $d_2 = 1,5d_1$, а $S = 27 \text{ см}^2$, поэтому

$$27 \text{ см}^2 = \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{3}{2}d_1 = \frac{3}{4}(d_1)^2, \text{ откуда } (d_1)^2 = 36 \text{ см}^2,$$

$$d_1 = 6 \text{ см}, \text{ а } d_2 = \frac{3}{2} \cdot 6 \text{ см} = 9 \text{ см}.$$

Ответ. 6 см, 9 см.

478. В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей.

Решение. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $AC \perp BD$, а O — точка пересечения диагоналей (рис. 78). Тогда отрезки BO и DO — высоты треугольников ABC и ADC , поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO, \quad S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \\ &= \frac{1}{2}AC(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD. \end{aligned}$$

Итак, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

479. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC . Найдите: а) S_{ADE} , если $AB = 5 \text{ см}$, $AC = 6 \text{ см}$, $AD = 3 \text{ см}$, $AE = 2 \text{ см}$,

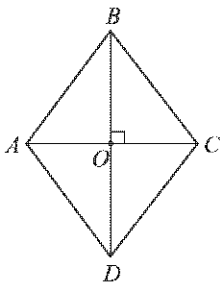


Рис. 77

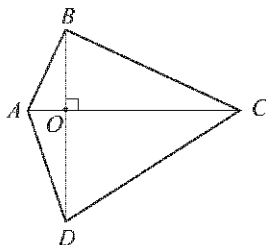


Рис. 78

$S_{ABC} = 10 \text{ см}^2$; б) AD , если $AB = 8 \text{ см}$, $AC = 3 \text{ см}$, $AE = 2 \text{ см}$, $S_{ABC} = 10 \text{ см}^2$, $S_{ADE} = 2 \text{ см}^2$.

Решение. Так как треугольники ADE и ABC имеют по равному углу A (рис. 79), то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих этот угол, т. е.

$$S_{ADE} : S_{ABC} = (AD \cdot AE) : (AB \cdot AC). \quad (1)$$

а) $S_{ADE} = S_{ABC} \cdot (AD \cdot AE) : (AB \cdot AC) = 10 \cdot (3 \cdot 2) : (8 \cdot 6) = 2 \text{ см}^2$.

б) Из равенства (1) следует, что

$$AD = S_{ADE} \cdot AB \cdot AC : (S_{ABC} \cdot AE).$$

Поэтому $AD = (2 \cdot 8 \cdot 3) : (10 \cdot 2) = 2,4 \text{ см}$.

Ответ. а) 2 см^2 ; б) $2,4 \text{ см}$.

480. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD , если: а) $AB = 21 \text{ см}$, $CD = 17 \text{ см}$, высота BH равна 7 см ; б) $\angle D = 30^\circ$, $AB = 2 \text{ см}$, $CD = 10 \text{ см}$, $DA = 8 \text{ см}$; в) $BC \perp AB$, $AB = 5 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, $CD = 13 \text{ см}$.

Решение. а) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2}(21 \text{ см} + 17 \text{ см}) \times 7 \text{ см} = 133 \text{ см}^2$.

б) Проведем высоту AE трапеции и рассмотрим прямоугольный треугольник ADE . Так как $\angle D = 30^\circ$, а гипотенуза $AD = 8 \text{ см}$, то $AE = 4 \text{ см}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2 \text{ см} + 10 \text{ см}) \cdot 4 \text{ см} = 24 \text{ см}^2.$$

в) Так как $BC \perp AB$, то отрезок BC является высотой трапеции, и, следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC)BC = \frac{1}{2}(5 \text{ см} + 13 \text{ см}) \cdot 8 \text{ см} = 72 \text{ см}^2.$$

Ответ. а) 133 см^2 ; б) 24 см^2 ; в) 72 см^2 .

481. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см , а больший угол равен 135° .

Решение. Пусть в прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC : $AD > BC$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C = 135^\circ$ (рис. 80).

Проведем высоту CE к стороне AD . Тогда $CE = AB = BC = 6 \text{ см}$.

В прямоугольном треугольнике CDE $\angle C = 45^\circ$, поэтому $\angle D = 90^\circ - \angle C = 45^\circ$ и, следовательно, $ED = CE = 6 \text{ см}$.

$AE = BC = 6 \text{ см}$ (так как AE и BC — противоположные стороны прямоугольника $ABCE$), поэтому $AD = AE + ED = 12 \text{ см}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)CE = \frac{1}{2}(6 \text{ см} + 12 \text{ см}) \cdot 6 \text{ см} = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ. 54 см^2 .

482. Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135° , а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle B = 135^\circ$, BE — высота, $AE = 1,4$ см, $ED = = 3,4$ см (рис. 81).

В прямоугольном треугольнике ABE $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ - \angle B = = 45^\circ$, поэтому $BE = AE = 1,4$ см.

Проведем высоту CF . Тогда $CF = BE = 1,4$ см.

Так как в равнобедренной трапеции углы при основании равны (задача 388, а), то $\angle D = \angle A = 45^\circ$. Поэтому в прямоугольном треугольнике CFD $\angle C = 90^\circ - \angle D = 45^\circ$ и, следовательно, $FD = CF = 1,4$ см;

$$BC = EF = ED - FD = 3,4 \text{ см} - 1,4 \text{ см} = 2 \text{ см};$$

$$AD = AE + ED = 4,8 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BE = \frac{1}{2} (2 + 4,8) \text{ см} \cdot 1,4 \text{ см} = 4,76 \text{ см}^2.$$

Ответ. $4,76 \text{ см}^2$.

§ 3. Теорема Пифагора

483. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b : а) $a = 6$, $b = 8$; б) $a = 5$, $b = 6$; в) $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{4}{7}$; г) $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$.

Решение. Пусть c — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b , тогда по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, откуда $c = = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\text{а) } c = \sqrt{36 + 64} = 10; \text{ б) } c = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}; \text{ в) } c = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}} = \frac{5}{7};$$

$$\text{г) } c = \sqrt{64 + 3 \cdot 64} = \sqrt{64 \cdot 4} = 8 \cdot 2 = 16.$$

Ответ. а) 10; б) $\sqrt{61}$; в) $\frac{5}{7}$; г) 16.

484. В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, а c — гипотенуза. Найдите b , если: а) $a = 12$, $c = 13$; б) $a = 7$, $c = 9$; в) $a = 12$, $c = 2b$; г) $a = = 2\sqrt{3}$, $c = 2b$; д) $a = 3b$, $c = 2\sqrt{10}$.

Решение. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, откуда $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

$$\text{а) } b = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

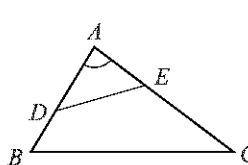


Рис. 79

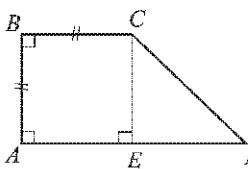


Рис. 80

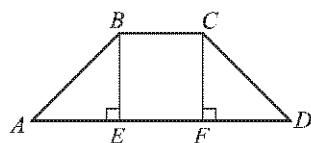


Рис. 81

$$\text{б) } b = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

в) Так как $c^2 = a^2 + b^2$, $a = 12$, $c = 2b$, то $4b^2 = 144 + b^2$, откуда $b^2 = 48$, $b = 4\sqrt{3}$.

г) Так как $c^2 = a^2 + b^2$, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2b$, то $4b^2 = b^2 + 12$, откуда $b^2 = 4$, $b = 2$.

д) Так как $c^2 = a^2 + b^2$, $a = 3b$, $c = 2\sqrt{10}$, то $40 = 9b^2 + b^2$, откуда $b^2 = 4$, $b = 2$.

Ответ. а) 5; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{3}$; г) 2; д) 2.

485. Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60° , если гипотенуза равна c .

Решение. Если один острый угол прямоугольника равен 60° , то другой острый угол равен 30° . Пусть катет, лежащий против угла в 60° , равен a , а против угла в 30° — равен b . Тогда $b = \frac{1}{2}c$.

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, откуда

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}c^2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

486. В прямоугольнике $ABCD$ найдите: а) AD , если $AB = 5$, $AC = 13$; б) BC , если $CD = 1,5$, $AC = 2,5$; в) CD , если $BD = 17$, $BC = 15$.

Решение. а) Применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ACD :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \text{ откуда } AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}.$$

Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $CD = AB = 5$ и, следовательно,

$$AD = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

б) $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$, $AB = CD = 1,5$, поэтому

$$BC = \sqrt{6,25 - 2,25} = 2.$$

в) $CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$.

Ответ. а) 12; б) 2; в) 8.

487. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота BE к основанию, тогда $AE = EC = 8$ см.

Из прямоугольного треугольника ABE , используя теорему Пифагора, находим:

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)}.$$

Ответ. 15 см.

488. Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 6 см; б) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 4 см.

Решение. Пусть отрезок BD — высота равностороннего треугольника ABC , тогда $AD = \frac{1}{2}AC$ и по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABD имеем: $AB^2 = AD^2 + BD^2$.

$$\text{а) } AD = \frac{1}{2}AC = 3 \text{ см, } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \text{ (см).}$$

б) $AD = \frac{1}{2}AB$, $AB^2 = BD^2 + AD^2 = BD^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$; отсюда получаем:

$$\frac{3}{4}AB^2 = BD^2 = 16 \text{ см}^2, AB = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

Ответ. а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

489. Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна: а) 5 см; б) 1,2 см; в) $2\sqrt{2}$ дм.

Решение. Проведем высоту BD равностороннего треугольника ABC , в котором $AB = a$. Высота BD является медианой треугольника ABC , поэтому $AD = \frac{a}{2}$.

Применив теорему Пифагора к треугольнику ABD , получим:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{а) } S = \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ см}^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2;$$

$$\text{б) } S = \frac{(1,2)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ см}^2 = 0,36\sqrt{3} \text{ см}^2;$$

$$\text{в) } S = \frac{(2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ дм}^2 = 2\sqrt{3} \text{ дм}^2.$$

Ответ. а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см²; б) $0,36\sqrt{3}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ дм².

490. Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см; б) основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120° ; в) треугольник прямоугольный и высота, проведенная к гипотенузе, равна 7 см.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена высота AD ;

а) $BC = 12$ см, $AB = 8$ см, поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 48 \text{ см}^2;$$

$BD = DC = \frac{1}{2} BC = 6$ см. Из прямоугольного треугольника ABD с помощью теоремы Пифагора находим:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ см.}$$

б) Так как треугольник ABC — равнобедренный, то его высота AD является и биссектрисой, поэтому $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Отсюда следует, что $AB = 2 \cdot AD$. По теореме Пифагора $AB^2 = AD^2 + BD^2$, а так как $BD = \frac{1}{2} BC = 9$ см, то $4AD^2 = AD^2 + 81 \text{ см}^2$. Отсюда $AD^2 = 27 \text{ см}^2$, $AD = 3\sqrt{3}$ см, $AC = 6\sqrt{3}$ см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 18 \text{ см} \cdot 3\sqrt{3} \text{ см} = 27\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

в) Так как треугольник ABC — равнобедренный, то его высота AD является и медианой, а потому согласно задаче 404 $BC = 2 \cdot AD = 7 \text{ см} \cdot 2 = 14$ см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 14 \text{ см} \cdot 7 \text{ см} = 49 \text{ см}^2.$$

Из равнобедренного прямоугольного треугольника ABD находим:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ. а) 10 см и 48 см²; б) $6\sqrt{3}$ см и $27\sqrt{3}$ см²; в) $7\sqrt{2}$ см и 49 см².

491. По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведенную к гипотенузе: а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 12$, $b = 16$.

Решение. Пусть гипотенуза равна c , высота, проведенная к гипотенузе, равна h , а S — площадь треугольника. Тогда $S = \frac{1}{2}ab$ и $S = \frac{1}{2}ch$, откуда получаем: $ab = ch$ или $h = \frac{ab}{c}$. Но $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (по теореме Пифагора), поэтому $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{а) } h = 5 \cdot 12 : \sqrt{25 + 144} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}.$$

$$\text{б) } h = 12 \cdot 16 : \sqrt{144 + 256} = \frac{192}{20} = 9,6.$$

Ответ. а) $4\frac{8}{13}$; б) 9,6.

492. Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

Решение. Пусть в треугольнике ABC : $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, AD — высота, проведенная к основанию BC .

Так как $AB = AC$, то высота AD является и медианой, поэтому $BD = \frac{1}{2} BC = 6$ см.

Из прямоугольного треугольника ABD находим:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (см)}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 48 \text{ см}^2.$$

Пусть высота, проведенная к стороне AB , равна h . Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h \text{ или } 48 \text{ см}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ см} \cdot h, \text{ откуда } h = 9,6 \text{ см}.$$

Так как $AB = AC$, то высота, проведенная к стороне AC , также равна 9,6 см.

Ответ. 8 см, 9,6 см, 9,6 см.

493. Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

Решение. Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O .

1. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то треугольник AOB — прямоугольный с катетами 5 см и 12 см. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

2. Согласно задаче 476

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ см} \cdot 24 \text{ см} = 120 \text{ см}^2.$$

Ответ. 13 см и 120 см².

494. Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ 12 см.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$.

1. Треугольник AOB — прямоугольный с гипотенузой $AB = 10$ см и катетом $AO = 6$ см, поэтому

$$BO = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (см)} \text{ и } BD = 2 \cdot BO = 16 \text{ (см)}.$$

$$2. S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 16 \text{ см} = 96 \text{ см}^2.$$

Ответ. 16 см и 96 см².

495. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD , если:
а) $AB = 10$ см, $BC = DA = 13$ см, $CD = 20$ см; б) $\angle C = \angle D = 60^\circ$, $AB = BC = 8$ см; в) $\angle C = \angle D = 45^\circ$, $AB = 6$ см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.

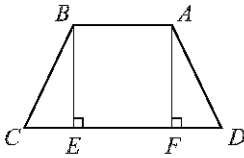


Рис. 82

Решение. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD проведем высоты BE и AF (рис. 82).

а) Так как по условию трапеция равнобедренная ($BC = DA$), то $CE = DF = \frac{1}{2}(CD - AB) = \frac{1}{2}(20 - 10) = 5$ (см).

Из прямоугольного треугольника BEC по теореме Пифагора находим:

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см)}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BE = 15 \text{ см} \cdot 12 \text{ см} = 180 \text{ см}^2.$$

б) Согласно задаче 389 трапеция $ABCD$ — равнобедренная, так как по условию углы при основании равны ($\angle C = \angle D = 60^\circ$). Отсюда следует, что $DF = CE$.

Треугольник BEC — прямоугольный с углом B , равным 30° , поэтому $CE = \frac{1}{2}BC = 4$ см и по теореме Пифагора находим:

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$DC = 2 \cdot EC + EF = 2 \cdot 4 \text{ см} + 8 \text{ см} = 16 \text{ см}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot BE = \frac{1}{2}(8 \text{ см} + 16 \text{ см}) \cdot 4\sqrt{3} \text{ см} = 48\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

в) В прямоугольном треугольнике BCE $\angle E = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, поэтому $\angle B = 45^\circ$ и, следовательно, $BE = CE$. По теореме Пифагора

$$BE^2 + CE^2 = BC^2, \text{ или } 2 \cdot BE^2 = 2 \cdot 81 \text{ см}^2,$$

откуда $BE^2 = 81 \text{ см}^2$, $BE = 9$ см.

Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, так как $\angle C = \angle D = 45^\circ$ (задача 389, а), поэтому $DF = CE = 9$ см, а так как $EF = AB = 6$ см, то

$$DC = DF + FE + EC = 9 \text{ см} + 6 \text{ см} + 9 \text{ см} = 24 \text{ см}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot BE = \frac{1}{2}(6 \text{ см} + 24 \text{ см}) \cdot 9 \text{ см} = 135 \text{ см}^2.$$

Ответ. а) 180 см^2 ; б) $48\sqrt{3} \text{ см}^2$; в) 135 см^2 .

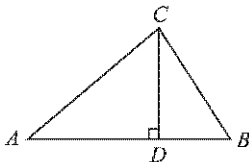


Рис. 83

496. Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB , причем $AD = BC$. Найдите AC , если $AB = 3$, а $CD = \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $AD = BC = x$. Тогда $BD = 3 - x$ (рис. 83). По теореме Пифагора для треугольника BCD имеем:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2, \text{ или } x^2 = (3 - x)^2 + (\sqrt{3})^2,$$

откуда $x = 2$. Итак, $AD = 2$.

По теореме Пифагора из треугольника ACD находим:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}.$$

Ответ. $\sqrt{7}$.

497. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

Решение. Пусть диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой (рис. 84). Так как треугольник ABD — прямоугольный с гипотенузой AB , то $AB > AD$ и по условию $AB - AD = 1$ см.

По теореме Пифагора для треугольника ABD имеем:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(AB + AD)(AB - AD)}.$$

Ясно, что $AB + AD$ есть полупериметр параллелограмма $ABCD$, т. е. $AB + AD = 25$ см.

Поэтому $BD = \sqrt{25 \cdot 1} = 5$ (см).

Ответ. 5 см.

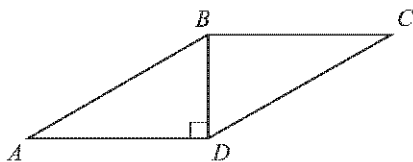


Рис. 84

498. Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.

Решение. а) Так как $10^2 = 6^2 + 8^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, этот треугольник прямоугольный.

б) Если треугольник прямоугольный, то квадрат его большей стороны (гипотенузы) равен сумме квадратов двух других сторон (катетов). Но в данном случае $7^2 \neq 5^2 + 6^2$, поэтому этот треугольник не является прямоугольным.

в) Треугольник прямоугольный, так как

$$15^2 = 12^2 + 9^2.$$

г) Треугольник прямоугольный, так как

$$26^2 = 10^2 + 24^2.$$

д) Треугольник не прямоугольный, так как

$$6^2 \neq 3^2 + 4^2.$$

е) Треугольник не прямоугольный, так как

$$13^2 \neq 11^2 + 9^2.$$

ж) Треугольник прямоугольный, так как

$$25^2 = 20^2 + 15^2.$$

Ответ. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) да.

499. Найдите меньшую высоту треугольника, если его стороны равны: а) 24 см, 25 см, 7 см; б) 15 см, 17 см, 8 см.

Решение. а) Так как $25^2 = 24^2 + 7^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник является прямоугольным. Его катеты $a = 24$ см и $b = 7$ см, а гипотенуза $c = 25$ см. Две высоты этого треугольника равны соответственно его катетам, а высоту h , проведенную к гипотенузе, вычислим по формуле $h = \frac{ab}{c}$ (см. решение задачи 491): $h = \frac{24 \cdot 7}{25}$ см = 6,72 см. Очевидно, эта высота треугольника является наименьшей.

б) Так как $17^2 = 15^2 + 8^2$, то данный треугольник — прямоугольный с катетами $a = 15$ см и $b = 8$ см и гипотенузой $c = 17$ см. Как и в п. а, меньшей высотой треугольника является высота h , проведенная к гипотенузе: $h = \frac{ab}{c}$, $h = \frac{15 \cdot 8}{17}$ см = $7\frac{1}{17}$ см.

Ответ. а) 6,72 см; б) $7\frac{1}{17}$ см.

Дополнительные задачи

500. Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведенной к гипотенузе.

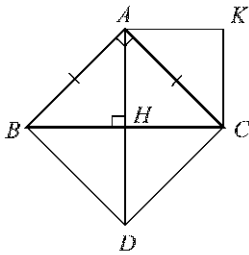


Рис. 85

Решение. На рисунке 85 треугольник ABC — равнобедренный прямоугольный, AH — высота, проведенная к гипотенузе BC , $ABDC$ — квадрат, построенный на катете AB .

Высота AH является также медианой треугольника ABC , поэтому $BH = HC = AH$ (см. задачу 404). Отсюда следует, что точка C является вершиной квадрата, построенного на высоте AH .

Диагональ BC квадрата $ABDC$ разбивает его на два равных треугольника, поэтому

$$S_{ABDC} = 2S_{ABC}. \quad (1)$$

Аналогично, $S_{AHCK} = 2S_{AHC}$. Но высота AH разбивает треугольник ABC на два равных треугольника, поэтому $S_{ABC} = 2S_{AHC}$ и, следовательно,

$$S_{AHCK} = S_{ABC}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$S_{ABDC} = 2S_{АНСК},$$

что и требовалось доказать.

501. Площадь земельного участка равна 27 га. Выразите площадь этого же участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах.

Решение. а) 27 га = 270 000 м², так как 1 га = (100 м)² = 10 000 м².

б) 27 га = 0,27 км², так как 1 га = 0,01 км².

Ответ. а) 270 000 м²; б) 0,27 км².

502. Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть смежные стороны параллелограмма равны a и b , а проведенные к ним высоты равны соответственно 5 см и 4 см.

Тогда $2(a + b) = 42$ см и $S = 5 \cdot a = 4 \cdot b$, где S — площадь параллелограмма. Отсюда получаем $a = \frac{4}{5}b$, поэтому $2\left(b + \frac{4}{5}b\right) = 42$ см, откуда $b = \frac{35}{3}$ см и, следовательно,

$$S = 4 \cdot \frac{35}{3} \text{ см}^2 = 46\frac{2}{3} \text{ см}^2.$$

Ответ. $46\frac{2}{3}$ см².

503. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см², а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2 см и 3 см.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , OM — перпендикуляр к стороне AB , $OM = 2$ см, и пусть прямая OM пересекает сторону CD в точке N . Тогда MN — высота параллелограмма, проведенная к противоположным сторонам AB и CD . Так как O — центр симметрии параллелограмма, то $ON = OM$ и поэтому

$$MN = 2 \cdot OM = 4 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot MN, \text{ или } 24 \text{ см}^2 = 4 \text{ см} \cdot AB,$$

откуда $AB = 6$ см.

Аналогично, от каждой из двух других противоположных сторон параллелограмма (AD и BC) точка O удалена на 3 см, поэтому высота параллелограмма, проведенная к сторонам AD и BC , равна 6 см. Из равенства $24 \text{ см}^2 = 6 \text{ см} \cdot AD$ получаем $AD = 4$ см.

$$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 \text{ см} + 4 \text{ см}) = 20 \text{ см.}$$

Ответ. 20 см.

504. Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит ее на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB < AD$, $AB = 29$ см, ON — перпендикуляр, проведенный из точки O пересечения диагоналей к стороне AD , $AN = 33$ см, $ND = 12$ см (рис. 86).

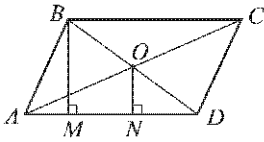


Рис. 86

Проведем высоту BM данного параллелограмма. Так как $BO = OD$ и $BM \parallel ON$, то $MN = ND = 12$ см (см. задачу 384) и, следовательно,

$$AM = AN - NM = 33 \text{ см} - 12 \text{ см} = 21 \text{ см}.$$

Применив теорему Пифагора к треугольнику ABM , найдем высоту BM :

$$BM = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{8 \cdot 50} = 20 \text{ (см)}.$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM = 45 \text{ см} \cdot 20 \text{ см} = 900 \text{ см}^2.$$

Ответ. 900 см^2 .

505. Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a , а другая — b , наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

Решение. Пусть в треугольнике ABC : $BC = a$, $AC = b$, $AD = h_a$, где AD — высота треугольника. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

Если стороны AC и BC не перпендикулярны, то $AD < AC$ (перпендикуляр меньше наклонной), т. е. $h_a < b$ и поэтому $S_{ABC} < \frac{1}{2} ab$. Если же $AC \perp BC$, то сторона AC совпадает с высотой AD , т. е. $h_a = b$. В этом случае

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab.$$

Таким образом, наибольшую площадь имеет тот треугольник, у которого стороны, равные a и b , перпендикулярны.

506. Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

Решение. Искомые прямые не могут пересечь одну и ту же сторону квадрата, так как в этом случае площадь одной из трех указанных в задаче фигур (четырехугольник $ABCM$ на рисунке 87, а) больше $\frac{1}{2}S$, где S — площадь квадрата. Поэтому искомые прямые, проведенные через вершину A , пересекают стороны квадрата $ABCD$ в точках M и N так, что одна из этих точек, например, точка M , лежит на стороне BC , а другая — на стороне DC (рис. 87, б).

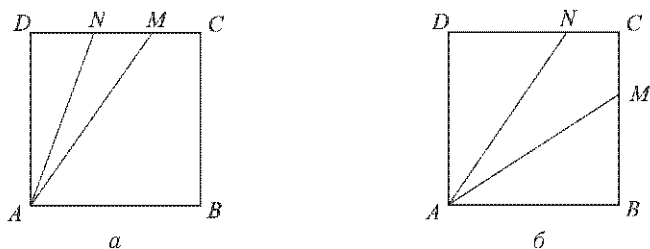


Рис. 87

Пусть $AB = a$, $BM = x$. По условию

$$S_{ABM} = \frac{1}{3}S = \frac{a^2}{3}, \text{ т. е. } \frac{1}{2}ax = \frac{1}{3}a^2, \text{ откуда } x = \frac{2}{3}a.$$

Итак, $BM = \frac{2}{3}BC$. Аналогично $DN = \frac{2}{3}DC$.

507* Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

Решение. Приведем пример, показывающий, что площадь первого треугольника может быть меньше площади второго треугольника. Пусть в треугольнике ABC : $AB = BC = 13$, $AC = 24$, BD — высота, а треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний со стороной, равной 12 (рис. 88). Тогда $AD = \frac{1}{2}AC = 12$,

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60,$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

(задача 489), т. е.

$$S_{A_1B_1C_1} = 36\sqrt{3} > 60 > S_{ABC}.$$

Итак, площадь треугольника ABC , каждая сторона которого больше любой стороны треугольника $A_1B_1C_1$, меньше площади треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ. Нет.

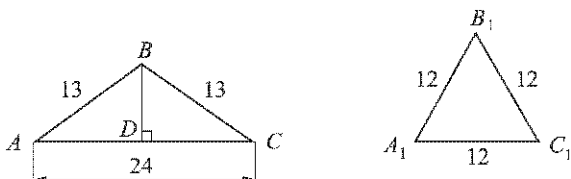


Рис. 88

508*. Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

Решение. Пусть D — произвольная точка на основании AC равнобедренного треугольника ABC , а DM и DN — перпендикуляры, проведенные из этой точки к прямым AB и BC (рис. 89).

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DM + \frac{1}{2} BC \cdot DN = \\ &= \frac{1}{2} AB(DM + DN). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $DM + DN = \frac{2S_{ABC}}{AB}$, т. е. сумма $DM + DN$ не зависит от выбора точки D .

509. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от положения этой точки.

Решение. Пусть O — произвольная точка, лежащая внутри равностороннего треугольника ABC со стороной, равной a , а OK , OM и ON — перпендикуляры к прямым, содержащим стороны этого треугольника (рис. 90). Тогда

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \\ &= \frac{1}{2}(OK \cdot AB + OM \cdot BC + ON \cdot AC) = \frac{a}{2}(OK + OM + ON). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $OK + OM + ON = \frac{2S_{ABC}}{a}$, т. е. сумма $OK + OM + ON$ не зависит от выбора точки O .

510*. Через точку D , лежащую на стороне BC треугольника ABC , проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F . Докажите, что треугольники CDE и BDF имеют равные площади.

Решение. Пусть BM — высота треугольника BDF , а CK — высота треугольника CDE (рис. 91). Заметим, что BM и CK равны высотам параллелограмма $AEDF$, поэтому

$$S_{BDF} = \frac{1}{2} \cdot S_{AEDF}, \quad S_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot S_{AEDF},$$

и, следовательно, $S_{BDF} = S_{CDE}$.

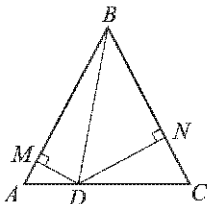


Рис. 89

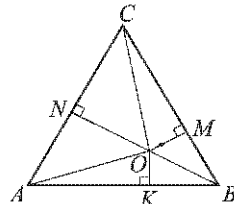


Рис. 90

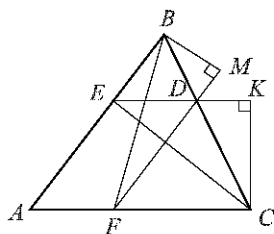


Рис. 91

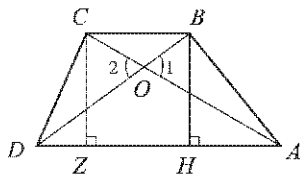


Рис. 92

511. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD диагонали пересекаются в точке O . а) Сравните площади треугольников ABD и ACD . б) Сравните площади треугольников ABO и CDO . в) Докажите, что $OA \times OB = OC \cdot OD$.

Решение. а) Треугольники ABD и ACD имеют равные высоты $BH = CZ$ (рис. 92) и общее основание AD , следовательно, $S_{ABD} = S_{ACD}$.

б) $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$, $S_{ACD} = S_{CDO} + S_{AOD}$. Но по доказанному в п. а) $S_{ABD} = S_{ACD}$, поэтому $S_{ABO} = S_{CDO}$.

в) Углы 1 и 2 равны, поэтому

$$S_{ABO} : S_{CDO} = (OA \cdot OB) : (OC \cdot OD).$$

По доказанному в п. б) $S_{ABO} = S_{CDO}$, следовательно,

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Ответ. а) Площади равны; б) площади равны.

512*. Основания трапеции равны a и b . Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две трапеции, площади которых равны. Найдите длину этого отрезка.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = a$, $BC = b$, а EF — указанный в условии задачи отрезок (рис. 93). Высота BN трапеции пересекает этот отрезок в точке M . Пусть $EF = x$, $BM = h_1$, $MN = h_2$.

По условию $S_{FCBE} = S_{LEFD}$, и, значит,

$$S_{ABCD} = 2S_{EBCF}.$$

Запишем эти равенства, используя формулу площади трапеции:

$$\frac{b+x}{2} \cdot h_1 = \frac{a+x}{2} \cdot h_2,$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2) = (b+x) \cdot h_1.$$

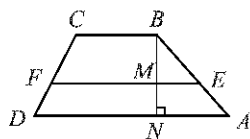


Рис. 93

Разделим оба эти уравнения на h_1 и положим $\frac{h_2}{h_1} = y$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} b + x = (a + x)y, \\ (a + b)(1 + y) = 2(b + x). \end{cases}$$

Исключив из этих двух уравнений y , получим:

$$(a + b) \left(1 + \frac{b + x}{a + x} \right) = 2(b + x).$$

Отсюда находим: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Ответ. $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

513. Диагонали ромба равны 18 м и 24 м. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

Решение. 1) Пусть в ромбе $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому в прямоугольном треугольнике AOB $\angle O = 90^\circ$, $OA = 12$ м, $OB = 9$ м, и по теореме Пифагора находим:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} \text{ м} = 15 \text{ м}.$$

$$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 15 \text{ м} = 60 \text{ м}.$$

2) Расстояния между попарно параллельными сторонами ромба равны высоте h ромба. Так как $S_{ABCD} = AB \cdot h$, а с другой стороны $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (задача 476), то $AB \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, откуда

$$h = \frac{AC \cdot BD}{2AB} = \frac{24 \cdot 18}{2 \cdot 15} \text{ м} = 14,4 \text{ м}.$$

Ответ. 60 м и 14,4 м.

514. Площадь ромба равна 540 см^2 , а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

Решение. Пусть в ромбе $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O , $AC = 4,5 \text{ дм} = 45 \text{ см}$.

Сначала найдем диагональ BD :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD,$$

откуда

$$BD = \frac{2S_{ABCD}}{AC} = \frac{2 \cdot 540}{45} \text{ см} = 24 \text{ см}.$$

Треугольник AOB — прямоугольный, и его катеты OB и OA равны 12 см и 22,5 см, поэтому

$$AB = \sqrt{12^2 + 22,5^2} = \sqrt{650,25} = 25,5 \text{ (см)}$$

и $P = 4 \cdot 25,5 \text{ см} = 102 \text{ см}$.

Расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба равно половине высоты h ромба. Так как $S_{ABCD} = AB \cdot h$, то

$$h = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{540}{25,5} \text{ см} = 21 \frac{3}{17} \text{ см},$$

$$\frac{1}{2}h = 21 \frac{3}{17} \text{ см} : 2 = 10 \frac{10}{17} \text{ см}.$$

Ответ. $10 \frac{10}{17}$ см.

515. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если: а) боковая сторона равна 20 см, а угол при основании равен 30° ; б) высота, проведенная к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол в 45° .

Решение. а) Пусть в равнобедренном треугольнике ABC : $AB = AC = 20$ см, $\angle B = 30^\circ$, отрезок AD — высота. Тогда $BD = DC = \frac{1}{2}BC$, и из прямоугольного треугольника ABD находим: $AD = \frac{1}{2}AB = 10$ см (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Поэтому $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$ (см) (по теореме Пифагора) и $BC = 2BD = 20\sqrt{3}$ см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{3} \text{ см} \cdot 10 \text{ см} = 100\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

б) Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена высота BD к боковой стороне AC , тогда по условию $BD = 6$ см, $\angle DBC = 45^\circ$. Треугольник BDC — прямоугольный с углом B , равным 45° , поэтому $\angle C = 45^\circ$. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то и $\angle ABC = 45^\circ$, а это означает, что угол DBC совпадает с углом ABC , т. е. треугольник ABC — прямоугольный с катетами, равными 6 см. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ см} \cdot 6 \text{ см} = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ. а) $100\sqrt{3}$ см²; б) 18 см².

516. В треугольнике ABC : $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN , проведенный из середины BC к прямой AC , делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найдите площадь треугольника ABC .

Решение. Проведем высоту BD данного треугольника (рис. 94). Так как точка M — середина стороны BC и $MN \parallel BD$, то $DN = NC$ (см. задачу 384).

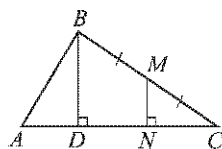


Рис. 94

В треугольнике BCD : $BC = 34$ см, $DC = 2NC = 30$ см, следовательно,

$$BD = \sqrt{34^2 - 30^2} \text{ см} = \sqrt{64 \cdot 4} \text{ см} = 16 \text{ см}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} (AN + NC) \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ см} \cdot 16 \text{ см} = 320 \text{ см}^2.$$

Ответ. 320 см^2 .

517. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

Решение. Стороны треугольника ABC (рис. 95) выражаются числами 5, 12, 13, а так как $13^2 = 12^2 + 5^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC — прямоугольный, и поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 5 \text{ см} = 30 \text{ см}^2.$$

Аналогично, треугольник ACD — прямоугольный, так как $15^2 = 12^2 + 9^2$, и поэтому

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 9 \text{ см} = 54 \text{ см}^2.$$

Заметим, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC (в противном случае отрезки AD и BC пересекались бы), поэтому

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 30 \text{ см}^2 + 54 \text{ см}^2 = 84 \text{ см}^2.$$

Ответ. 84 см^2 .

518. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) ее меньшее основание равно 18 см, высота — 9 см и острый угол равен 45° ; б) ее основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. а) Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$: BC — меньшее основание, BF и CE — высоты (рис. 96).

$\triangle ABF$ — прямоугольный с острым углом в 45° , поэтому он равнобедренный и, значит, $AF = BF = 9$ см.

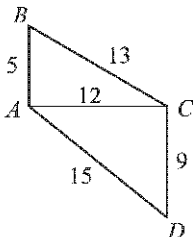


Рис. 95

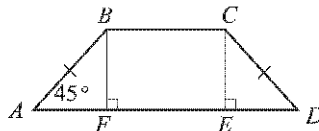


Рис. 96

Так как трапеция равнобедренная, то $ED = AF = 9$ см, а так как $FE = BC = 18$ см, то

$$AD = 2AF + EF = 36 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BF = \frac{1}{2}(18 + 36) \cdot 9 \text{ см}^2 = 243 \text{ см}^2.$$

б) Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 30$ см и $BC = 16$ см диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O , MN — высота трапеции, проходящая через точку O (рис. 97).

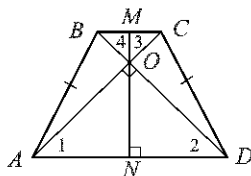


Рис. 97

$\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = DC$, AD — общая сторона, $\angle A = \angle D$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$ (вследствие параллельности BC и AD), то $\angle 3 = \angle 4$. Отсюда следует, что треугольники AOD и BOC — равнобедренные, а поскольку $AC \perp BD$, то эти треугольники — прямоугольные. Высоты ON и OM являются также медианами этих треугольников, а потому согласно задаче 404: $ON = \frac{1}{2}AD$, $OM = \frac{1}{2}BC$. Следовательно,

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 23 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot MN = MN^2 = (23 \text{ см})^2 = 529 \text{ см}^2.$$

Ответ. а) 243 см^2 ; б) 529 см^2 .

519. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h , а диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ со взаимно перпендикулярными диагоналями высота равна h .

Тогда $\frac{1}{2}(AD + BC) = h$ (см. решение задачи 518, б).

Поэтому $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = h^2$.

Ответ. h^2 .

520. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма ее оснований равна $2a$. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ со взаимно перпендикулярными диагоналями $AD + BC = 2a$, MN — высота

трапеции (см. рис. 97). Тогда $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = a$ (см. решение задачи 518, б). Поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot MN = a^2.$$

Ответ. a^2 .

521. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2.$$

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 98).

Используя теорему Пифагора, получаем:

$$AD^2 + BC^2 = DO^2 + AO^2 + BO^2 + CO^2;$$

$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2.$$

Следовательно,

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2.$$

522. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см, $BC = 5$ см и боковой стороной $AB = 10$ см через вершину B проведена прямая, делящая диагональ AC пополам и пересекающая основание AD в точке M . Найдите площадь треугольника BDM .

Решение. Пусть BK — высота данной трапеции $ABCD$, точка O — середина диагонали AC (рис. 99).

$\triangle AOM = \triangle COB$ по стороне ($AO = CO$) и двум прилежащим углам, следовательно, $AM = BC = 5$ см, и поэтому

$$MD = AD - AM = 17 \text{ см} - 5 \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = 6 \text{ см}.$$

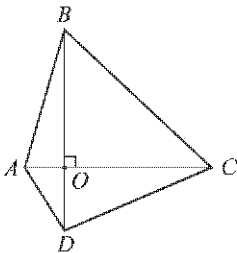


Рис. 98

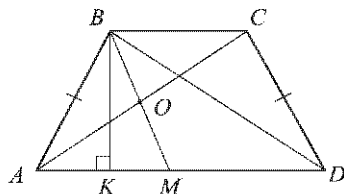


Рис. 99

Из прямоугольного треугольника ABK находим:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}.$$

$$S_{BDM} = \frac{1}{2} MD \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 48 \text{ см}^2.$$

Ответ. 48 см^2 .

523. Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причем сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

Решение. Пусть $ABCD$ и $CKMN$ — данные квадраты, $AB = CK = a$ (рис. 100). Общей частью данных квадратов является четырехугольник $CKFD$ с искомой площадью S .

$$S = S_{ACD} - S_{AKF},$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2}.$$

Треугольник AKF — прямоугольный с углом A , равным 45° , поэтому этот треугольник равнобедренный и $KF = AK = AC - KC = a\sqrt{2} - a = (\sqrt{2} - 1)a$.

Следовательно,

$$S_{AKF} = \frac{1}{2} KF^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 a^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \cdot a^2.$$

$$S = S_{ACD} - S_{AKF} = \frac{a^2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = (\sqrt{2} - 1)a^2.$$

Ответ. $(\sqrt{2} - 1)a^2$.

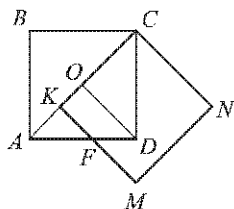


Рис. 100

525. Расстояние от точки M , лежащей внутри треугольника ABC , до прямой AB равно 6 см, а до прямой AC равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC , если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

Решение. По формуле Герона (задача 524) находим:

$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \text{ см}^2 = 84 \text{ см}^2.$$

Соединим точку M с вершинами треугольника ABC и проведем высоты MD , MF и MP в образовавшихся треугольниках (рис. 101). По условию $MD = 6$ см, $MF = 2$ см, а требуется найти MP . Имеем:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AMB} + S_{AMC} + S_{BMC} = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot MD + \frac{1}{2} AC \cdot MF + \frac{1}{2} BC \cdot MP. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условия задачи, получаем:

$$84 = \frac{1}{2} (13 \cdot 6 + 15 \cdot 2 + 14 \cdot MP).$$

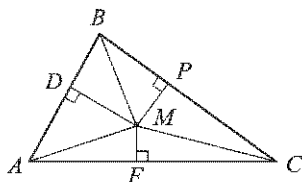


Рис. 101

Из этого равенства находим: $MP = 4\frac{2}{7}$ см.

Ответ. $4\frac{2}{7}$ см.

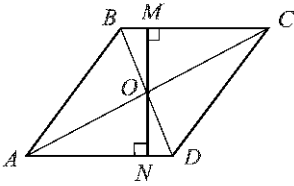


Рис. 102

$= \frac{2}{3}AC$ (рис. 102). Тогда $AC = \frac{2}{3}MN = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ см, $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{3}$ см, $OM = \frac{1}{2}MN = \frac{2\sqrt{2}}{9}$ см.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC . По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2}.$$

Так как

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot OB$$

$$\text{и } S_{BOC} = \frac{1}{2}OM \cdot BC = \frac{\sqrt{2}}{9} \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2}, \text{ то}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot OB = \frac{\sqrt{2}}{9} \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2},$$

или

$$3 \cdot OB = 2\sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$9 \cdot OB^2 = 4 \left(OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2 \right).$$

Отсюда находим: $OB = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ см и, следовательно,

$$BD = 2OB = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ см} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \text{ см} = \frac{8\sqrt{5}}{45} \text{ см}^2.$$

Ответ. $\frac{8\sqrt{5}}{45} \text{ см}^2$.

526. В ромбе высота, равная $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ см, составляет $\frac{2}{3}$ большей диагонали. Найдите площадь ромба.

Решение. Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O , $AC > BD$, MN — высота ромба, проходящая через точку O , $MN = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ см, $MN =$

$= \frac{2}{3}AC$ (рис. 102). Тогда $AC = \frac{2}{3}MN = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ см, $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{3}$ см,

$OM = \frac{1}{2}MN = \frac{2\sqrt{2}}{9}$ см.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC . По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2}.$$

Так как

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot OB$$

$$\text{и } S_{BOC} = \frac{1}{2}OM \cdot BC = \frac{\sqrt{2}}{9} \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2}, \text{ то}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot OB = \frac{\sqrt{2}}{9} \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2},$$

или

$$3 \cdot OB = 2\sqrt{OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$9 \cdot OB^2 = 4 \left(OB^2 + \frac{2}{9} \text{ см}^2 \right).$$

Отсюда находим: $OB = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ см и, следовательно,

$$BD = 2OB = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ см} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \text{ см} = \frac{8\sqrt{5}}{45} \text{ см}^2.$$

Ответ. $\frac{8\sqrt{5}}{45} \text{ см}^2$.

527. В равнобедренной трапеции диагональ равна 10 см, а высота равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC , BK и CH — ее высоты (рис. 103).

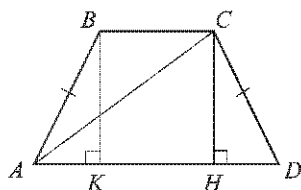


Рис. 103

Из прямоугольного треугольника ACH по теореме Пифагора находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} \text{ см} = 8 \text{ см}.$$

Так как $AK = HD$, $BC = KH$, то

$$\frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(KH + 2AK + KH) = AK + KH = AH.$$

Поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CH = AH \cdot CH = 8 \text{ см} \cdot 6 \text{ см} = 48 \text{ см}^2.$$

Ответ. 48 см^2 .

528. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если боковая сторона CD трапеции равна 12 см, а расстояние от точки O до прямой CD равно 5 см.

Решение. Пусть OE — перпендикуляр, проведенный к прямой CD (рис. 104).

Тогда $OE = 5$ см (по условию), поэтому

$$S_{COD} = \frac{1}{2}CD \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 5 \text{ см} = 30 \text{ см}^2.$$

Согласно задаче 511, б: $S_{AOB} = S_{COD}$, следовательно, $S_{AOB} = 30 \text{ см}^2$.

Ответ. 30 см^2 .

529. Диагонали четырехугольника равны 16 см и 20 см и пересекаются под углом в 30° . Найдите площадь этого четырехугольника.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке O , AE и CF — перпендикуляры к прямой BD (рис. 105).

