Серия

РЕШЕБ

NEW

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Домашняя работа по алгебре

ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

9

«АЛГЕБРА
9 класс. Задачник»
А.Г. Мордкович,
Л.А. Александрова,
Т.Н. Мишустина и др.

А.Н. Филиппов

Домашняя работа по алгебре за 9 класс

к задачнику «Алгебра. 9 класс: В 2 ч. Ч. 2.
Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Мнемозина, 2008»

Учебно-методическое пособие

Издание десятое, переработанное и исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2009

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21я72
Ф53

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст 1274 п 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Условия заданий и упражнений приводятся исключительно в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал.

Изображения учебных изданий «Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович П.В. Семенов — 10-е изд., перераб.— М.: Мнемозина, 2008», «Алгебра 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Мнемозина, 2008» приведены на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Филиппов, А.Н.
Ф53 Домашняя работа по алгебре за 9 класс к задачнику А.Г. Мордковича и др. «Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразовательных учреждений»: учебно-методическое пособие / А.Н. Филиппов. — 10-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 285, [3] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-02492-7

Предлагаемое учебное пособие содержит образцы выполнения всех заданий и упражнений из задачника «Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович, Л.А. Александровна, Т.Н. Мишустина и др.]; под. ред. А.Г. Мордковича. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Мнемозина, 2008».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по алгебре.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21я72

Подписано в печать с диапозитивов 11.11.2008. Формат 84x108/32.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 11,08.
Усл. печ. л 15,12. Тираж 25 000 экз. Заказ № 9293.

ISBN 978-5-377-02492-7

Содержание

Итоговое повторение

Задачи на повторение

1.

а) $\left(8\frac{7}{12}-2\frac{17}{36}\right)\cdot 2,7-4\frac{1}{3}:0,65=\left(\frac{103}{12}-\frac{89}{36}\right)\frac{27}{10}-\frac{13}{3}\times$

$\times\frac{100}{65}=\frac{220}{36}\cdot\frac{27}{10}-\frac{20}{3}=\frac{22\cdot 3}{4}-\frac{20}{3}=\frac{59}{6}.$

б) $\left(1\frac{11}{24}+\frac{13}{36}\right)\cdot 1,44-\frac{8}{15}\cdot 0,5625=\left(\frac{35}{24}+\frac{13}{36}\right)\cdot\frac{144}{100}-\frac{8}{15}\times$

$\times\frac{5625}{10000}=\frac{131\cdot 2}{100}-\frac{15}{50}=\frac{232}{100}=2,32.$ (Опечатка в ответе задачника)

2.

а) $3x(x-5)-5x(x-3)=3x^2-15x-5x^2+15x=-2x^2$;

б) $2y(x-y)+y(3y-2x)=2yx-2y^2+3y^2-2yx=y^2$

3.

а) $2x^2-x(2x-5)-2(2x-1)-5=0$, $2x^2-2x^2+5x-4x+2-5=0$, $x-3=0$, $x=3$;

б) $6x(x+2)-0,5(12x^2-7x)-31=0$, $6x^2+12x-6x^2+3,5x-31=0$, $15,5x=31$, $x=2$

4.

$(b+c-2a)(c-b)+(c+a-2b)(a-c)-(a+b-2c)(a-b)=$

$=bc+c^2-2ac-b^2-bc+2ab+ac+a^2-2ab-c^2-ac+2bc-$

$-a^2-ab+2ac+ab+b^2-2bc=0$

5.

а) $(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$, б) $(6b-3)^2=36b-36b+9$,

в) $(8x+3y)^2=64x^2+48xy+9y^2$, г) $(9p-2q)^2=81p^2-36pq+4q^2$

6.

а) $(3a-1)(3a+1)=9a^2-1$, в) $(10x^3-5y^2)(10x^3+5y^2)=100x^6-25y^4$.

б) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$, г) $\left(m^2+2n^3\right)\left(m^4-2m^2n^3+4n^6\right)=m^6+8n^9$

7.

а) При $a=-0,8$: $(a-1)(a-2)-(a-5)(a+3)=a^2-3a+2-a^2+2a+15=$ $=-a+17=-(-0,8)+17=17,8$;

б) При $m=-0,5$: $(m+3)^2-(m-9)(m+9)=m^2+6m+9-(m^2-81)=$ $=6m+90=6(-0,5)+90=-3+90=87$, в) При $a=-\frac{1}{6}$ $(a-3)(a-4)-(a-2)(a+5)=a^2-3a-4a-12-a^2-2a-$

$-5a-10=-6a-22=(-6)\left(-\frac{1}{6}\right)-22=1-22=-21$.

г) $(c-2)^2-(c-4)(c-4)=c^2-4c-4-c^2+16=4c-20=4(c-5)=20\frac{3}{4}$

8.

а) $\frac{910}{137^2-123^2}=\frac{910}{(137-123)(137+123)}=\frac{910}{14\cdot260}=\frac{1}{4}$.

б) $\frac{63\cdot200-63\cdot38}{144^2-18^2}=\frac{63\cdot162}{126\cdot162}=\frac{1}{2}$

в) $\frac{144^2-18^2}{153^2-90^2}=\frac{(144-18)(144+18)}{(153-90)(153+90)}=\frac{126\cdot162}{63\cdot243}=\frac{4}{3}$.

г) $\frac{7{,}8\cdot8{,}7+7{,}8\cdot1{,}3}{100}=\frac{7{,}8(8{,}7+1{,}3)}{100}=\frac{7{,}8\cdot10}{100}=0{,}78$

9.

а) $ax^2+3ax=ax(x+3)$;

б) $15x^3y^2+10x^2y-20x^2y^3=5x^2y(3xy+2-4y^2)$

в) $5a^2b-6a^2b^2=a^2b(5-6b)$;

г) $195c^6p^5-91c^5p^6+221c^3p^{10}=13c^3p^5(15c^3-7c^2p+17p^5)$

10.

а) $ax+bx+ac+bc=(a+b)x+(a+b)c=(a+b)(x+c)$

б) $4a+by+ay+4b=4(a+b)+y(a+b)=(4+y)(a+b)$.

в) $9m^2-9mn-5m+5n=9m(m-n)-5(m-n)=(9m-5)\times(m-n)$

г) $16ab^2+5b^2c+10c^3+32ac^2=16a(b^2+2c^2)+5c(b^2+2c^2)=$

$=(16a+5c)(b^2+2c^2)$

11.

а) $17^6+17^5=17^5(17+1)=17^5\cdot18$ — кратно 18;

б) $3^{17}+3^{15}=3^{15}(3^2+1)=3^{15}\cdot10=3^{13}\cdot90$ — кратно 90;

в) $42^8+42^7=42^7(42^1+1)=42^7\cdot43$ — кратно 43;

г) $2^{23}+2^{20}=2^{20}(2^3+1)=2^{20}\cdot9=2^{17}\cdot72$ — кратно 72

12.

а) $2{,}7\cdot6{,}2-9{,}3\cdot1{,}2+6{,}2\cdot9{,}3-1{,}2\cdot2{,}7=2{,}7(6{,}2-1{,}2)+9{,}3(6{,}2-1{,}2)=$
$=5\cdot2{,}7+9{,}3\cdot5=5(9{,}3+2{,}7)=5\cdot12=60$.

б) $125\cdot 48-31\cdot 82-31\cdot 43+125\cdot 83=125(48+83)-31(82+43)=$
$=125\cdot 131-31\cdot 125=125\cdot(131-31)=125\cdot 100=12500$;
в) $109\cdot 9{,}17-5{,}37\cdot 72-37\cdot 9{,}17+1{,}2\cdot 72=9{,}17(109-37)-72(5{,}37-1{,}2)$
$=9{,}17\cdot 72-72\cdot 4{,}17=72(9{,}17-4{,}17)=72\cdot 5=360$;
г) $19.9\cdot 18-19.9\cdot 16+30{,}1\cdot 18-30{,}1\cdot 16=19{,}9(18-16)+30{,}1(18-16)$
$=2\cdot 19{,}9+30{,}1\cdot 2=2(30{,}1+19{,}9)=100$.

13.

а) $m^2-49=(m-7)(m+7)$; б) $2a^2c^2-18=2(ac-3)(ac+3)$,
в) $64p^2-81q^2=(8p-9q)(8p+9q)$; г) $10x^6-10x^4=2\cdot 5\cdot x^4(x-1)(x+1)$

14.

а) $c^3-64=c^3-4^3=(c-4)(c^2+4c+16)$;
б) $25a^4-20a^2b+4b^2=(5a^2)^2-2\cdot 5a^2\cdot b+(2b)^2=(5a^2-2b)^2$.
в) $5a^2+10ab+5b^2=5(a^2+2ab+b^2)=5(a+b)^2$;
г) $15a^3+15b^3=15(a^3+b^3)=15(a+b)(a^2-ab+b^2)$

15.

а) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)=$
$=(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)$;
б) $d^2-16d+55=d^2-16d+64-9=(d-8)^2-3^2=$
$=(d-8-3)(d-8+3)=(d-11)(d-5)$;
в) $m^2-2n-m-4n^2=m^2-4n^2-(2n+m)=$
$=(m+2n)(m-2n)-(2n+m)=(2n+m)(m-2n-1)$,
г) $n^2+16n+39=n^2+16n+64-25=(n+8)^2-25=$
$=(n+8-5)(n+8+5)=(n+3)(n+13)$

16.

а) $\dfrac{6a+6b}{7a+7b}=\dfrac{6(a+b)}{7(a+b)}=\dfrac{6}{7}$;

б) $\dfrac{ma^2-m^2a}{m^2-ma}=\dfrac{ma(a-m)}{m(m-a)}=-\dfrac{a(m-a)}{m-a}=-a$,

в) $\dfrac{2p-4q}{16q-8p}=\dfrac{2(p-2q)}{8(2q-p)}=-\dfrac{(2q-p)}{4(2q-p)}=-\dfrac{1}{4}$.

г) $\dfrac{xy^4-zy^4}{zy^3-xy^3}=\dfrac{y^4(x-z)}{y^3(z-x)}=-\dfrac{y(z-x)}{z-x}=-y$

17.

а) $\dfrac{b-7}{b^2-14b+49}=\dfrac{b-7}{(b-7)^2}=\dfrac{1}{b-7}$.

б) $\dfrac{y^2-x^2}{x^2-2xy+y^2}=\dfrac{(y-x)(y+x)}{(x-y)^2}=-\dfrac{x+y}{x-y}$.

в) $\dfrac{125y^3+1}{1-5y+25y^2}=\dfrac{(5y)^3+1}{25y^2-5y+1}=\dfrac{(5y+1)(25y^2-5y+1)}{25y^2-5y+1}=5y+1$

г) $\dfrac{4t^2-2t+1}{8t^3+1}=\dfrac{4t^2-2t+1}{(2t+1)(4t^2-2t+1)}=\dfrac{1}{2t+1}$

18.

а) $\dfrac{27^5-27^4}{9^8+9^7+9^6}=\dfrac{27^4(27-1)}{9^6(9^2+9+1)}=\dfrac{(3^3)^4\cdot 26}{(3^2)^6\cdot 91}=\dfrac{3^{12}\cdot 2}{3^{12}\cdot 7}=\dfrac{2}{7}$;

б) $\dfrac{8^{11}-8^{10}-8^9}{4^{15}-4^{14}-4^{13}}=\dfrac{8^9(8^2-8-1)}{4^{13}(4^2-4-1)}=\dfrac{(2^3)^9\cdot 55}{(2^2)^{13}\cdot 11}=\dfrac{2^{27}\cdot 5}{2^{26}}=10$

19.

а) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$,

б) $\dfrac{1-5d^2}{d^6}-\dfrac{d-5}{d^4}+\dfrac{1}{d^3}=\dfrac{1-5d^2-d^3+5d^2+d^3}{d^6}=\dfrac{1}{d^6}$.

в) $\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=\dfrac{3x-3y+5x+5y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{2(4x+y)}{x^2-y^2}$;

г) $\dfrac{5c}{6c-6}-\dfrac{4c}{3c+3}+\dfrac{c^2}{2c^2-2}=\dfrac{5c(c+1)-8c(c-1)+3c^2}{6(c^2-1)}=\dfrac{13c}{6(c^2-1)}$

20.

а) $\dfrac{3c+2}{c^2-4c+4}-\dfrac{5}{c-2}=\dfrac{3c+2-5(c-2)}{(c-2)^2}=\dfrac{2(6-c)}{(c-2)^2}$;

б) $\dfrac{y^2+4}{y^3+8}-\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{y^2+4-y^2+2y-4}{(y+2)(y^2-2y+4)}=\dfrac{2y}{y^3+8}$;

в) $\dfrac{3a(16-3a)}{9a^2-4}+\dfrac{3+6a}{2-3a}-\dfrac{2-9a}{3a+2}=\dfrac{48a-9a^2-(3+6a)(3a+2)-(2-9a)(3a-2)}{(3a-2)(3a+2)}$

$=\dfrac{48a-9a^2-9a-6-18a^2-12a-6a+4+27a^2-18a}{(3a-2)(3a+2)}=\dfrac{1}{3a+2}$

г) $\dfrac{2mn}{m^3+n^3}+\dfrac{2m}{m^2-n^2}-\dfrac{1}{m-n}=$

$=\dfrac{2mn(m-n)+2m(m^2-mn+n^2)-(m+n)(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)(m-n)}=$

$$=\frac{m^3-n^3}{(m^3+n^3)(m-n)}=\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{(m-n)(m^3+n^3)}=\frac{m^2+mn+n^2}{m^3+n^3}$$

21.