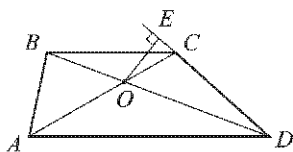


Рис. 104

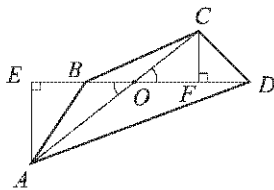


Рис. 105

Так как $\angle AOB = \angle COD = 30^\circ$, то

$$AE = \frac{1}{2} AO, \quad CF = \frac{1}{2} OC.$$

Следовательно,

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AE = \frac{1}{2} BD \cdot \frac{1}{2} AO = \frac{1}{4} BD \cdot AO,$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CF = \frac{1}{2} BD \cdot \frac{1}{2} OC = \frac{1}{4} BD \cdot OC.$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{4} BD \cdot AO + \frac{1}{4} BD \cdot OC = \\ &= \frac{1}{4} BD \cdot (AO + OC) = \frac{1}{4} BD \cdot AC = 80 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Ответ. 80 см^2 .

530. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена высота AD , равная 8 см. Найдите площадь треугольника ABC , если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.

Решение. $\triangle ADC$ — прямоугольный, DM — его медиана, проведенная к гипотенузе (рис. 106), поэтому, согласно задаче 404, $DM = \frac{1}{2} AC$, откуда $AC = \frac{1}{2} DM = 16$ см.

Из треугольника ADC по теореме Пифагора находим:

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{256 - 64} \text{ см} = \sqrt{192} \text{ см} = 8\sqrt{3} \text{ см}.$$

Так как треугольник ABC — равнобедренный, то его высота AD является также и медианой, поэтому

$$BC = 2DC = 16\sqrt{3} \text{ см}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 8\sqrt{3} \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 64\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ. $64\sqrt{3} \text{ см}^2$.

531. Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 см и 8 см. Прямая, проходящая через вершину C и перпендикулярная к прямой BD , пересекает сторону AD в точке M , а диагональ BD — в точке K . Найдите площадь четырехугольника $ABKM$.

Решение. $S_{ABKM} = S_{ABD} - S_{KMD}$ (рис. 107),

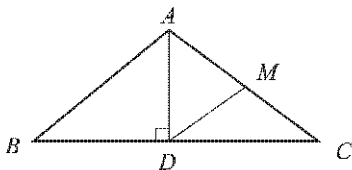


Рис. 106

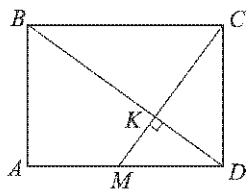


Рис. 107

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 24 \text{ см}^2.$$

Чтобы вычислить S_{KMD} , найдем KD и KM .

В прямоугольном треугольнике BCD отрезок CK — высота, проведенная к гипотенузе, поэтому (см. решение задачи 491)

$$CK = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{36 + 64}} \text{ см} = 4,8 \text{ см}.$$

По теореме Пифагора имеем:

$$KD = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} \text{ см} = 3,6 \text{ см}.$$

Отрезок KD — высота прямоугольного треугольника CDM , проведенная к гипотенузе, поэтому

$$KD = \frac{CD \cdot DM}{\sqrt{CD^2 + DM^2}}, \text{ или } 3,6\sqrt{36 \text{ см}^2 + DM^2} = 6DM.$$

Отсюда после возведения в квадрат находим $DM = 4,5$ см.

По теореме Пифагора

$$KM = \sqrt{DM^2 - KD^2} = \sqrt{4,5^2 - 3,6^2} \text{ см} = 2,7 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$S_{KMD} = \frac{1}{2} KM \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot 2,7 \text{ см} \cdot 3,6 \text{ см} = 4,86 \text{ см}^2.$$

$$S_{ABKM} = S_{ABD} - S_{KMD} = 24 \text{ см}^2 - 4,86 \text{ см}^2 = 19,14 \text{ см}^2.$$

Ответ. $19,14 \text{ см}^2$.

532. В треугольнике ABC проведена высота BH . Докажите, что: а) если угол A — острый, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$; б) если угол A — тупой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

Решение. а) Так как в треугольнике ABC угол A — острый, то точка H может лежать на стороне AC (рис. 108, а), лежать на продолжении стороны AC (рис. 108, б) или совпадать с точкой C (рис. 108, в). В последнем случае $AH = AC$ и поэтому нужно доказать, что

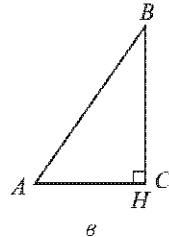
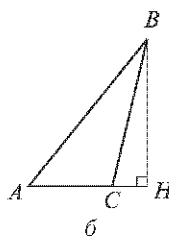
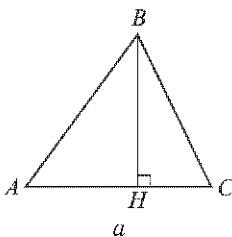


Рис. 108

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC^2, \text{ т. е. } BC^2 = AB^2 - AC^2.$$

Это верно в силу теоремы Пифагора.

Рассмотрим случаи, представленные на рисунках 108, а и 108, б. Из прямоугольного треугольника BHC по теореме Пифагора имеем:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2,$$

а из прямоугольного треугольника ABH :

$$BH^2 = AB^2 - AH^2.$$

Поэтому

$$BC^2 = AB^2 - AH^2 + HC^2. \quad (1)$$

$HC = AC - AH$ (рис. 108, а), либо $HC = AH - AC$ (рис. 108, б). В любом случае

$$HC^2 = AC^2 - 2AC \cdot AH + AH^2.$$

Теперь равенство (1) можно записать так:

$$BC^2 = AB^2 - AH^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH + AH^2,$$

или

$$BC^2 = AH^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH,$$

что и требовалось доказать.

б) Так как в треугольнике в ABC угол A — тупой, то точка H лежит на продолжении стороны AC (рис. 109).

Из прямоугольного треугольника BHC по теореме Пифагора имеем:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2,$$

а из прямоугольного треугольника ABH :

$$BH^2 = AB^2 - AH^2.$$

Поэтому

$$BC^2 = AB^2 - AH^2 + HC^2. \quad (2)$$

Так как $HC = AH + AC$, то

$$HC^2 = AH^2 + 2AC \cdot AH + AC^2.$$

Теперь равенство (2) можно записать так:

$$BC^2 = AB^2 - AH^2 + AH^2 + 2AC \cdot AH + AC^2,$$

или

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH,$$

что и требовалось доказать.

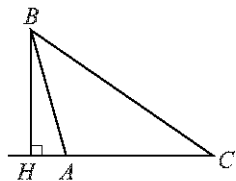


Рис. 109

Задачи повышенной трудности

829. Через точку M , лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны AB , BC , CD и DA соответственно в точках P , Q , R и T . Докажите, что если точка M лежит на диагонали AC , то площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, и, наоборот, если площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, то точка M лежит на диагонали AC .

Решение. Сначала докажем прямое утверждение. Пусть точка M лежит на диагонали AC (рис. 110, а). Так как $\triangle ABC = \triangle ADC$,

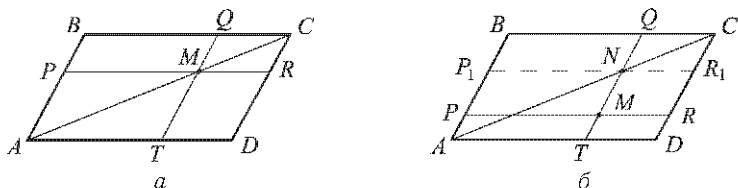


Рис. 110

$\triangle APM = \triangle MTA$ и $\triangle MQC = \triangle CRM$, то

$$\begin{aligned} S_{MPBQ} &= S_{ABC} - S_{APM} - S_{MQC} = \\ &= S_{ADC} - S_{MTA} - S_{CRM} = S_{MRDT}. \end{aligned}$$

Итак, $S_{MPBQ} = S_{MRDT}$.

Пусть теперь точка M не лежит на отрезке AC . Обозначим через N точку пересечения отрезков AC и QT , а через P_1 и R_1 точки пересечения прямой, проходящей через точку N параллельно AD , с отрезками AB и CD (рис. 110, б). Согласно доказанному $S_{NP_1BQ} = S_{NR_1DT}$. Если точка M лежит между точками N и T (рис. 110, б), то $S_{MPBQ} > S_{NP_1BQ}$, а $S_{MRDT} < S_{NR_1DT}$, и поэтому $S_{MPBQ} \neq S_{MRDT}$. Если точка M лежит между Q и N , то аналогично приходим к неравенству $S_{MPBQ} \neq S_{MRDT}$. Следовательно, если $S_{MPBQ} = S_{MRDT}$, то точка M лежит на отрезке AC .

830. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K . Отрезки AK и BM пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника CMK , если площади треугольников OMA , OAB и OBK равны соответственно S_1 , S_2 , S_3 .

Решение. На рисунке 111 изображена данная фигура. Пусть $S_{OMK} = S_4$, $S_{CMK} = S$. Так как площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как основания (следствие 2, п. 52), то

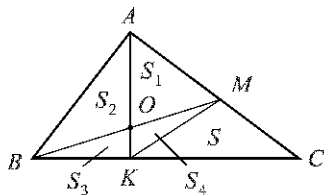


Рис. 111

$$MO : OB = S_4 : S_3 = S_1 : S_2.$$

Отсюда находим: $S_1 = \frac{S_1 S_3}{S_2}$. Еще раз применяя следствие 2, п. 52, получаем:

$$BK : KC = S_{BМК} : S_{СМК} = S_{ВАК} : S_{САК},$$

или

$$(S_3 + S_4) : S = (S_2 + S_3) : (S_1 + S_4 + S).$$

Отсюда, используя выражения для S_4 , после соответствующих преобразований находим S :

$$S = \frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1 S_3)}.$$

Ответ. $\frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1 S_3)}$.

831. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K , а на отрезке MK — точка P так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK}$. Найдите площадь треугольника ABC , если площади треугольников AMP и BKP равны S_1 и S_2 .

Решение. Введем обозначение:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK} = x \text{ (рис. 112)}.$$

Сравнивая площади треугольников AMP и CMP , получаем

$$\frac{S_{AMP}}{S_{CMP}} = \frac{AM}{MC} = x,$$

откуда $S_{CMP} = \frac{1}{x} \cdot S_1$.

Аналогично, сравнивая площади треугольников BKP и CKP , находим: $S_{CKP} = x \cdot S_2$.

Так как $\frac{S_{CMP}}{S_{CKP}} = \frac{MP}{PK} = x$, то $\frac{\frac{1}{x} \cdot S_1}{x \cdot S_2} = x$, откуда $x = \sqrt[3]{\frac{S_1}{S_2}}$, и, следовательно,

$$S_{CMP} = \frac{1}{x} \cdot S_1 = \sqrt[3]{S_1^2 S_2}, \quad S_{CKP} = x \cdot S_2 = \sqrt[3]{S_1 S_2^2},$$

$$S_{CKM} = S_{CKP} + S_{CMP} = \sqrt[3]{S_1 S_2^2} + \sqrt[3]{S_1^2 S_2}.$$

Воспользуемся теперь теоремой об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CKM}} = \frac{CB \cdot CA}{CK \cdot CM}.$$

Но $\frac{CB \cdot CA}{CK \cdot CM} = \frac{CK + KB}{CK} \cdot \frac{CM + MA}{CM} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) (1 + x)$.

Поэтому $S_{ABC} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) (1 + x) S_{CKM}$.

Подставляя в правую часть этого равенства выражения для x и S_{CKM} , после несложных преобразований приходим к равенству

$$S_{ABC} = (\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2})^3.$$

Ответ. $(\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2})^3$.

832. Точки P, Q, R и T — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

Решение. Данная фигура изображена на рисунке 113, где $MNKL$ — четырехугольник, образованный при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP .

Так как $AT \parallel CQ$ и $AT = CQ$, то $ATCQ$ — параллелограмм, поэтому $MN \parallel LK$. Аналогично, $ML \parallel NK$, следовательно, $MNKL$ — параллелограмм.

Пусть S — площадь параллелограмма $MNKL$, $BF \perp CT$ (см. рис. 113). Тогда $BF \perp AQ$ и, следовательно, отрезок BE — высота треугольника ABN , а отрезок EF равен высоте параллелограмма $MNKL$, проведенной к стороне MN . Так как $BQ = QC$, то $BE = EF$ (задача 384), а так как $AP = PB$, то $AM = MN$ и поэтому $AN = 2MN$. Следовательно,

$$S = MN \cdot EF = MN \cdot BE,$$

$$S_{ABN} = \frac{1}{2}AN \cdot BE = MN \cdot BE = S.$$

Аналогично можно доказать, что площадь каждого из треугольников ADM, CDL и CBK также равна S . Поэтому

$$S_{ABCD} = 5S \text{ и } \frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{S}{5S} = \frac{1}{5}.$$

Ответ. $\frac{1}{5}$.

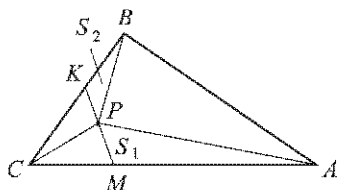


Рис. 112

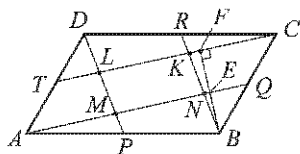


Рис. 113

833. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведенный из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M — середина боковой стороны CD , а MK — перпендикуляр, проведенный к прямой AB (рис. 114).

Докажем, что $S = AB \cdot MK$, где S — площадь трапеции.

$$S = S_{AMB} + S_{AMD} + S_{BMC}.$$

Проведем через точку M высоту PQ трапеции (см. рис. 114). Тогда

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} AD \cdot MP, \quad S_{BMC} = \frac{1}{2} BC \cdot MQ.$$

Так как $\triangle CMQ = \triangle DMP$ (по гипотенузе и острому углу), то $MQ = MP$ и поэтому

$$S_{AMD} + S_{BMC} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot PQ = \frac{1}{2} S.$$

Таким образом, $S = S_{AMB} + \frac{1}{2} S$, откуда $S = 2S_{AMB}$.

Но $S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot MK$, следовательно,

$$S = AB \cdot MK.$$

834. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

Решение. Согласно задаче 511, б площади треугольников AOB и COD равны. Обозначим эти площади буквой S (рис. 115).

Площади S_1 и S_2 относятся как произведения сторон, заключающих равные углы с вершиной O (теорема 2, п. 52), т. е. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{OB \cdot OC}{OA \cdot OD}$.

Но $\frac{S_1}{S} = \frac{OC}{OA}$ и $\frac{S_1}{S} = \frac{OB}{OD}$ (см. рис. 115), и, следовательно,

$$\frac{S_1^2}{S^2} = \frac{S_1}{S_2},$$

откуда $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

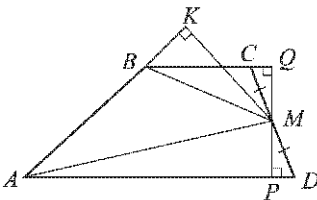


Рис. 114

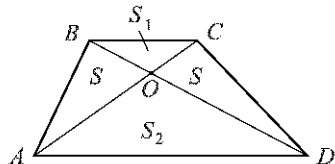


Рис. 115

Таким образом,

$$S_{ABCD} = 2S + S_1 + S_2 = 2\sqrt{S_1 S_2} + S_1 + S_2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Ответ. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

835. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые делят трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника равна сумме площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD , $BC < AD$, $BM \parallel CN$, прямые BM и AC пересекаются в точке K , а прямые CN и BD — в точке P (рис. 116). Требуется доказать, что

$$S_{MKOPN} = S_{ABK} + S_{BCO} + S_{CDP}.$$

Если h — высота трапеции, то

$$S_{BMNC} = BC \cdot h, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h,$$

$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$, поэтому $S_{BMNC} = S_{ABC} + S_{BCD}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{MKOPN} &= S_{BMNC} - (S_{BCK} + S_{COP}) = \\ &= S_{ABC} + S_{BCD} - S_{BCK} - S_{COP} = \\ &= (S_{ABC} - S_{BCK}) + (S_{BCD} - S_{COP}) = \\ &= S_{ABK} + (S_{BCO} + S_{CDP}). \end{aligned}$$

Итак, $S_{MKOPN} = S_{ABK} + S_{BCO} + S_{CDP}$.

836. Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K . Докажите, что площади треугольников DCM и AKB равны.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — середины диагоналей AC и BD данного четырехугольника, $AF \perp O_1O_2$ и $CE \perp O_1O_2$ (рис. 117).

Так как $AO_1 = O_1C$, то $\triangle AFO_1 = \triangle CEO_1$ (по гипотенузе и острому углу), поэтому $AF = CE$. Треугольники AKM и CMK имеют

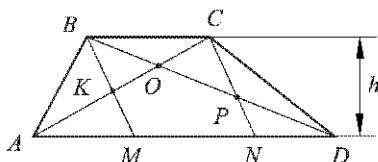


Рис. 116

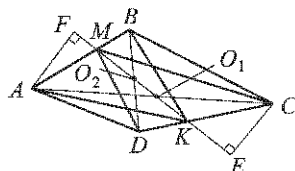


Рис. 117

общее основание MK и равные высоты AF и CE , поэтому $S_{AKM} = S_{CMK}$.

Аналогично доказывается, что $S_{BKM} = S_{DMK}$.

Следовательно,

$$S_{AKB} = S_{AKM} + S_{BKM} = S_{CMK} + S_{DMK} = S_{DCM}.$$

Итак, $S_{DCM} = S_{AKB}$.

837. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE , а сторона AD продолжена за точку D на отрезок DK . Прямые ED и KB пересекаются в точке O . Докажите, что площади четырехугольников $ABOD$ и $CEOK$ равны.

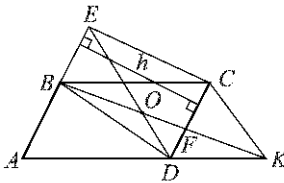


Рис. 118

Решение. На рисунке 118 изображена данная фигура. Треугольники ABD и EDC имеют равные основания AB и CD и равные высоты h , поэтому $S_{ABD} = S_{EDC}$. Аналогично, треугольники BDK и CDK имеют общее основание DK и равные высоты, поэтому $S_{BDK} = S_{CDK}$. Из этого равенства следует, что $S_{BDF} = S_{CKF}$, поэтому $S_{BDO} = S_{CKF} - S_{DOF}$.

Следовательно,

$$S_{ABOD} = S_{ABD} + S_{CKF} - S_{DOF} = S_{EDC} - S_{DOF} + S_{CKF} = S_{CEOK}.$$

Итак, $S_{ABOD} = S_{CEOK}$.

838. Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что площадь той части четырехугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырехугольника.

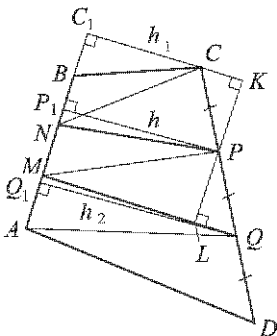


Рис. 119

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, $AM = MN = NB$, $CP = PQ = QD$ (рис. 119). Требуется доказать, что $S_{MNPQ} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$.

Проведем перпендикуляры CC_1 , PP_1 , QQ_1 к прямой AB , а через точку P проведем прямую, перпендикулярную к CC_1 и QQ_1 (см. рис. 119). Пусть $CC_1 = h_1$, $PP_1 = h$, $QQ_1 = h_2$. Так как $\triangle CPK = \triangle QPL$ (по гипотенузе и острому углу), то $CK = LQ$. Но $CK = h - h_1$, $LQ = h_2 - h$, поэтому $h - h_1 = h_2 - h$, т. е. $h = \frac{h_2 + h_1}{2}$.

$$S_{NBC} = \frac{1}{2} \cdot NB \cdot h_1,$$

$$S_{AMQ} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_2,$$

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot h = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Из этих равенств, учитывая, что $AM = MN = NB$, получаем:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2}(S_{AMQ} + S_{NBC}).$$

Аналогично доказывается равенство

$$S_{PQM} = \frac{1}{2}(S_{CPN} + S_{QDA}).$$

Следовательно,

$$S_{MNPQ} = S_{MNP} + S_{PQM} =$$

$$= \frac{1}{2}(S_{AMQ} + S_{NBC} + S_{CPN} + S_{QDA}) = \frac{1}{2}(S_{AMQD} + S_{NBCP}).$$

Итак, $S_{AMQD} + S_{NBCP} = 2S_{MNPQ}$, поэтому

$$S_{ABCD} = 3S_{MNPQ}, \text{ т. е. } S_{MNPQ} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

839. Середины K и M сторон AB и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$ соединены отрезками KD , KC , MA и MB с вершинами. Докажите, что площадь четырехугольника, заключенного между этими отрезками, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам AD и BC .

Решение. На рисунке 120 изображена данная фигура, N и P — точки пересечения отрезков DK и AM , KC и BM . Требуется доказать, что

$$S_{MNKP} = S_{ADN} + S_{BCP}.$$

Проведем перпендикуляры CC_1 , MM_1 и DD_1 к прямой AB . Пусть $CC_1 = h_1$, $DD_1 = h_2$, тогда $MM_1 = \frac{h_1 + h_2}{2}$ (см. решение задачи 838).

Поэтому

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}, S_{ADK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot h_2, S_{BCK} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot h_1.$$

Так как $AK = BK = \frac{1}{2} AB$, то

$$S_{AMB} = S_{ADK} + S_{BCK},$$

или

$$S + S_2 + S_3 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

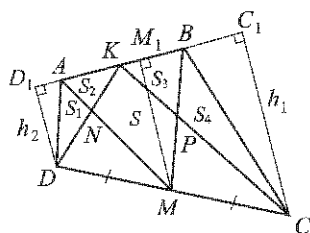


Рис. 120

(обозначения площадей представлены на рис. 120). Отсюда следует, что

$$S = S_1 + S_4, \text{ т. е. } S_{MNKP} = S_{ADN} + S_{BCP}.$$

840. Точка A лежит внутри угла, равного 60° . Расстояния от точки A до сторон угла равны a и b . Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

Решение. Пусть AB и AD — перпендикуляры, проведенные к прямым, содержащим стороны данного угла O , равного 60° , а C — точка пересечения прямых AB и OD (рис. 121). По условию $AB = a$, $AD = b$. Требуется найти AO .

В прямоугольном треугольнике OBC $\angle O = 60^\circ$, поэтому $\angle C = 30^\circ$. Отсюда следует, что $OC = 2OB$. В прямоугольном треугольнике CDA : $AC = 2AD = 2b$. Поэтому $BC = a + 2b$.

По теореме Пифагора

$$OB^2 = OC^2 - BC^2, \text{ или } OB^2 = 4OB^2 - (a + 2b)^2,$$

откуда $OB^2 = \frac{(a + 2b)^2}{3}$.

Из прямоугольного треугольника ABO по теореме Пифагора получаем:

$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

Ответ. $2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.

841. Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M . Найдите площадь этого параллелограмма, если площади треугольников KBC и CDM равны S_1 и S_2 .

Решение. Пусть $AD = a$, $AB = b$, $BK = c$, $DM = d$, $CK = e$, $CM = f$, $S_{ABCD} = S$ (рис. 122).

Так как треугольники ABC и BKC имеют общую высоту, проведенную из вершины C , то $\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{c}{b}$, а поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S$, то $\frac{2S_1}{S} = \frac{c}{b}$.

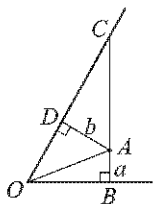


Рис. 121

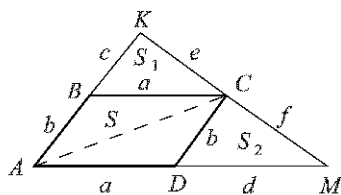


Рис. 122

Аналогично, сравнивая треугольники ADC и DMC , получаем:

$$\frac{S}{2S_2} = \frac{a}{d}.$$

Используя теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу (п. 52 учебника), приходим к равенствам:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ae}{df}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{ce}{bf}, \quad \text{откуда } \frac{a}{d} = \frac{c}{b}.$$

Следовательно,
$$\frac{S}{2S_2} = \frac{2S_1}{S}.$$

Отсюда находим:
$$S = 2\sqrt{S_1 S_2}.$$

Ответ.
$$2\sqrt{S_1 S_2}.$$

842. Через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезок AB в точке M и отрезок CD в точке K . Прямая, проведенная через точку K параллельно AB , пересекает BD в точке T , а прямая, проведенная через точку M параллельно CD , пересекает AC в точке E . Докажите, что прямые BE и CT параллельны.

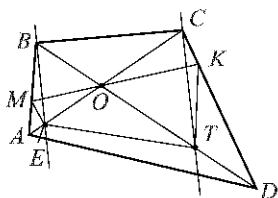


Рис. 123

Решение. На рисунке 123 изображена данная фигура. Так как треугольники BOC и EOT имеют равные углы при вершине O , то

$$\frac{S_{BOC}}{S_{EOT}} = \frac{OB \cdot OC}{OT \cdot OE}. \quad (1)$$

Так как $ME \parallel CK$, то углы K и M (и также углы C и E) в треугольниках COK и EOM равны. Поэтому

$$\frac{S_{COK}}{S_{EOM}} = \frac{CK \cdot KO}{OM \cdot ME} = \frac{OC \cdot CK}{OE \cdot ME},$$

откуда следует, что

$$\frac{KO}{OM} = \frac{OC}{OE}. \quad (2)$$

Аналогично, сравнивая треугольники KOT и BOM , получаем:

$$\frac{S_{KOT}}{S_{BOM}} = \frac{KT \cdot OT}{BM \cdot OB} = \frac{KO \cdot KT}{OM \cdot BM},$$

откуда следует, что

$$\frac{OT}{OB} = \frac{KO}{OM}. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) получаем:

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OT}{OB}, \quad \text{или } OB \cdot OC = OT \cdot OE.$$

Поэтому, согласно равенству (1), $S_{BOC} = S_{EOT}$ и, следовательно, $S_{BTC} = S_{ETC}$ (см. рис. 123).

Итак, треугольники BTC и ETC имеют общее основание TC и равные площади, поэтому их высоты, проведенные из вершин B и E , равны, т. е. точки B и E равноудалены от прямой CT , и поэтому $BE \parallel CT$.

843. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD , равный AC . На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади треугольников BDM и BCK равны. Найдите угол BKM , если $\angle BAC = \alpha$.

Решение. На рисунке 124 изображена данная фигура. Отметим, что точки M и K лежат по одну сторону от прямой CD (это следует из равенства $BD \cdot BM = BC \cdot BK$).

Так как

$$S_{DCM} = S_{BDM} - S_{BCD}, \quad S_{DCK} = S_{BCK} - S_{BCD}$$

(или $S_{DCM} = S_{BCD} - S_{BDM}$, $S_{DCK} = S_{BCD} - S_{BCK}$ при ином расположении точек M и K) и по условию $S_{BDM} = S_{BCK}$, то

$$S_{DCM} = S_{DCK}.$$

Треугольники DCM и DCK имеют общее основание DC и равные площади, поэтому высоты, проведенные из вершин M и K , равны, а следовательно, $MK \parallel CD$. Отсюда следует, что $\angle BKM = \angle BDC$. Но $\angle BDC = \angle ACD$, так как $\triangle ACD$ — равнобедренный, и поэтому, согласно свойству внешнего угла треугольника, $\angle BDC = \frac{1}{2}\alpha$ (см. рис. 124). Итак, $\angle BKM = \frac{1}{2}\alpha$.

Ответ. $\frac{\alpha}{2}$.

844. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M . Известно, что $MB = a$, $MC = b$ и $MD = c$. Найдите MA .

Решение. Через точку M проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника $ABCD$, и обозначим через m , n , p и q длины отрезков на этих прямых так, как показано на рисунке 125, а через x искомую длину отрезка MA . Воспользуемся теоремой Пифагора для

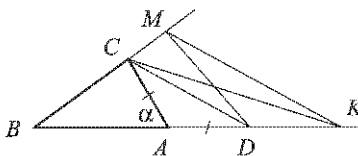


Рис. 124

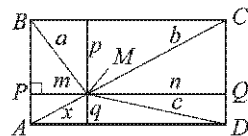


Рис. 125

образовавшихся прямоугольных треугольников MPA , MPB , MQC и MQD .

$$x^2 = m^2 + q^2, \quad a^2 = m^2 + p^2, \quad b^2 = n^2 + p^2, \quad c^2 = n^2 + q^2.$$

Из этих равенств следует, что $x^2 + b^2 = a^2 + c^2$, поэтому

$$x = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}.$$

Ответ. $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

845. В треугольнике ABC проведена высота BD . Отрезок KA перпендикулярен к AB и равен DC , отрезок CM перпендикулярен к BC и равен AD . Докажите, что отрезки MB и KB равны.

Решение. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $BD = h$ (рис. 126). Используя теорему Пифагора, получаем:

$$\begin{aligned} KB^2 &= AK^2 + c^2 = DC^2 + c^2 = a^2 - h^2 + c^2, \\ BM^2 &= CM^2 + a^2 = AD^2 + a^2 = c^2 - h^2 + a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $KB^2 = MB^2$, поэтому $KB = MB$.

846. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O так, что $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OAC}$. Докажите, что $OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2$.

Решение. Проведем перпендикуляры OM и ON к прямым AC и BC (рис. 127). Пусть площадь треугольника ABC равна S .

По условию задачи

$$S_{AOC} = \frac{1}{3}S, \text{ или } \frac{1}{2}OM \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC.$$

Отсюда следует, что $OM = \frac{1}{3}BC$. Аналогично доказывается, что $ON = \frac{1}{3}AC$.

Заметим, что $CM = ON = \frac{1}{3}AC$, поэтому $AM = AC - CM = \frac{2}{3}AC$.

Аналогично, $BN = \frac{2}{3}BC$.

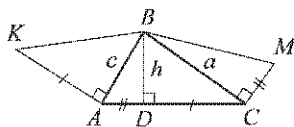


Рис. 126

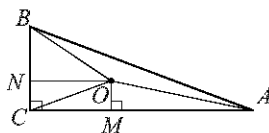


Рис. 127

Применим теорему Пифагора к треугольникам AOM , BON и SOM :

$$OA^2 = OM^2 + MA^2 = \frac{1}{9}BC^2 + \frac{4}{9}AC^2,$$

$$OB^2 = ON^2 + NB^2 = \frac{1}{9}AC^2 + \frac{4}{9}BC^2,$$

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 = \frac{1}{9}BC^2 + \frac{1}{9}AC^2.$$

Из этих равенств следует, что $OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2$.

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Определение подобных треугольников

533. Найдите отношение отрезков AB и CD , если их длины равны соответственно 15 см и 20 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?

Решение. $\frac{AB}{CD} = \frac{15 \text{ см}}{20 \text{ см}} = \frac{3}{4}$.

Отношение не изменится, если длины отрезков выразить в миллиметрах: $\frac{AB}{CD} = \frac{150 \text{ мм}}{200 \text{ мм}} = \frac{3}{4}$.

Ответ. $\frac{3}{4}$; не изменится.

534. Пропорциональны ли изображенные на рисунке 128 (рис. 189 учебника) отрезки: а) AC , CD и M_1M_2 , MM_1 ; б) AB , BC , CD и MM_2 , MM_1 , M_1M_2 ; в) AB , BD и MM_1 , M_1M_2 ?

Решение. Примем за единицу измерения отрезков отрезок MM_1 . Тогда $MM_1 = 1$, $MM_2 = 3$, $M_1M_2 = 2$, $AB = 9$, $AC = 12$, $BC = 3$, $BD = 9$, $CD = 6$.

а) $\frac{AC}{M_1M_2} = \frac{12}{2} = 6$, $\frac{CD}{MM_1} = \frac{6}{1} = 6$, следовательно, $\frac{AC}{M_1M_2} = \frac{CD}{MM_1}$, т. е. отрезки AC и CD пропорциональны отрезкам M_1M_2 и MM_1 .

б) Аналогично п. а) получаем:

$$\frac{AB}{MM_2} = \frac{BC}{MM_1} = \frac{CD}{M_1M_2} = 3,$$

т. е. отрезки AB , BC и CD пропорциональны отрезкам MM_2 , MM_1 и M_1M_2 .

в) $\frac{AB}{MM_1} = \frac{9}{1}$, $\frac{BD}{M_1M_2} = \frac{9}{2}$, следовательно, $\frac{AB}{MM_1} \neq \frac{BD}{M_1M_2}$, т. е. отрезки AB и BD не пропорциональны отрезкам MM_1 и M_1M_2 .

Ответ. а) Да; б) да; в) нет.

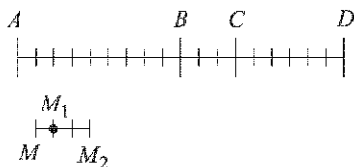


Рис. 128

536. Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC . а) Найдите AB , если $BC = 9$ см, $AD = 7,5$ см, $DC = 4,5$ см. б) Найдите DC , если $AB = 30$, $AD = 20$, $BD = 16$ и $\angle BDC = \angle C$.

Решение. а) Так как BD — биссектриса треугольника ABC (рис. 129), то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (см. задачу 535). Отсюда получаем:

$$AB = \frac{AD \cdot BC}{DC} = \frac{7,5 \cdot 9}{4,5} \text{ см} = 15 \text{ см.}$$

б) Так как $\angle BDC = \angle C$, то треугольник BDC — равнобедренный (см. рис. 129), т. е. $BC = BD = 16$.

Из равенства $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ следует:

$$DC = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 16}{30} = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ. а) 15 см; б) $10\frac{2}{3}$.

537. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC . Найдите BD и BC , если $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

Решение. Пусть $BD = x$, тогда $DC = BC - BD = 20$ см — x (рис. 130).

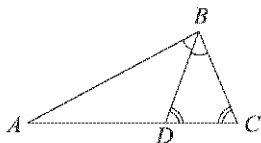


Рис. 129

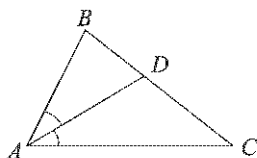


Рис. 130

Так как AD — биссектриса треугольника ABC , то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, или $\frac{x}{20 \text{ см} - x} = \frac{14}{21}$.

Отсюда следует:

$$21x = 14(20 \text{ см} - x), \quad 35x = 280 \text{ см}, \quad x = 8 \text{ см.}$$

Итак, $BD = 8$ см, $DC = 20$ см — 8 см = 12 см.

Ответ. $BD = 8$ см, $DC = 12$ см.

538. Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки CD и BD , равные соответственно $4,5$ см и $13,5$ см. Найдите AB и AC , если периметр треугольника ABC равен 42 см.

Решение. $BC = BD + CD = 13,5$ см + $4,5$ см = 18 см.

$$AB + AC = 42 \text{ см} - 18 \text{ см} = 24 \text{ см};$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13,5}{4,5} = 3,$$

откуда $AB = 3AC$.

Итак, $3AC + AC = 24$ см, поэтому

$$AC = 6 \text{ см}, \quad AB = 18 \text{ см}.$$

Ответ. $AB = 18$ см, $AC = 6$ см.

539. В треугольник MNK вписан ромб $MDEF$ так, что вершины D , E и F лежат соответственно на сторонах MN , NK и MK . Найдите отрезки NE и EK , если $MN = 7$ см, $NK = 6$ см, $MK = 5$ см.

Решение. Диагональ ME ромба делит его углы пополам, поэтому отрезок ME — биссектриса треугольника MNK (рис. 131). Следовательно,

$$\frac{NE}{EK} = \frac{MN}{MK}, \quad \text{или} \quad \frac{NE}{6 \text{ см} - NE} = \frac{7}{5}.$$

Отсюда находим:

$$5 \cdot NE = 42 \text{ см} - 7 \cdot NE, \quad 12 \cdot NE = 42 \text{ см}, \quad NE = 3,5 \text{ см}, \\ EK = 6 \text{ см} - NE = 2,5 \text{ см}.$$

Ответ. $NE = 3,5$ см, $EK = 2,5$ см.

540. Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб $DMFN$ так, что вершины M , F и N лежат соответственно на сторонах CD , CE и DE . Найдите стороны CD и DE , если $CF = 8$ см, $EF = 12$ см.

Решение. Диагональ DF ромба является биссектрисой треугольника CDE , поэтому

$$\frac{CD}{DE} = \frac{CF}{FE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad \text{откуда} \quad CD = \frac{2}{3}DE.$$

$$CE = CF + FE = 8 \text{ см} + 12 \text{ см} = 20 \text{ см};$$

$$CD + DE = 55 \text{ см} - CE = 35 \text{ см},$$

т. е. $\frac{2}{3}DE + DE = 35$ см, откуда $DE = 21$ см.

$$CD = \frac{2}{3} \cdot 21 \text{ см} = 14 \text{ см}.$$

Ответ. $CD = 14$ см, $DE = 21$ см.

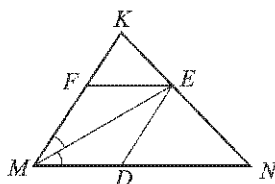


Рис. 131

541. Подобны ли треугольники ABC и DEF , если $\angle A = 106^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, $\angle E = 106^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4,4$ см, $AB = 5,2$ см, $BC = 7,6$ см, $DE = 15,6$ см, $DF = 22,8$ см, $EF = 13,2$ см?

Решение. $\angle A = \angle E$; $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, т. е. $\angle C = \angle F$; $\angle D = 180^\circ - (\angle E + \angle F) = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$, т. е. $\angle B = \angle D$.

Итак, углы треугольников ABC и DEF соответственно равны.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{5,2}{15,6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AC}{EF} = \frac{4,4}{13,2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{BC}{DF} = \frac{7,6}{22,8} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DF}$, т. е. стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника DEF . Следовательно, треугольники ABC и DEF подобны.

Ответ. Да.

542. В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM , BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN , если:

$AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $\frac{KM}{AB} = 2,1$.

Решение. $KM = 2,1 \cdot AB = 2,1 \cdot 4$ см = 8,4 см;

$$\frac{MN}{BC} = 2,1, \text{ откуда } MN = 2,1 \cdot BC = 10,5 \text{ см;}$$

$$\frac{KN}{AC} = 2,1, \text{ откуда } KN = 2,1 \cdot AC = 14,7 \text{ см.}$$

Ответ. $KM = 8,4$ см; $MN = 10,5$ см; $KN = 14,7$ см.

543. Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам.

Решение. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB : A_1B_1 = k$, h и h_1 — высоты, проведенные к сходственным сторонам AB и A_1B_1 . Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2, \text{ т. е. } \frac{\frac{1}{2}AB \cdot h}{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot h_1} = k^2.$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right) \left(\frac{h}{h_1}\right) = k^2, \text{ или } k \left(\frac{h}{h_1}\right) = k^2.$$

Следовательно, $\frac{h}{h_1} = k$.

Итак, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{h}{h_1}$, что и требовалось доказать.

544. Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2 . Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

Решение. Пусть коэффициент подобия данных треугольников равен k . Тогда $\frac{75}{300} = k^2$, откуда $k^2 = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$. Искомая сторона равна $k \cdot 9$ м, т. е. 4,5 м.

Ответ. 4,5 м.

545. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и их сходственные стороны относятся как 6 : 5. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 77 см^2 . Найдите площади треугольников.

Решение. Площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначим через S и S_1 .

Тогда $S : S_1 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$, откуда $S = \frac{36}{25} S_1$. По условию $S - S_1 = 77 \text{ см}^2$, т. е. $\frac{36}{25} S_1 - S_1 = 77 \text{ см}^2$, или $\frac{11}{25} S_1 = 77 \text{ см}^2$, откуда $S_1 = 175 \text{ см}^2$.

$$S = S_1 + 77 \text{ см}^2 = 252 \text{ см}^2.$$

Ответ. $S_{ABC} = 252 \text{ см}^2$, $S_{A_1B_1C_1} = 175 \text{ см}^2$.

546. План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображенного на плане треугольника равна $87,5 \text{ см}^2$. Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1 : 100 000.

Решение. Пусть S — площадь земельного участка, выраженная в квадратных сантиметрах. Тогда

$$\frac{87,5}{S} = k^2, \text{ где } k = \frac{1}{100\,000}.$$

Отсюда $S = (100\,000)^2 \cdot 87,5 \text{ см}^2 = 87,5 \text{ км}^2$.

Ответ. $87,5 \text{ км}^2$.

547. Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Решение. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причем

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

(где k — коэффициент подобия). Тогда

$$AB = k \cdot A_1B_1,$$

$$BC = k \cdot B_1C_1,$$

$$CA = k \cdot C_1A_1.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$AB + BC + CA = k \cdot (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1),$$

откуда

$$\frac{AB + BC + CA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1} = k,$$

что и требовалось доказать.

548. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сходственные стороны BC и B_1C_1 соответственно равны 14 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение. Отношение периметров подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно коэффициенту подобия, т. е. отношению сходственных сторон BC и B_1C_1 :

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{140 \text{ см}}{56 \text{ см}} = 2,5.$$

Ответ. 2,5.

549. Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 26 см.

Решение. Отношение периметров данного треугольника и треугольника, подобного данному, равно коэффициенту подобия k , т. е.

$$k = \frac{15 + 20 + 30}{26} = 2,5.$$

Стороны треугольника, подобного данному, в k раз меньше сторон данного треугольника, т. е. искомые стороны равны $15 \text{ см} : 2,5 = 6 \text{ см}$, $20 \text{ см} : 2,5 = 8 \text{ см}$, $30 \text{ см} : 2,5 = 12 \text{ см}$.

Ответ. 6 см, 8 см, 12 см.

§ 2. Признаки подобия треугольников

550. По данным рисунка 132 (рис. 193 учебника) найдите x и y .

Решение. а) На рисунке 132, а прямоугольные треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников (они имеют

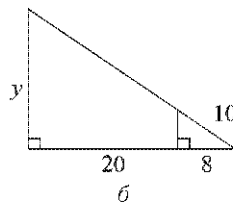
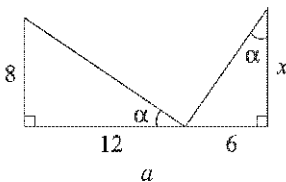


Рис. 132

по равному прямому углу и по равному острому углу α). Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон:

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{8}, \text{ откуда } x = 9.$$

б) На рисунке 132, б прямоугольные треугольники также подобны, поэтому

$$\frac{y}{\sqrt{10^2 - 8^2}} = \frac{28}{8}, \text{ откуда } y = \frac{28 \cdot 6}{8} = 21.$$

Ответ. $x = 9$, $y = 21$.

551. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E . Прямые AE и BC пересекаются в точке F . Найдите: а) EF и FC , если $DE = 8$ см, $EC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AE = 10$ см; б) DE и EC , если $AB = 8$ см, $AD = 5$ см, $CF = 2$ см.

Решение. Треугольники ADE и FCE на рисунке 133 подобны по первому признаку подобия треугольников (углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AF , углы 3 и 4 равны как вертикальные). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{EF}{AE} = \frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}.$$

а) Из этих равенств получаем:

$$EF = \frac{AE \cdot EC}{DE} = \frac{10 \cdot 4}{8} \text{ см} = 5 \text{ см},$$

$$FC = \frac{AD \cdot EC}{DE} = \frac{7 \cdot 4}{8} \text{ см} = 3,5 \text{ см}.$$

б) Из тех же равенств следует:

$$\frac{EC}{DE} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{5}, \text{ откуда } EC = \frac{2}{5}DE.$$

Так как $DE + EC = DC = AB = 8$ см, то $DE + \frac{2}{5}DE = 8$ см.

Отсюда

$$DE = \frac{40}{7} \text{ см} = 5\frac{5}{7} \text{ см};$$

$$EC = \frac{2}{5}DE = \frac{2}{5} \cdot \frac{40}{7} \text{ см} = 2\frac{2}{7} \text{ см}.$$

Ответ. а) $EF = 5$ см, $FC = 3,5$ см; б) $DE = 5\frac{5}{7}$ см, $EC = 2\frac{2}{7}$ см.

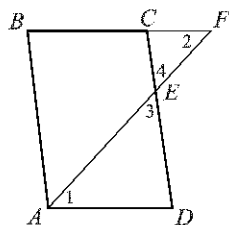


Рис. 133

552. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O . Найдите: а) AB , если $OB = 4$ см, $OD = 10$ см, $DC = 25$ см;

- б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB = a$, $DC = b$; в) AO , если $AB = 9,6$ дм, $DC = 24$ см, $AC = 15$ см.

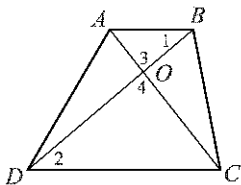


Рис. 134

Решение. На рисунке 134 треугольники AOB и COD подобны по двум углам (углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и DC секущей BD , углы 3 и 4 равны как вертикальные). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}.$$

Отсюда получаем:

а) $AB = \frac{DC \cdot BO}{OD} = \frac{25 \cdot 4}{10}$ см = 10 см;

б) $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$;

в) $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{AC - AO}$, или $\frac{96}{24} = \frac{AO}{15 \text{ см} - AO}$. Отсюда находим:
 $4(15 \text{ см} - AO) = AO$, $AO = 12$ см.