а) $\frac{x^2-y^2}{3xy}\cdot\frac{3y}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)3y}{3xy(x-y)}=\frac{x+y}{x}$,

б) $\frac{c^2-49}{10cd}:\frac{2c+14}{5d}=\frac{(c-7)(c+7)}{10cd}\cdot\frac{5d}{2(c+7)}=\frac{(c-7)}{4c}$;

в) $\frac{x^2-10x+25}{3x+12}:\frac{2x-10}{x^2-16}=\frac{(x-5)^2}{3(x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-5)}=\frac{(x-5)(x-4)}{6}$.

г) $\frac{t^3+8}{12t^2+27t}\cdot\frac{4t+9}{t^2-2t+4}=\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{3t(4t+9)}\cdot\frac{(4t+9)}{t^2-2t+4}=\frac{t+2}{3t}$

22.

а) $\left(\frac{a+b}{a}-\frac{2b}{a+b}\right)\cdot(a+b)=\frac{(a+b)^2-2ab}{a(a+b)}\cdot(a+b)=\frac{a^2+b^2}{a}$,

б) $\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{m^2-mn}\right)\frac{mn}{m+n}=\left(\frac{m}{n(n-m)}-\frac{n}{m(n-m)}\right)\times$

$\times\frac{mn}{m+n}=\frac{m^2-n^2}{mn(n-m)}\cdot\frac{mn}{m+n}=\frac{(m-n)(m+n)}{(n-m)(m+n)}=-1$

23.

а) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}=\frac{b-a}{(b-a)(b+a)}=\frac{1}{b+a}$.

б) $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{1}{a^2+5a}-\frac{a+5}{a^2-3a}=\frac{(a-5)(a+5)}{a+3}\cdot\frac{1}{a(a+5)}-\frac{a+5}{a(a-3)}=$

$=\frac{(a-5)(a-3)-(a+5)(a+3)}{a(a+3)(a-3)}=-\frac{16}{a^2-9}$

24.

а) $\begin{cases}5x-3y=14,\\2x+y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}5x-3y=14,\\y=10-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}5x-30+6x=14,\\y=10-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}11x=44,\\y=10-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=2.\end{cases}$

б) $\begin{cases}3a+4b=55,\\7a-b=56;\end{cases}$ $\begin{cases}3a+28a-224=55,\\b=7a-56;\end{cases}$ $\begin{cases}a=9,\\b=7,\end{cases}$

в) $\begin{cases}4x-7y=30,\\4x-5y=90;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=30+7y,\\30+7y-5y=90;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=30+7y,\\2y=60;\end{cases}$ $\begin{cases}x=60,\\y=30;\end{cases}$

г) $\begin{cases}-2a+3b=18\\3a+2b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a=-2b-1\\13b=52\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}\Rightarrow(-3;4)$

25.

а) $\begin{cases}4x+5y=1,\\2x+2.5y=5;\end{cases}$ Умножим второе уравнение на 2.

$\begin{cases}4x+5y=1,\\4x+5y=10;\end{cases}$ чего, очевидно, быть не может. Решений нет

б) $\begin{cases}4x-3y=12,\\\frac{4}{3}x-y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}4x-\frac{3\cdot 4}{3}x+12=12.\\y=\frac{4}{3}x-4;\end{cases}$ $\begin{cases}0\cdot x=0,\\y=\frac{4}{3}x-4;\end{cases}$

Решением будет пара (x; $\frac{4}{3}x-4$) , где x – любое действительное число

26.

а) $5-\frac{13}{7}\sqrt{1\frac{27}{169}}=5-\frac{13}{7}\sqrt{\frac{196}{169}}=5-\frac{13}{7}\cdot\frac{14}{13}=3$;

б) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}=\sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}}=\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{17}{2}=8{,}5$;

в) $4-\frac{7}{4}\sqrt{5\frac{11}{49}}=4-\frac{7}{4}\sqrt{\frac{256}{49}}=4-\frac{7}{4}\cdot\frac{16}{7}=4-4=0$;

г) $\sqrt{\frac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}=\sqrt{\frac{(145{,}5-96{,}5)(145{,}5+96{,}5)}{(193{,}5-31{,}5)(193{,}5+31{,}5)}}=$

$=\sqrt{\frac{49\cdot 242}{162\cdot 225}}=\frac{7\cdot 11}{9\cdot 15}=\frac{77}{135}$

27.

а) $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$.

б) $\sqrt{54a^3}=\sqrt{9a^2\cdot 6a}=3a\sqrt{6a}$.

в) $\sqrt{8z^2}=\sqrt{4z^2\cdot 2}=2z\sqrt{2}$.

г) $\sqrt{49d}=7\sqrt{d}$.

28.

а) $2\sqrt{5}=\sqrt{5\cdot 4}=\sqrt{20}$;

б) $b\sqrt{3}=-\sqrt{3b^2}$, $b>0$;

в) $7\sqrt{3a}=\sqrt{49\cdot 3a}=\sqrt{147a}$;

г) $-a\sqrt{2}=-\sqrt{2a^2}$. $a>0$.

29.

а) $2\sqrt{125}+2\sqrt{20}-2\sqrt{80}=2\cdot 5\sqrt{5}+2\cdot 2\sqrt{5}-2\cdot 4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{9a}-\sqrt{25a}-\sqrt{36a}=3\sqrt{a}-5\sqrt{a}-6\sqrt{a}=-8\sqrt{a}$;

в) $5\sqrt{12}-2\sqrt{48}+2\sqrt{27}=5\cdot 2\sqrt{3}-2\cdot 4\sqrt{3}+2\cdot 3\sqrt{3}=8\sqrt{3}$;

г) $0{,}1\sqrt{5m}-\sqrt{0{,}45m}+2\sqrt{80m}=0.1\sqrt{5m}-0.3\sqrt{5m}+2\cdot 4\sqrt{5m}=7.8\sqrt{5m}$

30.

а) $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}=\left|\sqrt{7}-2\right|+\left|\sqrt{7}-3\right|=\sqrt{7}-2-\sqrt{7}+3=1$,

т.к. $2<\sqrt{7}<3$;

б) $\sqrt{(\sqrt{12}-4)^2}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=\left|\sqrt{12}-4\right|+2\left|2-\sqrt{3}\right|$,

т.к. $\sqrt{12}<4$, то $\left|\sqrt{12}-4\right|=-\sqrt{12}+4$, т.к. $2>\sqrt{3}$, то $\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$.

$\left|\sqrt{12}-4\right|-2\left|2-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{12}+4-4+2\sqrt{3}=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$

31.

а) $0{,}4a^2b\sqrt{\dfrac{25}{a^2b^2}}=0{,}4a^2b\cdot\dfrac{5}{|a||b|}$, т.к. $a>0$, то $|a|=a$;

т.к. $b<0$, то $|b|=-b$, $0{,}4a^2b\cdot\dfrac{5}{|a||b|}=0{,}4ab\cdot\dfrac{5}{ab}=-2a$,

б) $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b^6}{a^2}}-\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a^6}{b^2}}=\dfrac{a}{b}\dfrac{\left|b^3\right|}{|a|}-\dfrac{b}{a}\dfrac{\left|a^3\right|}{|b|}$. $|b|=b$, $\left|b^3\right|=b^3$, т.к. $b>0$,

$|a|=-a$, $\left|a^3\right|=-a^3$, т.к. $a<0$,

$\dfrac{a}{b}\dfrac{\left|b^3\right|}{|a|}-\dfrac{b}{a}\dfrac{\left|a^3\right|}{|b|}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b^2}{(-a)}-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{(-a^3)}{b}=-b^2+a^2=a^2-b^2$

32.

а) $(2+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{12}-2\sqrt{18}=$

$=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6\sqrt{2}=2\sqrt{3}$;

б) $(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})=2a-3b$.

в) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})=2\sqrt{15}+6\cdot 5-3-3\sqrt{15}=27-\sqrt{15}$.

г) $(c+\sqrt{d})(c^2-c\sqrt{d}+d)=(c+\sqrt{d})(c^2-c\sqrt{d}+(\sqrt{d})^2)=$

$=c^3+(\sqrt{d})^3=c^3+d\sqrt{d}$

33.

а) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-4}-\dfrac{3-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-6}=\dfrac{3-3\sqrt{a}-6+2\sqrt{a}}{6(\sqrt{a}-2)}=\dfrac{-\sqrt{a}-3}{6(\sqrt{a}-2)}$,

б) $\dfrac{\sqrt{d}+2}{\sqrt{cd}+d}-\dfrac{\sqrt{c}-3}{\sqrt{cd}+c}=\dfrac{\sqrt{cd}+2\sqrt{c}-\sqrt{cd}+3\sqrt{d}}{\sqrt{cd}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\dfrac{2\sqrt{c}+3\sqrt{d}}{\sqrt{cd}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}$.