Ответ. а) 10 см; б) $\frac{a}{b}$; в) 12 см.

553. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

Решение. а) Два равнобедренных треугольника, имеющие по равному острому углу, могут не быть подобными. Например, равнобедренный треугольник с углом в 50° при основании и равнобедренный треугольник с углом в 50° между боковыми сторонами не подобны, так как углы первого треугольника равны 50° , 50° , 80° , а второго 50° , 65° , 65° .

б). в) Если два равнобедренных треугольника имеют по равному тупому углу (или по прямому углу), то эти равные углы лежат между боковыми сторонами треугольника. Боковые стороны одного равнобедренного треугольника пропорциональны боковым сторонам другого равнобедренного треугольника. Следовательно, указанные треугольники подобны по второму признаку подобия треугольников.

Ответ. а) Не всегда; б) да; в) да.

554. Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M . Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями $AD = 8$ см, $BC = 5$ см и боковыми сторонами $AB = 3,9$ см, $CD = 3,6$ см (рис. 135). Требуется найти MB и MC .

Треугольники AMD и BMC подобны по двум углам (угол M — общий; $\angle A = \angle MBC$, так как эти углы являются соответственными при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AM).

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD}, \text{ или } \frac{MB}{MB + 3,9 \text{ см}} = \frac{5}{8}.$$

Отсюда получаем:

$$8MB = 5MB + 19,5 \text{ см}, MB = 6,5 \text{ см}.$$

Аналогично:

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AD}, \text{ или } \frac{MC}{MC + 3,6 \text{ см}} = \frac{5}{8},$$

откуда находим: $MC = 6$ см.

Ответ. 6,5 см и 6 см.

555. Точки M , N и P лежат соответственно на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC , причем $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырехугольника $AMNP$, если: а) $AB = 10$ см, $AC = 15$ см, $PN : MN = = 2 : 3$; б) $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$.

Решение. а) Четырехугольник $AMNP$ — параллелограмм (рис. 136), поэтому $AM = PN$, $AP = MN$ и, следовательно, $\frac{AM}{MN} = \frac{2}{3}$.

$\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle BMN$), поэтому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MN}, \text{ или } \frac{10}{15} = \frac{10 \text{ см} - AM}{MN}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{2}{3} = \frac{10 \text{ см}}{MN} - \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3} = \frac{10 \text{ см}}{MN},$$

$$MN = 7,5 \text{ см}, AM = \frac{2}{3}MN = 5 \text{ см}.$$

Итак, $MN = AP = 7,5$ см; $AM = PN = 5$ см.

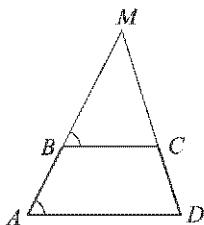


Рис. 135

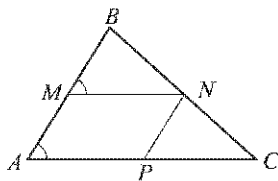


Рис. 136

б) Так как $AM = AP$, то $\frac{AM}{AP} = \frac{AM}{MN} = 1$.

Из равенства $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MN}$ получаем:

$$\frac{a}{b} = \frac{a - AM}{MN}, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{a}{MN} - 1.$$

Отсюда находим:

$$MN = \frac{ab}{a+b}.$$

Итак,

$$AM = MN = NP = AP = \frac{ab}{a+b}.$$

Ответ. а) 7,5 см, 5 см, 7,5 см, 5 см; б) все стороны равны $\frac{ab}{a+b}$.

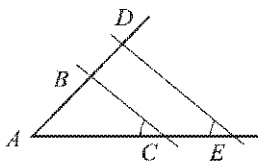


Рис. 137

557. Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE , причем точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC , если $CE = 10$ см, $AD = 22$ см, $BD = 8$ см; б) BD и DE , если $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $CE = 4$ см; в) BC , если $AB : BD = 2 : 1$ и $DE = 12$ см.

Решение. Согласно задаче 556

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \text{ (рис. 137)}.$$

а) $AB = AD - BD = 14$ см, $AC = \frac{AB \cdot CE}{BD} = \frac{14 \cdot 10}{8}$ см = 17,5 см.

б) $BD = \frac{AB \cdot CE}{AC} = \frac{10 \cdot 4}{8}$ см = 5 см.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по двум углам (угол A — общий, $\angle C = \angle E$),

поэтому $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, откуда

$$DE = \frac{AE \cdot BC}{AC} = \frac{(AC + CE) \cdot BC}{AC} = \frac{(8 + 4) \cdot 4}{8} \text{ см} = 6 \text{ (см)}.$$

в) Так как $AB : BD = 2 : 1$, то $AB = 2 \cdot BD$. Поэтому

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB + BD}{AB} = \frac{3BD}{2BD} = \frac{3}{2}.$$

Из подобия треугольников ADE и ABC следует:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ или } \frac{12 \text{ см}}{BC} = \frac{3}{2},$$

откуда $BC = \frac{12 \cdot 2}{3}$ см = 8 см.

Ответ. а) 17,5 см; б) 5 см и 6 см; в) 8 см.

558. Прямые a и b пересечены параллельными прямыми AA_1 , BB_1 , CC_1 , причем точки A , B и C лежат на прямой a , а A_1 , B_1 и C_1 — на прямой b . Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Решение. Если $a \parallel b$, то четырехугольники ABB_1A_1 и BCC_1B_1 — параллелограммы (рис. 138, а), и поэтому $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$,

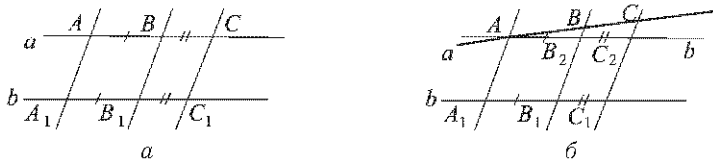


Рис. 138

откуда следует, что

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Если прямые a и b не параллельны, то через точку A проведем прямую b_1 , параллельную прямой b (рис. 138, б). Она пересекает прямую BB_1 в некоторой точке B_2 , а прямую CC_1 — в точке C_2 . Четырехугольники $AB_2B_1A_1$ и $B_2C_2C_1B_1$ — параллелограммы и потому

$$AB_2 = A_1B_1 \text{ и } B_2C_2 = B_1C_1.$$

Согласно задаче 556 имеет место равенство

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}.$$

Отсюда, используя предыдущие равенства, получаем

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

559. На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB ? Ответ обоснуйте.

Решение. Так как $\frac{AC}{AF} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ и $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{5}$, то

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AB},$$

т. е. стороны AC и AD треугольника ACD пропорциональны сторонам AF и AB треугольника AFB (рис. 139). Угол A — общий угол треугольников ACD и AFB , заключенный между сторонами AC и AD треугольника ACD и также между

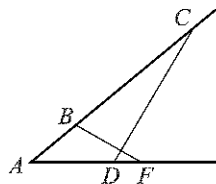


Рис. 139

сторонами AF и AB треугольника AFB . Отсюда по второму признаку подобия треугольников следует, что $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

Ответ. Да.

560. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $A_1B_1 = 4,5$ см, $B_1C_1 = 7,5$ см, $C_1A_1 = 10,5$ см; б) $AB = 1,7$ см, $BC = 3$ см, $CA = 4,2$ см, $A_1B_1 = 34$ дм, $B_1C_1 = 60$ дм, $C_1A_1 = 84$ дм?

Решение. а) Так как $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$,

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{CA}{C_1A_1} = \frac{7}{10,5} = \frac{2}{3},$$

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку подобия треугольников.

б) Так как $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{1}{200}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку подобия треугольников.

Ответ. а) Да; б) да.

561. Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

Решение. Три стороны одного равностороннего треугольника пропорциональны трем сторонам другого равностороннего треугольника. Поэтому два равносторонних треугольника подобны по третьему признаку подобия треугольников.

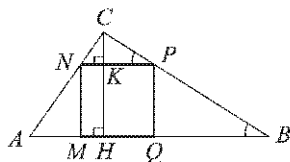


Рис. 140

Треугольники ABC и NPC подобны по двум углам (угол C — общий; $\angle B = \angle CPN$, так как $NP \parallel AB$). Отсюда, согласно задаче 543, следует, что

$$CK = CH - KH = h - x.$$

Треугольники ABC и NPC подобны по двум углам (угол C — общий; $\angle B = \angle CPN$, так как $NP \parallel AB$). Отсюда, согласно задаче 543, следует, что

$$\frac{NP}{AB} = \frac{CK}{CH}, \text{ или } \frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}.$$

Из последнего равенства получаем: $xh = a(h-x)$, откуда $x = \frac{ah}{a+h}$.

Ответ. $\frac{ah}{a+h}$.

562. В треугольнике ABC сторона AB равна a , а высота CH равна h . Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB , а две другие — соответственно на сторонах AC и BC .

Решение. Пусть $MNPQ$ — квадрат, вписанный в треугольник ABC (рис. 140).

Тогда $NP \parallel AB$, и поэтому если CH — высота треугольника ABC , то CK — высота треугольника NPC . Пусть $NP = x$, тогда

563. Через точку M , взятую на медиане AD треугольника ABC , и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K . Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD ; б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $DE \parallel BK$ (рис. 141). Тогда, согласно задаче 556, имеют место равенства

$$\frac{BD}{DC} = \frac{KE}{EC}, \quad \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KE},$$

а поскольку $BD = DC$, то $KE = EC$.

а) Так как точка M — середина отрезка AD , то $AM = MD$, и поэтому $AK = KE$. Итак, $AK = KE = EC$, следовательно, $KC = 2AK$, $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$.

б) Так как $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$, то $\frac{AK}{KE} = \frac{1}{2}$, т. е. $KE = 2AK$, а поскольку $KE = EC$, то $KC = 2KE = 4AK$. Поэтому

$$\frac{AK}{KC} = \frac{1}{4}.$$

Ответ. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$.

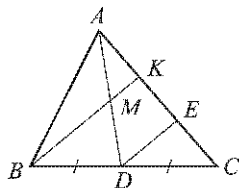


Рис. 141

§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

564. Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см, 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Решение. Сторонами треугольника с искомым периметром являются средние линии данного треугольника, каждая из которых равна половине соответствующей стороны данного треугольника. Поэтому искомым периметр равен

$$\frac{1}{2}(8 + 5 + 7) \text{ см} = 10 \text{ см}.$$

Ответ. 10 см.

565. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его большую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

Решение. Пусть OM — перпендикуляр, проведенный из точки O пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ к его большей стороне AD (рис. 142). Тогда $OM \parallel AB$ и так как точка O — середина отрезка BD , то OM —

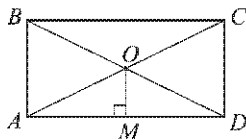


Рис. 142

средняя линия треугольника ABD . Поэтому $AB = 2OM$, а так как по условию $OM = 2,5$ см, то $AB = 5$ см. Итак, меньшая сторона прямоугольника равна 5 см.

Ответ. 5 см.

566. Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC . Найдите периметр треугольника ABC , если периметр треугольника $APQ = 21$ см.

Решение. Так как P и Q — середины сторон AB и AC , то $AB = 2AP$, $AC = 2AQ$, а поскольку отрезок PQ — средняя линия треугольника ABC , то $BC = 2PQ$. Следовательно,

$$AB + BC + CA = 2(AP + AQ + PQ) = 2 \cdot 21 \text{ см} = 42 \text{ см}.$$

Ответ. 42 см.

567. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

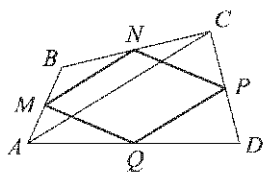


Рис. 143

Решение. Пусть точки M , N , P , Q — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 143). Тогда MN и PQ — средние линии треугольников ABC и ADC ; поэтому

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2}AC \quad \text{и}$$

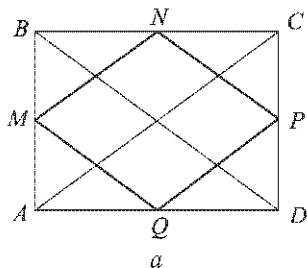
$$PQ \parallel AC, \quad PQ = \frac{1}{2}AC.$$

Отсюда следует, что $MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$.

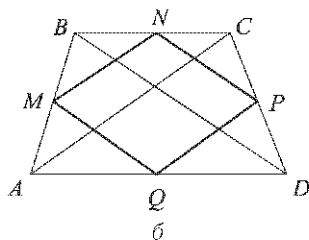
Следовательно, четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм.

568. Докажите, что четырехугольник есть ромб, если его вершинами являются середины сторон: а) прямоугольника; б) равнобедренной трапеции.

Решение. а) Пусть точки M , N , P , Q — середины сторон прямоугольника $ABCD$ (рис. 144, а). Тогда четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, причем $MN = PQ = \frac{1}{2}AC$, $MQ = NP = \frac{1}{2}BD$ (см. ре-



а



б

Рис. 144

шение задачи 567). Но в прямоугольнике диагонали равны, т. е. $AC = BD$. Следовательно, $MN = PQ = MQ = NP$, т. е. $MNPQ$ — ромб.

б) Пусть точки M, N, P, Q — середины сторон равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 144, б). Тогда четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, причем $MN = PQ = \frac{1}{2}AC$, $MQ = NP = \frac{1}{2}BD$ (см. решение задачи 567). Но в равнобедренной трапеции диагонали равны, т. е. $AC = BD$ (см. задачу 388, б). Следовательно, $MN = PQ = MQ = NP$, т. е. $MNPQ$ — ромб.

569. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

Решение. Пусть точки M и N — середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , причем $AD > BC$ (рис. 145). Проведем через точку M прямую ME , параллельную AD . Тогда отрезок ME — средняя линия треугольника ACD , и значит, точка E — середина стороны CD и $ME = \frac{1}{2}AD$.

Так как прямая ME проходит через середину стороны CD и $ME \parallel BC$, то прямая ME пересекает диагональ BD в ее середине, т. е. в точке N . Поэтому отрезок NE — средняя линия треугольника DBC и, следовательно, $NE = \frac{1}{2}BC$.

$$MN = ME - NE = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

Итак, отрезок MN параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности, что и требовалось доказать.

570. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D . Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM .

Решение. Пусть точка N — середина стороны CD , P и Q — точки пересечения отрезков DM и BN с диагональю AC (рис. 146).

Так как $MB = DN$ и $MB \parallel DN$, то $MBND$ — параллелограмм и, следовательно, $DM \parallel BN$. Поэтому $MP \parallel BQ$ и так как точка M — середина AB , то отрезок MP — средняя линия треугольника ABQ . Значит, $AP = PQ$.

Аналогично рассматривая треугольник CPD , находим, что $CQ = PQ$.

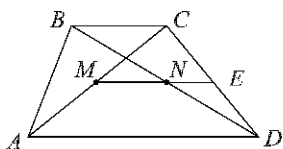


Рис. 145

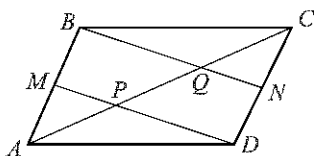


Рис. 146

Итак, $AP = PQ = CQ$.

Отсюда получаем, что $AP = \frac{1}{3}AC = 6$ см, $PC = 12$ см.

Ответ. 6 см и 12 см.

571. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника ABO равна S .

Решение. Так как $BO : OB_1 = 2 : 1$ и так как треугольники AOB и AOB_1 имеют общую высоту, проведенную из вершины A (рис. 147), то

$$S_{AOB} : S_{AOB_1} = 2 : 1,$$

откуда следует, что

$$S_{AOB_1} = \frac{1}{2}S, \quad S_{ABB_1} = S_{AOB} + S_{AOB_1} = \frac{3}{2}S.$$

Так как медиана BB_1 разделяет треугольник ABC на два треугольника с равными площадями, то

$$S_{ABC} = 2S_{ABB_1} = 3S.$$

Ответ. $3S$.

В условиях задач 572–574 использованы следующие обозначения для элементов прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH : $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $CH = h$, $AH = b_c$, $HB = a_c$ (рис. 148).

572. Найдите: а) h , a и b , если $b_c = 25$, $a_c = 16$; б) h , a и b , если $b_c = 36$, $a_c = 64$; в) a , c и a_c , если $b = 12$, $b_c = 6$; г) b , c и b_c , если $a = 8$, $a_c = 4$; д) h , b , a_c и b_c , если $a = 6$, $c = 9$.

Решение. а) $h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$;

$$a = \sqrt{c \cdot a_c} = \sqrt{(a_c + b_c)a_c} = \sqrt{41 \cdot 16} = 4\sqrt{41};$$

$$b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25} = 5\sqrt{41}.$$

б) $h = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$;

$$a = \sqrt{(36 + 64) \cdot 64} = 80;$$

$$b = \sqrt{100 \cdot 36} = 60.$$

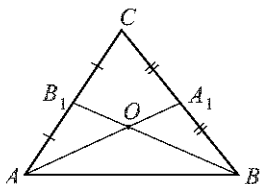


Рис. 147

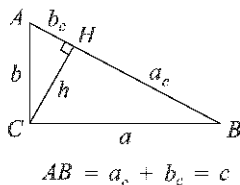


Рис. 148

в) Из равенства $b = \sqrt{c \cdot b_c}$ следует:

$$c = \frac{b^2}{b_c} = \frac{12^2}{6} = 24; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}.$$

Из равенства $a = \sqrt{c \cdot a_c}$ следует:

$$a_c = \frac{a^2}{c} = \frac{(12\sqrt{3})^2}{24} = 18.$$

г) $c = \frac{a^2}{a_c} = \frac{8^2}{4} = 16;$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}; \quad b_c = \frac{b^2}{c} = \frac{(8\sqrt{3})^2}{16} = 12.$$

д) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5};$

$$a_c = \frac{a^2}{c} = \frac{6^2}{9} = 4; \quad b_c = \frac{b^2}{c} = \frac{(3\sqrt{5})^2}{9} = 5;$$

$$h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

Ответ. а) 20, $4\sqrt{41}$ и $5\sqrt{41}$; б) 48, 80 и 60; в) $12\sqrt{3}$, 24 и 18; г) $8\sqrt{3}$, 16 и 12; д) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, 4 и 5.

573. Выразите a_c и b_c через a , b и c .

Решение. Из формул $a = \sqrt{c \cdot a_c}$, $b = \sqrt{c \cdot b_c}$ следует:

$$a_c = \frac{a^2}{c}, \quad b_c = \frac{b^2}{c}.$$

Ответ. $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$.

574. Докажите, что: а) $h = \frac{ab}{c}$; б) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

Решение. а) Для площади S прямоугольного треугольника справедливы равенства:

$$S = \frac{1}{2}ab \quad \text{и} \quad S = \frac{1}{2}ch.$$

Отсюда получаем $ab = ch$, или $h = \frac{ab}{c}$.

б) Из формул $a_c = \frac{a^2}{c}$ и $b_c = \frac{b^2}{c}$ (см. задачу 573) следует: $c = \frac{a^2}{a_c}$ и $c = \frac{b^2}{b_c}$.

Следовательно, $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

575. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 50 мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины прямого угла.

Решение. По условию $b : a = 3 : 4$, $c = 50$ мм (см. рис. 148). Используя равенства $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$ (см. задачу 573), получаем:

$$\frac{b_c}{a_c} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{9}{16}, \text{ т. е. } b_c = \frac{9}{16} a_c.$$

Так как $a_c + b_c = c$, то $a_c + \frac{9}{16} a_c = 50$ мм, откуда

$$a_c = 32 \text{ мм}, \quad b_c = 18 \text{ мм}.$$

Ответ. 32 мм и 18 мм.

576. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6 : 5.

Решение. Пусть $a_c = b_c + 11$ см (см. рис. 148). Так как $a_c > b_c$, то $\sqrt{c \cdot a_c} > \sqrt{c \cdot b_c}$, т. е. $a > b$. Поэтому, согласно условию задачи, $a : b = 6 : 5$. Но $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{c \cdot a_c}}{\sqrt{c \cdot b_c}} = \sqrt{\frac{a_c}{b_c}}$ и, значит, $\sqrt{\frac{a_c}{b_c}} = \frac{6}{5}$, откуда $\frac{a_c}{b_c} = \frac{36}{25}$, т. е. $a_c = \frac{36}{25} b_c$.

Следовательно, $\frac{36}{25} b_c = b_c + 11$ см. Отсюда находим:

$$\begin{aligned} b_c &= 25 \text{ см}, \\ a_c &= b_c + 11 \text{ см} = 36 \text{ см}, \\ c &= a_c + b_c = 61 \text{ см}. \end{aligned}$$

Ответ. 61 см.

577. В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, проведена высота к большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

Решение. Так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, то данный треугольник — прямоугольный, причём гипотенуза равна 13 см. Пусть $a = 12$ см, $b = 5$ см (см. рис. 148). Требуется найти a_c и b_c .

Из равенства $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$ (см. задачу 574, б) следует, что $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{144}{25}$, т. е. $a_c = \frac{144}{25} b_c$.

Так как $a_c + b_c = c = 13$ см, то $\frac{144}{25} b_c + b_c = 13$ см, откуда находим:

$$b_c = \frac{25}{13} \text{ см} = 1 \frac{12}{13} \text{ см}, \quad a_c = \frac{144}{13} \text{ см} = 11 \frac{1}{13} \text{ см}.$$

Ответ. $11 \frac{1}{13}$ см и $1 \frac{12}{13}$ см.

579. Для определения высоты столба A_1C_1 , изображенного на рисунке 149 (рис. 199 учебника), использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если $BC_1 = 6,3$ м, $BC = 3,4$ м, $AC = 1,7$ м?

Решение. Треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по двум углам (угол B — общий, углы C и C_1 — прямые), поэтому

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC},$$

откуда

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC} = \frac{1,7 \cdot 6,3}{3,4} \text{ м} = 3,15 \text{ м}.$$

Ответ. 3,15 м.

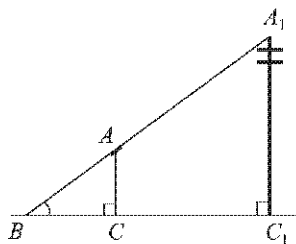


Рис. 149

580. Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2,5 м. Найдите высоту дерева.

Решение. Пусть A_1C_1 — высота дерева, AC — высота человека, BC_1 — длина тени дерева, BC — длина тени человека (см. рис. 149). Тогда

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC} = \frac{1,7 \cdot 10,2}{2,5} \text{ м} = 6,936 \text{ м}.$$

Ответ. 6,936 м.

581. Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 150 (рис. 203 учебника). Луч света FD , отражаясь от зеркала в точке D , попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4,8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

Решение. Треугольники ABD и EDF подобны по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$ по условию, углы с вершинами A и E — прямые). Поэтому

$$\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{DE}, \text{ или } \frac{165 - 12}{120} = \frac{EF}{480 \text{ см}},$$

откуда $EF = 612$ см = 6,12 м.

Ответ. 6,12 м.

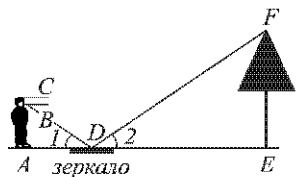


Рис. 150

582. Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC и углы BAC и ACB . Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC . Найдите AB , если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6,3$ см, $A_1B_1 = 7,2$ см.

Решение. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

$$\text{откуда } AB = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{A_1C_1} = \frac{7,2 \cdot 42}{6,3} \text{ м} = 48 \text{ м.}$$

Ответ. 48 м.

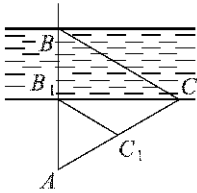


Рис. 151

583. На рисунке 151 (рис. 204 учебника) показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1 . Определите BB_1 , если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

Решение. Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 следует, что

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}, \text{ или } \frac{34 \text{ м} + BB_1}{34 \text{ м}} = \frac{100}{32}.$$

Отсюда находим: $BB_1 = 72,25$ м.

Ответ. 72,25 м.

Задачи на построение

585. Начертите отрезок AB и разделите его в отношении: а) $2 : 5$; б) $3 : 7$; в) $4 : 3$.

Решение. а) Проведем луч AM , не лежащий на прямой AB . От точки A на этом луче отложим 7 равных отрезков произвольной длины: $AA_1, A_1A_2, \dots, A_6A_7$. Проведем прямую A_7B , а через точки A_1, A_2, \dots, A_6 проведем прямые, параллельные прямой A_7B (как это сделать, описано в решении задачи 222). Эти прямые разделяют отрезок AB на 7 равных отрезков: $AB_1, B_1B_2, \dots, B_6B$. Очевидно, что $AB_2 : B_2B = 2 : 5$.

б), в) Построение выполняется аналогично.

586. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины меньшего из данных углов.

Решение. Задачу нужно понимать так: даны два неравных угла и отрезок (рис. 152, а); требуется построить треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а биссектриса треугольника, проведенная из вершины меньшего из этих двух углов, равна данному отрезку.

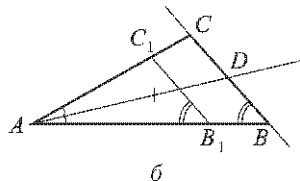
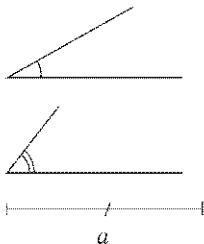


Рис. 152

Сначала построим какой-нибудь треугольник, подобный искомому. Для этого начертим произвольный отрезок AB_1 и построим треугольник AB_1C_1 , у которого углы A и B_1 равны соответственно меньшему и большему данным углам (рис. 152, б).

Далее построим биссектрису угла A и отложим на ней отрезок AD , равный данному отрезку. Через точку D проведем прямую, параллельную B_1C_1 . Она пересекает стороны угла A в некоторых точках B и C (рис. 152, б).

Треугольник ABC — искомый. В самом деле, по построению угол A треугольника ABC равен меньшему из данных углов, а так как $BC \parallel B_1C_1$, то $\angle B = \angle B_1$ и, следовательно, угол B равен другому из данных углов. Наконец, по построению биссектриса AD треугольника ABC равна данному отрезку. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Очевидно, задача имеет единственное решение, если сумма двух данных углов меньше 180° , и не имеет решений, если эта сумма больше или равна 180° .

587. Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

Решение. Сначала построим какой-нибудь треугольник AB_1C_1 , у которого углы B_1 и C_1 равны соответственно двум данным углам.

Затем проведем высоту AH_1 этого треугольника и отложим на луче AH_1 отрезок AH , равный данной высоте искомого треугольника.

Через точку H проведем прямую, параллельную B_1C_1 . Она пересекает лучи AB_1 и AC_1 в каких-то точках B и C .

Треугольник ABC — искомый. Это доказывается таким же образом, как и в задаче 586.

Если сумма двух данных углов меньше 180° , то задача имеет единственное решение, в противном случае решений нет.

588. Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AM , если известно, что $AB : AC = 2 : 3$.

Решение. Задачу нужно понимать так: даны угол и отрезок (рис. 153, а); требуется построить треугольник ABC , у которого угол A равен данному углу, медиана AM равна данному отрезку, а отношение сторон AB и AC равно $2 : 3$.

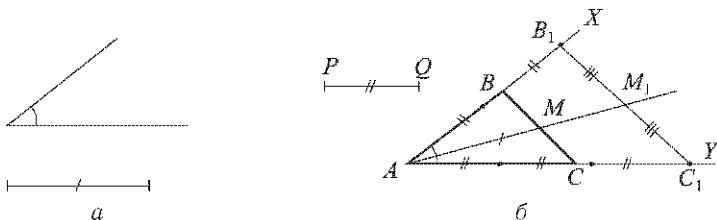


Рис. 153

Построим угол XAY , равный данному углу. Затем возьмем какой-нибудь отрезок PQ и на луче AH отложим отрезок AB_1 , равный $2PQ$, а на луче AY — отрезок AC_1 , равный $3PQ$ (рис. 153, б).

Проведем отрезок B_1C_1 , построим его середину и обозначим ее буквой M_1 .

На луче AM_1 отложим отрезок AM , равный данному отрезку, и через точку M проведем прямую, параллельную B_1C_1 . Она пересекает луч AH и AY в некоторых точках B и C (см. рис. 153, б).

Треугольник ABC — искомый. Действительно, угол A по построению равен данному углу, а так как $BC \parallel B_1C_1$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{2}{3}$. Наконец, отрезок AM , равный по построению данному отрезку, является медианой треугольника ABC . Доказательство этого факта содержится в решении задачи 611 (см. ниже). Таким образом, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Если данный угол не является развернутым, то задача имеет единственное решение.

589. Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC , если известно, что $AB : AC = 2 : 1$.

Решение. На рисунке 154, а изображены данный угол и данный отрезок. Построим угол XAY , равный данному углу. Затем возьмем какой-нибудь отрезок PQ и отложим на луче AH отрезок AB_1 , равный $2PQ$, а на луче AY — отрезок AC_1 , равный PQ (рис. 154, б).

На луче C_1B_1 отложим отрезок C_1B_2 , равный данному отрезку, и через точку B_2 проведем прямую, параллельную AC_1 . Она пересекает луч AH в некоторой точке B .

Через точку B проведем прямую, параллельную C_1B_1 . Эта прямая пересекает луч AY в некоторой точке C .

Треугольник ABC — искомый. В самом деле, угол A равен данному углу по построению. Так как $BC \parallel B_2C_1$ и $B_2B \parallel C_1C$, то четырехугольник BCC_1B_2 — параллелограмм, и поэтому $BC = C_1B_2$, а значит, сторона BC треугольника ABC равна данному отрезку. Наконец, так

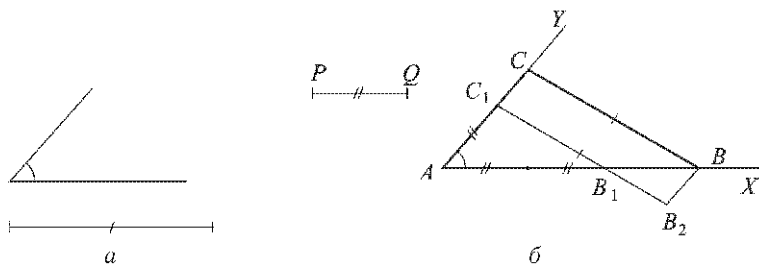


Рис. 154

как $BC \parallel B_1C_1$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{2}{1}$. Таким образом, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Если данный угол не является развернутым, то задача имеет единственное решение.

590. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

Решение. Задача решается таким же образом, как и задача 589, при условии, что $\angle A = 90^\circ$.

§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

591. Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C , если: а) $BC = 8$, $AB = 17$; б) $BC = 21$, $AC = 20$; в) $BC = 1$, $AC = 2$; г) $AC = 24$, $AB = 25$.

Решение. а) $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$; $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{15}{17}$; $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{8}{15}$; $\cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A = \frac{8}{17}$; $\sin B = \cos A = \frac{15}{17}$; $\operatorname{tg} B = \frac{15}{8}$.

б) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$; $\sin A = \cos B = \frac{21}{29}$; $\cos A = \sin B = \frac{20}{29}$; $\operatorname{tg} A = \frac{21}{20}$; $\operatorname{tg} B = \frac{20}{21}$.

в) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5}$; $\sin A = \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos A = \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} B = 2$.

г) $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25}$; $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} B = \frac{24}{7}$; $\cos A = \sin B = \frac{24}{25}$; $\sin A = \cos B = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$.

О т в е т. а) $\sin A = \cos B = \frac{8}{17}$, $\cos A = \sin B = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} A = \frac{8}{15}$, $\operatorname{tg} B = \frac{15}{8}$; б) $\sin A = \cos B = \frac{21}{29}$, $\cos A = \sin B = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg} A = \frac{21}{20}$, $\operatorname{tg} B = \frac{20}{21}$; в) $\sin A = \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = 2$;

г) $\sin A = \cos B = \frac{7}{25}$, $\cos A = \sin B = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$, $\operatorname{tg} B = \frac{24}{7}$.

592. Постройте угол α , если: а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; в) $\cos \alpha = 0,2$; г) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; д) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; е) $\sin \alpha = 0,4$.

Решение. а) Возьмем какой-нибудь отрезок PQ и построим прямоугольный треугольник ABC , у которого катет $BC = PQ$, а катет $AC = 2PQ$. Тогда $\angle A = \alpha$, так как $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$.

б) Аналогично п. а) построим прямоугольный треугольник ABC , у которого отношение катетов $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$. Тогда $\angle A = \alpha$.

в) Возьмем какой-нибудь отрезок PQ и построим прямоугольный треугольник ABC , у которого катет $AC = PQ$, а гипотенуза $AB = 5PQ$. Тогда $\angle A = \alpha$, так как $\cos A = \frac{AC}{AB} = 0,2$.

г) Аналогично п. в) построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , у которого $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$. Тогда $\angle A = \alpha$.

д) Возьмем какой-нибудь отрезок PQ и построим прямоугольный треугольник ABC , у которого катет $BC = PQ$, а гипотенуза $AB = 2PQ$. Тогда $\angle A = \alpha = 30^\circ$, так как $\sin A = \frac{1}{2}$.

е) Аналогично п. д) построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , у которого $BC = 2$, $AB = 5$. Тогда $\angle A = \alpha$.

593. Найдите: а) $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; в) $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

Решение. а) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}$;

б) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

в) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$;

г) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Ответ. а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; г) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

594. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b , а противолежащий угол равен β . а) Выразите другой катет, противолежащий ему угол и гипотенузу через b и β . б) Найдите их значения, если $b = 10$ см, $\beta = 50^\circ$.

Решение. а) Пусть другой катет равен a , противолежащий ему угол равен α , а гипотенуза равна c .

Тогда

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta, \quad \alpha + \beta = 90^\circ, \quad \frac{b}{c} = \sin \beta,$$

откуда

$$a = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad c = \frac{b}{\sin \beta}.$$

б) Если $b = 10$ см, $\beta = 50^\circ$, то

$$a = \frac{10 \text{ см}}{\operatorname{tg} 50^\circ} \approx 8,39 \text{ см}, \quad \alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ, \quad c = \frac{10 \text{ см}}{\sin 50^\circ} \approx 13,05 \text{ см}.$$

Ответ. а) $\frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$, $90^\circ - \beta$, $\frac{b}{\sin \beta}$; б) $\approx 8,39$ см, 40° , $\approx 13,05$ см.

595. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b , а прилежащий к нему угол равен α . а) Выразите второй катет, прилежащий к нему острый угол и гипотенузу через b и α . б) Найдите их значения, если $b = 12$ см, $\alpha = 42^\circ$.

Решение. а) Пусть второй катет равен a , прилежащий к нему угол равен β , а гипотенуза равна c . Тогда

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha + \beta = 90^\circ, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha,$$

откуда

$$a = b \operatorname{tg} \alpha, \quad \beta = 90^\circ - \alpha, \quad c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

б) Если $b = 12$ см, $\alpha = 42^\circ$, то

$$a = 12 \text{ см} \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \approx 11 \text{ см},$$

$$\beta = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ,$$

$$c = \frac{12 \text{ см}}{\cos 42^\circ} \approx 16 \text{ см}.$$

Ответ. а) $b \operatorname{tg} \alpha$, $90^\circ - \alpha$, $\frac{b}{\cos \alpha}$; б) ≈ 11 см, 48° , ≈ 16 см.

596. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , а один из острых углов равен α . Выразите второй острый угол и катеты через c и α и найдите их значения, если $c = 24$ см, а $\alpha = 35^\circ$.

Решение. Пусть второй острый угол равен β , а катеты равны a и b , причем катет, равный a , лежит против угла α . Тогда

$$\beta = 90^\circ - \alpha, \quad a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha.$$

Если $c = 24$ см, $\alpha = 35^\circ$, то

$$\beta = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ,$$

$$a = 24 \text{ см} \cdot \sin 35^\circ \approx 14 \text{ см},$$

$$b = 24 \text{ см} \cdot \cos 35^\circ \approx 20 \text{ см}.$$

Ответ. $90^\circ - \alpha$, $c \sin \alpha$, $c \cos \alpha$; 55° , ≈ 14 см, ≈ 20 см.

597. В прямоугольном треугольнике катеты равны a и b . Выразите через a и b гипотенузу и острые углы треугольника и найдите их значения при $a = 12$, $b = 15$.

Решение. Пусть гипотенуза равна c , угол, лежащий против катета, равного a , равен α , а другой острый угол равен β .

Тогда

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

Если $a = 12$, $b = 15$, то

$$c = \sqrt{12^2 + 15^2} \approx 19, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{15}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{15}{12},$$

откуда $\alpha \approx 38^\circ 39'$, $\beta \approx 51^\circ 21'$.

Ответ. $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$; 19 , $\approx 38^\circ 39'$, $\approx 51^\circ 21'$.

598. Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b ; б) основание равно a .

Решение. а) Высота h треугольника равна $b \cdot \sin \alpha$, а основание a треугольника равно $2b \cdot \cos \alpha$ (рис. 155). Поэтому для площади S треугольника получаем выражение

$$S = \frac{1}{2}ah = b^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

б) $h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $S = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ. а) $b^2 \sin \alpha \cos \alpha$; б) $\frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

599. Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 6 см, если угол при большем основании равен α .

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$: $BC = 2$ см, $AD = 6$ см, $\angle A = \alpha$, BH и CF — высоты (рис. 156).

Тогда $\triangle ABH = \triangle DCF$ (по гипотенузе и катету), поэтому $AH = FD$, а так как $HF = DC = 2$ см, то

$$AH = \frac{1}{2}(AD - HF) = 2 \text{ см.}$$

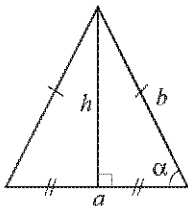


Рис. 155

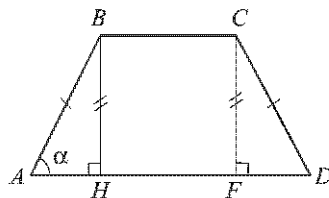


Рис. 156

Из треугольника AH находим:

$$BH = AH \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \text{ см.}$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = 8 \operatorname{tg} \alpha \text{ см}^2.$$

Ответ. $8 \operatorname{tg} \alpha \text{ см}^2$.

600. Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней ее части, если угол наклона откосов к горизонту равен 60° , а высота насыпи равна 12 м (рис. 157, в учебнике рис. 209)?

Решение. Если из концов верхнего основания трапеции, изображенной на рисунке 157, провести высоты к нижнему основанию (как на рисунке 156), то они разобьют нижнее основание на три отрезка. Средний отрезок равен 60 м, а каждый из крайних отрезков равен $\frac{12}{\operatorname{tg} 60^\circ}$ м, т. е. $4\sqrt{3}$ м.

Следовательно, нижнее основание трапеции (ширина насыпи в нижней ее части) равно $(60 + 8\sqrt{3})$ м ≈ 74 м.

Ответ. ≈ 74 м.

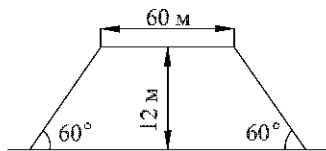


Рис. 157

601. Найдите углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.

Решение. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому они разделяют ромб на четыре равных прямоугольных треугольника с катетами, равными $\sqrt{3}$ и 1 (рис. 158).

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, откуда находим: $\alpha = 60^\circ$ и, значит, $\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (см. рис. 158).

Углы ромба равны 2α , 2β , 2α и 2β , т. е. 120° , 60° , 120° и 60° .

Ответ. 120° , 60° , 120° , 60° .

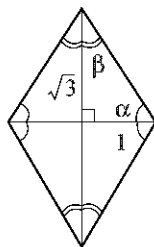


Рис. 158

602. Стороны прямоугольника равны 3 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами треугольника.

Решение. Пусть искомые углы равны α и β (рис. 159).

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\alpha = 30^\circ$, а $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$.

Ответ. 30° и 60° .

603. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12 см, а угол BAD равен $47^\circ 50'$. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB .

Решение. Из треугольника ABD находим (рис. 160):

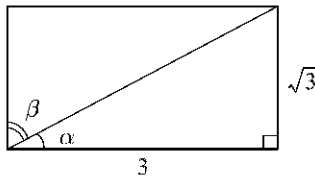


Рис. 159

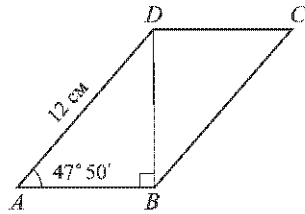


Рис. 160

$$AB = AD \cdot \cos 47^\circ 50' = 12 \text{ см} \cdot \cos 47^\circ 50',$$

$$BD = 12 \text{ см} \cdot \sin 47^\circ 50'.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = AB \cdot BD = 12^2 \text{ см}^2 \cdot \cos 47^\circ 50' \cdot \sin 47^\circ 50' \approx 72 \text{ см}^2.$$

Ответ. $\approx 72 \text{ см}^2$.

Дополнительные задачи

604. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. По условию

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k,$$

где k — коэффициент подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC .

Так как в треугольнике ABC наибольшей стороной является CA , то в треугольнике $A_1B_1C_1$ наибольшей стороной будет сходственная сторона C_1A_1 . Поэтому

$$k = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{7,5}{10} = \frac{3}{4}$$

и, следовательно,

$$A_1B_1 = k \cdot AB = \frac{3}{4} \cdot 6 \text{ см} = 4,5 \text{ см},$$

$$B_1C_1 = k \cdot BC = \frac{3}{4} \cdot 9 \text{ см} = 6,75 \text{ см}.$$

Ответ. 4,5 см и 6,75 см.

605. Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = ab$, где a и b — основания трапеции.

Решение. Пусть AD и BC — основания трапеции $ABCD$ (рис. 161). По условию $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ и, следовательно, углы этих треугольников соответственно равны. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 1 = \angle 2$, а так как AB и CD не параллельны, то $\angle 3 \neq \angle ACD$. Значит, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle B = \angle ACD$. Приравнявая отношения сходственных сторон, получаем:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}, \text{ или } \frac{AC}{a} = \frac{b}{AC},$$

откуда $AC^2 = ab$.

606. Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O . Найдите отношение $OK : ON$, если $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см.

Решение. Пусть $MK = x$, тогда $KP = 7$ см $- x$ (рис. 162). Согласно задаче 535

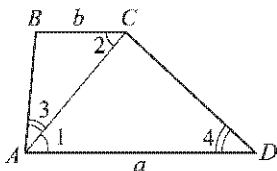


Рис. 161

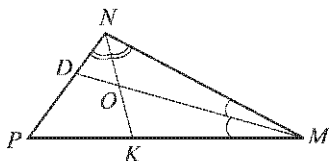


Рис. 162

$$\frac{MK}{KP} = \frac{MN}{NP}, \text{ или } \frac{x}{7 \text{ см} - x} = \frac{5}{3},$$

откуда $x = \frac{35}{8}$, т. е. $MK = \frac{35}{8}$ см.

Так как MO — биссектриса треугольника MKN , то

$$\frac{OK}{ON} = \frac{MK}{MN} = \frac{35}{8} : 5 = 7 : 8.$$

Ответ. 7 : 8.

607. Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4 : 3, а высота, проведенная к основанию, равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота BH и биссектриса AD пересекаются в точке O (рис. 163). По условию $AC : AB = 4 : 3$, поэтому $AH : AB = 2 : 3$.

Так как AO — биссектриса треугольника ABH , то

$$OH : OB = AH : AB = 2 : 3$$

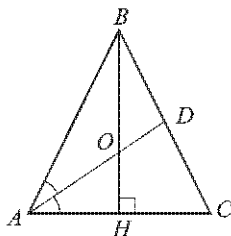


Рис. 163

(см. задачу 535). По условию $BH = 30$ см, следовательно,

$$OH = \frac{30 \text{ см}}{5} \cdot 2 = 12 \text{ см}, \quad OB = BH - OH = 18 \text{ см}.$$

Ответ. 12 см и 18 см.

608. На продолжении боковой стороны OB равнобедренного треугольника AOB с основанием AB взята точка C так, что точка B лежит между точками O и C . Отрезок AC пересекает биссектрису угла AOB в точке M . Докажите, что $AM < MC$.

Решение. Так как OM — биссектриса треугольника AOC (рис. 164), то

$$\frac{AM}{MC} = \frac{OA}{OC} \quad (\text{см. задачу 535}).$$

По условию $OA = OB$, поэтому $OA < OC$ и, следовательно, $\frac{OA}{OC} < 1$. Значит, и $\frac{AM}{MC} < 1$, т. е. $AM < MC$, что и требовалось доказать.

609. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC .

Решение. Из равенства $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ следует, что

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Но биссектриса угла A делит сторону BC в том же отношении $\frac{AB}{AC}$ (задача 535), поэтому AD — биссектриса треугольника ABC .

610. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , делит сторону AC в отношении $2 : 7$, считая от вершины A . Найдите стороны отсеченного треугольника, если $AB = 10$ см, $BC = 18$ см, $CA = 21,6$ см.

Решение. Пусть $ED \parallel AB$, $AE : EC = 2 : 7$ (рис. 165). Положим $EC = x$, тогда

$$AE = 21,6 \text{ см} - x, \quad \frac{21,6 \text{ см} - x}{x} = \frac{2}{7},$$

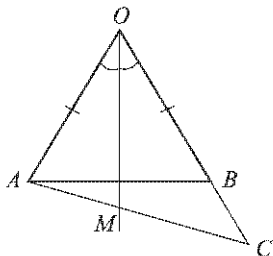


Рис. 164

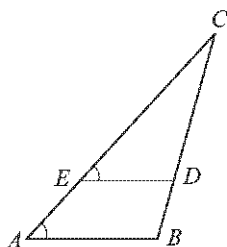


Рис. 165

откуда находим

$$x = 16,8 \text{ см, т. е. } EC = 16,8 \text{ см.}$$

Так как $EB \parallel AB$, то $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ (по двум углам), поэтому

$$\frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC}, \text{ или } \frac{ED}{10 \text{ см}} = \frac{DC}{18 \text{ см}} = \frac{16,8}{21,6}.$$

Отсюда получаем: $ED = 7\frac{7}{9}$ см, $DC = 14$ см.

Ответ. 16,8 см, $7\frac{7}{9}$ см, 14 см.

611. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC , концы которого лежат на сторонах AB и AC .

Решение. Пусть $DE \parallel BC$, DE и AM пересекаются в точке N (рис. 166). Требуется доказать, что $DN = NE$.

Так как $DE \parallel BC$, то

$$\triangle ADN \sim \triangle ABM, \quad \triangle ANE \sim \triangle AMC, \quad \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

Отсюда следует:

$$\frac{DN}{BM} = \frac{AD}{AB}, \quad \frac{NE}{MC} = \frac{AE}{AC}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Из этих равенств получаем: $\frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC}$. Но $BM = MC$, так как AM — медиана треугольника. Следовательно,

$$DN = NE.$$

612. Два шеста AB и CD разной длины a и b установлены вертикально на некотором расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке 167 (рис. 210 учебника). Концы A и D , B и C соединены веревками, которые пересекаются в точке O . По данным рисунка докажите, что:

$$\text{а) } \frac{m}{d} = \frac{x}{b} \text{ и } \frac{n}{d} = \frac{x}{a}; \quad \text{б) } \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

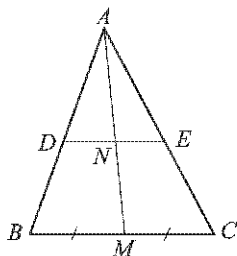


Рис. 166

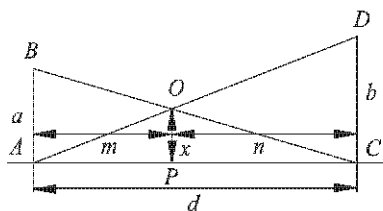


Рис. 167

Найдите x и докажите, что x не зависит от расстояния d между шестами AB и CD .

Решение. а) Пусть точка P — основание перпендикуляра, проведенного из точки O к прямой AC . Тогда $\triangle AOP \sim \triangle ADC$ (по двум углам), поэтому

$$\frac{AP}{AC} = \frac{OP}{DC}, \text{ или } \frac{m}{d} = \frac{x}{b}.$$

Аналогично, из подобия треугольников COP и CBA следует:

$$\frac{CP}{CA} = \frac{OP}{BA}, \text{ или } \frac{n}{d} = \frac{x}{a}.$$

б) Складывая почленно равенства

$$\frac{x}{a} = \frac{n}{d} \text{ и } \frac{x}{b} = \frac{m}{d},$$

доказанные в п. а), и учитывая, что $m + n = d$, получаем:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n+m}{d} = 1.$$

Из этого равенства находим x :

$$x = \frac{ab}{a+b},$$

откуда видно, что x не зависит от d .

Ответ. $\frac{ab}{a+b}$.

613. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если:

- а) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников;
 б) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение. а) Так как $AC = 2AM$, $A_1C_1 = 2A_1M_1$ (рис. 168), то $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AM}{A_1M_1}$. Учитывая условие задачи, получаем:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = \frac{BM}{B_1M_1}.$$

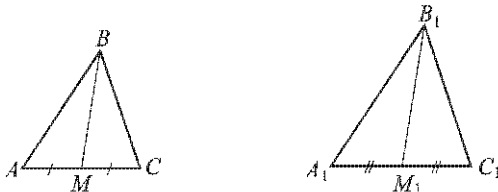


Рис. 168

Следовательно, $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$ по третьему признаку подобия треугольников. Отсюда следует, что $\angle A = \angle A_1$, а значит, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников.

б) Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ (по двум углам). Отсюда следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, а так как по условию

$$\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \text{ то } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треугольников).

614. Диагонали прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A взаимно перпендикулярны. Основание AB равно 6 см, а боковая сторона AD равна 4 см. Найдите DC , DB и CB .

Решение. По теореме Пифагора

$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{13} \text{ см (рис. 169)}.$$

Так как $\angle 1 + \angle 2 = \angle D = 90^\circ$, то $\angle 1 = 90^\circ - \angle 2$, а так как $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника), то $\angle 3 = 90^\circ - \angle 2$. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и поэтому $\triangle ADC \sim \triangle BAD$ по двум углам ($\angle D = \angle A = 90^\circ$, $\angle 3 = \angle 1$).

Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AD},$$

откуда

$$DC = \frac{AD^2}{AB} = \frac{16}{6} \text{ см} = 2\frac{2}{3} \text{ см}.$$

Пусть CH — высота трапеции (см. рис. 169). Тогда

$$CH = AD = 4 \text{ см},$$

$$BH = AB - AH = AB - DC = 6 \text{ см} - 2\frac{2}{3} \text{ см} = 3\frac{1}{3} \text{ см}.$$

По теореме Пифагора

$$CB = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + \left(3\frac{1}{3}\right)^2} \text{ см} = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см}.$$

Ответ. $2\frac{2}{3}$ см, $2\sqrt{13}$ см и $\frac{2}{3}\sqrt{61}$ см.

615. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен ее основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b .

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, а отрезок MN проходит через точку O пересечения диагоналей и параллелен основаниям AD и BC (рис. 170).

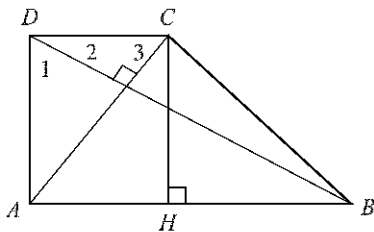


Рис. 169

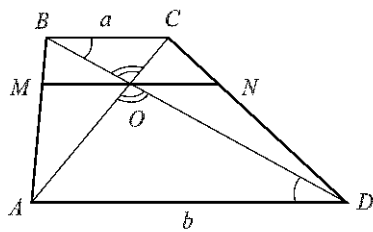


Рис. 170

Так как $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам), то

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{OC}{OA} + 1 = \frac{a}{b} + 1, \text{ или } \frac{OC + OA}{OA} = \frac{a + b}{b},$$

$$\text{т. е. } \frac{AC}{AO} = \frac{a + b}{b}.$$

Так как $MO \parallel BC$, то $\triangle AMO \sim \triangle ABC$ и, следовательно,

$$\frac{BC}{MO} = \frac{AC}{AO}, \text{ или } \frac{a}{MO} = \frac{a + b}{b},$$

откуда $MO = \frac{ab}{a + b}$.

Аналогично находим $ON = \frac{ab}{a + b}$.

Таким образом,

$$MN = MO + ON = \frac{2ab}{a + b}.$$

Ответ. $\frac{2ab}{a + b}$.

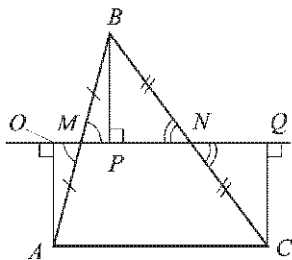


Рис. 171

616. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

Решение. Пусть отрезок MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 171); AO , BP , CQ — перпендикуляры, проведенные к прямой MN . Требуется доказать, что $AO = BP = CQ$.

$\triangle AOM = \triangle BPM$ (по гипотенузе и острому углу), поэтому $AO = BP$. Аналогично, из равенства треугольников BPN и CQN следует, что $BP = CQ$.

Итак, $AO = BP = CQ$.

617. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Решение. Пусть точки M, N, P, Q — середины сторон ромба $ABCD$ (рис. 172). Тогда четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм (см. задачу 567).

Так как MN и MQ — средние линии треугольников ABC и ABD , то $MN \parallel AC$ и $MQ \parallel BD$. Отсюда следует, что $MSOR$ — параллелограмм, а так как угол SOR прямой (диагонали ромба взаимно перпендикулярны), то $MSOR$ — прямоугольник (см. задачу 399). Следовательно, угол RMS — также прямой, а значит, параллелограмм $MNPQ$ является прямоугольником.

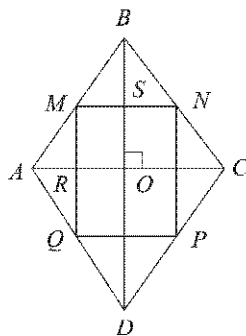


Рис. 172

618. Точки M и N являются соответственно серединами сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD , а P и Q — точки пересечения отрезков AM и AN с диагональю BD (рис. 173). Требуется доказать, что $BQ = QP = PD$.

Так как отрезки AN и BO — медианы треугольника ABC , то $BQ : QO = 2 : 1$, откуда следует, что $BQ = \frac{2}{3}BO$, а поскольку $BO = OD = \frac{1}{2}BD$, то $BQ = \frac{1}{3}BD$.

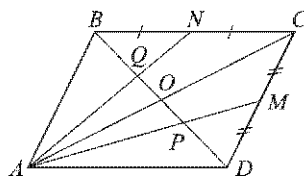


Рис. 173

Аналогично доказывается, что $PD = \frac{1}{3}BD$. Следовательно,

$$QP = BD - (BQ + PD) = BD - \frac{2}{3}BD = \frac{1}{3}BD.$$

Итак, $BQ = QP = PD$.

619. Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D . Докажите, что

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}.$$

Решение. Пусть точка B лежит между точками C и D (рис. 174). Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, проведенную из вершины A , поэтому (см. следствие 2 в п. 52 учебника):

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}. \quad (1)$$

Пусть DK и DH — перпендикуляры к прямым AB и AC . Так как $\triangle ADK = \triangle ADH$ (по гипотенузе и острому углу), то $DK = DH$, т. е. высоты в треугольниках ABD и ACD , проведенные из вершины D , равны. Поэтому, снова используя следствие 2 из п. 52 учебника, получаем:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

откуда имеем: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

620. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A , которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E . Докажите, что $BD = CE$.

Решение. Пусть $AB < AC$, отрезок AK — биссектриса треугольника ABC , точка M — середина стороны BC , $MD \parallel AK$ (рис. 175). Согласно задаче 535

$$\frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC}. \quad (1)$$

Так как $MD \parallel AK$, то

$$\triangle ABK \sim \triangle DBM \text{ и } \triangle ECM \sim \triangle ACK,$$

поэтому

$$\frac{KB}{AB} = \frac{BM}{BD} \text{ и } \frac{CM}{CE} = \frac{KC}{AC}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{BM}{BD} = \frac{CM}{CE}$. Числители в этих отношениях равны ($BM = CM$ по условию), следовательно, равны и знаменатели, т. е. $BD = CE$, что и требовалось доказать.

621. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b , диагональ AC равна a , $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

Решение. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$ (рис. 176; на этом рисунке представлен случай, когда $\alpha < 90^\circ$). Из прямоуголь-

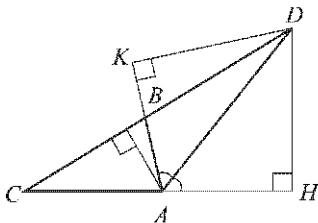


Рис. 174

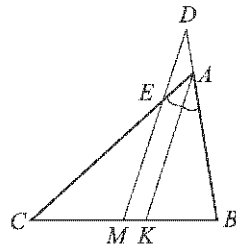


Рис. 175

ного треугольника ACH получаем: $CH = a \sin \alpha$ (это выражение для высоты трапеции сохраняется и в том случае, когда $a \geq 90^\circ$). Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CH = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

Ответ. $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

622. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4}KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см^2 .

Решение. $\triangle CPB \sim \triangle APK$ по двум углам (рис. 177), поэтому $\frac{BP}{PK} = \frac{BC}{AK}$.

Так как $AK = \frac{1}{4}KD$, то $AK = \frac{1}{5}AD = \frac{1}{5}BC$, откуда следует, что $\frac{BC}{AK} = 5$, а значит, и $\frac{BP}{PK} = 5$.

Треугольники APK и APB имеют общую высоту, проведенную из вершины A , поэтому $\frac{S_{APB}}{S_{APK}} = \frac{BP}{PK} = 5$ и, следовательно,

$$S_{APB} = 5S_{APK} = 5 \text{ см}^2.$$

Коэффициент подобия треугольников CPB и APK равен $\frac{BC}{AK} = 5$, откуда следует, что

$$\frac{S_{CPB}}{S_{APK}} = 25, \text{ т. е. } S_{CPB} = 25 \text{ см}^2.$$

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{CPB} = 5 \text{ см}^2 + 25 \text{ см}^2 = 30 \text{ см}^2,$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 60 \text{ см}^2.$$

Ответ. 60 см^2 .

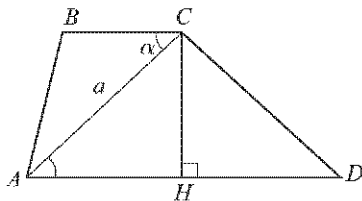


Рис. 176

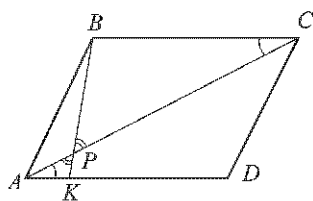


Рис. 177

623. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Найдите углы C и D трапеции.

Решение. Пусть CH — высота трапеции (рис. 178). Тогда

$$AH = BC = 4 \text{ см}, \quad HD = AD - AH = 12 \text{ см}.$$

Согласно утверждению 1° из п. 63

$$CH = \sqrt{AH \cdot HD} = \sqrt{4 \cdot 12} \text{ см} = 4\sqrt{3} \text{ см}.$$

Из прямоугольного треугольника CHD имеем:

$$\operatorname{tg} D = \frac{CH}{HD} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно,

$$\angle D = 30^\circ, \text{ а } \angle BCD = 180^\circ - \angle D = 150^\circ.$$

Ответ. 30° и 150° .

624. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть треугольников, площади которых попарно равны.

Решение. Пусть медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 179). Тогда

$$S_{ABB_1} = S_{CBB_1} \text{ и } S_{AOB_1} = S_{COB_1}$$

(см. задачу 474). Отсюда следует, что $S_{AOB} = S_{BOC}$. Аналогично доказывается, что $S_{BOC} = S_{COA}$. Но

$$S_{AOB} = 2S_{AOC_1} = 2S_{BOC_1},$$

$$S_{BOC} = 2S_{BOA_1} = 2S_{COA_1},$$

$$S_{COA} = 2S_{COB_1} = 2S_{AOB_1},$$

поэтому

$$S_{AOC_1} = S_{BOC_1} = S_{BOA_1} = S_{COA_1} = S_{COB_1} = S_{AOB_1},$$

что и требовалось доказать.

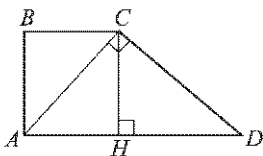


Рис. 178

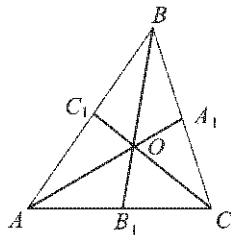


Рис. 179

625. Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ в пять раз больше основания BC . Высота BH пересекает диагональ AC в точке M , площадь треугольника AMH равна 4 см^2 . Найдите площадь трапеции $ABCD$.

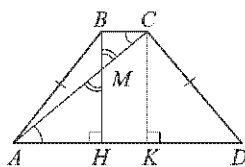


Рис. 180

Решение. По условию $AD = 5BC$. Пусть $CK \perp AD$ (рис. 180). Тогда

$$HK = BC, \quad AH = \frac{AD - HK}{2} = \frac{5BC - BC}{2} = 2BC, \quad \frac{AH}{BC} = 2.$$

$\triangle AMH \sim \triangle CMB$ (по двум углам), поэтому

$$\frac{MH}{MB} = \frac{AH}{BC} = 2, \text{ т. е. } MH = 2MB.$$

Отсюда следует, что $BH = \frac{3}{2}MH$.

По условию

$$S_{AMH} = \frac{1}{2}AH \cdot MH = 4 \text{ см}^2,$$

а так как $AH = 2BC$, то $BC \cdot MH = 4 \text{ см}^2$.

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2}(5BC + BC) \cdot \frac{3}{2}MH = \\ &= 4,5 \cdot BC \cdot MH = 4,5 \cdot 4 \text{ см}^2 = 18 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Ответ. 18 см^2 .

626*. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

Решение. Пусть $DE \parallel AB$ и $D_1E_1 \parallel A_1B_1$ (рис. 181). Тогда, согласно задаче 556, $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DB}$, а так как AD — биссектриса треугольника, то $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$ (задача 535). Следовательно,

$$\frac{CE}{EA} = \frac{AC}{AB}.$$

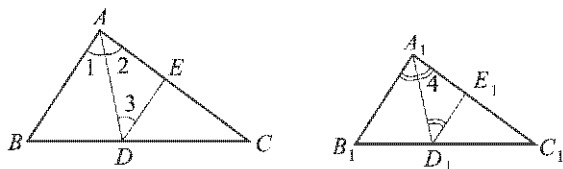


Рис. 181

Аналогично из треугольника $A_1B_1C_1$ получаем:

$$\frac{C_1E_1}{E_1A_1} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

Из условия задачи следует, что $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, поэтому $\frac{CE}{EA} = \frac{C_1E_1}{E_1A_1}$. Прибавив к обеим частям этого равенства 1, получим

$$\frac{CE}{EA} + 1 = \frac{C_1E_1}{E_1A_1} + 1, \text{ т. е. } \frac{AC}{EA} = \frac{A_1C_1}{E_1A_1}.$$

Отсюда имеем: $\frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, а так как по условию $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, то

$$\frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AD}{A_1D_1}. \quad (1)$$

В треугольнике AED $\angle 2 = \angle 3$ (это следует из того, что $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса, и $\angle 1 = \angle 3$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и DE секущей AD), поэтому $DE = EA$. Аналогично получаем: $D_1E_1 = E_1A_1$ и, следовательно, в силу равенства (1) имеем:

$$\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AD}{A_1D_1}.$$

Отсюда следует, что $\triangle AED \sim \triangle A_1E_1D_1$, а значит, $\angle 2 = \angle 4$ и поэтому $\angle A = \angle A_1$. Из равенств

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ и } \angle A = \angle A_1$$

следует, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треугольников), что и требовалось доказать.

627. Дан треугольник ABC . Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC , площадь которого в два раза больше площади треугольника ABC .

Решение. Так как $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = 2$, то $\frac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{2}$, т. е. $A_1B_1 = \sqrt{2} AB$, и также $B_1C_1 = \sqrt{2} BC$, $C_1A_1 = \sqrt{2} CA$.

Построим квадрат со стороной AB . Его диагональ равна $\sqrt{2} AB$, т. е. равна A_1B_1 . Аналогичным образом построим отрезки, равные B_1C_1 и C_1A_1 , а затем построим треугольник $A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

628. Даны три отрезка, длины которых соответственно равны a , b и c . Постройте отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

Решение. Построим неразвернутый угол A (рис. 182). На одной стороне угла отложим отрезки $AC = c$ и $CD = a$, а на другой стороне угла — отрезок $AB = b$. Проведем прямую BC , а затем через точку D

проведем прямую, параллельную прямой BC . Она пересекает луч AB в некоторой точке E . Отрезок BE — искомым.

В самом деле, согласно задаче 556

$$\frac{b}{c} = \frac{BE}{a}, \text{ т. е. } BE = \frac{ab}{c}.$$

629. Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

Решение. Пусть точки K, M, N — данные середины сторон искомого треугольника (рис. 183). Проведем прямые KM, MN, NK , а затем через точки K, M, N проведем прямые, параллельные соответственно прямым MN, NK, KM . Точки A, B, C пересечения проведенных прямых являются вершинами искомого треугольника.

В самом деле, докажем, что точка K — середина стороны AB . По построению четырехугольники $AKMN$ и $BMNK$ — параллелограммы, поэтому $AK = MN$ и $MN = KB$, откуда следует, что $AK = KB$, т. е. точка K — середина стороны AB . Аналогично доказывается, что точки M и N — середины сторон BC и CA .

630. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

Решение. Сначала построим треугольник AOB , в котором AB — данная сторона, а отрезки AO и BO составляют $\frac{2}{3}$ данных медиан (рис. 184).

Затем на лучах AO и BO отложим отрезки AM и BN , равные соответствующим данным медианам, и проведем прямые AN и BM . Они пересекаются в некоторой точке C . Треугольник ABC — искомым.

Докажем это. Нужно доказать, что отрезки AM и BN являются медианами построенного треугольника, т. е. точки M и N — середины сторон BC и AC .

Так как $\frac{AO}{OM} = \frac{BO}{ON} = 2$ (по построению) и углы с вершиной O в треугольниках AOB и MON равны как вертикальные, то $\triangle AOB \sim \triangle MON$ (по второму признаку подобия треугольников), причем коэффициент подобия равен 2. Поэтому $\frac{AB}{MN} = 2$ и $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 184). Отсюда следует, что $MN = \frac{1}{2}AB$ и $MN \parallel AB$.

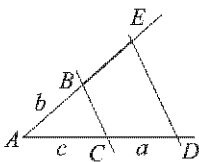


Рис. 182

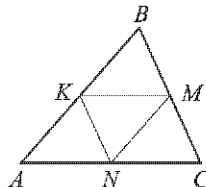


Рис. 183

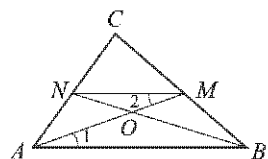


Рис. 184

Следовательно, отрезок MN — средняя линия треугольника ABC , а значит, точки M и N — середины сторон BC и AC .

Задачи повышенной трудности

847. На рисунке 185 (рис. 269 учебника) изображен правильный пятиугольник $ABCDE$, т. е. выпуклый пятиугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Докажите, что: а) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; б) $\frac{DA}{DF} = \frac{DF}{AF}$.

Решение. а) $\triangle AED = \triangle BAE$ по двум сторонам и углу между ними (AE — общая сторона, $ED = AB$, $\angle AED = \angle BAE$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. $\triangle AED \sim \triangle AFE$ по двум углам (угол A — общий, $\angle 1 = \angle 2$).

б) Из подобия треугольников AED и AFE следует, что

$$\frac{DA}{AE} = \frac{AE}{AF} \quad (1)$$

и $\angle AFE = \angle AED$. Но $\angle AED = \frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = 108^\circ$, поэтому $\angle AFE = 108^\circ$, $\angle 3 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

Так как $\angle 1 = \frac{180^\circ - \angle AED}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$, то $\angle 4 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$.

Таким образом, $\angle 4 = \angle 3$ и, следовательно, $DF = DE$, а так как $DE = AE$, то $AE = DF$.

Из равенства (1) получаем:

$$\frac{DA}{DF} = \frac{DF}{AF},$$

что и требовалось доказать.

848. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A , которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E . Докажите, что $BD = CE$.

Решение. Пусть $AB < AC$ и AK — биссектриса треугольника ABC (рис. 186). Согласно задаче 535, $\frac{AC}{AB} = \frac{KC}{KB}$ и, следовательно,

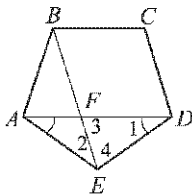


Рис. 185

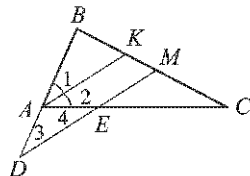


Рис. 186

$KC > KB$. Поэтому точка M лежит между точками K и C , $KC = KM + MC = 2KM + KB$,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2KM + KB}{KB} = \frac{2KM}{KB} + 1.$$

Так как, согласно задаче 556, $\frac{KM}{KB} = \frac{AD}{AB}$, то

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2AD}{AB} + 1,$$

откуда

$$AB + AD = AC - AD, \text{ т. е. } BD = AC - AD.$$

Из параллельности AK и DM следует, что $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$, а так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$ и, следовательно, $AD = AE$. Поэтому

$$BD = AC - AD = AC - AE = CE,$$

что и требовалось доказать.

849. Докажите, что отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

Решение. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 187). Требуется доказать, что лучи A_1A , B_1B и C_1C являются биссектрисами углов A_1 , B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Из прямоугольного треугольника ABB_1 получаем: $AB_1 = AB \cdot \cos A$, а из прямоугольного треугольника ACC_1 находим: $AC_1 = AC \cdot \cos A$. Следовательно, $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$, т. е. стороны AB_1 и AC_1

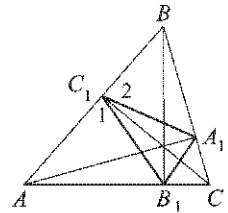


Рис. 187

треугольника AB_1C_1 пропорциональны сторонам AB и AC треугольника ABC . Поэтому $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$, откуда следует, что $\angle 1 = \angle C$. Аналогично доказывается, что $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$, откуда следует, что $\angle 2 = \angle C$.

Таким образом, $\angle 1 = \angle 2$, а так как $\angle AC_1C = \angle BC_1C = 90^\circ$, то $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$, т. е. луч C_1C — биссектриса угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Аналогично доказывается, что лучи A_1A и B_1B — биссектрисы углов A_1 и B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

850. Точки E и F лежат на стороне AB треугольника ABC , причем так, что точка E лежит на отрезке AF и $AE = BF$. Прямая, проведенная через точку E параллельно стороне AC , пересекает прямую, проведенную через точку F параллельно стороне BC , в точке K . Докажите, что точка K лежит на медиане треугольника ABC , проведенной к стороне AB .

Решение. Пусть луч CK пересекает сторону AB в точке M (рис. 188). Требуется доказать, что $AM = MB$.

Так как $EK \parallel AC$, то $\triangle MAC \sim \triangle MEK$, откуда следует, что

$$\frac{MC}{MK} = \frac{AM}{EM}, \text{ т. е. } \frac{MC}{MK} = \frac{AE + EM}{EM} = \frac{AE}{EM} + 1.$$

Так как $FK \parallel BC$, то $\triangle MBC \sim \triangle MFK$, откуда следует, что

$$\frac{MC}{MK} = \frac{MB}{MF}, \text{ т. е. } \frac{MC}{MK} = \frac{MF + BF}{MF} = \frac{BF}{MF} + 1.$$

Приравнивая два выражения для отношения $\frac{MC}{MK}$, получаем: $\frac{AE}{EM} = \frac{BF}{MF}$. Но $AE = BF$ по условию, поэтому $EM = MF$ и, значит,

$$AE + EM = MF + BF, \text{ т. е. } AM = MB.$$

851. Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, не перекрывающегося с этим треугольником. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до вершины прямого угла треугольника, если сумма катетов равна a .

Решение. Обозначим данный прямоугольный треугольник через ABC , а точку пересечения диагоналей квадрата, построенного на гипотенузе BC , — буквой D (рис. 189). Требуется найти AD .

Проведем луч DE так, что $\angle CDE = \angle BDA$. Тогда $\triangle ABD = \triangle ECD$ по стороне и двум прилежащим углам $BD = CD$, так как каждый из этих отрезков равен половине диагонали квадрата; $\angle BDA = \angle CDE$ по построению;

$$\angle ABD = \angle 1 + 45^\circ,$$

$$\angle DCE = 180^\circ - (\angle 2 + 45^\circ) = 180^\circ - (90^\circ - \angle 1 + 45^\circ) = \angle 1 + 45^\circ$$

и, следовательно, $\angle ABD = \angle DCE$.

Отсюда следует, что $AD = DE$ и $AB = CE$. Поэтому

$$AE = AC + CE = AC + AB = a.$$

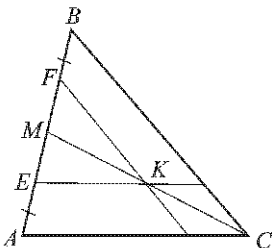


Рис. 188

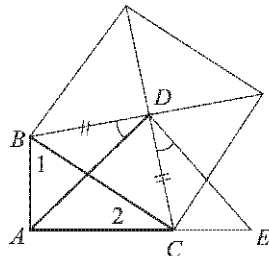


Рис. 189

Треугольник ADE — равнобедренный ($AD = DE$) и прямоугольный ($\angle ADE = \angle CDE + \angle ADC = \angle BDA + \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$). Поэтому

$$AD = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

852. В треугольнике ABC $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$ и $\angle B = \frac{360^\circ}{7}$. Докажите, что $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

Решение. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Требуется доказать, что $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = \frac{720^\circ}{7}$, поэтому $\angle C = 2 \cdot \angle B$, а $\angle B = 2 \cdot \angle A$. Проведем биссектрисы BD и CE (рис. 190). Тогда $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ (по двум углам), откуда следует, что

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{a} = \frac{a}{b}.$$

Отсюда получаем:

$$BD = \frac{ac}{b}, \quad CD = \frac{a^2}{b}.$$

Так как в треугольнике ABD $\angle A = \angle ABD$ (см. рис. 190), то $AD = BD = \frac{ac}{b}$. Сложив равенства $AD = \frac{ac}{b}$ и $CD = \frac{a^2}{b}$, получим: $b = \frac{ac}{b} + \frac{a^2}{b}$, или $b^2 = ac + a^2$, откуда

$$(b - a)(b + a) = ac. \tag{1}$$

$\triangle ACE \sim \triangle ABC$ (по двум углам), откуда следует, что

$$\frac{CE}{a} = \frac{AE}{b} = \frac{b}{c}.$$

Отсюда получаем:

$$CE = \frac{ab}{c}, \quad AE = \frac{b^2}{c}.$$

Так как в треугольнике BCE $\angle B = \angle BCE$, то $BE = CE = \frac{ab}{c}$. Сложив равенства $BE = \frac{ab}{c}$ и $AE = \frac{b^2}{c}$, получим: $c = \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{c}$, или $c^2 = ab + b^2 = b(a + b)$, откуда

$$a + b = \frac{c^2}{b}.$$

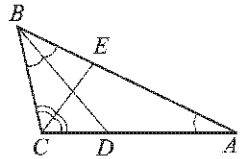


Рис. 190

Подставляя это выражение в равенство (1), приходим к равенству

$$\frac{(b-a)c^2}{b} = ac, \text{ или } bc = ac + ab.$$

Разделив последнее равенство на abc , получим

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

что и требовалось доказать.

853. Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам OA и OB . Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA . Докажите, что $RS \perp OM$.

Решение. Пусть прямая MP пересекается с лучом OB в точке E , а прямая MQ с лучом OA — в точке F (рис. 191).

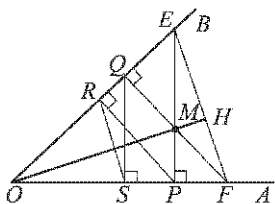


Рис. 191

Так как $PR \parallel FQ$, то $\triangle ORP \sim \triangle OFQ$, откуда следует, что $\frac{OP}{OR} = \frac{OF}{OQ}$. Аналогично из подобия треугольников OSQ и OPE следует, что $\frac{OE}{OP} = \frac{OQ}{OS}$. Перемножая полученные равенства, приходим к пропорции $\frac{OE}{OR} = \frac{OF}{OS}$, которая показывает, что $\triangle OEF \sim \triangle ORS$. Следовательно, $\angle OEF = \angle ORS$ и поэтому $EF \parallel RS$.

Пусть луч OM пересекает отрезок EF в точке H . Для доказательства того, что $RS \perp OM$, достаточно доказать, что $OH \perp EF$.

Прямоугольные треугольники MPF и EPO подобны, так как имеют по равному острому углу ($\angle MFP = \angle QFO = 90^\circ - \angle AOB$ и $\angle OEP = 90^\circ - \angle AOB$, поэтому $\angle MFP = \angle OEP$). Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{MP}{PF} = \frac{OP}{PE}$, т. е. катеты MP и OP треугольника OMP пропорциональны катетам PF и PE треугольника PFE . Следовательно, $\triangle OMP \sim \triangle PFE$, а значит, $\angle POM = \angle PEF$ или $\angle POM = \angle MEN$, т. е. в треугольниках POM и HEM углы с вершинами O и E равны. Углы этих треугольников с вершинами в точке M равны как вертикальные. Поэтому $\triangle HEM \sim \triangle POM$ (по двум углам) и, следовательно, $\angle ENM = \angle OPM = 90^\circ$, т. е. $OH \perp EF$.

854. В равнобедренном треугольнике ABC из середины D основания AC проведен перпендикуляр DH к стороне BC . Пусть M — середина отрезка DH . Докажите, что $BM \perp AH$.

Решение. Пусть AE — высота треугольника ABC (рис. 192). Тогда $DH \parallel AE$ и так как $AD = DC$, то $EH = HC$.

Так как прямоугольные треугольники AEC и BDC (они имеют общий острый угол C) и также прямоугольные треугольники BDC и BHD (они имеют общий угол с вершиной B) подобны, то $\triangle AEC \sim \triangle BHD$. Отрезки AH и BM — сходственные медианы в этих подобных треугольниках, поэтому $\triangle AEN \sim \triangle BMH$, откуда следует, что $\angle EAN = \angle HBM$.

Пусть отрезки AH и BM пересекаются в точке K . Тогда $\angle BHK = \angle ENA = 90^\circ - \angle EAN = 90^\circ - \angle HBM = 90^\circ - \angle HBK$, откуда получаем:

$$\angle BHK + \angle HBK = 90^\circ$$

и, значит, $\angle BKH = 90^\circ$, т. е. $BM \perp AH$.

855. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведен перпендикуляр CD к гипотенузе, а из точки D — перпендикуляры DE и DF к катетам AC и BC . Докажите, что: а) $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$; б) $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$; в) $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2} = \sqrt[3]{AB^2}$.

Решение. а) Из прямоугольных треугольников ABC , BDC и ACB (рис. 193) находим (см. задачи 573, 574):

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC \cdot AE, BD^2 = BC \cdot BF, \\ CD^2 &= AD \cdot BD, AC \cdot BC = AB \cdot CD. \end{aligned} \quad (1)$$

Перемножая первые два равенства и учитывая третье, получаем

$$CD^4 = AC \cdot BC \cdot AE \cdot BF.$$

Заменяя $AC \cdot BC$ на $AB \cdot CD$ (четвертое равенство в (1)) и разделив на CD , приходим к равенству

$$CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } AB^2 &= (AB + BD)^2 = AD^2 + BD^2 + 2 \cdot AD \cdot BD = \\ &= AD^2 + BD^2 + 2CD^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Из треугольников ADE и BDF по теореме Пифагора находим:

$$AD^2 = AE^2 + ED^2, \quad BD^2 = BF^2 + DF^2,$$

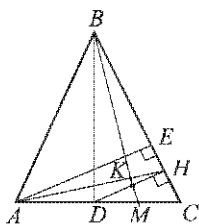


Рис. 192

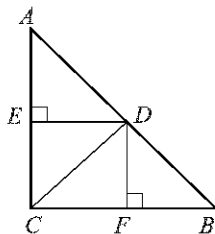


Рис. 193

откуда

$$AD^2 + BD^2 = AE^2 + BF^2 + (ED^2 + DF^2) = AE^2 + BF^2 + CD^2.$$

Подставляя это выражение в равенство (2), получаем

$$AB^2 = AE^2 + BF^2 + 3CD^2,$$

что и требовалось доказать.

в) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, поэтому $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$, а так как $AC = \frac{AD^2}{AE}$ (первое равенство в (1)), то $\frac{AD}{AE} = \frac{AB \cdot AE}{AD^2}$, откуда

$$AD = \sqrt[3]{AB \cdot AE^2}.$$

Аналогично, используя подобие треугольников BDF и BAC и второе равенство в (1), получаем:

$$BD = \sqrt[3]{AB \cdot BF^2}.$$

Отсюда следует:

$$AD + BD = AB = \sqrt[3]{AB \cdot AE^2} + \sqrt[3]{AB \cdot BF^2}.$$

Разделив на $\sqrt[3]{AB}$, приходим к равенству

$$\sqrt[3]{AB^2} = \sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2},$$

что и требовалось доказать.

856. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке P . Известно, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD = BD = CD$. а) Найдите все углы четырехугольника. б) Докажите, что $AB^2 = BP \cdot BD$.

Решение. а) Пусть $\angle ADP = \alpha$. Тогда $\angle PDC = 2\alpha$, $\angle PAD = \frac{3}{2}\alpha$ (рис. 194).

Треугольник ACD — равнобедренный ($AD = CD$), поэтому $\angle ACD = \frac{3}{2}\alpha$. В треугольнике ACD :

$$\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\alpha + 3\alpha = 180^\circ,$$

откуда имеем: $\alpha = 30^\circ$ и, значит, $\angle D = 3\alpha = 90^\circ$.

В равнобедренном треугольнике ABD

$$\angle A = \angle ABD = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 75^\circ.$$

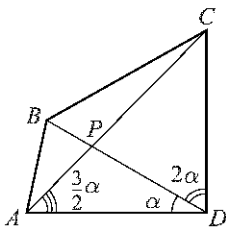


Рис. 194

В равнобедренном треугольнике BCD

$$\angle C = \angle CBD = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 60^\circ.$$

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ.$$

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 135^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\angle D = 90^\circ$.

$$\text{б) } \angle BAP = \angle BAD - \angle PAD = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

$\triangle ABP \sim \triangle ABD$ по двум углам ($\angle BAP = \angle ABD = 30^\circ$, $\angle B$ — общий), поэтому $\frac{AB}{BP} = \frac{BD}{AB}$, т. е.

$$AB^2 = BP \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

Ответ. а) 75° , 135° , 60° и 90° .

857. Точка M не лежит на прямых, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$. Докажите, что существуют точки N , P и Q , расположенные так, что A , B , C и D являются соответственно серединами отрезков MN , NP , PQ и QM .

Решение. Пусть точка N симметрична точке M относительно точки A , точка P симметрична точке N относительно точки B , точка Q симметрична точке P относительно точки C (рис. 195).

Тогда точки A , B , C являются серединами отрезков MN , NP , PQ и остается доказать, что точка D — середина отрезка QM .

Обозначим середину отрезка QM через D_1 . Согласно задаче 567 четырехугольник $ABCD_1$ — параллелограмм. Но по условию задачи $ABCD$ — тоже параллелограмм. Следовательно, точки D_1 и D совпадают, т. е. D — середина отрезка QM .

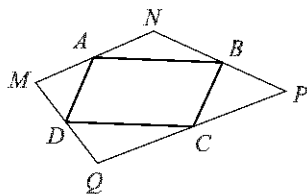


Рис. 195

858. Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырехугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон.

Решение. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором стороны AB и DC не параллельны, точки M и N — середины сторон AD и BC (рис. 196). Требуется доказать, что

$$MN < \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Отметим точку D_1 , симметричную точке D относительно точки N . Треугольники NDC и ND_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($NC = NB$, $ND = ND_1$, $\angle DNC = \angle D_1NB$), поэтому $BD_1 = DC$

и $\angle DCN = \angle D_1BN$. Из последнего равенства следует, что $BD_1 \parallel DC$ и, следовательно, точки A , B и D_1 не лежат на одной прямой.

В треугольнике ABD_1

$$AD_1 < AB + BD_1, \text{ т. е. } AD_1 < AB + CD.$$

Отрезок MN — средняя линия треугольника DAD_1 , поэтому $AD_1 = 2MN$. Таким образом,

$$2 \cdot MN < AB + CD, \text{ т. е. } MN < \frac{1}{2}(AB + CD).$$

859. Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырехугольника равна половине его периметра, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Решение. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, точки M , P , N , Q — середины его сторон (рис. 197). По условию

$$MN + PQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \quad (1)$$

Требуется доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

Докажем, что $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. Предположим, что это не так: например, AB и CD не параллельны. Тогда, согласно задаче 858,

$$MN < \frac{1}{2}(AB + CD). \quad (2)$$

С другой стороны,

$$PQ \leq \frac{1}{2}(BC + DA). \quad (3)$$

Знак равенства в (3) имеет место в том случае, когда $BC \parallel DA$.

Складывая равенства (2) и (3), получаем:

$$MN + PQ < \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA),$$

что противоречит равенству (1). Следовательно, наше предположение неверно и, значит,

$$AB \parallel CD \text{ и } AD \parallel BC,$$

т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

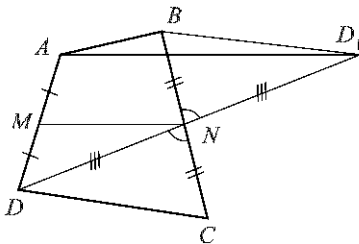


Рис. 196

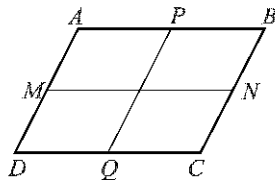


Рис. 197

860. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Решение. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором отрезок MN , соединяющий середины противоположных сторон AD и BC , равен полусумме сторон AB и CD , т. е. $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Тогда $AB \parallel CD$. В самом деле, если предположить, что AB и CD не параллельны, то, согласно задаче 858,

$$MN < \frac{1}{2}(AB + CD),$$

что противоречит условию.

Итак, $AB \parallel CD$, откуда следует, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

861. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Треугольник ABO , где AB — меньшее основание трапеции, равносторонний. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины отрезков OA , OD и BC , равносторонний.

Решение. Пусть точки E , F и G — середины отрезков OA , OD и BC (рис. 198). Требуется доказать, что треугольник EFG — равносторонний, т. е.

$$EF = FG = EG.$$

$\triangle CDO \sim \triangle ABO$ по двум углам (углы COD и AOB равны, как вертикальные, углы BAO и DCO равны, так как $AB \parallel DC$). Отсюда следует, что треугольник CDO — равносторонний, в частности, $OD = OC$.

$\triangle AOD = \triangle BOC$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $OD = OC$, $\angle AOD = \angle BOC$), поэтому $AD = BC$.

Отрезок EF — средняя линия треугольника AOD и, значит, $EF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$.

Отрезок CF — медиана равностороннего треугольника CDO , поэтому $CF \perp DO$, т. е. $\angle CFB = 90^\circ$. Медиана FG прямоугольного треугольника CFB равна половине гипотенузы (задача 404), т. е. $FG = \frac{1}{2}BC$.

Аналогично, отрезок BE — медиана равностороннего треугольника ABO , поэтому $BE \perp AO$, т. е. $\angle BEC = 90^\circ$. Медиана EG прямоугольного треугольника BEC равна половине гипотенузы: $EG = \frac{1}{2}BC$.

Итак, $EF = FG = EG = \frac{1}{2}BC$, откуда следует, что треугольник EFG — равносторонний.

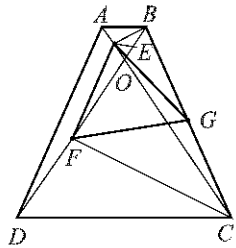


Рис. 198

862. Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AM и AK к биссектрисам внешних углов этого треугольника при вершинах B и C . Докажите, что отрезок MK равен половине периметра треугольника ABC .

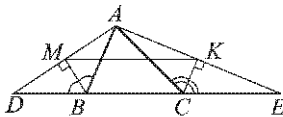


Рис. 199

Решение. Обозначим точки пересечения прямой BC с прямыми AM и AK буквами D и E (рис. 199). В треугольнике ABD отрезок BM является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABD — равнобедренный: $DB = AB$. Кроме того, BM является также медианой, т. е. точка M — середина отрезка AD .

Аналогично, в треугольнике ACE отрезок CK является биссектрисой и высотой, поэтому $CE = AC$ и точка K — середина отрезка AE .

Таким образом, отрезок MK — средняя линия треугольника ADE и, значит,

$$MK = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(DB + BC + CE) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC),$$

т. е. отрезок MK равен половине периметра треугольника ABC .

863. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 соединяют вершины треугольника ABC с внутренними точками противоположных сторон. Докажите, что середины этих отрезков не лежат на одной прямой.

Решение. Пусть точки A_2 , B_2 и C_2 — середины сторон BC , AC и AB треугольника ABC . Согласно задаче 435 середина отрезка AA_1 лежит на отрезке B_2C_2 , причем не совпадает с точками B_2 и C_2 , т. е. является внутренней точкой отрезка B_2C_2 . Аналогично, середины отрезков BB_1 и CC_1 являются внутренними точками отрезков A_2C_2 и A_2B_2 .

Таким образом, середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат соответственно на сторонах B_2C_2 , A_2C_2 и A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$ и не совпадают с вершинами этого треугольника. Отсюда следует, что середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 не лежат на одной прямой.

864. Середины трех высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

Решение. Если треугольник ABC — остроугольный, отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 — его высоты, то точки A_1 , B_1 и C_1 являются внутренними точками сторон BC , CA и AB и поэтому, согласно задаче 863, середины высот не лежат на одной прямой.

Если треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом A (рис. 200, а), то основание высоты AA_1 (точка A_1) лежит на стороне BC , а основания высот BB_1 и CC_1 (точки B_1 и C_1) лежат на продолжениях сторон CA и AB (см. задачу 300). При этом середина O_1 высоты AA_1 лежит на средней линии RQ (задача 435), а середины O_2 и O_3 — на продолжениях средних линий PR и PQ (см. рис. 200, а). Таким образом, точка O_1 лежит на стороне RQ треугольника PQR ,

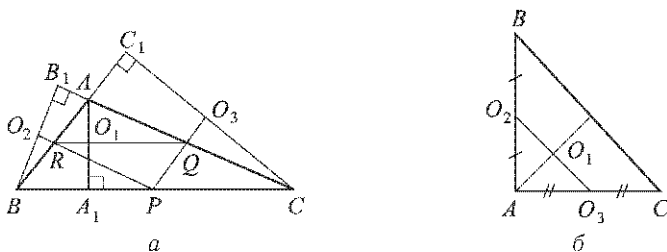


Рис. 200

а точки O_2 и O_3 — на продолжениях двух других сторон этого треугольника. Поэтому точки O_1 , O_2 и O_3 не лежат на одной прямой.

Если же треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом A (рис. 200, б), то его высоты, проведенные из вершин B и C , совпадают с катетами BA и CA . Поэтому середины O_2 и O_3 этих высот являются серединами катетов, а отрезок O_2O_3 — средней линией треугольника ABC . Середина O_1 высоты, проведенной из вершины A , лежит на средней линии O_2O_3 (см. задачу 435). Таким образом, середины O_1 , O_2 и O_3 высот прямоугольного треугольника лежат на одной прямой.

Итак, если середины трех высот треугольника лежат на одной прямой, то этот треугольник — прямоугольный.

865. В треугольнике ABC , сторона AC которого в два раза больше стороны BC , проведены биссектриса CM и биссектриса внешнего угла при вершине C , пересекающая прямую AB в точке K . Докажите, что $S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{CMK}$.

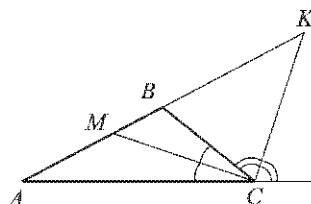


Рис. 201

Решение. Согласно задаче 535 $\frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ (рис. 201). Отсюда следует, что $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$. Согласно задаче 619

$\frac{BK}{AK} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $BK = \frac{1}{2}AK = AB$, а так как $MB = \frac{1}{3}AB$, то $MB = \frac{1}{4}MK$, т. е. $\frac{MB}{MK} = \frac{1}{4}$.

Треугольники BCM , ACM , ABC , CMK имеют общую высоту, проведенную из вершины C , поэтому

$$\frac{S_{BCM}}{S_{ACM}} = \frac{MB}{MA} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_{BCM}}{S_{ABC}} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}, \quad \frac{S_{BCM}}{S_{CMK}} = \frac{MB}{MK} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем:

$$S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{CMK}.$$

866. Стороны треугольника EFG соответственно равны медианам треугольника ABC . Докажите, что $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC , O — точка пересечения медиан (рис. 202). Проведем прямую AM , параллельную медиане CC_1 , и прямую A_1K , параллельную медиане BB_1 (см. рис. 202). Тогда отрезок CC_1 — средняя линия треугольника ABM и поэтому $AM = 2CC_1$.

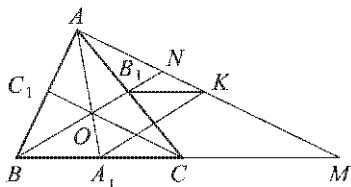


Рис. 202

Пусть прямая BB_1 пересекает отрезок AM в точке N . Так как $AO : OA_1 = 2$, то $AN : NK = 2$ (см. задачу 556), т. е. $AN = 2NK$ и, значит, $AK = 3MK$.

Поскольку $BC = CM$ и $BA_1 = A_1C = \frac{1}{2}BC$, то $A_1M : BA_1 = 3$ и, следовательно,

$$KM : NK = 3, \text{ т. е. } KM = 3NK.$$

Таким образом, $AK = KM$, а так как $AM = 2CC_1$, то $AK = CC_1$.

Отрезок B_1K — средняя линия треугольника ACM , поэтому $B_1K \parallel BA_1$ и так как $A_1K \parallel BB_1$, то BB_1KA_1 — параллелограмм. Отсюда следует, что $A_1K = BB_1$.

Итак, в треугольнике AA_1K

$$A_1K = BB_1, \quad AK = CC_1,$$

т. е. стороны треугольника AA_1K соответственно равны медианам треугольника ABC и, значит, треугольник AA_1K равен треугольнику EFG (см. условие задачи). Тем самым нужно доказать, что $\frac{S_{AA_1K}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

Так как $BM = 2BC$, $BA_1 = \frac{1}{2}BC$, то $S_{ABM} = 2S_{ABC}$, $S_{ABA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ и поэтому

$$S_{AA_1M} = S_{ABM} - S_{ABA_1} = \frac{3}{2}S_{ABC}.$$

Треугольники AA_1M и AA_1K имеют общую высоту, проведенную из вершины A_1 , и $AK = \frac{1}{2}AM$. Поэтому

$$S_{AA_1K} = \frac{1}{2}S_{AA_1M} = \frac{3}{4}S_{ABC}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{S_{AA_1K}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4},$$

что и требовалось доказать.

867. В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1 : 2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K . Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC .

Решение. Обозначим буквой D точку пересечения отрезка AK и медианы BM и проведем через точку M прямую, параллельную AK . Она пересекает сторону BC в точке E (рис. 203).

Так как $BD : DM = 1 : 2$, то $BK : KE = 1 : 2$ (см. задачу 556), т. е. $KE = 2BK$. Отрезок ME — средняя линия треугольника AKC , поэтому $EC = KE = 2BK$. Таким образом,

$$BC = BK + KE + EC = 5BK, \text{ т. е. } \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}.$$

Треугольники ABK и ABC имеют общую высоту, проведенную из вершины A , поэтому

$$\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}.$$

Ответ. $1 : 5$.

868. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD , CD и BC соответственно в точках M , N и P . Докажите, что отрезок AM является средним пропорциональным между MN и MP .

Решение. $\triangle AMD \sim \triangle PMB$ по двум углам (рис. 204), поэтому $\frac{MD}{MB} = \frac{AM}{MP}$.

Аналогично, $\triangle NMD \sim \triangle AMB$, поэтому

$$\frac{MD}{MB} = \frac{MN}{AM}.$$

Приравнявая два выражения для отношения $\frac{MD}{MB}$, получаем:

$$\frac{AM}{MP} = \frac{MN}{AM},$$

откуда

$$AM^2 = MN \cdot MP, \\ AM = \sqrt{MN \cdot MP},$$

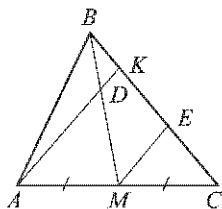


Рис. 203

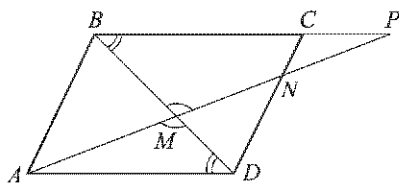


Рис. 204

т. е. отрезок AM является средним пропорциональным между MN и MP .

869. Постройте точку, принадлежащую большему основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n = 2, 3, 4$).

Решение. Пусть $ABCD$ — данная равнобедренная трапеция, X — искомая точка, принадлежащая большему основанию AD и отстоящая от данной боковой стороны AB в n раз дальше, чем от CD , т. е. $\frac{XM}{XN} = n$, где XM и XN — перпендикуляры к прямым AB и CD (рис. 205).

$\triangle AMX \sim \triangle DNХ$ (по двум углам), поэтому

$$\frac{AX}{XD} = \frac{XM}{XN} = n.$$

Таким образом, задача сводится к построению точки X , которая делит отрезок AD в заданном отношении, т. е. $AX : XD = n : 1$.

Построение такой точки описано в решении задачи 585.

870. Точка C лежит на отрезке AB . Постройте точку D прямой AB , не лежащую на отрезке AB , так, чтобы $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$. Всегда ли задача имеет решение?

Решение. Пусть $AC > CB$ (рис. 206). Отметим точку M , не лежащую на прямой AB , и на луче AM отложим отрезок AC_1 , равный AC , а затем на луче C_1A отложим отрезок C_1B_1 , равный CB . Проведем через точку C_1 прямую, параллельную прямой B_1B . Она пересекает прямую AB в искомой точке D .

Действительно, так как $C_1D \parallel B_1B$, то

$$\frac{C_1B_1}{DB} = \frac{AB_1}{AB} \quad (\text{см. задачу 556}).$$

Отсюда, используя свойства пропорций, получаем:

$$\frac{C_1B_1}{DB} = \frac{AB_1 + C_1B_1}{AB + DB} = \frac{AC_1}{AD}.$$

Но $C_1B_1 = CB$, $AC_1 = AC$ (по построению), поэтому

$$\frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{откуда} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

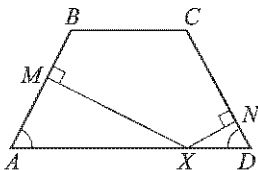


Рис. 205

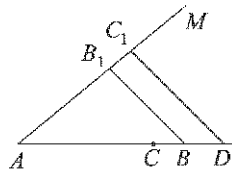


Рис. 206

Тем самым доказано, что точка D — искомая.

Если $AC < CB$, то построение искомой точки D проводится таким же образом, как и в случае $AC > CB$, но только теперь точка A будет лежать между C_1 и B_1 .

Наконец, если $AC = CB$, то $\frac{AC}{CB} = 1$, а для любой точки D прямой AB , не лежащей на отрезке AB , $\frac{AD}{DB} \neq 1$. Таким образом, в этом случае построение точки D невозможно.

Ответ. Не всегда.

871. Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведенной к основанию.

Решение. Пусть $\angle hk$ — данный угол, PQ — данный отрезок (рис. 207, а). Требуется построить треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle hk$, $AB = AC$, $BC + AH = PQ$, где AH — высота треугольника ABC .

Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 207, б). Проведем какой-нибудь отрезок B_1C_1 , параллельный стороне BC . Получим треугольник AB_1C_1 , подобный треугольнику ABC . Ясно, что равнобедренный треугольник AB_1C_1 с заданным углом A между боковыми сторонами построить нетрудно. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{B_1C_1}{AH_1} = \frac{BC}{AH}.$$

Прибавив к обеим частям равенства 1, получим:

$$\begin{aligned} \frac{B_1C_1}{AH_1} + 1 &= \frac{BC}{AH} + 1, \text{ или} \\ \frac{B_1C_1 + AH_1}{AH_1} &= \frac{BC + AH}{AH}. \end{aligned} \quad (1)$$

Но $BC + AH = PQ$ по условию, поэтому

$$\frac{B_1C_1 + AH_1}{AH_1} = \frac{PQ}{AH},$$

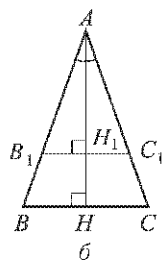
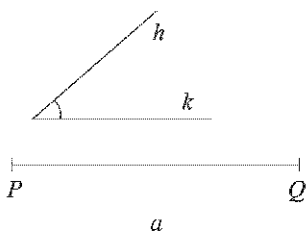


Рис. 207

откуда

$$AH = \frac{PQ \cdot AH_1}{B_1C_1 + AH_1}. \quad (2)$$

Если треугольник AB_1C_1 построен, то отрезки с длинами AH_1 и $(B_1C_1 + AH_1)$ нам известны. Отрезок PQ задан условием задачи. Используя формулу (2), можно построить отрезок длины AH , что дает возможность построить весь треугольник ABC .

Построение. Строим какой-нибудь равнобедренный треугольник AB_1C_1 , в котором $\angle A = \angle hk$, $AB_1 = AC_1$, и проводим высоту AH_1 в этом треугольнике. По трем известным отрезкам с длинами PQ , AH_1 и $(B_1C_1 + AH_1)$ строим отрезок, длина которого выражается формулой (2) (см. задачу 623). Отложив этот отрезок на луче AH_1 от точки A , получим точку H . Проводим через точку H прямую, параллельную B_1C_1 , и получаем искомый треугольник ABC (рис. 207, б).

Доказательство. По построению $\angle A = \angle hk$. Треугольники ABC и AB_1C_1 подобны, поэтому $AB = AC$ и выполняется равенство (1), откуда следует, что

$$BC + AH = \frac{B_1C_1 + AH_1}{AH_1} \cdot AH. \quad (3)$$

Но отрезок AH строился по формуле (2). Подставляя выражение (2) для AH в равенство (3), получаем

$$BC + AH = PQ.$$

Таким образом, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Из построения видно, что задача всегда имеет решение, если угол hk — не развернутый. Формула (2) показывает, что какой бы треугольник AB_1C_1 , подобный искомому, мы ни взяли, величина AH будет иметь одно и то же значение. Это доказывает единственность искомого треугольника.

872. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

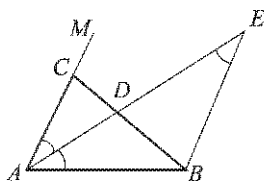


Рис. 208

Решение. Пусть даны отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 . Требуется построить треугольник ABC , у которого $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $AD = P_3Q_3$, где AD — биссектриса треугольника.

Анализ. Пусть $\triangle ABC$ — искомый треугольник (рис. 208). Для краткости запиши обозначим длины данных отрезков P_1Q_1 , P_2Q_2 и P_3Q_3 через b , c и a . Тогда $AB = b$, $AC = c$, $AD = a$. Проведем $BE \parallel AC$.

Получим равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE = b$). Выразим DE через a , b , c . Из подобия треугольников EDB и ABC (по двум углам) имеем:

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BE}{AC}, \text{ откуда } DE = \frac{ab}{c}.$$

По данным отрезкам с длинами a , b , c можно построить отрезок DE (задача 623). После этого можно построить треугольник ABE , а затем искомым треугольник ABC .

Построение. Строим отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$. Далее строим треугольник ABE по трем сторонам: $AB = BE = b$, $AE = a + \frac{ab}{c}$. Затем через точку A проводим луч AM так, что $\angle MAE = \angle EAB$, и на этом луче откладываем отрезок $AC = c$. Треугольник ABC — искомым.

Доказательство. По построению $AB = b$, $AC = c$, луч AE — биссектриса угла CAB . Пусть D — точка пересечения AE и BC . Из подобия треугольников ADC и EDB следует:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{BE}, \text{ откуда } AD = DE \cdot \frac{AC}{BE} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{c}{b} = a,$$

т. е. биссектриса AD треугольника ABC равна a . Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Ясно, что треугольник ABC можно построить в том и только в том случае, когда можно построить равнобедренный треугольник ABE , а для этого его стороны должны удовлетворять соотношению $AE < AB + BE = 2 \cdot AB$, т. е. должно выполняться неравенство

$$a + \frac{ab}{c} < 2b, \text{ или } a < \frac{2bc}{b+c}.$$

Возвращаясь к исходным отрезкам, запишем это неравенство в виде:

$$P_3Q_3 < \frac{2P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_1Q_1 + P_2Q_2}. \quad (1)$$

Если данные отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 удовлетворяют условию (1), то задача имеет решение. В противном случае решения нет.

Если решение есть, то оно единственное. В самом деле, допустим, что имеются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющие условиям задачи. Для каждого из них выполним такое же построение, как на рисунке 208. Тогда получим: $\triangle ABE = \triangle A_1B_1E_1$ (по трем сторонам), поэтому $\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$. Следовательно, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны, а значит, равны и сами треугольники (по двум сторонам и углу между ними). Это и доказывает единственность решения.

873. Постройте треугольник ABC , если даны $\angle A$, $\angle C$ и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH .

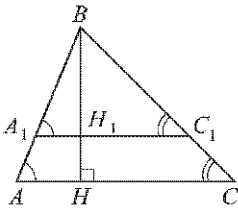


Рис. 209

Решение. Пусть $\angle h_1 k_1$ и $\angle h_2 k_2$ — данные углы, PQ — данный отрезок. Требуется построить треугольник ABC , у которого $\angle A = \angle h_1 k_1$, $\angle C = \angle h_2 k_2$, $AC + BH = PQ$, где BH — высота треугольника.

Эта задача решается методом подобия аналогично задаче 871. Пусть ABC — искомый треугольник, у которого $\angle A = \angle h_1 k_1$, $\angle C = \angle h_2 k_2$, $AC + BH = PQ$ (рис. 209). Проведем какой-нибудь отрезок $A_1 C_1$, параллельный стороне AC . Получим треугольник $A_1 B C_1$, подобный треугольнику ABC . Из подобия этих треугольников следует соотношение, аналогичное формуле (2) (см. решение задачи 871):

$$BH = \frac{PQ \cdot BH_1}{A_1 C_1 + BH_1}. \quad (4)$$

Это соотношение указывает способ построения искомого треугольника ABC . Строим какой-нибудь треугольник $A_1 B C_1$, у которого $\angle A_1 = \angle h_1 k_1$, $\angle C_1 = \angle h_2 k_2$, и проводим высоту BH_1 в этом треугольнике. Затем по трем известным отрезкам с длинами PQ , BH_1 и $(A_1 C_1 + BH_1)$ строим отрезок, длина которого выражается формулой (4). Отложив этот отрезок на луче BH_1 от точки B , получим точку H . Проводим через точку H прямую, параллельную $A_1 C_1$, и получаем искомый треугольник ABC .

В самом деле, так как $AC \parallel A_1 C_1$, то $\angle A = \angle A_1 = \angle h_1 k_1$, $\angle C = \angle C_1 = \angle h_2 k_2$. Кроме того, $AC + BH = PQ$. Это равенство доказывается так же, как аналогичное равенство в задаче 871.

Если $\angle h_1 k_1 + \angle h_2 k_2 < 180^\circ$, то задача имеет решение, и, как и в задаче 871, это решение единственное.

874. Постройте треугольник по трем высотам.

Решение. Пусть даны отрезки $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$. Требуется построить треугольник ABC , высоты которого, проведенные из вершин A , B и C , соответственно равны $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$ и $P_3 Q_3$.

Анализ. Обозначим через a , b и c длины сторон искомого треугольника, противолежащих углам A , B и C , а через h_a , h_b и h_c длины отрезков $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$ и $P_3 Q_3$. Воспользуемся равенствами $ah_a = bh_b = ch_c$ (каждое из произведений равно удвоенной площади треугольника). Из первого равенства получаем пропорцию $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}$, а из второго равенства имеем

$$b = \frac{h_c}{h_b} \cdot c \text{ и поэтому } \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\left(\frac{h_a h_b}{h_c}\right)}.$$

Таким образом,

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\left(\frac{h_a h_b}{h_c}\right)}. \quad (1)$$

Полученные равенства показывают, что искомый треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами $h_b, h_a, \frac{h_a h_b}{h_c}$. Этот факт дает ключ к решению задачи.

Построение. По данным отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 с длинами h_a, h_b и h_c построим отрезок P_4Q_4 , длина которого равна $\frac{h_a h_b}{h_c}$ (см. задачу 623). Далее построим треугольник AB_1C_1 по трем сторонам: $AB_1 = P_4Q_4, B_1C_1 = P_2Q_2, C_1A = P_1Q_1$ (рис. 210). Этот треугольник, как

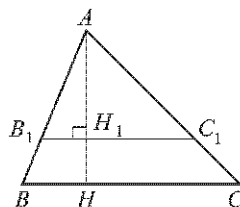


Рис. 210

уже было отмечено, подобен искомому треугольнику. Проведем высоту AH_1 треугольника AB_1C_1 и на луче AH_1 отложим отрезок AH , равный P_1Q_1 . Через точку H проведем прямую, параллельную B_1C_1 . Она пересекается с лучами AB_1 и AC_1 в некоторых точках B и C . Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Построенный треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 и, следовательно, подобен искомому треугольнику. Высота AH в треугольнике ABC равна P_1Q_1 , как и должно быть в искомом треугольнике, т. е. сходственные высоты в треугольнике ABC и искомом треугольнике равны. Значит, коэффициент подобия этих треугольников равен 1 (см. задачу 543), а это и означает, что треугольник ABC — искомый.

Исследование. Искомый треугольник ABC можно построить в том и только в том случае, когда можно построить треугольник AB_1C_1 , стороны которого равны P_1Q_1, P_2Q_2 и $P_4Q_4 = \frac{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_3Q_3}$. В свою очередь, треугольник с такими сторонами можно построить тогда и только тогда, когда каждый из отрезков P_1Q_1, P_2Q_2, P_4Q_4 меньше суммы двух других отрезков, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_3Q_3} &< P_1Q_1 + P_2Q_2, \\ P_1Q_1 &< \frac{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_3Q_3} + P_2Q_2, P_2Q_2 < \frac{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}{P_3Q_3} + P_1Q_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Последние два неравенства приводятся к виду, аналогичному (2):

$$\frac{P_1Q_1 \cdot P_3Q_3}{P_2Q_2} < P_1Q_1 + P_3Q_3, \quad \frac{P_2Q_2 \cdot P_3Q_3}{P_1Q_1} < P_2Q_2 + P_3Q_3. \quad (3)$$

Итак, если данные отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 удовлетворяют условиям (2) и (3), то задача имеет решение. В противном случае решений нет.

Если решение существует, то оно единственное. В самом деле, пусть $\triangle KMN$ — произвольный треугольник, удовлетворяющий условию задачи, т. е. высоты этого треугольника равны данным отрезкам P_1Q_1 , P_2Q_2 и P_3Q_3 с длинами h_a , h_b и h_c . Пусть высота, проведенная из вершины K , равна h_a , а высота, проведенная из вершины M , равна h_b . Тогда, согласно равенствам (1), треугольник KMN подобен треугольнику $K_1M_1N_1$, в котором $M_1N_1 = h_b$, $K_1N_1 = h_a$, $K_1M_1 = \frac{h_a h_b}{h_c}$. Высота h_1 треугольника $K_1M_1N_1$, проведенная из вершины K_1 , однозначно выражается через стороны этого треугольника и, значит, через величины h_a , h_b и h_c . Эта высота является сходственной высотой h_a треугольника KMN , подобного треугольнику $K_1M_1N_1$. Поэтому коэффициент подобия треугольников KMN и $K_1M_1N_1$, равный $\frac{h_a}{h_1}$, имеет одно и то же значение для всех треугольников KMN , удовлетворяющих условию задачи. Отсюда следует, что все треугольники, удовлетворяющие условию задачи, подобны друг другу с коэффициентом подобия, равным 1, т. е. они равны друг другу. Это и означает, что задача имеет единственное решение.

875. Постройте трапецию по боковой стороне, большому основанию, углу между ними и отношению двух других сторон.

Решение. Пусть даны отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 , M_1N_1 , M_2N_2 и угол hk . Требуется построить трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD так, чтобы

$$\begin{aligned} AB &= P_1Q_1, & AD &= P_2Q_2, \\ BC &< AD, & \angle A &= \angle hk, \\ BC : CD &= M_1N_1 : M_2N_2. \end{aligned}$$

Построение. Сначала построим треугольник ABD по двум сторонам и углу между ними: $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$ (рис. 211, а). Затем через точку B проведем прямую p , параллельную AD , и на этой прямой по ту же сторону от прямой AB , что и точка D , отложим отрезок BC_1 , равный M_1N_1 . Далее построим окружность радиуса M_2N_2 с центром C_1 . Пусть эта окружность пересекается с лучом BD в точке D_1 . Проведем через точку D прямую, параллельную D_1C_1 . Эта прямая пересекает прямую p в некоторой точке C (см. рис. 211, а). Если при этом окажется, что $BC < AD$, то трапеция $ABCD$ — искомая.

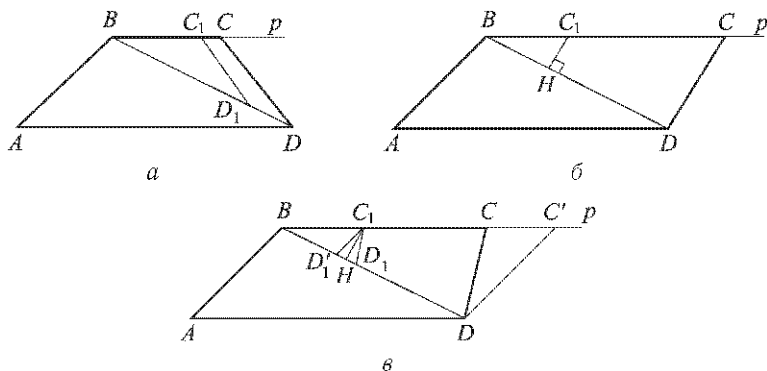


Рис. 211

Доказательство. По построению $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$, а так как $CD \parallel C_1D_1$, то

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BC_1}{C_1D_1} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2}.$$

Если, кроме того, $BC < AD$, то трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. По заданным отрезкам P_1Q_1 , P_2Q_2 и углу hk всегда можно построить треугольник ABD , в котором $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$ (если $\angle hk < 180^\circ$), а затем можно провести через точку B прямую p , параллельную AD , и отложить отрезок BC_1 , равный M_1N_1 . Через точку C_1 проведем перпендикуляр C_1H к прямой BD (рис. 211, б). Если $M_2N_2 < C_1H$, то окружность радиуса M_2N_2 с центром C_1 не имеет общих точек с лучом BD . В этом случае задача не имеет решений.

Если $M_2N_2 = C_1H$, то окружность радиуса M_2N_2 с центром C_1 имеет одну общую точку с лучом BD (точку H). В этом случае задача имеет единственное решение, если окажется, что $BC < AD$. Последнее неравенство будет выполнено, если $\angle BCD > \angle A$, т. е. $\angle BC_1H > \angle hk$ (см. рис. 211, б). Итак, в случае $M_2N_2 = C_1H$ задача имеет единственное решение, если $\angle BC_1H > \angle hk$, и не имеет решений, если $\angle BC_1H \leq \angle hk$.

Если $C_1H < M_2N_2 < M_1N_1 = BC_1$, то окружность радиуса M_2N_2 с центром C_1 имеет две общие точки с лучом BD (точки D_1 и D_1' на рис. 211, в). Поэтому в этом случае задача имеет два решения (трапеция $ABCD$ и $ABC'D$), если $\angle BC_1D_1' > \angle hk$; одно решение (трапеция $ABCD$), если $\angle BC_1D_1' \leq \angle hk < \angle BC_1D_1$; и не имеет решений, если $\angle BC_1D_1 \leq \angle hk$.

Если $M_2N_2 \geq M_1N_1 = BC_1$, то окружность радиуса M_2N_2 с центром C_1 имеет одну общую точку с лучом BD (точку D_1). В этом случае задача имеет единственное решение, если $\angle BC_1D_1 > \angle hk$, и не имеет решений в противном случае.

876. Постройте ромб, площадь которого равна площади данного квадрата, если известно, что отношение диагоналей этого ромба равно отношению данных отрезков.

Решение. Пусть даны квадрат $KLMN$ и отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 . Требуется построить ромб $ABCD$, у которого $S_{ABCD} = S_{KLMN} = KL^2$, $AC : BD = P_1Q_1 : P_2Q_2$.

Из условий задачи получаем два уравнения относительно AC и BD :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AC \cdot BD &= KL^2, \\ \frac{AC}{BD} &= \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$AC = \frac{\sqrt{2} KL \cdot P_1Q_1}{\sqrt{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}}, \quad BD = \frac{\sqrt{2} KL \cdot P_2Q_2}{\sqrt{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}}. \quad (1)$$

Полученные формулы позволяют построить отрезки, равные диагоналям искомого ромба, а затем построить и сам ромб.

Построение. Сначала построим отрезок $P_3Q_3 = \sqrt{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}$ (см. задачу 669). Так как $\sqrt{2} KL = KM$, где KM — диагональ данного квадрата, то формулу (1) для AC можно записать так:

$$AC = \frac{KM \cdot P_1Q_1}{P_3Q_3}.$$

По известным отрезкам KM , P_1Q_1 и P_3Q_3 построим отрезок, равный $\frac{KM \cdot P_1Q_1}{P_3Q_3}$ (см. задачу 623). Тем самым будет построен отрезок, равный диагонали AC искомого ромба $ABCD$. Аналогично построим отрезок, равный диагонали BD , а затем по известным диагоналям построим сам ромб $ABCD$ (см. задачу 414, а).

Формулы (1) показывают, что при любых данных квадрате $KLMN$ и отрезках P_1Q_1 и P_2Q_2 задача имеет единственное решение.

Глава 4

ОКРУЖНОСТЬ

§ 1. Касательная к окружности

631. Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса r до прямой p . Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) $r = 16$ см, $d = 12$ см; б) $r = 5$ см, $d = 4,2$ см; в) $r = 7,2$ дм, $d = 3,7$ дм; г) $r = 8$ см, $d = 1,2$ дм; д) $r = 5$ см, $d = 50$ мм?

Решение. а) $d < r$, поэтому прямая и окружность имеют две общие точки;

б) $d < r$, поэтому прямая и окружность имеют две общие точки;

в) $d < r$, поэтому прямая и окружность имеют две общие точки;

г) $d > r$, поэтому прямая и окружность не имеют общих точек;

д) $d = r$, поэтому прямая и окружность имеют только одну общую точку.

Ответ. а), б), в) Прямая пересекает окружность; г) прямая лежит вне окружности; д) прямая касается окружности.

632. Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A , является секущей по отношению к данной окружности.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, r — ее радиус. По условию $OA < r$. Рассмотрим произвольную прямую p , проходящую через точку A , и обозначим буквой d расстояние от точки O до прямой p . Если $p \perp OA$, то $d = OA$; если же отрезок OA является наклонной, проведенной из точки O к прямой p , то $d < OA$. И в том, и в другом случае $d < r$, поэтому прямая p и окружность имеют две общие точки.

633. Даны квадрат $OABC$, сторона которого равна 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA , AB , BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?

Решение. Прямая OA проходит через центр окружности, поэтому эта прямая является секущей. Прямые AB и BC находятся на расстояниях $OA = 6$ см $>$ 5 см и $OC = 6$ см $>$ 5 см (рис. 212), а значит, эти прямые секущими не являются. Расстояние от точки O до прямой AC равно половине диагонали

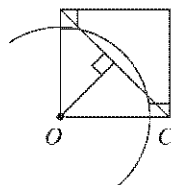


Рис. 212

данного квадрата, т. е. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 \text{ см} \approx 4,25 \text{ см}$. Таким образом, это расстояние меньше 5 см, поэтому прямая AC является секущей.

Ответ. OA и AC .

634. Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведенная через точку M , параллельна хорде AB .

Решение. Прямая OM содержит медиану равнобедренного треугольника AOB (рис. 213), поэтому $AB \perp OM$. Касательная p , проведенная через точку M , также перпендикулярна к OM . Следовательно, прямые AB и p параллельны.

635. Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

Решение. Пусть O — центр окружности, AB — данная хорда (рис. 214). Треугольник OAB равносторонний, поэтому угол OAB равен 60° . Следовательно, искомый угол равен $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ. 30° .

636. Через концы хорды AB , равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C . Найдите угол ACB .

Решение. Пусть O — центр данной окружности (рис. 215). Треугольник OAB равносторонний, поэтому угол OAB равен 60° . Из четырехугольника $OACB$ находим: $\angle ACB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ. 120° .

637. Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30° . Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D . Докажите, что треугольник ACD — равнобедренный.

Решение. Пусть O — центр данной окружности (рис. 216). Из условия задачи следует, что углы при основании равнобедренного треугольника OAC равны 30° . Угол BOC — внешний угол этого треугольника, а значит, $\angle BOC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. В прямоугольном треугольнике OCD $\angle O = 60^\circ$, поэтому $\angle D = 30^\circ$. Таким образом, в треугольнике ACD углы при основании AD равны и, следовательно, этот треугольник — равнобедренный.

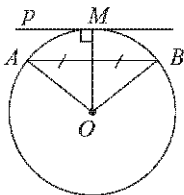


Рис. 213

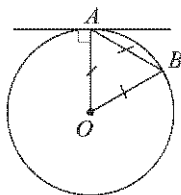


Рис. 214

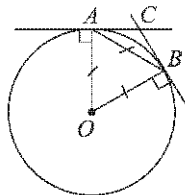


Рис. 215

638. Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B . Найдите AB , если $OA = 2$ см, а $r = 1,5$ см.

Решение. Из условия задачи следует, что треугольник AOB — прямоугольный с прямым углом B (рис. 217). По теореме Пифагора

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 = AB^2 + r^2,$$

откуда $AB = \sqrt{4 - \frac{9}{4}}$ см $= \frac{\sqrt{7}}{2}$ см.

Ответ. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см.

639. Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B . Найдите AB , если $\angle AOB = 60^\circ$, а $r = 12$ см.

Решение. Из условия задачи следует, что треугольник AOB — прямоугольный с прямым углом B (см. рис. 217). Поэтому

$$AB = OB \operatorname{tg} 60^\circ = r \operatorname{tg} 60^\circ = r\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ. $12\sqrt{3}$ см.

640. Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A такая, что $OA = 9$ см. Через точку A проведены две касательные к данной окружности. Найдите угол между ними.

Решение. Пусть AB и AC — касательные, B и C — точки касания (рис. 218). Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике AOB гипотенуза $OA = 9$ см в два раза больше катета $OB = 4,5$ см. Следовательно, $\angle OAB = 30^\circ$. Аналогично $\angle OAC = 30^\circ$, а значит,

$$\angle BAC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

Ответ. 60° .

641. Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O , проведенными из точки A . Найдите угол BAC , если середина отрезка AO лежит на окружности.

Решение. Пусть B и C — точки касания (см. рис. 218). Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике AOB гипотенуза OA в два раза больше радиуса окружности, или, что то же самое, в два

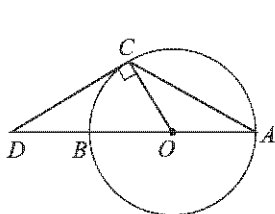


Рис. 216

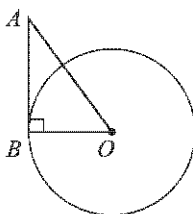


Рис. 217

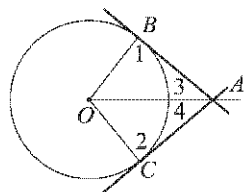


Рис. 218

раза больше катета OB . Следовательно, $\angle OAB = 30^\circ$. Аналогично $\angle OAC = 30^\circ$, а значит,

$$\angle BAC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

Ответ. 60° .

642. На рисунке 218 (рис. 213 учебника) $OB = 3$ см, $OA = 6$ см. Найдите AB , AC , $\angle 3$ и $\angle 4$.

Решение. В прямоугольном треугольнике AOB гипотенуза $OA = 6$ см в два раза больше катета $OB = 3$ см. Следовательно, $\angle 3 = 30^\circ$. Аналогично $\angle 4 = 30^\circ$. Далее,

$$AB = AC = OA \cos 30^\circ = OA \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ. $3\sqrt{3}$ см, $3\sqrt{3}$ см, 30° , 30° .

643. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C . Найдите BC , если $\angle OAB = 30^\circ$, $AB = 5$ см.

Решение. Поскольку $AB = AC$, $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$ (см. рис. 218) и, следовательно, $\angle BAC = 60^\circ$, то треугольник ABC равнобедренный, а значит, $BC = AB = 5$ см.

Ответ. 5 см.

644. Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B . Точка C симметрична точке O относительно точки B . Докажите, что $\angle AMC = 3\angle BMC$.

Решение. Прямоугольные треугольники OMB и CMB (рис. 219) равны по двум катетам, поэтому $\angle BMO = \angle BMC$. С другой стороны, $\angle AMO = \angle BMO$, а значит,

$$\angle AMC = 3\angle BMC.$$

645. Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпендикулярна к диаметру AB . Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1 .

Решение. Пусть M — точка касания, O — центр окружности (рис. 220). Прямые AA_1 , BB_1 и OM перпендикулярны к касательной, поэтому они параллельны. С другой стороны, $OA = OB$. Следовательно, по теореме Фалеса, $MA_1 = MB_1$.

646. В треугольнике ABC угол B прямой. Докажите, что: а) прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса AB ; б) прямая AB является касательной к окружности с центром C радиуса CB ; в) прямая AC не является касательной к окружностям с центром B и радиусами BA и BC .

Решение. а) Расстояние от прямой BC до центра A окружности равно AB (рис. 221), т. е. радиусу этой окружности. Поэтому прямая BC является касательной к данной окружности.

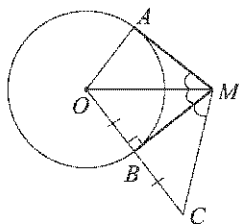


Рис. 219

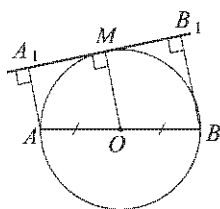


Рис. 220

б) Расстояние от прямой AB до центра C окружности равно CB (см. рис. 221), т. е. радиусу этой окружности. Поэтому прямая AB является касательной к данной окружности.

в) Отрезки BA и BC являются наклонными, проведенными из точки B к прямой AC (см. рис. 221). Следовательно, расстояние от прямой AC до центра B окружностей меньше радиусов BA и BC этих окружностей. Поэтому прямая AC не является касательной к данным окружностям.

647. Отрезок AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см. Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см; б) $\angle HAO = 45^\circ$, $OA = 4$ см; в) $\angle HAO = 30^\circ$, $OA = 6$ см?

Решение. а) Найдем расстояние OH от центра окружности до прямой AH (рис. 222). Имеем:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 3 \text{ см.}$$

Таким образом, расстояние от прямой AH до центра окружности равно радиусу этой окружности. Следовательно, прямая AH — касательная.

б) Найдем расстояние OH от центра окружности до прямой AH (см. рис. 222). Имеем:

$$OH = OA \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

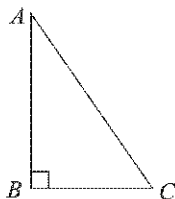


Рис. 221

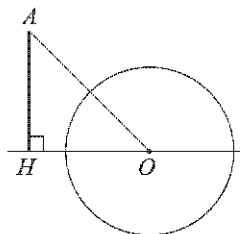


Рис. 222

Таким образом, расстояние от прямой $АН$ до центра окружности не равно радиусу этой окружности. Следовательно, прямая $АН$ касательной не является.

в) Найдем расстояние $ОН$ от центра окружности до прямой $АН$ (см. рис. 222). Имеем:

$$ОН = ОА \sin 30^\circ = 3 \text{ см.}$$

Таким образом, расстояние от прямой $АН$ до центра окружности равно радиусу этой окружности. Следовательно, прямая $АН$ — касательная.

Ответ. а) Да; б) нет; в) да.

648. Постройте касательную к окружности: а) параллельную данной прямой; б) перпендикулярную к данной прямой.

Решение. Пусть O — центр данной окружности.

а) Проведем через точку O прямую, перпендикулярную к данной прямой (рис. 223, а), и обозначим буквами A и B точки пересечения

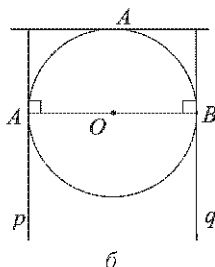
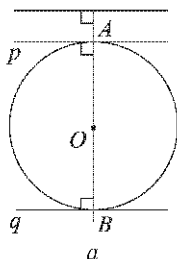


Рис. 223

этой прямой с данной окружностью. Через точки A и B проведем прямые p и q , перпендикулярные к прямой AB . Прямые p и q — искомые касательные. Таким образом, задача имеет два решения.

б) Проведем через точку O прямую, параллельную данной прямой (рис. 223, б), и обозначим буквами A и B точки пересечения этой прямой с данной окружностью. Через точки A и B проведем прямые p и q , перпендикулярные к прямой AB . Прямые p и q — искомые касательные. Таким образом, задача имеет два решения.

§ 2. Центральные и вписанные углы

649. Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A . Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 60^\circ$; б) $\angle AOB = 90^\circ$; в) $\angle AOB = 120^\circ$; г) $\angle AOB = 180^\circ$.

Решение. а) Проведем окружность с центром A радиуса OA и обозначим буквой B одну из точек пересечения этой окружности с исходной окружностью. Хорда AB — искомая.

б) Проведем через точку O прямую, перпендикулярную к прямой AO , и обозначим буквой B одну из точек пересечения этой прямой с окружностью. Хорда AB — искомая.

в) Продолжим отрезок AO за точку O до пересечения с окружностью в точке C . Затем построим хорду CB так, чтобы угол COB был равен 60° (задача 649, а). Хорда AB — искомая.

г) Продолжим отрезок AO за точку O до пересечения с окружностью в точке B . Хорда AB — искомая.

650. Радиус окружности с центром O равен 16. Найдите хорду AB , если: а) $\angle AOB = 60^\circ$; б) $\angle AOB = 90^\circ$; в) $\angle AOB = 180^\circ$.

Решение. Обозначим угол AOB буквой α . Если $\alpha \neq 180^\circ$, то треугольник AOB — равнобедренный, а значит, $AB = 2OA \sin \frac{\alpha}{2} = 32 \sin \frac{\alpha}{2}$. Имеем:

а) $AB = 32 \sin 30^\circ = 16$;

б) $AB = 32 \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}$;

в) отрезок AB — диаметр окружности, поэтому $AB = 2OA = 32$.

Ответ. а) 16; б) $16\sqrt{2}$; в) 32.

651. Хорды AB и CD окружности с центром O равны. а) Докажите, что две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D . б) Найдите дуги с концами C и D , если $\angle AOB = 112^\circ$.

Решение. а) Если хорды AB и CD — диаметры, то каждая из стягиваемых ими дуг — полуокружность, а значит, эти дуги равны. Если же данные хорды диаметрами не являются, то треугольники ABO и CDO равны по трем сторонам, поэтому эти треугольники можно совместить наложением так, что точки A , B и O совместятся с точками C , D и O . При этом наложении дуга AB , меньшая полуокружности, совместится с дугой CD , меньшей полуокружности, а дуга AB , большая полуокружности, — с дугой CD , большей полуокружности. Следовательно, две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D .

б) Дуги с концами A и B равны 112° и $360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$. Следовательно (см. задачу 651, а), дуги с концами C и D также равны 112° и 248° .

Ответ. б) 112° и 248° .

652. На полуокружности AB взяты точки C и D так, что $\sphericalangle AC = 37^\circ$, $\sphericalangle BD = 23^\circ$. Найдите хорду CD , если радиус окружности равен 15 см.

Решение. Имеем:

$$\sphericalangle CD = 180^\circ - \sphericalangle AC - \sphericalangle BD = 180^\circ - 37^\circ - 23^\circ = 120^\circ,$$

а значит, $\sphericalangle COD = 120^\circ$ (O — центр окружности). Из равнобедренного треугольника COD находим:

$$CD = 2CO \sin \frac{120^\circ}{2} = 15\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ. $15\sqrt{3}$ см.

653. Найдите вписанный угол ABC , если дуга AC , на которую он опирается, равна: а) 48° ; б) 57° ; в) 90° ; г) 124° ; д) 180° .

Решение. Вписанный угол ABC равен половине дуги AC , на которую он опирается. Поэтому:

а) $\sphericalangle ABC = \frac{48^\circ}{2} = 24^\circ$;

б) $\sphericalangle ABC = \frac{57^\circ}{2} = 28^\circ 30'$;

в) $\sphericalangle ABC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$;

г) $\sphericalangle ABC = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$;

д) $\sphericalangle ABC = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Ответ. а) 24° ; б) $28^\circ 30'$; в) 45° ; г) 62° ; д) 90° .

654. По данным рисунка 224 (рис. 222 учебника) найдите x .