в) $\frac{1-a}{4\sqrt{a}+8\sqrt{b}}\cdot\frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{3-3\sqrt{a}}=\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{4(\sqrt{a}+2\sqrt{b})}\cdot\frac{(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2}{3(1-\sqrt{a})}=$

$=\frac{(1+\sqrt{a})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})}{12}$;

г) $\frac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2}\left(\frac{x}{x-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)=\frac{x(x+\sqrt{2})}{x^2+2}\times$

$\times\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}-x\sqrt{2}+2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\right)=\frac{x\cdot(x^2+2)}{(x^2+2)(x-\sqrt{2})}=\frac{x}{x-\sqrt{2}}$.

34.

а) $(x^{-2}-y^{-2}):(x^{-1}-y^{-1})=\frac{(x^{-1})^2-(y^{-1})^2}{x^{-1}-y^{-1}}=$

$=\frac{(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})}{x^{-1}-y^{-1}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$;

б) $(c^{-2}-d^{-2})\cdot(d-c)^{-2}=\frac{(c^{-1}-d^{-1})(c^{-1}+d^{-1})}{(d-c)^2}=$

$=\frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{(d-c)^2}=\frac{(d-c)(d+c)}{c^2d^2(d-c)^2}=\frac{d+c}{c^2d^2(d-c)}$;

в) $(k-l)^{-2}\cdot(k^{-1}-l^{-1})=\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{l}}{(k-l)^2}=\frac{l-k}{kl(k-l)^2}=\frac{1}{kl(l-k)}$,

г) $(a^{-1}-b^{-1}).(b^{-3}-a^{-3})=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{(b^{-1}-a^{-1})(b^{-2}+a^{-1}b^{-1}+a^{-2})}=$

$=-\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}}=-\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$.

35.

$\left(1+\frac{x^{-2n}+y^{-2n}}{x^{-2n}-y^{-2n}}\right)^{-2}=\left(\frac{x^{-2n}-y^{-2n}+x^{-2n}+y^{-2n}}{x^{-2n}-y^{-2n}}\right)^{-2}=\left(\frac{2x^{-2n}}{x^{-2n}-y^{-2n}}\right)^{-2}$

При $x=3$, $y=\frac{3}{4}$, $n=\frac{1}{2}$ имеем

$$\left(\frac{2\cdot 3^{-1}}{3^{-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{2}{3}}{-1}\right)^{-2}=\left(\frac{-3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}=2{,}25$$

36.

а) $2x^2+3x+1=0$, $D=9-8=1$, $x_1=\frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-3-1}{4}=-1$.

б) $5x^2-8x+3=0$, $\frac{D}{4}=16-5\cdot 3=1, x_1=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5}, x_2=\frac{4+1}{5}=1$

в) $3x^2+5x-2=0$, $D=25-4\cdot 3(-2)=49, x_1=\frac{-5+\sqrt{49}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$x_2=\frac{-5-\sqrt{49}}{6}=-\frac{12}{6}=-2$

г) $14x^2-5x-1=0$, $D=25-4\cdot 14\cdot(-1)=81, x_1=\frac{5-\sqrt{81}}{28}=-\frac{4}{28}=-\frac{1}{7}$,

$x_2=\frac{5+9}{28}=\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$

37.

а) $(a^2-5)^2-(2a+3)^2=0$

$|a^2-5|=|2a+3|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-5=2a+3,\\ a^2-5=-2a-3\end{array}\right.$

Решим первое уравнение: $a^2-2a-8=0$, по теореме Виета: $a_1=4, a_2=-2$

Решим второе уравнение $a^2+2a-2=0$, $\frac{D}{4}=1+2=3$

$a_3=\frac{-1+\sqrt{3}}{1}=-1+\sqrt{3}, a_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{1}=-1-\sqrt{3}$

б) $(3x-1)(2x-2)=(x-4)^2+7$

$6x^2-6x-2x+2=x^2+16-8x+7, x^2=\frac{21}{5}, x=\pm\sqrt{4{,}2}$

в) $(d^2-13)^2-(d-77)^2=0$, $(d^2-13)^2=(d-77)^2$,

$|d^2-13|=|d-77|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d^2-13=d-77,\\ d^2-13=77-d\end{array}\right.$

Решим первое уравнение: $d^2-d+64=0$. $D=1-4\cdot 1\cdot 64<0$
Решений нет.
Решим второе уравнение

$d^2+d-90=0$, $D=1+90\cdot 4=361$, $d_1=\frac{-1+19}{2}=9$, $d_2=\frac{-1-19}{2}=-10$;

г) $2x-(x+1)^2=3x^2-5$, $2x-x^2-2x-1=3x^2-5$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$.

38.

а) $x^2-17x+60$, по теореме Виета:

$x_1=12$; $x_2=5$; $x^2-17x+60=(x-12)(x-5)$;

б) $3x^2+35x-38$; $D=35^2+12\cdot 38=1225+456=1681=41^2$;

$x_1=\frac{-35+41}{6}=1$; $x_2=\frac{-35-41}{6}=-\frac{38}{3}$; $3x^2+35x-38=3(x-1)(x+\frac{38}{3})$;

в) $2x^2-297x+295$; $D=297^2-8\cdot 295=88209-2360=85849=(293)^2$;

$x_1=\frac{297+293}{4}=147{,}5$; $x_2=\frac{297-293}{4}=1$;

$2x^2-297x+295=2(x-147{,}5)(x-1)=(2x-295)(x-1)$;

г) $x^2+26x+105$; $\frac{D}{4}=13^2-105=169-105=64$;

$x_1=\frac{-13+8}{1}=-5$; $x_2=\frac{-13-8}{1}=-21$; $x^2+26x+105=(x+5)(x+21)$.

39.

а) $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9}=\frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3x-1}{x+3}$;

б) $\frac{5x^2+x-4}{x^2+x}=\frac{5(x+1)\left(x-\frac{4}{5}\right)}{x(x+1)}=\frac{5x-4}{x}$;

в) $\frac{2x^2-9x+4}{x^2-16}=\frac{2(x^2-4{,}5x+2)}{(x-4)(x+4)}=\frac{2(x-4)(x-0{,}5)}{(x-4)(x+4)}=\frac{2x-1}{x+4}$;

г) $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}=\frac{2\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2(x+3)(x-0{,}5)}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-1}{x-3}$.

40.

а) $\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2-2x}=\frac{1+2x}{x-2}$. $\frac{2}{x}+\frac{10}{x(x-2)}-\frac{1+2x}{x-2}=0$.

$\frac{2x-4+10-x-2x^2}{x(x-2)}=0$, $\frac{-2x^2+x+6}{x(x-2)}=0 \Rightarrow \begin{cases}-2x^2+x+6=0. \\ x(x-2)\neq 0;\end{cases}$

Решим первое уравнение:

$2x^2-x-6=0$, $D=1+48=49$, $x_1=\frac{1+7}{4}=2$, $x_2=\frac{1-7}{4}=-1{,}5$.

Но при $x=2$ второе уравнение системы обращается в 0. Следовательно. $x=2$ - не решение.

Ответ: $x=-1{,}5$.

б) $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{1}{x+3}=\frac{12}{x^3-9x}$, $\frac{2}{x(x-3)}-\frac{1}{x+3}-\frac{12}{x(x-3)(x+3)}=0$,

$\frac{2x+6-x^2+3x-12}{x(x-3)(x+3)}=0$, $\begin{cases}-x^2+5x-6=0\\ x(x-3)(x+3)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-5x+6=0\\ x\neq 0\\ x\neq 3\\ x\neq -3\end{cases}$

$D=25-24=1$, $x_1=\frac{-5+1}{-2}=2$, $x_1=\frac{-5-1}{-2}=3$,

$x=3$ не удовлетворяет 2-му условию системы. Значит решением будет лишь $x=2$.

в) $\frac{5}{x-2}+1=\frac{14}{x^2-4x+4}$, $\frac{5+x-2}{x-2}=\frac{14}{(x-2)^2}$, $\frac{14-(x+3)(x-2)}{(x-2)^2}=0$,

$\frac{14-x^2-x+6}{(x-2)^2}=0$, $\begin{cases}-x^2-x+20=0,\\ (x-2)^2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x-20=0,\\ x\neq 2;\end{cases}$ $D=1+80=81$

$x_1=\frac{-1+9}{2}=4$, $x_2=\frac{-1-9}{2}=-5$ Ответ: -5, 4

г) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2-5x}=\frac{x-3}{5-x}$, $\frac{1}{x}-\frac{10}{x(x-5)}+\frac{x-3}{x-5}=0$, $\frac{x-5-10+x^2-3x}{x(x-5)}=0$.

$\begin{cases}x^2-2x+15=0\\ x(x-5)\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-5)(x+3)=0\\ x(x-5)\neq 0\end{cases}\Rightarrow x=-3$

41.

а) $x^4-17x^2+16=0$, по теореме Виета: $x=\pm1$, $x^2=1$ или $x^2=16$, $x=\pm4$

б) $x^6-9x^3+8=0$, по теореме Виета: $x=2$, $x^3=8$ или $x=1$, $x^3=1$

в) $9x^4-40x^2+16=0$, $\frac{D}{4}=400-144=256=16^2$

$x^2=\frac{20+16}{9}=4$, $x=\pm2$ или $x^2=\frac{20-16}{9}=\frac{4}{9}$, $x=\pm\frac{2}{3}$

г) $x^6-7x^3-8=0$, по теореме Виета: $x=2$, $x^3=8$ или $x=-1$, $x^3=-1$

42.