Решение. а) $x = \frac{360^\circ - 80^\circ - 152^\circ}{2} = 64^\circ$;

б) $x = 360^\circ - 125^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 175^\circ$;

в) $x = \frac{360^\circ - 180^\circ - 112^\circ}{2} = 34^\circ$;

г) $x = 360^\circ - 215^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 105^\circ$.

Ответ. а) 64° ; б) 175° ; в) 34° ; г) 105° .

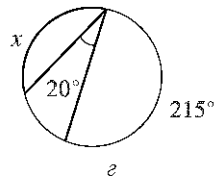
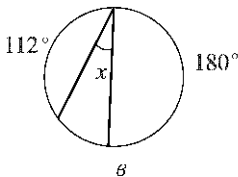
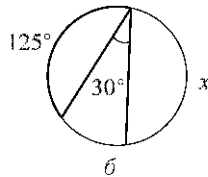
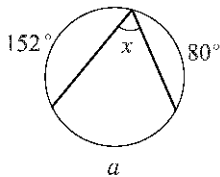


Рис. 224

655. Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB . Найдите каждый из этих углов.

Решение. Пусть x — градусная мера вписанного угла. Если этот угол опирается на дугу, меньшую или равную полуокружности, то градусная мера центрального угла равна $2x$. Если же он опирается на дугу, большую полуокружности, то градусная мера центрального угла равна $360^\circ - 2x$. В первом случае получаем: $2x - x = 30^\circ$, откуда $x = 30^\circ$, а значит, вписанный угол равен 30° , а центральный 60° . Во втором случае $360^\circ - 2x - x = 30^\circ$, откуда $x = 110^\circ$. Таким образом, в этом случае вписанный угол равен 110° , а центральный 140° .

Ответ. 60° и 30° или 140° и 110° .

656. Хорда AB стягивает дугу, равную 115° , а хорда AC — дугу в 43° . Найдите угол BAC .

Решение. Если точка C лежит на дуге AB , большей полуокружности (рис. 225, а), то угол BAC опирается на дугу, равную $360^\circ -$

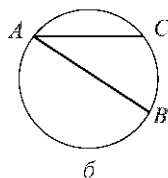
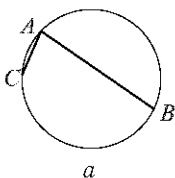


Рис. 225

$- 115^\circ - 43^\circ = 202^\circ$, а значит, угол BAC равен 101° .

Если же точка C лежит на дуге AB , меньшей полуокружности (рис. 225, б), то угол BAC опирается на дугу, равную $115^\circ - 43^\circ = 72^\circ$, а значит, угол BAC равен 36° .

Ответ. 101° или 36° .

657. Точки A и B разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140° , а большая точкой M делится в отношении $6 : 5$, считая от точки A . Найдите угол BAM .

Решение. Дуга AB , большая полуокружности, равна $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$.

Пусть $\sphericalangle AM = 6x$, $\sphericalangle BM = 5x$ (рис. 226). Тогда

$$6x + 5x = 220^\circ,$$

откуда $x = 20^\circ$, а значит, $\sphericalangle BM = 100^\circ$.

Следовательно, $\sphericalangle BAM = 50^\circ$.

Ответ. 50° .

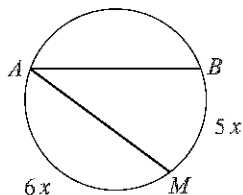


Рис. 226

658. Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AD , проходящая через центр O (D — точка

на окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\sphericalangle BD = 110^\circ 20'$.

Решение. Из условия задачи следует, что центральный угол BOD равен $110^\circ 20'$. Поскольку этот угол является внешним углом прямогоугольного треугольника OAB (рис. 227), то

$$\angle BAD = \angle BOD - 90^\circ = 20^\circ 20'.$$

С другой стороны, угол BOD является углом при вершине равнобедренного треугольника BOD , поэтому

$$\angle ADB = \frac{180^\circ - \angle BOD}{2} = 34^\circ 50'.$$

Ответ. $20^\circ 20'$ и $34^\circ 50'$.

659. Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключенных между параллельными хордами, равны.

Решение. Пусть AB и CD — две параллельные хорды (рис. 228). Вписанные углы ADC и DAB равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD . Следовательно, градусные меры дуг AC и BD , на которые опираются эти углы, также равны.

660. Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32° . Большая дуга окружности, заключенная между сторонами этого угла, равна 100° . Найдите меньшую дугу.

Решение. Обратимся к рисунку 229. Вписанный угол CBE , равный $\frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$, является внешним углом треугольника ABE . Следовательно, угол BEA равен $50^\circ - \angle A = 50^\circ - 32^\circ = 18^\circ$, а значит, дуга BD , на которую он опирается, равна 36° .

Ответ. 36° .

661. Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключенные между секущими, равны 140° и 52° .

Решение. Обратимся к рисунку 229. Вписанный угол CBE равен $\frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$, а вписанный угол BED равен $\frac{52^\circ}{2} = 26^\circ$. При этом угол

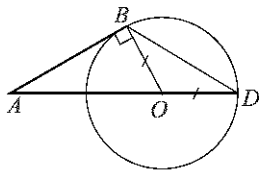


Рис. 227

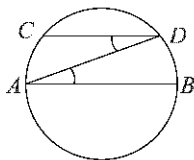


Рис. 228

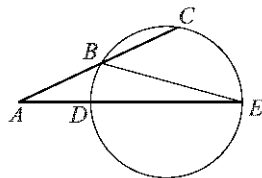


Рис. 229

$\angle CBE$ является внешним углом треугольника ABE . Следовательно, угол

$$\angle BAE = 70^\circ - \angle BED = 70^\circ - 26^\circ = 44^\circ.$$

Ответ. 44° .

662. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E . Найдите угол BEC , если $\sphericalangle AD = 54^\circ$, $\sphericalangle BC = 70^\circ$.

Решение. Угол BEC является внешним углом треугольника AEC (рис. 230), поэтому он равен сумме углов A и C этого треугольника. Но $\angle A = \sphericalangle \frac{BC}{2} = 35^\circ$, $\angle C = \sphericalangle \frac{AD}{2} = 27^\circ$. Следовательно,

$$\angle BEC = 35^\circ + 27^\circ = 62^\circ.$$

Ответ. 62° .

663. Отрезок AC — диаметр окружности, AB — хорда, MA — касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$.

Решение. Вписанный угол ABC опирается на полуокружность (рис. 231), поэтому этот угол прямой. Угол MAC также прямой. Тем самым углы ACB и BAC , равно как и углы MAB и BAC , составляют в сумме 90° . Следовательно, $\angle MAB = \angle ACB$.

664. Прямая AM — касательная к окружности, AB — хорда этой окружности. Докажите, что угол MAB измеряется половиной дуги AB , расположенной внутри угла MAB .

Решение. Если хорда AB — диаметр окружности, то дуга, расположенная внутри угла MAB , равна 180° , а угол $MAB = 90^\circ = \frac{180^\circ}{2}$. Допустим, что хорда AB не является диаметром. Проведем диаметр AC . Если угол MAB острый (см. рис. 231), то, согласно утверждению, сформулированному в задаче 663, $\angle MAB = \angle ACB$, а значит, угол MAB , как и вписанный угол ACB , измеряется половиной дуги AB , расположенной внутри угла MAB . Если же угол MAB тупой (рис. 232), то $\angle MAB = 180^\circ - \angle ACB = \frac{360^\circ - 2\angle ACB}{2} = \sphericalangle \frac{ACB}{2}$.

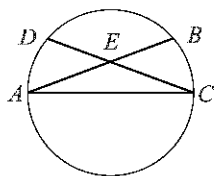


Рис. 230

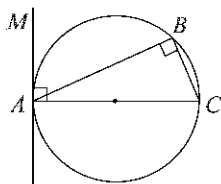


Рис. 231

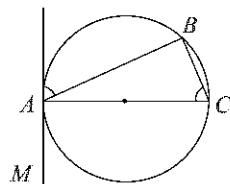


Рис. 232

665. Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

Решение. Угол C опирается на полуокружность, поэтому этот угол прямой. Следовательно, углы A и B — острые, а значит, каждый из них меньше угла C .

666. Хорды AB и CD пересекаются в точке E . Найдите ED , если: а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2,5$; б) $AE = 16$, $BE = 9$, $CE = ED$; в) $AE = 0,2$, $BE = 0,5$, $CE = 0,4$.

Решение. По теореме о пересекающихся хордах

$$AE \cdot BE = CE \cdot ED, \text{ откуда } ED = \frac{AE \cdot BE}{CE}.$$

Имеем:

$$\text{а) } ED = \frac{2 \cdot 5}{2,5} = 4;$$

$$\text{б) } ED = \frac{16 \cdot 9}{ED}, \text{ откуда } ED = 12;$$

$$\text{в) } ED = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,4} = 0,25.$$

Ответ. а) 4; б) 12; в) 0,25.

667. Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает ее в точке C . Найдите BB_1 , если $AC = 4$ см, $CA_1 = 8$ см.

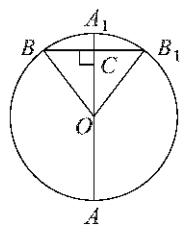


Рис. 233

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 233). Отрезок OC является высотой равнобедренного треугольника $OB B_1$, а значит, и его медианой. Поэтому $BC = CB_1 = \frac{BB_1}{2}$. По теореме о пересекающихся хордах

$$AC \cdot CA_1 = BC \cdot CB_1 = \frac{BB_1^2}{4},$$

откуда

$$BB_1 = 2\sqrt{AC \cdot CA_1} = 8\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ. $8\sqrt{2}$ см.

668. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

Решение. Пусть BC — перпендикуляр, проведенный из точки B к диаметру AA_1 (см. рис. 233), BB_1 — хорда, содержащая этот перпендикуляр. В ходе решения задачи 667 мы установили, что

$$BC = \frac{BB_1}{2} = \sqrt{AC \cdot CA_1}.$$

669. Пользуясь предыдущей задачей, постройте отрезок, средний пропорциональный между данными отрезками.

Решение. На произвольной прямой отложим последовательно отрезки AB и BC , равные данным отрезкам (рис. 234). Затем, найдя середину отрезка AC , построим окружность с диаметром AC и проведем через точку B прямую, перпендикулярную к AC . Пусть D — одна из точек пересечения этой прямой с окружностью. Тогда согласно утверждению, сформулированному в задаче 668, отрезок BD — искомый.

670. Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках P и Q . Докажите, что $AB^2 = AP \cdot AQ$.

Решение. Треугольники ABP и ABQ (рис. 235) подобны, поскольку угол A у них общий, а каждый из углов ABP и AQB измеряется половиной дуги BP (см. задачу 664). Следовательно, $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$, откуда $AB^2 = AP \cdot AQ$.

671. Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D . Найдите CD , если: а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см.

Решение. Согласно утверждению, сформулированному в задаче 670, $AB^2 = AC \cdot AD$. Поэтому:

$$\text{а) } AD = \frac{4 \cdot 4}{2} \text{ см} = 8 \text{ см, откуда } CD = AD - AC = 6 \text{ см;}$$

$$\text{б) } AC = \frac{5 \cdot 5}{10} \text{ см} = 2,5 \text{ см, откуда } CD = AD - AC = 7,5 \text{ см.}$$

Ответ. а) 6 см; б) 7,5 см.

672. Через точку A , лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B_1, C_1 , а другая — в точках B_2, C_2 . Докажите, что

$$AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2.$$

Решение. Пусть AD — касательная (D — точка касания). Тогда согласно утверждению, сформулированному в задаче 670,

$$AD^2 = AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2.$$

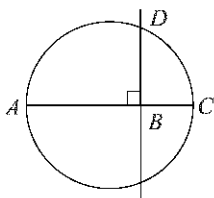


Рис. 234

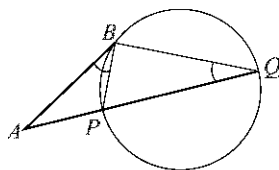


Рис. 235

§ 3. Четыре замечательные точки треугольника

674. Из точки M биссектрисы неразвернутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

Решение. Прямоугольные треугольники OAM и OBM (рис. 236) равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $OA = OB$. Прямая OM содержит биссектрису равнобедренного треугольника OAB , а значит, содержит и его высоту. Следовательно, $AB \perp OM$.

675. Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A . Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA .

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (рис. 237). Каждая из этих точек равноудалена от сторон угла O и, следовательно, лежит на биссектрисе этого угла. Отрезки O_1A и O_2A перпендикулярны к общей касательной, поэтому точки O_1 , A и O_2 лежат на одной прямой.

Таким образом, все четыре точки: O , O_1 , A и O_2 — лежат на одной прямой.

676. Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r . Найдите: а) OA , если $r = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$; б) r , если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90^\circ$.

Решение. Точка O равноудалена от сторон угла A (рис. 238), поэтому луч AO — биссектриса этого угла. Имеем:

$$\text{а) } OA = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 10 \text{ см; б) } r = OA \sin 45^\circ = 7\sqrt{2} \text{ дм.}$$

Ответ. а) 10 см; б) $7\sqrt{2}$ дм.

677. Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что точка O является центром окружности, касающейся прямых AB , BC , AC .

Решение. Проведем из точки O перпендикуляры OA_1 , OB_1 и OC_1 к прямым BC , CA и AB (рис. 239). Поскольку точка O лежит на биссектрисе угла A_1BC_1 , то она равноудалена от прямых AB и BC , а значит, $OA_1 = OB_1$. Аналогично, $OA_1 = OC_1$. Следовательно, окружность радиуса OA_1 проходит через точки B_1 и C_1 . Прямые BC , CA и AB касаются этой окружности в точках A_1 , B_1 и C_1 , так как они перпендикулярны соответственно к радиусам OA_1 , OB_1 и OC_1 .

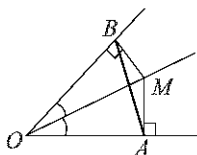


Рис. 236

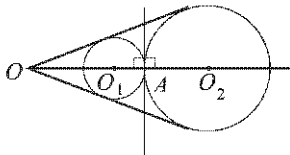


Рис. 237

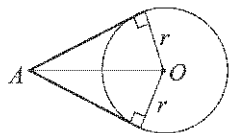


Рис. 238

678. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите углы ACM и BCM , если: а) $\angle AMB = 136^\circ$; б) $\angle AMB = 111^\circ$.

Решение. Поскольку M — точка пересечения биссектрис углов A и B треугольника ABC (рис. 240), то луч CM — биссектриса угла C этого треугольника. Следовательно,

$$\begin{aligned} \angle ACM &= \angle BCM = \\ &= \frac{\angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} = \\ &= 90^\circ - (180^\circ - \angle AMB) = \angle AMB - 90^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом:

а) $\angle ACM = \angle BCM = 136^\circ - 90^\circ = 46^\circ$;

б) $\angle ACM = \angle BCM = 111^\circ - 90^\circ = 21^\circ$.

Ответ. а) 46° и 46° ; б) 21° и 21° .

679. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D . Найдите: а) AD и CD , если $BD = 5$ см, $AC = 8,5$ см; б) AC , если $BD = 11,4$ см, $AD = 3,2$ см.

Решение. Точка D равноудалена от концов отрезка CB (рис. 241), т. е. $BD = CD$. Поэтому:

а) $CD = BD = 5$ см, $AD = AC - CD = 8,5$ см $- 5$ см $= 3,5$ см;

б) $AC = AD + CD = AD + BD = 3,2$ см $+ 11,4$ см $= 14,6$ см.

Ответ. а) $3,5$ см и 5 см; б) $14,6$ см.

680. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC . Докажите, что: а) D — середина стороны BC ; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

Решение. а) Точка D лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB (рис. 242), поэтому $AD = BD$. Аналогично $AD = CD$. Следовательно, $BD = CD$, а значит, точка D — середина отрезка BC .

б) Поскольку $AD = BD$, то треугольник ABD — равнобедренный, а значит, $\angle BAD = \angle B$. Аналогично $\angle CAD = \angle C$. Поэтому

$$\angle A = \angle BAD + \angle CAD = \angle B + \angle C.$$

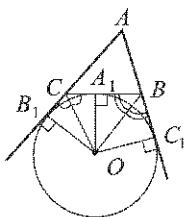


Рис. 239

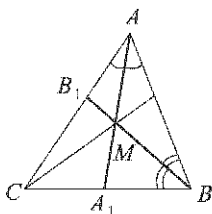


Рис. 240

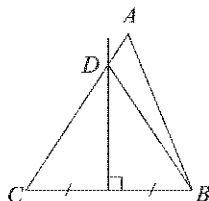


Рис. 241

681. Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E . Найдите основание AC треугольника, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB = 18$ см.

Решение. Треугольник ABC — равнобедренный (рис. 243), поэтому $BC = AB = 18$ см. Точка E лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB , а значит, $AE = BE$. Имеем:

$$\begin{aligned} AC &= (AC + AE + EC) - (AE + EC) = \\ &= (AC + AE + EC) - (BE + EC) = \\ &= (AC + AE + EC) - BC = 27 \text{ см} - 18 \text{ см} = 9 \text{ см}. \end{aligned}$$

Ответ. 9 см.

682. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB . Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB .

Решение. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, то точка C равноудалена от концов отрезка AB , а значит, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Аналогично, точка D лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB . Следовательно, прямая CD и есть указанный серединный перпендикуляр, поэтому прямая CD проходит через середину отрезка AB .

683. Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

Решение. Предположим, что медиана AM является высотой. Тогда она является серединным перпендикуляром к отрезку BC и, следовательно, точка A равноудалена от концов отрезка BC . Но по условию задачи $AB \neq AC$. Поэтому медиана AM треугольника ABC не может быть высотой.

684. Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M . Докажите, что прямая CM перпендикулярна к прямой AB .

Решение. Каждый из углов A и B треугольника ABM равен половине угла при основании треугольника ABC , а значит, эти углы равны. Следовательно, треугольник ABM — также равнобедрен-

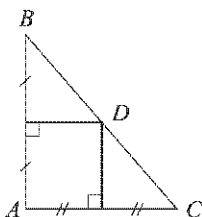


Рис. 242

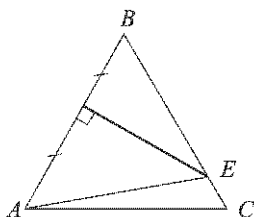


Рис. 243

ный. Поэтому прямая CM — срединный перпендикуляр к отрезку AB (см. решение задачи 682).

685. Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC , проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M . Докажите, что прямая MC — срединный перпендикуляр к отрезку AB .

Решение. По теореме о пересечении высот треугольника прямая MC — высота равнобедренного треугольника ABC , а значит, и его медиана. Но это и означает, что прямая MC — срединный перпендикуляр к отрезку AB .

687. Даны прямая a и две точки A и B , лежащие по одну сторону от прямой. На прямой a постройте точку M , равноудаленную от точек A и B .

Решение. Построим срединный перпендикуляр к отрезку AB (см. задачу 686) и отметим точку M пересечения этого перпендикуляра с прямой a (рис. 244). Точка M — искомая.

688. Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри угла, равноудаленную от его сторон и равноудаленную от концов данного отрезка.

Решение. Построим биссектрису данного угла (рис. 245), срединный перпендикуляр к данному отрезку (см. задачу 686) и отметим точку их пересечения. Эта точка — искомая.

§ 4. Вписанная и описанная окружности

689. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AC — его основание, O — центр вписанной окружности. A_1, B_1, C_1 — точки, в которых вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB (рис. 246). Луч BO — биссектриса угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника, поэтому прямая BO является срединным перпендикуляром к основанию AC . Отрезок OB_1 перпендикулярен к стороне AC .

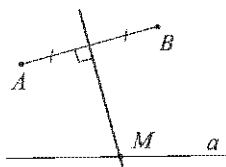


Рис. 244

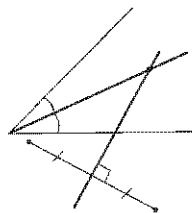


Рис. 245

Следовательно, точка B_1 лежит на прямой OB и является серединой основания AC , а значит, $AB_1 = 5$ см. По теореме Пифагора

$$BB_1 = \sqrt{169 - 25} \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

Прямоугольные треугольники BOC_1 и BAB_1 подобны, так как имеют общий острый угол B . Поэтому

$$\frac{r}{5 \text{ см}} = \frac{12 \text{ см} - r}{13 \text{ см}}, \text{ откуда } r = 3\frac{1}{3} \text{ см}.$$

Ответ. $3\frac{1}{3}$ см.

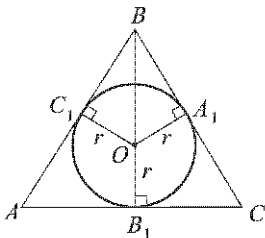


Рис. 246

690. Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении $12 : 5$, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AC — его основание, O — центр вписанной окружности, A_1, B_1, C_1 — точки, в которых вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB (см. рис. 246). Если отрезок BO обозначить через $12x$, то радиус вписанной окружности окажется равным $5x$, а высота треугольника ABC , проведенная к основанию, — равной $17x$. Из подобия треугольников BOC_1 и BAB_1 (см. решение задачи 689) находим:

$$\frac{5x}{\frac{AC}{2}} = \frac{12x}{60 \text{ см}}, \text{ откуда } AC = 50 \text{ см}.$$

Ответ. 50 см.

691. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

Решение. Обратимся к рисунку 246. Из условия задачи следует, что боковая сторона треугольника равна $3 \text{ см} + 4 \text{ см} = 7 \text{ см}$. Поскольку отрезки касательных, проведенных из вершины основания, равны, то основание равно $3 \text{ см} + 3 \text{ см} = 6 \text{ см}$. Следовательно, периметр треугольника равен $7 \text{ см} + 7 \text{ см} + 6 \text{ см} = 20 \text{ см}$.

Ответ. 20 см.

692. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и AC в точках P, Q и R . Найдите AP, PB, BQ, QC, CR, RA , если $AB = 10 \text{ см}, BC = 12 \text{ см}, CA = 5 \text{ см}$.

Решение. Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, то

$$AP = RA, PB = BQ, QC = CR \text{ (рис. 247).}$$

Следовательно, $AP + PB = AB = 10$ см, $BP + QC = BC = 12$ см, $QC + AP = CA = 5$ см.

Из этих трех равенств находим:

$$AP = 1,5 \text{ см, } PB = 8,5 \text{ см, } CR = 3,5 \text{ см,}$$

а значит, $RA = 1,5$ см, $BQ = 8,5$ см, $CR = 3,5$ см.

Ответ. 1,5 см, 8,5 см, 8,5 см, 3,5 см, 3,5 см, 1,5 см.

693. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r . Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

Решение. а) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A . Пусть O — центр вписанной окружности, A_1, B_1, C_1 — точки, в которых вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB (рис. 248). Четырехугольник AB_1OC_1 — квадрат, поэтому $AB_1 = AC_1 = r = 4$ см. Имеем:

$$AB + BC + CA = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + B_1A.$$

Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, то $C_1B = BA_1$ и $CB_1 = A_1C$. Таким образом,

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= 2r + 2BA_1 + 2A_1C = 2r + 2BC = \\ &= 8 \text{ см} + 52 \text{ см} = 60 \text{ см.} \end{aligned}$$

б) Аналогично получаем:

$$AB + BC + CA = 10 \text{ см} + 24 \text{ см} + 2r.$$

По теореме Пифагора

$$(r + 5 \text{ см})^2 + (r + 12 \text{ см})^2 = (5 \text{ см} + 12 \text{ см})^2,$$

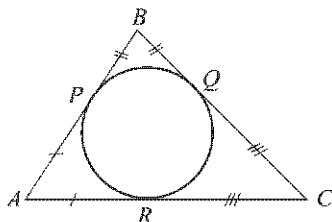


Рис. 247

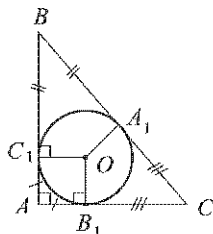


Рис. 248

откуда находим: $r = 3$ см. Таким образом, периметр треугольника ABC равен 40 см.

Ответ. а) 60 см; б) 40 см.

694. Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c , а сумма катетов m .

Решение. В ходе решения задачи 693, а было установлено, что периметр данного треугольника равен сумме его удвоенной гипотенузы и диаметра вписанной окружности. Поэтому диаметр вписанной окружности равен $m - c$.

Ответ. $m - c$.

695. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырехугольника.

Решение. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, поэтому периметр данного четырехугольника равен

$$2 \cdot 15 \text{ см} = 30 \text{ см}.$$

Ответ. 30 см.

696. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

Решение. Если в параллелограмм со смежными сторонами a и b можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны: $2a = 2b$, откуда $a = b$. Следовательно, этот параллелограмм — ромб.

697. Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

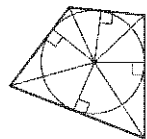


Рис. 249

Решение. Соединим центр вписанной окружности с вершинами многоугольника отрезками (рис. 249). В результате многоугольник окажется разделенным на треугольники, в каждом из которых за основание можно принять сторону многоугольника, а за высоту — радиус r вписанной окружности. Площадь многоугольника равна сумме площадей этих треугольников, т. е. произведения общего множителя r на половину периметра многоугольника.

698. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, поэтому периметр данного четырехугольника равен $2 \cdot 12 \text{ см} = 24 \text{ см}$. Площадь описанного многоугольника равна половине

произведения его периметра на радиус вписанной окружности (см. задачу 697). Следовательно, площадь четырехугольника равна 60 см^2 .

Ответ. 60 см^2 .

699. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10 см , а его площадь — 12 см^2 . Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Решение. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, поэтому периметр данного четырехугольника равен $2 \cdot 10 \text{ см} = 20 \text{ см}$. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности (см. задачу 697). Следовательно, радиус вписанной окружности равен $\frac{12}{10} \text{ см} = 1,2 \text{ см}$.

Ответ. $1,2 \text{ см}$.

700. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

Решение. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому диагонали ромба разделяют его на четыре прямоугольных треугольника, равных друг другу по двум катетам. Следовательно, высоты этих треугольников, проведенные из вершины O прямых углов, также равны. Иными словами, если провести окружность с центром O , проходящую через основание одной из этих высот, то она пройдет и через основания трех других высот (рис. 250). Стороны ромба касаются этой окружности, так как они соответственно перпендикулярны к ее радиусам.

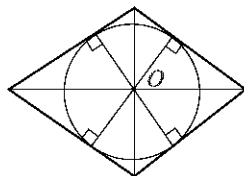


Рис. 250

701. Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. В каждый из них впишите окружность.

Решение. Чтобы вписать окружность в данный треугольник, нужно построить биссектрисы двух его углов и найти точку их пересечения — центр вписанной окружности. Затем из этой точки следует провести перпендикуляр к какой-нибудь стороне. Окружность с найденным центром, проходящая через основание этого перпендикуляра, — искомая вписанная окружность.

702. В окружность вписан треугольник ABC так, что AB — диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\sphericalangle BC = 134^\circ$; б) $\sphericalangle AC = 70^\circ$.

Решение. Вписанный угол C опирается на полуокружность. Следовательно, угол C — прямой. По теореме о вписанном угле:

$$\text{а) } \sphericalangle A = \frac{134^\circ}{2} = 67^\circ, \text{ а значит, } \sphericalangle B = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ;$$

б) $\angle B = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$, а значит, $\angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Ответ. а) 67° , 23° и 90° ; б) 55° , 35° и 90° .

703. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC . Найдите углы треугольника, если $\sphericalangle BC = 102^\circ$.

Решение. По теореме о вписанном угле $\angle A = \frac{102^\circ}{2} = 51^\circ$ или $\angle A = \frac{360^\circ - 102^\circ}{2} = 129^\circ$, а значит, $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 51^\circ}{2} = 64^\circ 30'$ или $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 129^\circ}{2} = 25^\circ 30'$.

Ответ. 51° , $64^\circ 30'$, $64^\circ 30'$ или 129° , $25^\circ 30'$, $25^\circ 30'$.

704. Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. а) Докажите, что точка O — середина гипотенузы. б) Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d , а один из острых углов треугольника равен α .

Решение. а) Вписанный прямой угол опирается на полуокружность. Поэтому гипотенуза треугольника является диаметром, а значит, точка O — середина гипотенузы.

б) Гипотенуза треугольника равна d , а значит, его катеты равны $d \sin \alpha$ и $d \cos \alpha$.

Ответ. б) d , $d \sin \alpha$, $d \cos \alpha$.

705. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; б) $AC = 18$ см, $\angle B = 30^\circ$.

Решение. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы (см. задачу 704), т. е. равен $\frac{AB}{2}$. Имеем:

а) $AB = \sqrt{64 + 36}$ см = 10 см, $\frac{AB}{2} = 5$ см;

б) $AB = 36$ см, $\frac{AB}{2} = 18$ см.

Ответ. а) 5 см; б) 18 см.

706. Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

Решение. По теореме о пересечении медиан треугольника высота данного равностороннего треугольника равна $\frac{3}{2} \cdot 10$ см = 15 см, а значит, его сторона равна $10\sqrt{3}$ см.

Ответ. $10\sqrt{3}$ см.

707. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120° , боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AC — его основание, O — центр описанной окружности (рис. 251). Поскольку углы OBA и OBC равны, то каждый из них равен 60° . Таким образом, в равнобедренном треугольнике OAB один из углов равен 60° , а значит, этот треугольник равносторонний. Поэтому радиус OA описанной окружности равен 8 см, а ее диаметр — 16 см.

Ответ. 16 см.

708. Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

Решение. а) Диагонали прямоугольника равны и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому окружность с центром в точке пересечения диагоналей, проходящая через одну из его вершин, проходит и через три другие вершины, т. е. является окружностью, описанной около прямоугольника.

б) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AB и BC , O — точка пересечения серединных перпендикуляров OM и ON к ее сторонам AB и CD (рис. 252). Тогда $OA = OB$ и $OC = OD$. Углы при основании равнобедренной трапеции равны (см. задачу 388), а отрезок MN параллелен основаниям (см. задачу 386). Следовательно, $\angle AMN = \angle DNM$, а значит, $\angle OMN = \angle ONM$, т. е. треугольник OMN — равнобедренный. Прямоугольные треугольники OBM и OCN равны по двум катетам, поэтому $OB = OC$. Итак, $OA = OB = OC = OD$. Поэтому окружность с центром в точке O , проходящая через одну из вершин трапеции, проходит и через три другие ее вершины, т. е. является окружностью, описанной около трапеции.

709. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Решение. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° . В параллелограмме противоположные углы равны. Следовательно, если около параллелограмма можно описать окружность, то все его углы равны 90° , а значит, этот параллелограмм — прямоугольник.

710. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

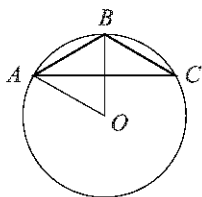


Рис. 251

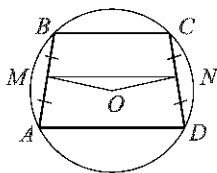


Рис. 252

Решение. Если около трапеции можно описать окружность, то дуги, стягиваемые ее боковыми сторонами, равны (см. задачу 659). Поэтому вписанные углы при основании трапеции опираются на равные дуги и, следовательно, равны. Из этого следует, что трапеция равнобедренная (см. задачу 389).

711. Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и равнобедренный. Для каждого из них постройте описанную окружность.

Решение. Чтобы описать окружность около данного треугольника, нужно построить серединные перпендикуляры к двум сторонам и найти точку их пересечения — центр описанной окружности. Окружность с найденным центром, проходящая через одну из вершин треугольника, проходит и через две другие его вершины, т. е. является искомой описанной окружностью. В случае прямоугольного треугольника построение можно несколько сократить, если воспользоваться утверждением, сформулированным в задаче 704, а.

Дополнительные задачи

712. Докажите, что касательные, проведенные через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

Решение. Пусть AB — данная хорда (рис. 253). Эта хорда образует с каждой из касательных угол, равный половине дуги AB (см. задачу 664). Тем самым сумма односторонних углов, образованных при пересечении касательных секущей AB , равна дуге AB . Но $\sphericalangle AB \neq 180^\circ$, следовательно, касательные пересекаются.

713. Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром O , B и C — точки касания. Через произвольную точку X , взятую на дуге BC , проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N . Докажите, что периметр треугольника AMN и угол MON не зависят от выбора точки X на дуге BC .

Решение. Прямоугольные треугольники OXM и OVM (рис. 254) равны по гипотенузе и катету. Следовательно,

$$MX = MV \text{ и } \angle MOX = \angle MOV.$$

Аналогично из равенства треугольников OXM и OCN находим: $XN = CN$ и $\angle NOX = \angle NOC$.

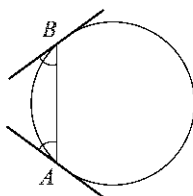


Рис. 253

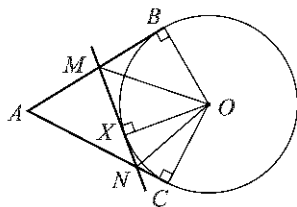


Рис. 254

Имеем:

$$\begin{aligned} AM + MN + AN &= AM + MX + XN + NA = \\ &= AM + MB + CN + NA = AB + AC; \\ \angle MON &= \angle MOX + \angle NOX = \frac{\angle BOX + \angle XOC}{2} = \frac{\angle BOC}{2}. \end{aligned}$$

Тем самым периметр треугольника AMN и угол MON не зависят от выбора точки X на дуге BC .

714*. Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A , а другой — в точке B . Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB .

Решение. Проведем через точку M общую касательную и обозначим буквой K точку ее пересечения с прямой AB (рис. 255). Поскольку KA и KM — отрезки касательных к окружности, проведенных из точки K , то $KA = KM$. Аналогично $KB = KM$. Следовательно, $KA = KB = KM$. Но это и означает, что точка M лежит на окружности с диаметром AB .

715. Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 . Докажите, что градусные меры дуг AB и AB_1 , меньших полуокружности, равны.

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 256). Прямая AA_1 содержит высоту равнобедренного треугольника ABB_1 , а значит, и его биссектрису. Следовательно, центральные углы AOB и AOB_1 равны, а значит, равны и дуги, на которые опираются эти углы.

716. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\sphericalangle AB \sphericalangle CD$, то $AB = CD$.

Решение. Пусть O — центр окружности. Равнобедренные треугольники OAB и OCD равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AB = CD$.

717. Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AD параллельны. Докажите, что хорда CD является диаметром.

Решение. Накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AB , равны (рис. 257), поэтому равны и дуги AC и BD , на которые опираются эти углы.

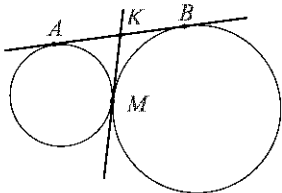


Рис. 255

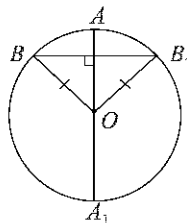


Рис. 256

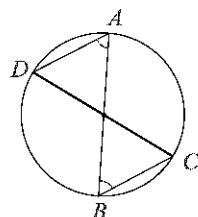


Рис. 257

Имеем:

$$\sphericalangle CD = \sphericalangle CB + \sphericalangle BD = (\sphericalangle AB - \sphericalangle AC) + \sphericalangle BD = \sphericalangle AB = 180^\circ.$$

Следовательно, хорда CD — диаметр окружности.

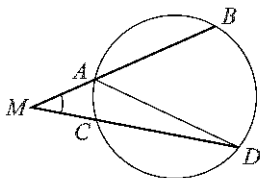


Рис. 258

719. Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие. Докажите, что угол между ними измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри угла.

Решение. Рассмотрим две секущие, проведенные из точки M и пересекающие окружность в точках A и B , C и D соответственно (рис. 258). Угол BAD — внешний угол треугольника ADM , поэтому

$$\angle BAD = \angle AMD + \angle ADM,$$

откуда

$$\angle AMD = \angle BAD - \angle ADM = \sphericalangle \frac{BD}{2} - \sphericalangle \frac{AC}{2} = \frac{\sphericalangle BD - \sphericalangle AC}{2}.$$

720. Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне? Ответ обоснуйте.

Решение. Ясно, что вершина треугольника не может лежать на серединном перпендикуляре к той стороне, концом которой она является. Если бы вершина разностороннего треугольника лежала на серединном перпендикуляре к противоположной стороне, то медиана, проведенная из этой вершины, была бы высотой, что невозможно (см. задачу 683).

Ответ. Нет.

721. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

Решение. Если в прямоугольник со смежными сторонами a и b можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны: $2a = 2b$, откуда $a = b$, а значит, этот прямоугольник — квадрат.

722. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r . Известно, что $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Найдите стороны четырехугольника, если его площадь равна S .

Решение. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности (см. задачу 697). Поэтому периметр четырехугольника $ABCD$ равен $\frac{2S}{r}$.

Следовательно, $AB + CD = AD + BC = \frac{S}{r}$. Отсюда находим:

$$AB = \frac{2S}{5r}, \quad BC = \frac{S}{3r}, \quad CD = \frac{3S}{5r}, \quad AD = \frac{2S}{3r}.$$

О т в е т. $\frac{2S}{5r}, \frac{S}{3r}, \frac{3S}{5r}, \frac{2S}{3r}$.

723. Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности и точки касания принадлежат основаниям, то средняя линия трапеции проходит через центр окружности.

Решение. Пусть P и Q — точки, в которых окружность касается оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — центр этой окружности (рис. 259). Прямая OP перпендикулярна к прямой BC . Следовательно, она перпендикулярна и к прямой AD , а значит, проходит через точку Q (иначе из точки O оказалось бы проведено два перпендикуляра к прямой AD , что невозможно). Иными словами, отрезок PQ — диаметр окружности.

Напомним, что средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины M и N ее боковых сторон. Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции (см. задачу 386). Следовательно, по теореме Фалеса (см. задачу 385), она пересекает отрезок PQ в его середине, т. е. проходит через центр O окружности.

725. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b .

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$), $AB \perp AD$ (рис. 260), r — радиус вписанной в нее окружности. Проведем высоту CH и, учитывая, что

$$CH = 2r, \quad DH = a - b, \quad CD = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r,$$

применим теорему Пифагора к треугольнику CDH :

$$(a - b)^2 + 4r^2 = (a + b - 2r)^2,$$

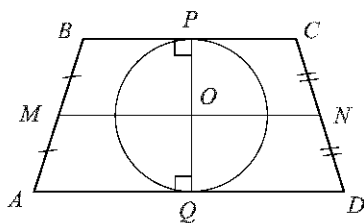


Рис. 259

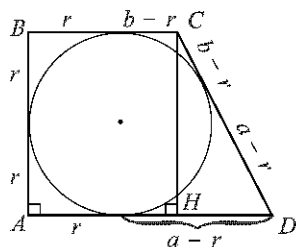


Рис. 260

откуда

$$r = \frac{ab}{a+b}.$$

Ответ. $\frac{ab}{a+b}$.

726. Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

Решение. Рассмотрим серединный перпендикуляр к той стороне треугольника, к которой проведена данная медиана. Из условия задачи следует, что центр описанной окружности является общей точкой этого серединного перпендикуляра и данной медианы. Возможны два случая.

1°. Рассматриваемый серединный перпендикуляр и данная медиана совпадают. В этом случае вершина, из которой проведена медиана, равноудалена от концов противоположащей стороны, а значит, данный треугольник — равнобедренный.

2°. Рассматриваемый серединный перпендикуляр и данная медиана не совпадают. В этом случае серединный перпендикуляр и медиана имеют единственную общую точку — середину стороны, к которой проведена медиана. Тем самым центр описанной окружности лежит на середине стороны треугольника, а значит, этот треугольник — прямоугольный (см. решение задачи 665).

727. В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O_1 , и около него описана окружность с центром O_2 . Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

Решение. Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе, проведенной к основанию треугольника. Эта биссектриса является медианой и высотой, т. е. серединным перпендикуляром к основанию треугольника. Следовательно, обе точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

728. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

Решение. Противоположные углы ромба равны. Если около ромба можно описать окружность, то эти углы составляют в сумме 180° . Следовательно, каждый из них равен 90° , а значит, этот ромб — квадрат.

730. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность.

Решение. Каждый из углов A и B четырехугольника $ACBO$ равен 90° , а значит, сумма этих углов равна 180° . Поэтому (см. задачу 729) около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность.

731. Докажите, что около выпуклого четырехугольника $ABCD$, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

Решение. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — данная трапеция (рис. 261). Угол A четырехугольника $ABCD$ равен $180^\circ - \frac{\angle A_1}{2} - \frac{\angle B_1}{2}$, где $\angle A_1$ и $\angle B_1$ — углы трапеции. Но $\angle A_1 + \angle B_1 = 180^\circ$. Следовательно, $\angle A = 90^\circ$. Аналогично, $\angle C = 90^\circ$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов A и C равна 180° . Поэтому (см. задачу 729) около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

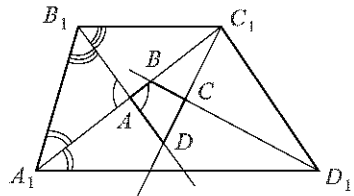


Рис. 261

732. В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведен перпендикуляр MH к гипотенузе AB . Докажите, что углы MHC и MBC равны.

Решение. В четырехугольнике $BCMH$ противоположные углы C и H прямые (рис. 262), а значит, сумма этих углов равна 180° . Поэтому (см. задачу 729) около этого четырехугольника можно описать окружность. Опишем ее. Тогда окажется, что вписанные углы MHC и MBC равны, так как они опираются на одну и ту же дугу MC .

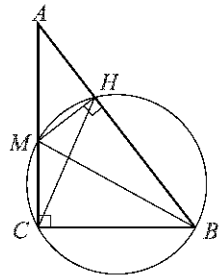


Рис. 262

733. Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

Решение. Центры указанных окружностей совпадают с точкой пересечения медиан треугольника, причем радиус описанной окружности равен расстоянию от этой точки до вершины, а радиус вписанной окружности — расстоянию от этой точки до стороны. Из теоремы о пересечении медиан треугольника следует, что радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности, т. е. равен 5 см.

Ответ. 5 см.

734. Докажите, что если в параллелограмме можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

Решение. Если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник (см. задачу 709). Если же в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат (см. задачу 721).

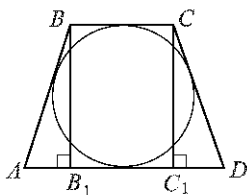


Рис. 263

Рис. 263
Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ (рис. 263). Для определенности будем считать, что $a > b$. Поскольку около данной трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная (см. задачу 710), т. е. $AB = CD$. С другой стороны, поскольку в эту трапецию можно вписать окружность, то $AB + CD = 2AB = a + b$, откуда

$$AB = \frac{a+b}{2}.$$

Пусть BB_1 и CC_1 — перпендикуляры, проведенные из точек B и C к основанию AD . Тогда, очевидно, $BB_1 = CC_1 = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в трапецию. Следовательно, прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 равны по гипотенузе и катету. Поэтому $AB_1 = C_1D$, а поскольку $B_1C_1 = BC = b$, то

$$AB_1 = \frac{a-b}{2}.$$

Осталось применить теорему Пифагора к треугольнику ABB_1 :

$$4r^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4},$$

откуда

$$r = \frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

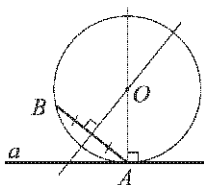


Рис. 264

736. Даны прямая a , точка A , лежащая на этой прямой, и точка B , не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A .

Решение. Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB , прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a , и найдем точку O их пересечения (рис. 264). Окружность с центром O радиуса OA — искомая.

737. Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

Решение. Через произвольную точку A одной из прямых проведем прямую, перпендикулярную к этой прямой. Пусть B — точка пересечения проведенной прямой со второй из данных прямых (рис. 265).

Найдем середину M отрезка AB и проведем через нее прямую, перпендикулярную ранее проведенной. Затем проведем окружность радиуса $\frac{AB}{2}$ с центром в данной точке и обозначим буквой O одну из точек пересечения этой окружности с последней из проведенных прямых. Окружность с центром O радиуса $\frac{AB}{2}$ — искомая.

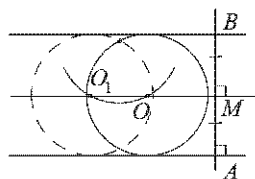


Рис. 265

Ясно, что если данная точка лежит между данными прямыми, то задача имеет два решения; в противном случае задача не имеет ни одного решения.

Задачи повышенной трудности

877. Две окружности имеют единственную общую точку M . Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках A и A_1 , а другую — в точках B и B_1 . Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Тогда точка M лежит на прямой O_1O_2 (в противном случае точка, симметричная точке M относительно прямой O_1O_2 , была бы еще одной общей точкой данных окружностей). Следовательно, прямая CD , проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой O_1O_2 , является общей касательной двух данных окружностей. Возможны два случая: данные окружности лежат по одну сторону от общей касательной (рис. 266, а); данные окружности лежат по разные стороны от общей касательной (рис. 266, б). Идея доказательства в обоих случаях одна и та же. Поэтому доказательство проведем для первого случая, а в скобках укажем те изменения, которые следует внести в текст доказательства во втором случае.

Поскольку угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной заключенной внутри угла дуги (см. задачу 664), то величины дуг MA_1 и MB_1 , заключенных внут-

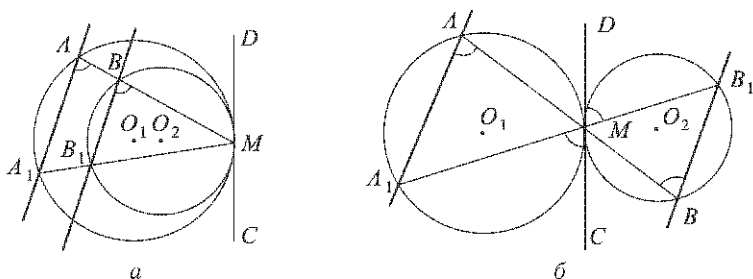


Рис. 266

ри угла A_1MC (внутри вертикальных углов A_1MC и B_1MD), равны. Следовательно, равны и вписанные углы A_1AM , B_1BM , опирающиеся на эти дуги. Но эти углы являются соответственными (накрест лежащими) углами, образованными при пересечении прямых AA_1 и BB_1 секущей AB . Поэтому $AA_1 \parallel BB_1$.

878. Прямая AC — касательная к окружности с центром O_1 , а прямая BD — касательная к окружности с центром O_2 (рис. 267, рис. 270 учебника). Докажите, что: а) $AD \parallel BC$; б) $AB^2 = AD \cdot BC$; в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

Решение. а) Каждый из углов ADB и BAC измеряется половиной дуги AB окружности с центром O_1 (см. задачу 664). Следовательно, эти углы равны. По аналогичной причине $\angle ABD = \angle ACB$. Таким образом, треугольники ABD и ABC подобны. Поэтому углы DAB и ABC также равны. Но эти углы являются накрест лежащими углами, образованными при пересечении прямых AD и BC секущей AB . Поэтому $AD \parallel BC$.

б) Из подобия треугольников ABD и ABC (см. а) следует, что

$$AB : BC = AD : AB, \text{ откуда } AB^2 = AD \cdot BC.$$

в) Из подобия треугольников ABD и ABC (см. а) следует, что $BD : AC = AB : BC$ и $BD : AC = AD : AB$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} BD^2 : AC^2 &= (BD : AC)(BD : AC) = \\ &= (AB : BC)(AD : AB) = AD : BC. \end{aligned}$$

879. Точки B_1 и C_1 — середины дуг AB и AC (рис. 268, рис. 271 учебника). Докажите, что $AM = AN$.

Решение. Поскольку угол между двумя пересекающимися хордами окружности измеряется полусуммой дуг, заключенных между этими хордами (см. задачу 718), то

$$\angle AMC_1 = \frac{\sphericalangle AC_1 + \sphericalangle BB_1}{2} = \frac{\sphericalangle CC_1 + \sphericalangle AB_1}{2} = \angle ANB_1.$$

Таким образом, в треугольнике AMN углы M и N равны. Следовательно, $AM = AN$.

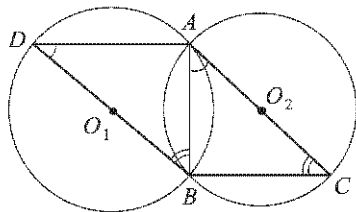


Рис. 267

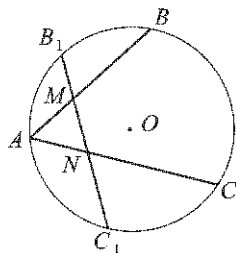


Рис. 268

880. Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажите, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорд соответственно равны между собой.

Решение. Возможны два случая: точка пересечения данных прямых лежит внутри круга; точка пересечения данных прямых лежит вне круга. Ход рассуждений для этих случаев в основном один и тот же. Поэтому доказательство проведем для первого случая, а в скобках укажем те изменения, которые следует внести в текст доказательства во втором случае.

Пусть $AB = a$ и $A_1B_1 = a$ — равные хорды, M — точка пересечения прямых AB и A_1B_1 (рис. 269), $MA = x$, $MA_1 = y$ ($x \leq \frac{a}{2}$, $y \leq \frac{a}{2}$). По теореме о пересекающихся хордах (согласно утверждению, сформулированному в задаче 672)

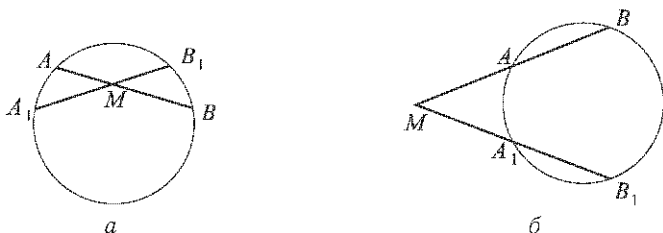


Рис. 269

$$x(a - x) = y(a - y) \quad (x(a + x) = y(a + y)),$$

откуда $x = y$, а значит, и

$$a - x = a - y \quad (a + x = a + y).$$

881. Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$, где AD — расстояние от точки A до касательной в точке B , имеет одно и то же значение.

Решение. Пусть AC — диаметр данной окружности (рис. 270). Прямоугольные треугольники ABC и ABD подобны, поскольку каждый из их острых углов C и B измеряется половиной дуги AB (см. задачу 664). Следовательно,

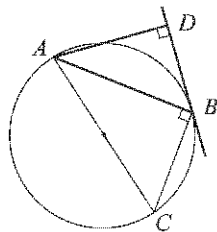


Рис. 270

$$AC : AB = AB : AD, \text{ откуда } \frac{AB^2}{AD} = AC.$$

Тем самым для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$ имеет одно и то же значение, равное диаметру этой окружности.

882. Через точку A пересечения двух окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая одну из окружностей в точке B , а другую — в точке C . Докажите, что отрезок BC будет наибольшим тогда, когда он параллелелен прямой O_1O_2 .

Решение. Проведем из точек O_1 и O_2 перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC (рис. 271). Отрезки O_1H_1 и O_2H_2 — высоты равнобедренных треугольников O_1AB и O_2AC , а значит, их медианы. Следовательно, $BC = 2 \cdot H_1H_2$. Длина отрезка H_1H_2 равна расстоянию между параллельными прямыми O_1H_1 и O_2H_2 , поэтому $BC = 2 \cdot H_1H_2 \leq 2 \cdot O_1O_2$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда прямые H_1H_2 и O_1O_2 параллельны.

883. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O . На каждом радиусе OM окружности отложен от центра O отрезок, равный расстоянию от конца M этого радиуса до прямой AB . Найдите множество концов построенных таким образом отрезков.

Решение. Проведем диаметр CD , перпендикулярный к диаметру AB (рис. 272). Пусть, например, точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB , MH — перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой AB , P — точка искомого множества, лежащая на радиусе OM . Треугольники OMH и OPC равны по первому признаку равенства треугольников: $OM = OC$, $MH = OP$, углы OMH и OPC равны, поскольку они являются накрест лежащими углами, образованными при пересечении параллельных прямых MH и OC секущей OM . Следовательно, угол OPC — прямой, а значит, точка P лежит на окружности с диаметром OC .

Итак, если точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB , то точка P лежит на окружности с диаметром OC . Точка P лежит на указанной окружности и в тех случаях, когда точки M и C совпадают или когда точка M лежит на прямой AB (в этом случае расстояние от точки M до прямой AB считается равным нулю). Ясно также, что все точки этой окружности принадлежат искомому множеству точек. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что и все точки окружности с диаметром OD принадлежат искомому множеству,

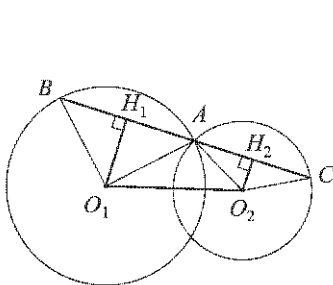


Рис. 271

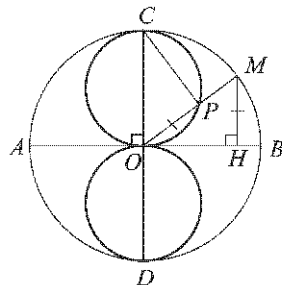


Рис. 272

причем каждая точка этого множества лежит на одной из указанных окружностей. Таким образом, искомое множество состоит из двух окружностей с диаметрами OC и OD .

884. Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC = 30^\circ$, $\angle BMA = 17^\circ$. Найдите углы BAM и BCM .

Решение. Проведем окружность с центром A радиуса AB (рис. 273) и на ее дуге $BC = 60^\circ$ возьмем произвольную точку N . Угол BNC опирается на дугу BC , равную $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$, поэтому он равен 150° . Тем самым в четырехугольнике $BNCM$ сумма противоположных углов M и N равна 180° . Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность (см. задачу 729). Но через точки B , N и C проходит только одна окружность — окружность с центром A радиуса AB . Значит, точка M лежит на этой окружности.

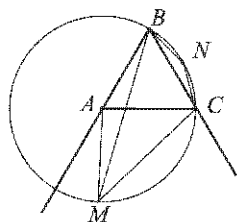


Рис. 273

Треугольник ABM — равнобедренный, поэтому $\angle ABM = \angle AMB = 17^\circ$, а значит, $\angle BAM = 180^\circ - 17^\circ - 17^\circ = 146^\circ$. Сумма углов четырехугольника $ABCM$ равна 360° . Следовательно,

$$\angle BCM = 360^\circ - 60^\circ - 146^\circ - 17^\circ - 30^\circ = 107^\circ.$$

Ответ. 146° и 107° .

885. Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведенные прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на прямых, содержащих биссектрисы треугольника ABC .

Решение. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — вершины нового треугольника (рис. 274). Докажем, например, что точка A_1 лежит на прямой, содержащей биссектрису треугольника ABC , проведенную из вершины A (для точек B_1 и C_1 доказательство аналогичное). Заметим прежде всего, что прямые A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 содержат биссектрисы внешних углов треугольника ABC (например, на рисунке $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \alpha$). Поскольку точка A_1 лежит на биссектрисе внешнего угла B треугольника ABC , то она равноудалена от прямых AB и BC . По аналогичной причине она равноудалена от прямых AC и BC . Следовательно,

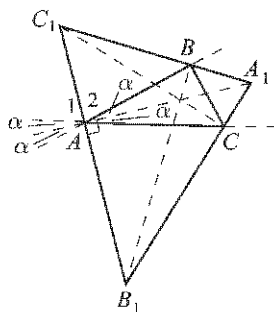


Рис. 274

она равноудалена от прямых AB и AC , а значит, лежит на биссектрисе угла BAC . Иными словами, она лежит на прямой, содержащей биссектрису треугольника ABC , проведенную из вершины A .

886. Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC , A', B', C' — точки, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB . Докажите, что точки A', B', C' лежат на окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение. Докажем, например, что точка A' лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (для точек B' и C' доказательство аналогичное). Возможны три случая: 1^0 — угол B острый (рис. 275, а); 2^0 — угол B прямой (рис. 275, б); 3^0 — угол B тупой (рис. 275, в). Рассмотрим эти случаи отдельно.

1^0 . Поскольку точки H и A' симметричны относительно прямой BC , то $\angle CBA' = \angle CBH = 90^\circ - \angle C$. Следовательно, $\angle ABA' = 90^\circ - \angle C + \angle B$. Аналогично, $\angle ACA' = 90^\circ - \angle B + \angle C$. Таким образом, сумма противоположных углов B и C четырехугольника $ABA'C$ равна 180° . Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность (см. задачу 729). Но через точки A, B и C проходит только одна окружность — окружность, описанная около треугольника ABC . Значит, точка A' лежит на этой окружности.

2^0 . Утверждение очевидно, поскольку точки B, H и A' совпадают.

3^0 . Поскольку точки H и A' симметричны относительно прямой BC , то

$$\angle AA'B = 180^\circ - \angle HA'B = 180^\circ - \angle BHA'.$$

$$\text{Но } \angle BHA' = \angle BHA = 90^\circ - \angle CAH = \angle C.$$

Таким образом, сумма противоположных углов A' и C четырехугольника $AA'BC$ равна 180° . Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность (см. задачу 729). Но через точки A, B и C проходит только одна окружность — окружность, описанная около треугольника ABC . Значит, точка A' лежит на этой окружности.

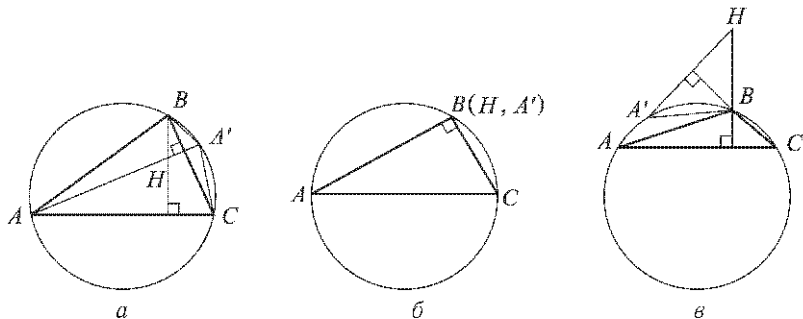


Рис. 275

887. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

Решение. Пусть E — точка пересечения луча BD с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис. 276). Треугольники ABE и BCD подобны, так как $\angle ABE = \angle BDC$ по условию, а вписанные углы BEA и BCA опираются на одну и ту же дугу AB . Следовательно,

$$AB : BD = (BD + DE) : BC,$$

откуда

$$BD^2 + BD \cdot DE = AB \cdot BC.$$

Но по теореме о пересекающихся хордах

$$BD \cdot DE = AD \cdot DC.$$

Следовательно,

$$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC.$$

888. В треугольнике ABC из вершины B проведены высота BH и биссектриса угла B , которая пересекает в точке E описанную около треугольника окружность с центром O . Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH .

Решение. Поскольку луч BE — биссектриса угла B , то дуги AE и EC , а значит, и хорды AE и EC , равны (рис. 277). Поэтому прямая OE — серединный перпендикуляр к отрезку AC . Углы HBE и BEO равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых BH и OE секущей BE . Углы BEO и OBE равны, так как они являются углами при основании равнобедренного треугольника OBE . Следовательно, $\angle HBE = \angle OBE$, а значит, луч BE — биссектриса угла OBH .

889. Произвольная точка X окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что один из отрезков AX , BX и CX равен сумме двух других.

Решение. Пусть, например, $XC > XA$ и $XC > XB$ (рис. 278). Отложим на отрезке XC отрезок XD , равный XA . В равнобедренном

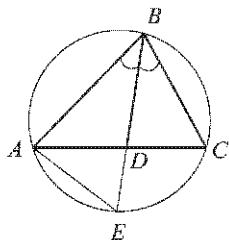


Рис. 276

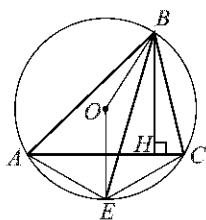


Рис. 277

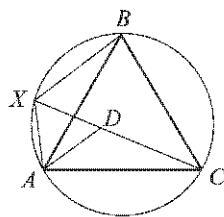


Рис. 278

треугольнике AXD угол AXD равен вписанному углу AXC , опирающемуся на дугу AC , равную 120° . Следовательно, этот угол, а значит, и угол ADX , равен 60° .

Рассмотрим теперь треугольники ABX и ACD . В этих треугольниках $\angle X = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ = \angle D$, $\angle B = \angle C$, поскольку эти углы опираются на одну и ту же дугу XA . Следовательно, и $\angle BAX = \angle CAD$. Кроме того, $AB = AC$ по условию. Следовательно, эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, а значит, $CD = XB$. Тем самым

$$XC = XD + CD = XA + XB.$$

З а м е ч а н и е. Эту задачу можно решить значительно быстрее, если воспользоваться теоремой Птолемея (см. задачу 893). В самом деле, пусть a — сторона треугольника ABC . Поскольку четырехугольник $AHBC$ — вписанный, то по теореме Птолемея

$$a \cdot XC = a \cdot XA + a \cdot XB,$$

откуда

$$XC = XA + XB.$$

890. Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Проведем диаметр BB_1 описанной окружности (рис. 279). Имеем:

$$\begin{aligned} \sphericalangle AB_1 &= 2\angle ABB_1 = 2(90^\circ - \angle AB_1B) = \\ &= 2\left(90^\circ - \sphericalangle \frac{AB}{2}\right) = 2(90^\circ - \angle ACB) = 2\angle CBD = \sphericalangle CD. \end{aligned}$$

Поэтому $AB_1 = CD$. Следовательно,

$$AB^2 + CD^2 = AB^2 + AB_1^2 = BB_1^2.$$

891. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке, лежащей на стороне CD . Докажите, что $CD = BC + AD$.

Решение. Проведем через точку M пересечения биссектрис углов A и B прямую, параллельную AB , и обозначим буквами E и F точки пересечения этой прямой с прямыми AD и BC (рис. 280). Рассмотрим треугольники DEM и CFM . Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$. С другой стороны, поскольку $EF \parallel AB$, то $\angle A + \angle E = 180^\circ$. Следовательно, $\angle C = \angle E$. Кроме того, углы при вершине M рассматриваемых треугольников равны как вертикальные углы. Поэтому эти треугольники подобны. Заметим теперь, что точка M , будучи точкой пересечения биссектрис

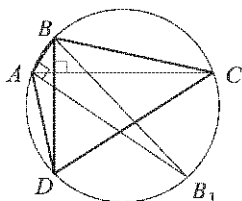


Рис. 279

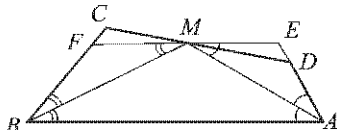


Рис. 280

углов A и B , равноудалена от прямых AB и AD , а также от прямых AB и BC , а значит, она равноудалена и от прямых AD и BC . Иными словами, высоты рассматриваемых треугольников, проведенные из вершины M , равны. Из этого следует, что треугольники DEM и CFM равны (см. задачу 543).

Углы AME и BAM равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и EF секущей AM . Следовательно, в треугольнике AEM углы A и M равны, а значит, $AE = EM$. По аналогичной причине $BF = FM$. Имеем:

$$CD = DM + MC = FM + EM = BF + AE = BC + AD,$$

поскольку отрезки CF и ED равны.

892. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.

Решение. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b , равен $\frac{ab}{a+b}$ (см. задачу 725), а высота трапеции равна диаметру этой окружности. Следовательно, площадь трапеции равна

$$2 \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} = ab.$$

893. Докажите, что в любом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема *Птолемея*).

Решение. Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$ (рис. 281) и на его диагонали AC возьмем такую точку K , что $\angle ABK = \angle CBD$. Треугольники ABK и DBC подобны, поскольку углы ABK и CBD равны по построению, а углы BAC и BDC равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC . Следовательно,

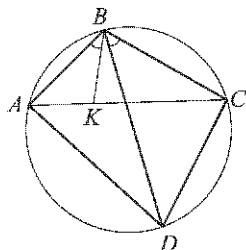


Рис. 281

$$AB : BD = AK : CD,$$

откуда

$$AB \cdot CD = AK \cdot BD. \quad (*)$$

Треугольники BCK и ABD также подобны, так как $\angle CBK = \angle ABD$, а углы ACB и ADB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB . Поэтому

$$BC : BD = KC : AD,$$

откуда

$$AD \cdot BC = KC \cdot BD.$$

Сложив последнее равенство с равенством $(*)$, получим:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD(AK + KC) = BD \cdot AC.$$

894. Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

Решение. Рассмотрим треугольник ABC , у которого точка O — центр описанной окружности, а точка M — центр вписанной окружности. Допустим сначала, что $d \neq 0$ (рис. 282, а). Проведем через точку M диаметр PQ описанной окружности, а также биссектрисы AM и BM углов A и B . По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд

$$PM \cdot MQ = AM \cdot MA_1$$

или

$$(R + d)(R - d) = AM \cdot MA_1.$$

Далее, поскольку AA_1 и BB_1 — биссектрисы углов A и B , то $\sphericalangle BA_1 = \sphericalangle A_1C$ и $\sphericalangle CB_1 = \sphericalangle B_1A$. Следовательно (см. задачу 718),

$$\sphericalangle BMA_1 = \frac{\sphericalangle BA_1 + \sphericalangle AB_1}{2} = \frac{\sphericalangle A_1C + \sphericalangle CB_1}{2} = \sphericalangle MBA_1.$$

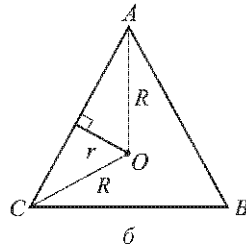
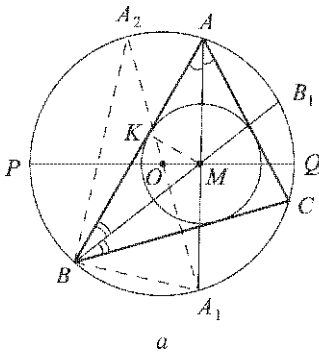


Рис. 282

Это означает, что треугольник MA_1B — равнобедренный. Поэтому найденное нами соотношение можно переписать так:

$$(R + d)(R - d) = AM \cdot BA_1.$$

Проведем теперь диаметр A_1A_2 описанной окружности. Пусть K — точка касания вписанной окружности и стороны AB . Прямоугольные треугольники A_1A_2B и AMK имеют равные острые углы A и A_2 , поэтому эти треугольники подобны. Следовательно,

$$MK : BA_1 = AM : A_1A_2,$$

или

$$r : BA_1 = AM : 2R,$$

откуда $AM \cdot BA_1 = 2Rr$. Таким образом, наше соотношение принимает вид:

$$(R - d)(R + d) = 2Rr,$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Если $d = 0$ (рис. 282, б), то каждая сторона треугольника ABC равна $2\sqrt{R^2 - r^2}$, а значит, этот треугольник — равносторонний. Поэтому $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$ и, следовательно, $R = 2r$, или $0 = R^2 - 2Rr$.

895. Для неравностороннего треугольника ABC точка O является центром описанной окружности, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 , точки A_2 , B_2 , C_2 — середины отрезков AH , BH , CH , а точки A_3 , B_3 , C_3 — середины сторон треугольника ABC . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 , A_3 , B_3 , C_3 лежат на одной окружности (окружность Эйлера).

Решение. Пусть точка M — середина отрезка OH , $MN \perp AC$ (рис. 283). Поскольку прямые HB_1 , MN и OB_3 параллельны, то по теореме Фалеса (см. задачу 385) $B_1N = NB_3$. Поэтому прямоугольные треугольники B_1MN и B_3MN равны по двум катетам, а значит, $MB_1 = MB_3$.

Пусть B_4 — точка, симметричная точке H относительно стороны AC . В треугольнике OHV_1 отрезок MB_1 — средняя линия, поэтому $MB_1 = \frac{OB_4}{2}$. Но точка B_4 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (см. задачу 886).

Следовательно, отрезок MB_1 , а значит, и отрезок MB_3 , равен $\frac{R}{2}$, где R — радиус описанной окружности.

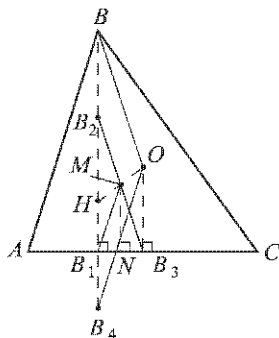


Рис. 283

Отрезок MB_2 , будучи средней линией треугольника $ВОН$, также равен $\frac{R}{2}$. Тем самым

$$MB_1 = MB_2 = MB_3 = \frac{R}{2}.$$

Аналогично доказывается, что

$$MA_1 = MA_2 = MA_3 = \frac{R}{2} \text{ и}$$

$$MC_1 = MC_2 = MC_3 = \frac{R}{2}.$$

Это означает, что все точки: $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ — лежат на одной окружности с центром M радиуса $\frac{R}{2}$.

896. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, к прямым, содержащим стороны этого треугольника, лежат на одной прямой (прямая *Симпсона*).

Решение. Пусть D — произвольная точка окружности, описанной около данного треугольника. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C , так, чтобы получился четырехугольник $ABCD$ (рис. 284). В этом четырехугольнике $\angle A + \angle C = 180^\circ$, поэтому либо $\angle A = \angle C = 90^\circ$, и тогда прямой Симпсона будет прямая AC , либо один из этих углов острый, а другой тупой. Для определенности будем считать, что угол A острый. Рассмотрим два случая: 1) угол ACD , а значит, и равный ему угол ABD острые; 2) указанные углы тупые (случай прямых углов рассмотрите самостоятельно). В первом случае основание H перпендикуляра, проведенного из точки D к прямой AB , лежит между A и B , основание K перпендикуляра к AC лежит между A и C , а основание M перпендикуляра к BC — вне отрезка BC (рис. 284, а). Во втором случае все три основания перпендикуляров лежат вне сторон треугольника ABC (рис. 284, б). Ход рассуждений в этих двух случаях в основном один и тот же. Поэтому проведем доказательство для

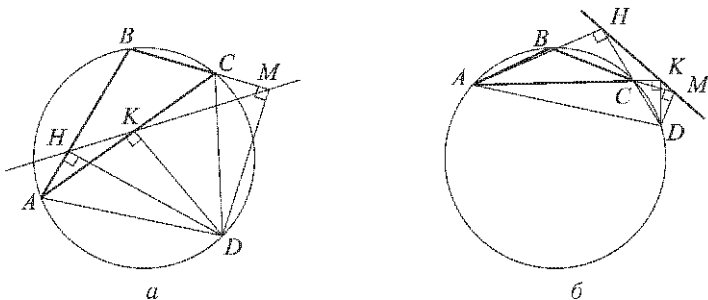


Рис. 284

первого случая, отмечая в скобках те изменения, которые следует внести в текст доказательства для второго случая.

Поскольку углы AHD и AKD прямые, то точки A, H, K и D лежат на окружности с диаметром AD (см. задачу 704, а). Следовательно, углы AKH и ADH , вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу AH , равны.

Углы CKD и CMD также прямые. Поэтому точки C, K, M и D лежат на окружности с диаметром CD (см. задачу 704, а). Следовательно, углы CKM и CDM , вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу CM , равны (во втором случае эти углы составляют в сумме 180°).

Но $\angle ADH = 90^\circ - \angle BAD$, $\angle CDM = 90^\circ - \angle MCD = 90^\circ - (180^\circ - \angle BCD) = 90^\circ - \angle BAD$, поскольку $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Следовательно,

$$\angle ADH = \angle CDM.$$

Итак, $\angle AKH = \angle ADH$, $\angle CKM = \angle CDM$ (во втором случае $\angle CKM + \angle CDM = 180^\circ$), $\angle ADH = \angle CDM$. Поэтому $\angle AKH = \angle CKM$ (во втором случае $\angle AKH + \angle CKM = 180^\circ$). Это и означает, что точки H, K и M лежат на одной прямой.

897. Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

Решение. Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов r_1 и r_2 , каждая из которых лежит вне другой окружности (рис. 285). Если $r_1 = r_2$ (рис. 285, а), то решение задачи очевидно.

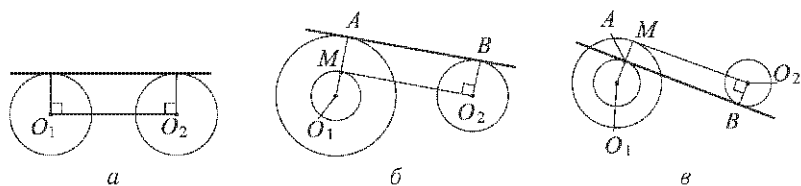


Рис. 285

Пусть, например, $r_1 > r_2$. Если центры окружностей лежат по одну сторону от общей касательной, то касательная называется *внешней*, а если по разные стороны — *внутренней*.

Построим сначала внешнюю касательную. Проведем окружность с центром O_1 радиуса $r_1 - r_2$ и построим к ней касательную O_2M (рис. 285, б) так, как это описано в решении задачи 673. По свойству касательной $O_1M \perp O_2M$. Проведем теперь через точку M радиус O_1A , а также радиус $O_2B \perp O_2M$. Прямая AB — искомая касательная. В самом деле, в четырехугольнике MAO_2B противоположные стороны MA и O_2B равны по построению и параллельны, так как обе перпендикулярны к прямой O_2M . Поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. Поскольку угол

O_2 этого параллелограмма прямой, то и остальные его углы прямые. Следовательно, прямая AB — касательная к обеим окружностям.

Для построения внутренней касательной следует сначала провести окружность с центром O_1 радиуса $r_1 + r_2$, а затем выполнить построение, аналогичное описанному (рис. 285, в).

Замечание. Мы рассмотрели случай, когда каждая из данных окружностей лежит вне другой. В этом случае окружности имеют четыре общих касательных, две из которых внешние, а две другие — внутренние (рис. 286, а). Ясно, что если одна из окружностей целиком

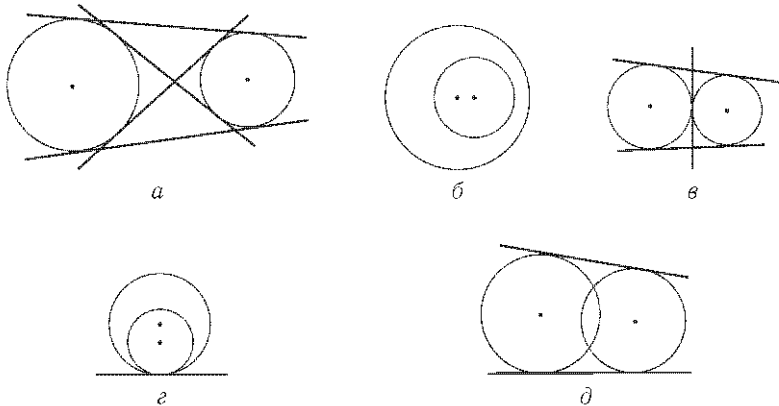


Рис. 286

лежит внутри другой, то общих касательных у них нет (рис. 286, б). Если окружности имеют единственную общую точку, то общих касательных три (рис. 286, в) или одна (рис. 286, г). Наконец, если окружности имеют две общие точки, то общих касательных две (рис. 286, д). В каждом из этих случаев общие касательные могут быть построены одним из двух указанных методов. Впрочем, в ряде случаев касательную можно построить и проще — подумайте, как это сделать.

898. Даны окружность с центром O , точка M и отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 . Постройте прямую p так, чтобы окружность отсекала на ней хорду, равную P_1Q_1 , и расстояние от точки M до прямой p равнялось P_2Q_2 .

Решение. Отметим произвольную точку A данной окружности и построим хорду $AB = P_1Q_1$ (рис. 287). Найдем середину C этой хорды и проведем окружность с центром O радиуса OC , а также окружность с центром M радиуса P_2Q_2 . Теперь построим общую касательную p к проведенным окружностям (см. задачу 897). Прямая p — искомая. В самом деле, расстояние от точки M до прямой p равно P_2Q_2 по построению, а длина хорды DE , отсекаемой данной окружностью на прямой p , равна

$$2\sqrt{OD^2 - OC^2} = 2\sqrt{OA^2 - OC^2} = AB = P_1Q_1.$$

от нее на расстоянии, равном данной высоте, и лежащую по ту же сторону от прямой AB , что и точка M . Пусть C — одна из общих точек этой прямой и окружности. Треугольник ABC — искомым. В самом деле, сторона AB этого треугольника равна данной стороне по построению; угол ACB равен данному углу AMB , так как эти углы вписанные и опираются на одну и ту же дугу AB ; высота, проведенная из вершины C , равна данной высоте по построению.

б) Проведем биссектрису данного угла α и построим угол $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ (рис. 290). Затем построим треугольник A_1BB_1 , сторона A_1B_1 которого равна данному периметру, высота, проведенная из вершины B , равна данной высоте, а угол при вершине B равен построенному углу (см. задачу 900, а). Наконец, проведем серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B и B_1B (рис. 291) и обозначим буквами A и C точки их пересечения с прямой A_1B_1 . Треугольник ABC — искомым.

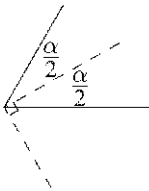


Рис. 290

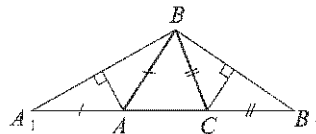


Рис. 291

В самом деле, высота, проведенная из его вершины B , равна данной высоте по построению. Далее, поскольку $AA_1 = AB$ и $CB_1 = CB$, то периметр треугольника ABC равен данному периметру. Кроме того, поскольку треугольники AA_1B и CB_1B — равнобедренные, а углы A и C треугольника ABC являются их внешними углами, то для угла B этого треугольника находим:

$$\angle B = \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle C}{2} = \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\angle B}{2},$$

откуда $\angle B = \alpha$.

901. Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки H , V и M , через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведенные из одной вершины.

Решение. Пусть O — центр данной окружности. Через точку H проведем хорду PH , параллельную прямой OB (рис. 292). Затем через точку A пересечения прямых OB и PM проведем хорду QR , перпендикулярную к прямой OB . Треугольник PQR — искомым. В самом деле, прямые PH и OB параллельны, поэтому $PH \perp QR$, а значит, прямая PH содержит высоту треугольника PQR . Далее, высота OA равнобедренного треугольника OQR является медианой и биссектрисой. Следовательно, $QA = AR$, т. е. прямая PM содержит медиану

также являются основаниями высот. Таким образом, мы построили четыре треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

Имеет ли наша задача другие решения? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала остроугольный треугольник $A_2B_2C_2$, для которого точки A_1 , B_1 и C_1 являются основаниями высот (рис. 294). Пусть H_1 — точка пересечения высот этого треугольника. Тогда лучи A_1H_1 , B_1H_1 и C_1H_1 являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 849). Следовательно, точки H_1 и H совпадают, а значит, треугольник $A_2B_2C_2$ совпадает с треугольником ABC . Тем самым, других остроугольных треугольников, удовлетворяющих условию задачи, нет. Рассмотрим теперь тупоугольный треугольник $A_2B_2H_1$ с тупым углом H_1 , для которого отрезки A_2B_1 , B_2A_1 и H_1C_1 являются высотами (рис. 295). Пусть C_2 — точка пересечения высот этого треугольника. Поскольку треугольники $A_2B_2B_1$ и $B_2A_2A_1$ —

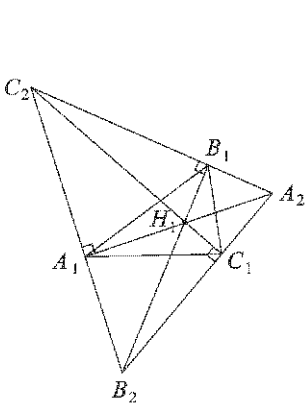


Рис. 294

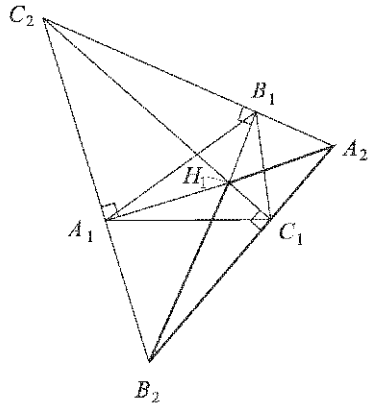


Рис. 295

прямоугольные, то углы A_2 и B_2 треугольника $A_2B_2C_2$ — острые; угол C_2 этого треугольника — также острый, поскольку

$$\begin{aligned} \angle C_2 &= 180^\circ - \angle A_2 - \angle B_2 = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle A_2B_2H_1) - (90^\circ - \angle B_2A_2H_1) = \\ &= \angle A_2B_2H_1 + \angle B_2A_2H_1 < 90^\circ, \end{aligned}$$

так как угол H_1 треугольника $A_2B_2H_1$ — тупой.

Таким образом, треугольник $A_2B_2C_2$ — остроугольный, причем точки A_1 , B_1 и C_1 — основания его высот. Значит, он совпадает с треугольником ABC . Но тогда и треугольник $A_2B_2H_1$ совпадает с треугольником ABH . Следовательно, задача имеет четыре решения.

Ответ. Четыре решения.

Глава 5

ВЕКТОРЫ

§ 1. Понятие вектора

744. Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, сила, время, температура, длина, площадь, работа?

Ответ. Из указанных в задаче векторными величинами являются скорость и сила.

745. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, M — середина стороны AB . Найдите длины векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{AC} .

Решение. Так как $AB = 3$ см, $BC = 4$ см (рис. 296), то $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = 3$ см, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = 4$ см.

$$|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{1,5^2 + 4^2} \text{ см} = \sqrt{18,25} \text{ см}.$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \frac{1}{2}BA = 1,5 \text{ см}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5 \text{ см}.$$

Ответ. 3 см, 4 см, 3 см, $\sqrt{18,25}$ см, 1,5 см, 4 см, 5 см.

746. Основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45^\circ$. Найдите длины векторов \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{AC} .

Решение. Пусть CH — высота данной трапеции $ABCD$ (рис. 297).

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ см}.$$

В треугольнике CDH : $CH = HD = 5$ см, поэтому

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{CH^2 + HD^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \text{ см}.$$

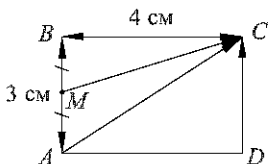


Рис. 296

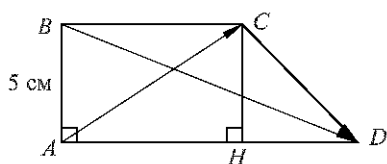


Рис. 297

Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника ABC :

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2},$$

$$BC = AH = AD - DH = 12 \text{ см} - 5 \text{ см} = 7 \text{ см},$$

поэтому

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25 + 49} \text{ см} = \sqrt{74} \text{ см}.$$

Ответ. 13 см, $5\sqrt{2}$ см, $\sqrt{74}$ см.

747. Выпишите пары коллинеарных векторов, которые определяются сторонами: а) параллелограмма $MNPQ$; б) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ; в) треугольника FGH . Укажите среди них пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

Решение. а) $MNPQ$ — данный параллелограмм (рис. 298, а).

Коллинеарными являются векторы: \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{QP} , \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{NM} и \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{NM} и \overrightarrow{QP} , \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{NP} , \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{PN} , \overrightarrow{QM} и \overrightarrow{NP} , \overrightarrow{QM} и \overrightarrow{PN} .

Сонаправленные векторы: $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{NM} \parallel \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MQ} \parallel \overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{QM} \parallel \overrightarrow{PN}$.

Противоположно направленные векторы: $\overrightarrow{MN} \uparrow \downarrow \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{NM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{MQ} \uparrow \downarrow \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{QM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{NP}$.

б) $ABCD$ — данная трапеция (рис. 298, б). Коллинеарными являются векторы: \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{AD} .

Сонаправленные векторы: $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{DA}$.

Противоположно направленные векторы: $\overrightarrow{BC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AD}$.

в) FGH — данный треугольник (рис. 298, в). Коллинеарных векторов нет, а потому нет сонаправленных и противоположно направленных векторов.

Ответ. а) Сонаправленные: \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{QP} , \overrightarrow{NM} и \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{NP} , \overrightarrow{QM} и \overrightarrow{PN} ; противоположно направленные: \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{NM} и \overrightarrow{QP} , \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{PN} , \overrightarrow{QM} и \overrightarrow{NP} ; б) сонаправленные: \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{DA} ; противоположно направленные: \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{AD} ; в) коллинеарных векторов нет.

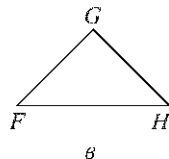
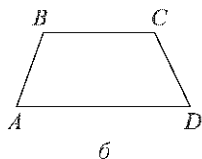
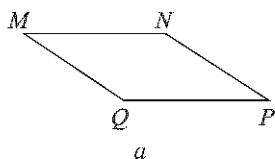


Рис. 298

748. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Равны ли векторы: а) \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} ; б) \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} ; в) \overrightarrow{AO} и \overrightarrow{OC} ; г) \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} ?
 Ответ обоснуйте.

Решение. $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 299).

а) Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} равны, так как

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| \text{ и } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC};$$

б) векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} не равны, так как

$$\overrightarrow{BC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{DA};$$

в) векторы \overrightarrow{AO} и \overrightarrow{OC} равны, так как

$$|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}| \text{ и } \overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{OC};$$

г) векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} не равны, так как они не коллинеарны.

Ответ. а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

749. Точки S и T являются серединами боковых сторон MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) \overrightarrow{NL} и \overrightarrow{KL} ; б) \overrightarrow{MS} и \overrightarrow{SN} ; в) \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{KL} ; г) \overrightarrow{TS} и \overrightarrow{KM} ; д) \overrightarrow{TL} и \overrightarrow{KT} ?

Решение. $MNLK$ — данная равнобедренная трапеция (рис. 300), точки S и T — середины боковых сторон MN и LK .

а) Векторы \overrightarrow{NL} и \overrightarrow{KL} не коллинеарны, поэтому

$$\overrightarrow{NL} \neq \overrightarrow{KL}.$$

б) Векторы \overrightarrow{MS} и \overrightarrow{SN} равны, так как

$$|\overrightarrow{MS}| = |\overrightarrow{SN}| \text{ и } \overrightarrow{MS} \parallel \overrightarrow{SN}.$$

в) Векторы \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{KL} не равны, так как они не коллинеарны.

г) Векторы \overrightarrow{TS} и \overrightarrow{KM} не равны, так как

$$|\overrightarrow{TS}| \neq |\overrightarrow{KM}|.$$

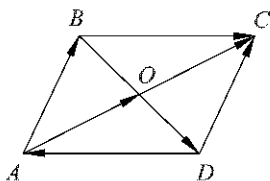


Рис. 299

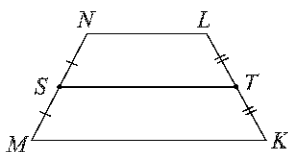


Рис. 300

д) Векторы \vec{TL} и \vec{KT} равны, так как

$$|\vec{TL}| = |\vec{KT}| \text{ и } \vec{TL} \uparrow\uparrow \vec{KT}.$$

Ответ. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да.

750. Докажите, что если векторы \vec{AB} и \vec{CD} равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Решение. Рассмотрим случай, когда векторы \vec{AB} и \vec{CD} ненулевые и $AB \parallel CD$.

Пусть $\vec{AB} = \vec{CD}$. Тогда $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$, поэтому точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC (рис. 301). Так как $AB \parallel CD$, то точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD , а точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB . Отсюда следует, что $ABDC$ — четырехугольник. По условию $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, поэтому $ABDC$ — параллелограмм (1°, п. 43). По свойству 2° п. 43 диагонали AD и BC этого параллелограмма точкой O пересечения делятся пополам, следовательно, середины отрезков AD и BC совпадают.

Докажем обратное утверждение: пусть середины O отрезков AD и BC совпадают. Докажем, что $\vec{AB} = \vec{CD}$. Точки B и D лежат по ту же сторону от прямой AC , что и точка O .

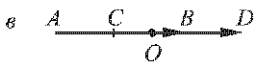
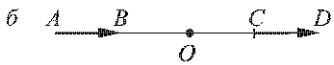
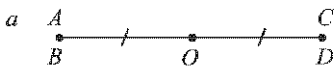


Рис. 302

Аналогично, точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB , а точки A и B — по одну сторону от прямой CD . Отсюда следует, что $ABDC$ — четырехугольник. По свойству 3° п. 43 $ABDC$ — параллелограмм, поэтому $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Утверждение, сформулированное в задаче, верно и в том случае, когда векторы \vec{AB} и \vec{CD} — нулевые, или если эти векторы лежат на одной прямой (рис. 302, а, б, в).

751. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если: а) $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$; б) $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{DC}$, а векторы \vec{AD} и \vec{BC} не коллинеарны.

Решение. а) $\vec{AB} = \vec{DC}$ (рис. 303, а), поэтому $AB \parallel DC$ и $AB = DC$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. Так как $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$, т. е. $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб.

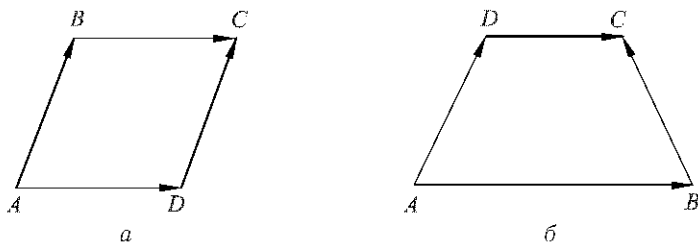


Рис. 303

б) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, поэтому $AB \parallel DC$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. По условию векторы \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{BC} не коллинеарны, поэтому $AD \not\parallel BC$ (рис. 303, б), т. е. $ABCD$ — трапеция.

Ответ. а) Ромб; б) трапеция.

752. Верно ли утверждение: а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$; б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то \vec{a} и \vec{b} коллинеарны; в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$; г) если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$; д) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$?

Ответ. а) Верно; б) верно; в) неверно; г) неверно; д) верно.

§ 2. Сложение и вычитание векторов

753. Турист прошел 20 км на восток из города A в город B , а потом 30 км на восток в город C . Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} . Равны ли векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и \overrightarrow{AC} ?

Ответ. Да.

754. Начертите попарно неколлинеарные векторы \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} и постройте векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} + \vec{z}$, $\vec{z} + \vec{y}$.

Решение. На рисунке 304

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \overrightarrow{CD} = \vec{x} + \vec{z}, \quad \overrightarrow{EF} = \vec{z} + \vec{y}.$$

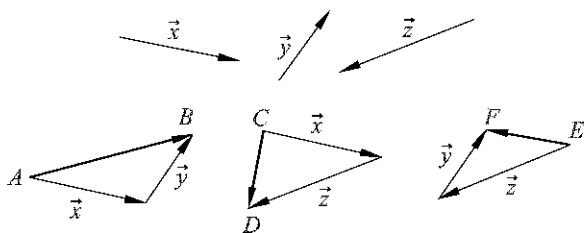


Рис. 304

755. Начертите попарно неколлинеарные векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.
Решение. На рисунке 305

$$\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}.$$

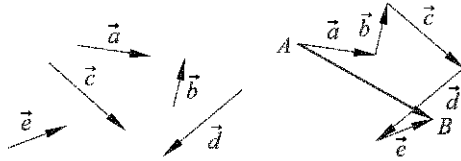


Рис. 305

756. Начертите попарно неколлинеарные векторы \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} и постройте векторы $\vec{x} - \vec{y}$, $\vec{z} - \vec{y}$, $\vec{x} - \vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$.
Решение. На рисунке 306

$$\vec{AB} = \vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{AC} = \vec{z} - \vec{y}, \quad \vec{CB} = \vec{x} - \vec{z},$$

$$\vec{DE} = -\vec{x}, \quad \vec{MN} = -\vec{y}, \quad \vec{FG} = -\vec{z}.$$

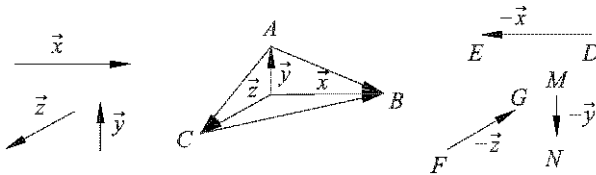


Рис. 306

757. Начертите векторы \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} так, чтобы $\vec{x} \parallel \vec{y}$, $\vec{x} \perp \vec{z}$.
Постройте векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{y} - \vec{z}$, $\vec{x} + \vec{z}$.
Решение. На рисунке 307

$$\vec{x} \parallel \vec{y}, \quad \vec{x} \perp \vec{z}; \quad \vec{AB} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{CD} = \vec{y} - \vec{z}, \quad \vec{EF} = \vec{x} + \vec{z}.$$

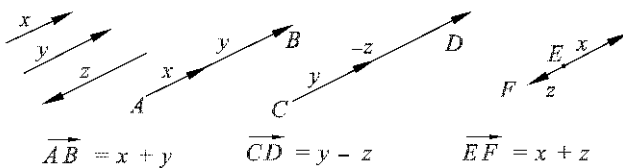


Рис. 307

758. Начертите два ненулевых коллинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} , $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Постройте векторы: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $-\vec{a} + \vec{b}$. Выполните еще раз построение для случая, когда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Решение. На рисунке 308, а: $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$.

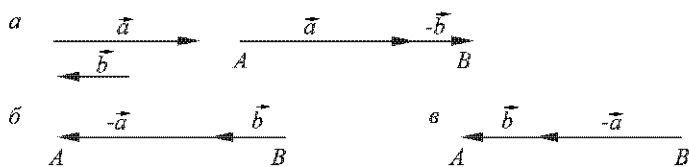


Рис. 308

а) $\overline{AB} = \vec{a} - \vec{b}$; б) $\overline{BA} = \vec{b} - \vec{a}$; в) $\overline{BA} = -\vec{a} + \vec{b}$.

759. Дав произвольный четырехугольник $MNPQ$. Докажите, что:
 а) $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MP} + \overline{PQ}$; б) $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MQ} + \overline{QP}$.

Решение. а) По правилу треугольника $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MQ}$ (рис. 309), $\overline{MP} + \overline{PQ} = \overline{MQ}$. Следовательно, $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MP} + \overline{PQ}$.

б) Аналогично: $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$ (см. рис. 309), $\overline{MQ} + \overline{QP} = \overline{MP}$. Следовательно,

$$\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MQ} + \overline{QP}.$$

760. Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов \vec{x} и \vec{y} справедливо неравенство $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Решение. Сложим векторы \vec{x} и \vec{y} по правилу треугольника (рис. 310):

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}, \quad \text{где } \overline{AB} = \vec{x}, \quad \overline{BC} = \vec{y}, \quad \overline{AC} = \vec{x} + \vec{y}.$$

Так как векторы \vec{x} и \vec{y} не коллинеарны, то ABC — треугольник. Согласно неравенству треугольника

$$AC < AB + BC.$$

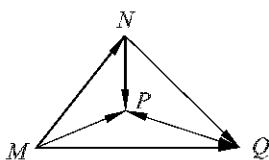


Рис. 309

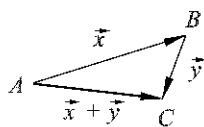


Рис. 310

Но $AC = |\vec{x} + \vec{y}|$, $AB = |\vec{x}|$, $BC = |\vec{y}|$, поэтому

$$|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

761. Докажите, что если A, B, C и D — произвольные точки, то $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

Решение. Пусть A, B, C, D — произвольные точки. По правилу многоугольника

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA}.$$

Но $\vec{AA} = \vec{0}$, следовательно,

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}.$$

762. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Найдите:

а) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$; б) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$; в) $|\vec{AB} + \vec{CB}|$; г) $|\vec{BA} - \vec{BC}|$; д) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

Решение. По условию задачи $AB = BC = CA = a$.

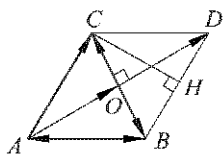


Рис. 311

а) Так как $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, то $|\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = a$.

б) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} = 2\vec{AO}$, где O — середина стороны BC треугольника ABC (рис. 311). Поэтому

$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2|\vec{AO}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

в) Построим ромб $ABDC$ и проведем его высоту CH (см. рис. 311).

Тогда $\vec{AB} + \vec{CB} = \vec{CD} + \vec{CB} = 2\vec{CH}$, поэтому

$$|\vec{AB} + \vec{CB}| = 2|\vec{CH}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

г) $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{CA}$, поэтому

$$|\vec{BA} - \vec{BC}| = |\vec{CA}| = a.$$

д) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$, поэтому

$$|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = a.$$

Ответ. а) a ; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$; г) a ; д) a .

763. В треугольнике ABC : $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$. Найдите:

- а) $|\vec{BA}| - |\vec{BC}|$ и $|\vec{BA} - \vec{BC}|$; б) $|\vec{AB}| + |\vec{BC}|$ и $|\vec{AB} + \vec{BC}|$; в) $|\vec{BA}| + |\vec{BC}|$ и $|\vec{BA} + \vec{BC}|$; г) $|\vec{AB}| - |\vec{BC}|$ и $|\vec{AB} - \vec{BC}|$.

Решение. По условию задачи в данном треугольнике ABC : $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$ (рис. 312).

а) $|\vec{BA}| - |\vec{BC}| = BA - BC = -2$; $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{CA}$, поэтому $|\vec{BA} - \vec{BC}| = |\vec{CA}| = \sqrt{36 + 64} = 10$.

б) $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = AB + BC = 14$; $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, поэтому $|\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = 10$.

в) $|\vec{BA}| + |\vec{BC}| = BA + BC = 14$; $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$, $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}| = |\vec{AC}| = AC = 10$.

г) $|\vec{AB}| - |\vec{BC}| = AB - BC = -2$; $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{DB}$; $|\vec{AB} - \vec{BC}| = |\vec{DB}| = |\vec{AC}| = 10$.

Ответ. а) -2 и 10 ; б) 14 и 10 ; в) 14 и 10 ; г) -2 и 10 .

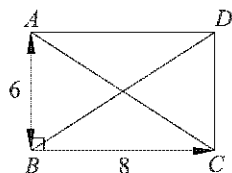


Рис. 312

764. Пользуясь правилом многоугольника, упростите выражения:

- а) $(\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{MC}) + (\vec{MD} - \vec{KD})$; б) $(\vec{CB} + \vec{AC} + \vec{BD}) - (\vec{MK} + \vec{KD})$.

Решение. а) $(\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{MC}) + (\vec{MD} - \vec{KD}) = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CM}) + (\vec{MD} + \vec{DK}) = \vec{AK}$.

б) $(\vec{CB} + \vec{AC} + \vec{BD}) - (\vec{MK} + \vec{KD}) = (\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD}) + (\vec{DK} + \vec{KM}) = \vec{AM}$.

Ответ. а) \vec{AK} ; б) \vec{AM} .

765. Пусть X , Y и Z — произвольные точки. Докажите, что векторы $\vec{p} = \vec{XY} + \vec{ZX} + \vec{YZ}$, $\vec{q} = (\vec{XY} - \vec{XZ}) + \vec{YZ}$ и $\vec{r} = (\vec{ZY} - \vec{XY}) - \vec{ZX}$ — нулевые.

Решение. $\vec{p} = \vec{XY} + \vec{ZX} + \vec{YZ} = \vec{ZX} + \vec{XY} + \vec{YZ} = \vec{ZZ} = \vec{0}$.

$\vec{q} = (\vec{XY} - \vec{XZ}) + \vec{YZ} = \vec{XY} + \vec{YZ} + \vec{ZX} = \vec{XX} = \vec{0}$.

$\vec{r} = (\vec{ZY} - \vec{XY}) - \vec{ZX} = \vec{ZY} + \vec{YX} + \vec{XZ} = \vec{ZZ} = \vec{0}$.

766. На рисунке 313 (рис. 259 учебника) изображены векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{XY} . Представьте вектор \vec{XY} в виде суммы остальных или им противоположных векторов.

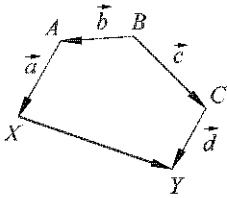


Рис. 313

Решение. По правилу многоугольника имеем:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CY}.$$

Так как

$$\overrightarrow{XA} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = -\vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{CY} = \vec{d},$$

то

$$\overrightarrow{XY} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}.$$

Ответ. $-\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$.

767. Дан треугольник ABC . Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ вектор $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Решение. По правилу треугольника $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{b}$, поэтому $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{b}$.

Ответ. $-\vec{b}$.

768. Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC . Выразите векторы \overrightarrow{BM} , \overrightarrow{NC} , \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{BN} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

Решение. Точки M и N — середины сторон AB и AC данного треугольника ABC (рис. 314), $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\vec{a}$; $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} = \vec{b}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} = -\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}).$$

Ответ. \vec{a} , \vec{b} , $\vec{b} - \vec{a}$, $-\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})$.

769. Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC . Выразите векторы $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} через $\vec{x} = \overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$.

Решение. BB_1 — медиана данного треугольника ABC (рис. 315), $\vec{x} = \overrightarrow{AB_1}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$.

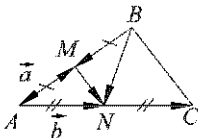


Рис. 314

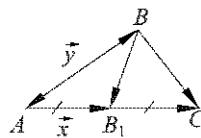


Рис. 315

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1C} &= \overrightarrow{AB_1} = \vec{x}, & \overrightarrow{BB_1} &= \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = -\vec{x} - \vec{y}, \\ \overrightarrow{BA} &= -\overrightarrow{AB} = -\vec{y}; & \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C} = (\vec{x} - \vec{y}) + \vec{x}.\end{aligned}$$

Ответ. \vec{x} , $-\vec{x} - \vec{y}$, $-\vec{y}$, $(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{x}$.

770. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор \overrightarrow{AC} через векторы \vec{a} и \vec{b} , если: а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$; б) $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$; в) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$.

Решение. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

б) $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$; по правилу параллелограмма $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}$, следовательно, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$.

в) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$; по правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{DA}) = \vec{a} - \vec{b}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b}$; в) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$.

771. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ следующие векторы: $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$.

Решение. 1. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, поэтому $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$ (рис. 316).

2. $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$,

следовательно, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

3. $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

4. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ. $\vec{a} - \vec{b}$, \vec{b} , $-\vec{a}$, $-\vec{a} + \vec{b}$.

772. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD},$$

где X — произвольная точка плоскости.

Решение. По правилу вычитания векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XD}$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (рис. 317), то $\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XD}$. Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}.$$

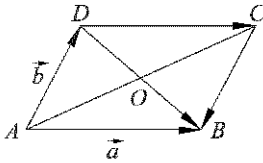


Рис. 316

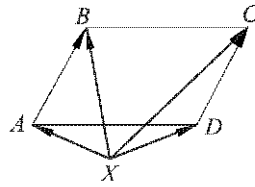


Рис. 317

773. Докажите, что для любых двух векторов \vec{x} и \vec{y} справедливо неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$. В каком случае $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$?

Решение. Пусть $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$. Тогда

$$\vec{x} - \vec{y} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Возможны три случая.

а) Векторы \vec{x} и \vec{y} не коллинеарны (рис. 318, а). Тогда ABC — треугольник и по неравенству треугольника $CB < AB + AC$. Но $CB = |\overrightarrow{CB}| = |\vec{x} - \vec{y}|$, $AB = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{x}|$, $AC = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{y}|$, поэтому

$$|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

б) $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$. В этом случае точка A лежит на отрезке BC (рис. 318, б), поэтому $BC = BA + AC$. Но $BC = |\overrightarrow{CB}| = |\vec{x} - \vec{y}|$, $BA = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{x}|$, $AC = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{y}|$, следовательно,

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

в) $\vec{x} \parallel \vec{y}$. Если хотя бы один из векторов \vec{x} или \vec{y} — нулевой, то ясно, что $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$. Если $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ (рис. 318, в), то $CB < AC + AB$, поэтому

$$|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Итак, $|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$; в случаях, когда $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ или когда хотя бы один из векторов \vec{x} и \vec{y} — нулевой, $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Ответ. Равенство имеет место при $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ или в случае, когда хотя бы один из векторов \vec{x} и \vec{y} — нулевой.

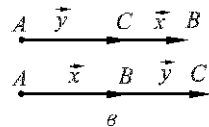
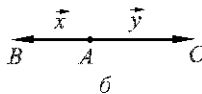
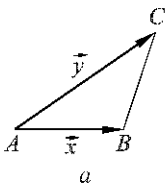


Рис. 318

774. Парашютист спускался на землю со скоростью 3 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $3\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

Решение. Пусть \vec{AB} — вектор скорости парашютиста до порыва ветра, \vec{AC} — вектор скорости ветра (рис. 319), тогда $|\vec{AB}| = 3$ м/с, $|\vec{AC}| = 3\sqrt{3}$ м/с, а \vec{AD} — вектор скорости парашютиста при ветре. Так как $\angle BAC = 90^\circ$, то $ABDC$ — прямоугольник, а треугольник ABD — прямоугольный, $BD = AC = 3\sqrt{3}$. По теореме Пифагора

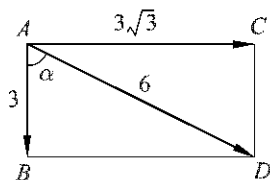


Рис. 319

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{9 + 27} = 6.$$

Отсюда следует, что $\angle ADB = 30^\circ$ и $\alpha = \angle BAD = 60^\circ$.

Ответ. 60° .

§ 3. Умножение вектора на число

779. Дан вектор $\vec{p} = 3\vec{a}$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$. Укажите, как направлен каждый из векторов \vec{a} , $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ по отношению к вектору \vec{p} , и выразите их длины через $|\vec{p}|$.

Решение. По условию задачи $\vec{p} = 3\vec{a}$. Так как $3 > 0$, то $\vec{p} \parallel \vec{a}$. Далее, $|\vec{p}| = |3||\vec{a}|$, откуда $|\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$.

Аналогично получаем:

$$-\vec{a} \updownarrow \vec{p}, |-\vec{a}| = |\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|;$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} \parallel \vec{p}, \left|\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}| = \frac{1}{6}|\vec{p}|;$$

$$-2\vec{a} \updownarrow \vec{p}, |-2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|;$$

$$6\vec{a} \parallel \vec{p}, |6\vec{a}| = 6|\vec{a}| = 2|\vec{p}|.$$

Ответ. Направления: \parallel , \updownarrow , \updownarrow , \updownarrow , \parallel ; длины: $\frac{1}{3}|\vec{p}|$, $\frac{1}{6}|\vec{p}|$, $\frac{2}{3}|\vec{p}|$, $2|\vec{p}|$.

780. Докажите, что для любого вектора \vec{a} справедливы равенства: а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Решение. а) По определению $|1 \cdot \vec{a}| = |1| |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Так как $1 > 0$, то $1 \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Таким образом,

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

б) Пусть $(-1) \cdot \vec{a} = \vec{p}$. По определению произведения вектора на число $|\vec{p}| = |(-1)| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Так как $-1 < 0$, то $(-1) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$, т. е. $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Таким образом, в этом случае $\vec{p} = -\vec{a}$, т. е. $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$. Если же $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{p} = \vec{0}$, поэтому и в этом случае

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

781. Пусть $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$. Выразите через \vec{m} и \vec{n} векторы:

а) $2\vec{x} - 2\vec{y}$; б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; в) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$.

Решение. По условию $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$. Поэтому:

а) $2\vec{x} - 2\vec{y} = 2(\vec{x} - \vec{y}) = 2((\vec{m} + \vec{n}) - (\vec{m} - \vec{n})) = 2(2\vec{n}) = 4\vec{n}$.

б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = 2(\vec{m} + \vec{n}) + \frac{1}{2}(\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} = \frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}$.

в) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -(\vec{m} + \vec{n}) - \frac{1}{3}(\vec{m} - \vec{n}) = -\vec{m} - \vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} = -\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$.

Ответ. а) $4\vec{n}$; б) $\frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}$; в) $-\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$.

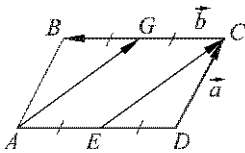


Рис. 320

782. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD , точка G — середина стороны BC . Выразите векторы \vec{EC} и \vec{AG} через векторы $\vec{DC} = \vec{a}$ и $\vec{CB} = \vec{b}$.

Решение. На рисунке 320 изображен данный параллелограмм. Точка E — середина стороны AD , а точка G — середина стороны BC , $\vec{DC} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$.

$\vec{EC} = \vec{ED} + \vec{DC}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{a}$, поэтому $\vec{EC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{DC} + \vec{ED} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Ответ. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

783. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причем $BM : MC = 3 : 1$. Выразите векторы \overrightarrow{AM} и \overrightarrow{MD} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

Решение. На рисунке 321 изображен данный параллелограмм.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}; \quad \overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}.$$

Ответ. $\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

784. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , а M — точка на стороне AD такая, что $AM = \frac{1}{2}MD$. Выразите через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$ следующие векторы: а) \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{CO} , \overrightarrow{DO} , $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$; б) \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{BM} , \overrightarrow{OM} .

Решение. На рисунке 322 изображен данный параллелограмм.

а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}.$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}).$$

$$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}).$$

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x}).$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{x}.$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y}).$$

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{x} - \vec{y}.$$

б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{x}.$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{x} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}.$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}.$$

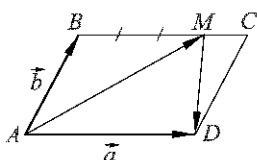


Рис. 321

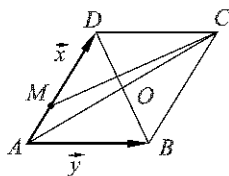


Рис. 322

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) + \frac{1}{3}\vec{x} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}.$$

Ответ. а) $\vec{x} + \vec{y}$, $\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$, $-\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$, $\frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x})$, $2\vec{x}$, $\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y})$, $-\vec{x} - \vec{y}$; б) $\frac{1}{3}\vec{x}$, $\frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$, $\frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}$, $-\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

785. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

Решение. На рисунке 323 изображен данный четырехугольник $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD . По правилу многоугольника сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}.$$

Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BN} = \vec{0}$, получаем:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}, \quad \text{или}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

786. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC . Выразите векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

Решение. Воспользуемся задачей 1 п. 84. Точка A_1 — середина отрезка BC (рис. 324), поэтому $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Аналогично,

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b};$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

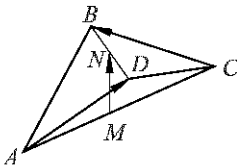


Рис. 323

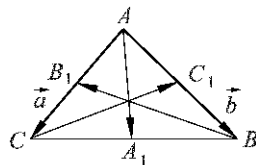


Рис. 324

787. Точка O — середина медианы EC треугольника DEF . Выразите вектор \overrightarrow{DO} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{ED}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{EF}$.

Решение. Согласно задаче 1 п. 84 $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ (рис. 325), поэтому $\overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$;

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} = -\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

Ответ. $\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$.

Применение векторов к решению задач

789. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , ACC_2A_1 . Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 .

Решение. На рисунке 326 изображена данная фигура. По правилу вычитания векторов имеем:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1},$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1},$$

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1}.$$

Складывая почленно эти равенства и учитывая, что $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_2}$, получаем:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Таким образом, если мы построим сумму векторов $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}$ по правилу многоугольника, то получим треугольник ¹⁾.

790. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC , где $AD > BC$, а M и N — середины диагоналей AC и BD . Согласно задаче 785

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

¹⁾ Отметим, что если отрезки A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 параллельны друг другу, то треугольник получится «вырожденным»: все его вершины будут лежать на одной прямой.

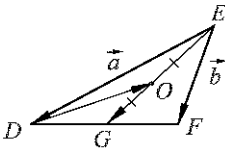


Рис. 325

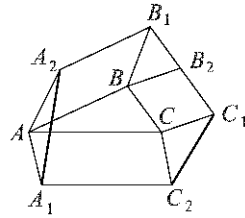


Рис. 326

Так как \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{CB} — коллинеарные векторы, то вектор \overrightarrow{MN} коллинеарен этим векторам, поэтому $MN \parallel AD$ и $MN \parallel CB$.

Докажем второе утверждение.

$$\overrightarrow{AD} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CB} \text{ и } AD > BC,$$

поэтому $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{CB}|$. Следовательно,

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{CB}|),$$

$$\text{или } MN = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

791. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.

Решение. Пусть M, N, P и Q — середины сторон данного четырехугольника $ABCD$, а E и F — середины отрезков MP и NQ (рис. 327). Докажем, что точки E и F совпадают.

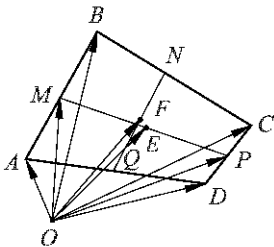


Рис. 327

Согласно задаче 1 п. 84 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP})$ где O — произвольная точка плоскости. Таким образом,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Аналогично получаем:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

поэтому $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$. Отсюда следует, что точки E и F совпадают, т. е. отрезки MP и NQ пересекаются и каждый из них точкой пересечения делится пополам.

792. Докажите теорему о средней линии треугольника.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, а MN — его средняя линия (рис. 328).

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Отсюда следует, что

$$MN \parallel BC \text{ и } |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|, \text{ т. е. } MN = \frac{1}{2}BC.$$

Средняя линия трапеции

793. Боковые стороны трапеции равны 13 см и 15 см, а периметр равен 48 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение. Сумма оснований данной трапеции равна 48 см — (13 + 15) см = 20 см, поэтому ее средняя линия равна 20 см : 2 = 10 см.

Ответ. 10 см.

794. Сторона AB треугольника ABC разделена на четыре равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC . Стороны AB и AC треугольника отсекают на этих параллельных прямых три отрезка, наименьший из которых равен 3,4. Найдите два других отрезка.

Решение. Пусть C_1, C_2, C_3 — точки на стороне AB треугольника ABC , которые делят эту сторону на четыре равные отрезка: $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3B$, а C_1B_1, C_2B_2 и C_3B_3 — прямые, параллельные стороне BC , причем точки B_1, B_2 и B_3 лежат на стороне AC (рис. 329). По условию задачи $B_1C_1 = 3,4$.

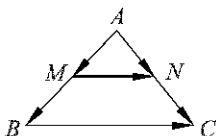


Рис. 328

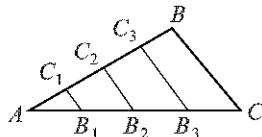


Рис. 329

Отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника AB_2C_2 , поэтому $B_2C_2 = 2 \cdot B_1C_1 = 6,8$. Далее, отрезок B_2C_2 — средняя линия треугольника ABC , поэтому $BC = 2 \cdot B_2C_2 = 13,6$. Отрезок B_3C_3 — средняя линия трапеции BCB_2C_1 поэтому $B_3C_3 = \frac{1}{2}(B_2C_2 + BC) = 10,2$.

Ответ. 6,8 и 10,2.

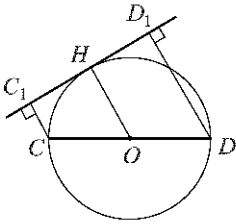


Рис. 330

795. Найдите диаметр окружности, если его концы удалены от некоторой касательной на 18 см и 12 см.

Решение. Пусть CD — диаметр данной окружности с центром O (рис. 330). Проведем перпендикуляры CC_1 , DD_1 и OH к касательной. Четырехугольник CDD_1C_1 — трапеция с основаниями CC_1 и DD_1 . Так как $OH \parallel CC_1$ и $OC = OD$, то $C_1H = HD_1$, поэтому OH — средняя линия этой трапеции.

Так как по условию $CC_1 = 12$ см, $DD_1 = 18$ см, то $OH = \frac{1}{2}(CC_1 + DD_1) = 15$ см. Отрезок OH — радиус окружности, поэтому $CD = 30$ см.

Ответ. 30 см.

796. Из концов диаметра CD данной окружности проведены перпендикуляры CC_1 и DD_1 к касательной, не перпендикулярной к диаметру CD . Найдите DD_1 , если $CC_1 = 11$ см, $CD = 27$ см.

Решение. Так как $CC_1 \perp C_1D_1$ и $DD_1 \perp C_1D_1$, то $CC_1 \parallel DD_1$ (см. рис. 330), поэтому CC_1D_1D — трапеция. Пусть OH — отрезок, соединяющий центр O окружности с точкой H касания. Тогда OH — средняя линия трапеции CC_1D_1D (см. решение задачи 795) и OH — радиус окружности, т. е. $OH = \frac{1}{2}CD = 13,5$ см. Так как $OH = \frac{1}{2}(CC_1 + DD_1)$, то $DD_1 = 2 \cdot OH - CC_1 = 27$ см $- 11$ см = 16 см.

Ответ. 16 см.

797. Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

Решение. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , а E и F — середины диагоналей AC и BD (рис. 331). Так как ME — средняя линия треугольника ABC , то $ME \parallel BC$. Но $MN \parallel BC$, поэтому прямые MN и ME совпадают, т. е. E — точка отрезка MN . Аналогично доказывается, что F — точка того же отрезка.

798. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 48 см, а средняя линия делится диагональю на два отрезка, равных 11 см и 35 см. Найдите углы трапеции.

Решение. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , K — точка пересечения диагонали AC с отрезком MN , $MK = 11$ см, $KN = 35$ см (рис. 332). Согласно задаче 797 точка

K — середина отрезка AC , т. е. MK — средняя линия треугольника ABC , а значит, $MK = \frac{1}{2}BC$. Аналогично, $KN = \frac{1}{2}AD$. Отсюда имеем:

$$BC = 2 \cdot MK = 22 \text{ см}, AD = 2 \cdot KN = 70 \text{ см}.$$

Таким образом, стороны трапеции $ABCD$ равны: $AB = CD = 48$ см, $BC = 22$ см, $AD = 70$ см. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты трапеции (см. рис. 332). Тогда в треугольнике ABB_1 имеем: $AB_1 = \frac{1}{2}(AD - BC) = 24$ см, $AB = 48$ см. Отсюда следует, что $\angle ABB_1 = 30^\circ$, поэтому $\angle BAD = 60^\circ$. Так как трапеция равнобедренная, то $\angle CDA = 60^\circ$ и, следовательно, $\angle ABC = \angle DCB = 120^\circ$.

Ответ. $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.

799. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Перпендикуляр, проведенный из вершины B к большему основанию AD , делит это основание на два отрезка, больший из которых равен 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$, BB_1 — перпендикуляр, проведенный к прямой AD (см. рис. 332). По условию $B_1D = 7$ см.

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AB_1 + B_1C_1 + C_1D + BC).$$

Так как $AB_1 = C_1D$, $BC = B_1C_1$, то

$$MN = \frac{1}{2}(2 \cdot C_1D + 2 \cdot B_1C_1) = C_1D + B_1C_1 = B_1D = 7 \text{ см}.$$

Ответ. 7 см.

Дополнительные задачи

800. Докажите, что если векторы \vec{m} и \vec{n} сонаправлены, то $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$, а если \vec{m} и \vec{n} противоположно направлены, причем $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$, то $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.

Решение. Если хотя бы один из данных векторов нулевой, то утверждение задачи очевидно. Поэтому рассмотрим случай, ко-

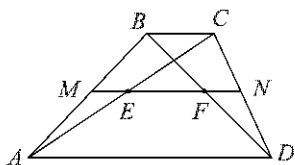


Рис. 331

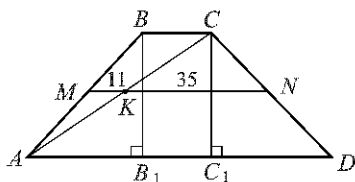


Рис. 332

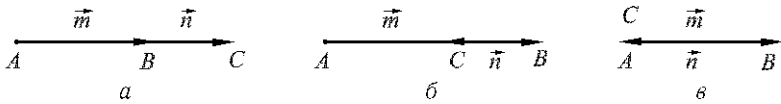


Рис. 333

гда $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{n} \neq \vec{0}$. Пусть $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$, тогда $\vec{m} + \vec{n} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 333).

Если $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, то точка B лежит на отрезке AC , поэтому $AB + BC = AC$ (рис. 333, а). Но $|\vec{m}| = AB$, $|\vec{n}| = BC$, $|\vec{m} + \vec{n}| = AC$, следовательно, $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.

Пусть теперь $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ и $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$. Если $|\vec{m}| > |\vec{n}|$, то точка C лежит на отрезке AB (рис. 333, б). В этом случае $AB = AC + CB$, или $AC = AB - BC$, т. е. $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$. Если же $|\vec{m}| = |\vec{n}|$, то точки A и C совпадают (рис. 333, в), поэтому $AB = BC$ и вектор $\vec{m} + \vec{n}$ нулевой, а значит, $|\vec{m} + \vec{n}| = 0$. Поэтому и в этом случае $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.

801. Докажите, что для любых двух векторов \vec{x} и \vec{y} справедливы неравенства

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Решение. Если хотя бы один из векторов \vec{x} или \vec{y} нулевой, то утверждение задачи очевидно. Поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, тогда $|\vec{x}| = AB$, $|\vec{y}| = BC$, $|\vec{x} + \vec{y}| = AC$. Возможны три случая.

1. Векторы \vec{x} и \vec{y} не коллинеарны. В этом случае точки A , B и C не лежат на одной прямой и являются вершинами некоторого треугольника. По неравенству треугольника

$$AC < AB + BC, \quad AB < AC + BC, \quad \text{т. е.} \quad AC > AB - BC.$$

Из первого неравенства следует, что $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, а из последнего, что $|\vec{x} + \vec{y}| > |\vec{x}| - |\vec{y}|$. Итак, в этом случае

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

2. $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$. Согласно задаче 800 $|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$. Очевидно, что $|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}| = |\vec{x} + \vec{y}|$, следовательно,

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

3. $\vec{x} \uparrow \vec{y}$. Согласно задаче 800 $|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| - |\vec{y}|$. Но $|\vec{x}| + |\vec{y}| > |\vec{x}| - |\vec{y}| = |\vec{x} + \vec{y}|$, следовательно,

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| = |\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

802. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN = 2NC$. Выразите вектор \overrightarrow{AN} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

Решение. Данный треугольник ABC изображен на рисунке 334:

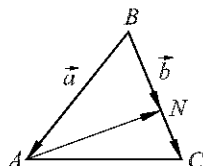


Рис. 334

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$.

803. На сторонах MN и NP треугольника MNP отмечены соответственно точки X и Y так, что $\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}$ и $\frac{NY}{YP} = \frac{3}{2}$. Выразите векторы \overrightarrow{XY} и \overrightarrow{MP} через $\vec{a} = \overrightarrow{NM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{NP}$.

Решение. По условию задачи $\overrightarrow{NX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{NM} = \frac{2}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{NY} = \frac{3}{5}\overrightarrow{NP} = \frac{3}{5}\vec{b}$ (рис. 335).

Поэтому $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{NY} - \overrightarrow{NX} = \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$. Далее,

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{NM} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Ответ. $\frac{3}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$, $\vec{b} - \vec{a}$.

804. В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC . На стороне AD отмечена точка K такая, что $AK = \frac{1}{3}AD$. Выразите векторы \overrightarrow{CK} , \overrightarrow{KD} и \overrightarrow{BC} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

Решение. Так как $AK = \frac{1}{3}AD = BC$, то $ABCK$ — параллелограмм (рис. 336). Поэтому

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a},$$

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

Ответ. \vec{a} , $\vec{b} - \vec{a}$, $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

805. Три точки A , B и C расположены так, что $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Решение. По правилу треугольника $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (рис. 337). Но $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$, поэтому

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

806. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A . Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Решение. По условию задачи $AC : CB = \frac{m}{n}$, или $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$. Но $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, поэтому

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{OC} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB},$$

или

$$\frac{m+n}{n}\overrightarrow{OC} = \frac{n \cdot \overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{OB}}{n},$$

откуда

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

807. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC , а O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

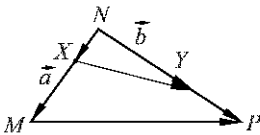


Рис. 335

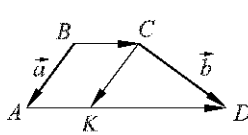


Рис. 336

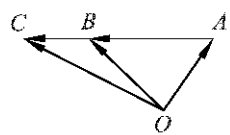


Рис. 337

Решение. Согласно задаче 1 п. 84

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Сложив эти равенства, получим искомое равенство.

808*. Точки A и C — середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, а точки B и D — середины двух других его сторон. Докажите, что для любой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

Решение. Пусть $MNPQ$ — данный четырехугольник, а A, B, C и D — соответственно середины сторон MN, NP, PQ, QM (рис. 338).

Согласно задаче 1 п. 84

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}),$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}),$$

поэтому

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}).$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}),$$

следовательно,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

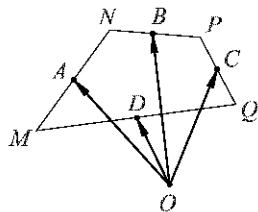


Рис. 338

809. В прямоугольной трапеции один из углов равен 120° . Найдите ее среднюю линию, если меньшая диагональ и большая боковая сторона трапеции равны a .

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $\angle A = 90^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, MN — средняя линия и $AC = CD$ (рис. 339). Тогда $\angle D = 60^\circ$. Треугольник ACD равнобедренный, следовательно, $\angle CAD = 60^\circ$, $\angle ACD = 60^\circ$, поэтому $AC = CD = AD = a$.

Далее, $\angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, поэтому

$$BC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a.$$

Таким образом,

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{3}{4}a.$$

Ответ. $\frac{3}{4}a$.

810. Докажите, что вершина угла, образованного биссектрисами двух углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

Решение. Пусть MN — средняя линия данной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , а O — точка пересечения биссектрис углов A и B (рис. 340).

Согласно первой теореме п. 72 точка O равноудалена от прямых BC и AB , а также от прямых AD и AB , поэтому она равноудалена от параллельных прямых AD и BC . Через точку O проведем прямую d , параллельную прямым AD и BC . Прямая d равноудалена от прямых BC и AD , поэтому середины M и N боковых сторон трапеции $ABCD$ лежат на этой прямой (задача 282). Таким образом, прямая d содержит среднюю линию MN трапеции, т. е. точка O лежит на прямой MN .

Задачи повышенной трудности

904. Даны четырехугольник $MNPQ$ и точка O . Что представляет собой данный четырехугольник, если

$$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}?$$

Решение. Так как

$$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN},$$

$$\text{а } \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP},$$

$$\text{то } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}.$$

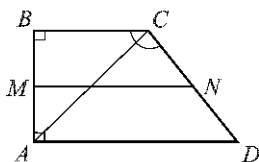


Рис. 339

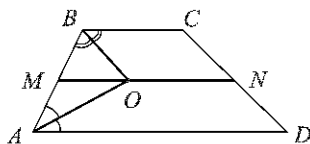


Рис. 340

Таким образом, в четырехугольнике $MNPQ$ стороны MN и PQ параллельны и равны, поэтому $MNPQ$ — параллелограмм (см. 1⁰ п. 43).
 Ответ. Параллелограмм.

905. Даны четырехугольник $ABCD$ и точка O . Точки E, F, G и H симметричны точке O относительно соответственно середин сторон AB, BC, CD и DA . Что представляет собой четырехугольник $EFGH$?

Решение. Пусть E_1 — середина стороны AB четырехугольника $ABCD$. Согласно задаче 1 п. 84

$$\overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

поэтому

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Аналогично получаем:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

следовательно,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA},$$

следовательно,

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

Отсюда следует, что в четырехугольнике $EFGH$ стороны EF и GH параллельны и равны, поэтому $EFGH$ — параллелограмм (см. 1⁰ п. 43).

Ответ. Параллелограмм.

906. Дан треугольник ABC . Докажите, что вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ направлен вдоль биссектрисы угла A , а вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A .

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\overrightarrow{AC}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}_1 + \overrightarrow{AC}_1$ (рис. 341). По правилу параллелограмма сложения векторов четырехугольник AC_1MB_1 — параллелограмм, а так как векторы

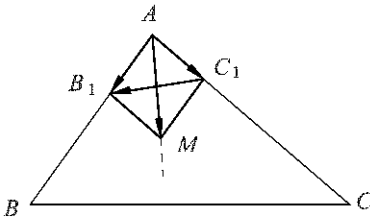


Рис. 341

Вектор $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1}$ направлен вдоль другой диагонали ромба (см. рис. 341). Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то вектор $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1}$ направлен вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A треугольника ABC .

907. Докажите следующее утверждение: три точки A , B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют числа k , l и m , не равные одновременно нулю, такие, что $k + l + m = 0$ и для произвольной точки O выполняется равенство

$$k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

Решение. Предположим, что точки A , B и C лежат на одной прямой. Тогда векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} коллинеарны, т. е. существует число n такое, что $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$, или $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$. Отсюда имеем: $(n-1)\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$. Пусть $k = n-1$, $l = 1$, $m = -n$. Тогда $k + l + m = 0$ и $k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

Обратно, пусть существуют числа k , l , m такие, что $k + l + m = 0$, хотя бы одно из них не равно нулю, например $k \neq 0$, и

$$k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}. \quad (1)$$

Тогда $m = -(k+l)$ и равенство (1) можно записать так:

$$k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} - (k+l)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0},$$

или

$$k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{0}.$$

Но $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$, поэтому

$$k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0},$$

откуда

$$\overrightarrow{CA} = -\frac{l}{k}\overrightarrow{CB}.$$

$\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ — единичные, то AC_1MB_1 — ромб. Из равенства $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$ следует, что вектор AM направлен вдоль диагонали этого ромба. Отсюда, учитывая, что $\overrightarrow{AB_1} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1} \parallel \overrightarrow{AC}$, мы заключаем, что вектор \overrightarrow{AM} направлен вдоль биссектрисы угла BAC .

Таким образом, векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} коллинеарны, и, следовательно, точки A , B и C лежат на одной прямой.

908. Используя векторы, докажите, что середины диагоналей четырехугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

Решение. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, E и F — середины диагоналей AC и BD , а G — точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон (рис. 342). Тогда если P и Q — середины сторон AB и CD , то согласно задаче 791 точка G — середина отрезка PQ .

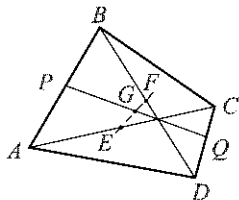


Рис. 342

Поэтому (см. задачу 1 п. 84): $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, где O — произвольная точка плоскости. Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}).$$

Таким образом,

$$2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

Согласно задаче 907 точки E , F и G лежат на одной прямой.

909. Биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах A , B и C пересекают прямые BC , CA и AB соответственно в точках A_1 , B_1 и C_1 . Используя векторы, докажите, что A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Решение. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ (рис. 343). Согласно задаче 619

$$b\overrightarrow{BA_1} = c\overrightarrow{CA_1}, \quad c\overrightarrow{CB_1} = a\overrightarrow{AB_1}, \quad a\overrightarrow{AC_1} = b\overrightarrow{BC_1}.$$

Эти три равенства можно записать так:

$$\begin{aligned} b(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA_1}) &= c\overrightarrow{CA_1}, \\ c\overrightarrow{CB_1} &= a(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB_1}), \\ a(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}) &= b(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(c-b)\overrightarrow{CA_1} &= b\overrightarrow{BC}, \\(a-c)\overrightarrow{CB_1} &= a\overrightarrow{CA}, \\(a-b)\overrightarrow{CC_1} &= b\overrightarrow{BC} + a\overrightarrow{CA}.\end{aligned}$$

Из последних трех равенств следует, что

$$(c-b)\overrightarrow{CA_1} + (a-c)\overrightarrow{CB_1} + (b-a)\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Согласно задаче 907 точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

910. Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты неравнобого треугольника ABC , а O — центр описанной около этого треугольника окружности. Используя векторы, докажите, что точка G пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку HO и делит этот отрезок в отношении $2:1$, т. е. $\frac{HG}{GO} = 2$.

Решение. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , CA и AB данного треугольника ABC (рис. 344).

По правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1G}, \quad \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}.$$

По теореме о пересечении медиан треугольника

$$\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{A_1G},$$

следовательно,

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = -2\overrightarrow{A_1O} - 2\overrightarrow{OG}. \quad (1)$$

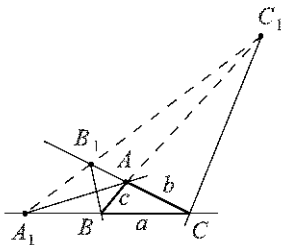


Рис. 343

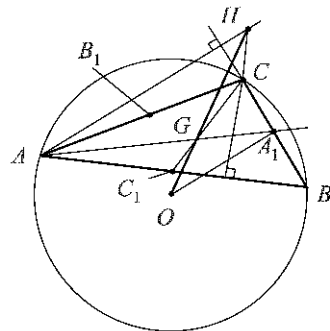


Рис. 344

Векторы \overrightarrow{AH} и $\overrightarrow{A_1O}$ коллинеарны, поэтому существует число λ такое, что $\overrightarrow{A_1O} = \lambda\overrightarrow{AH}$. Отсюда и из равенства (1) получаем:

$$\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{OG} = -(2\lambda + 1)\overrightarrow{AH}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{OG} = -(2\mu + 1)\overrightarrow{BH},$$

где число μ определяется из равенства $\overrightarrow{B_1O} = \mu\overrightarrow{BH}$. Векторы \overrightarrow{AH} и \overrightarrow{BH} не коллинеарны, поэтому из полученных равенств следует, что

$$\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{OG} = \vec{0}, \text{ т. е. } \overrightarrow{HG} = -2\overrightarrow{OG},$$

или

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

Это означает, что точка G лежит на отрезке OH и

$$\frac{HG}{GO} = 2.$$

Учебное издание

АТАНАСЯН Левон Сергеевич
БУТУЗОВ Валентин Федорович
КАДОМЦЕВ Сергей Борисович
ЮДИНА Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ. 8 КЛАСС

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *А.М. Садовский*
Оформление переплета: *А.А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 30.12.04.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 16,5. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: lizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0573-6



9 785922 105736