Пусть v км/ч — скорость пешехода, $S_{км}$ — длина пути, тогда

$\begin{cases}S=1{,}2v\\ S=v+1\end{cases}$ $\begin{cases}v=-1+S\\ S=-1{,}2+1{,}2S\end{cases}$ $\begin{cases}v=5\\ S=6\end{cases}$ Ответ: 6 км. ч

43.

Пусть v км/ч – скорость лодок, тогда

$$\frac{45}{(v+3)+(v-3)}=\frac{3}{2},\quad \frac{45}{2v}=\frac{3}{2}\Rightarrow v=15 \text{ (км/ч)}.$$ Ответ: 15 км/ч.

44.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, тогда

$$\frac{80}{60}\cdot v+7=\frac{36}{60}(v+30),\quad 80v+420=36v+1080,$$

$44v=660,\quad v=15$ (км/ч). Ответ: 15 км/ч.

45.

Пусть v км/ч – скорость автомобиля, тогда

$$2v+(3-2-\frac{1}{5})(v+10)=3v,\quad 10v+4v+40=15v,\quad v=40 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 40 км/ч.

46.

Пусть на одно платье требуется x м ткани, а на один сарафан y м, тогда

$$\begin{cases}x+3y=9\\3x+5y=19\end{cases}\quad \begin{cases}x=9-3y\\27-9y+5y=19\end{cases}\quad \begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$$

Ответ: 2м.; 3м.

47.

Пусть v км/ч — скорость велосипедиста, тогда

$$\frac{15}{v}+\frac{6}{v-3}=\frac{3}{2},\quad 15v-45+6v=\frac{3}{2}v^2-\frac{9}{2}v,\quad v^2-17v+30=0,$$

$$D=289-120=169=13^2,\quad v_1=\frac{17-13}{2}=2;\quad v_2=\frac{17+13}{2}=15$$

По смыслу задачи $v>0$ и $v-3>0$, поэтому $v=15$.

Ответ 15 км/ч и 12 км/ч.

48.

Пусть v км/ч – скорость лодки, тогда

$$\frac{2}{v+1}+\frac{2}{v-1}=\frac{7}{12},\quad 2v-2+2v+2=\frac{7}{12}(v^2-1),\quad 7v^2-48v-7=0.$$

$$\frac{D}{4}=576+49=625=25^2,\quad v_1=\frac{24+25}{7}=7;$$

$v_2<0$ — не подходит по смыслу задачи. Ответ: 7 км/ч.

49.

Пусть завод по плану должен был выпускать n станков в день, тогда:

$$180n+360-n^2-2n=180n,\quad n^2+2n-360=0,$$

$$\frac{D}{4}=1+360=361=19^2,\quad n_1=18,\quad n_2<0,\quad \frac{180}{n}-1=\frac{180}{18}-1=9 \text{ (дней)}.$$

50.

Пусть 1-ый двигатель расходует в час x граммов горючего, 2-й – y граммов:

$$\begin{cases}(y+5)(x)=320\\ y(x+2)=270\end{cases}\quad \begin{cases}xy=320-5x\\ xy=270-2y\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{320-5x}{x}\\ xy=270-2y\end{cases}$$

$320x-5x^2=270x-640+10x$, $x^2-8x-128=0$,

$\frac{D}{4}=16+128=144=12^2$, $x_1=4+12=16$, $x_2<0$,

Ответ: 16 гр первый, и 18 – второй.

51.

Пусть грузоподъемность машины x тонн, тогда

$\left(\frac{30}{x}-4\right)=\frac{30}{x+2}$, $30x+60-4x^2-8x=30x$, $4x^2+8x-60=0$,

$x^2+2x-15=0$, $D_1=1+15=16=4^2$, $x_1=-1+4=3$, $x_1<0$, $\frac{30}{3+2}=$

$=6$ (рейсов).

52.

Пусть токарь должен был сделать работу за x дней, тогда

$39(x-6)-24x=21$, $15x=255$. $x=17$, $39(17-6)=429$

Ответ: 429 деталей.

53.

Пусть первоначально в 1-й школе было x учеников, а во второй – y, тогда

$$\begin{cases}x+y=1500\\ 1{,}1x+1{,}2y=1720\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=1500\\ 11x+12y=17{,}200\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1500-y\\ 16.500-11y+12y=17.200\end{cases}\quad \begin{cases}y=700\\ x=800\end{cases}$$

Ответ: 800 и 700 человек соответственно.

54.

Пусть швея в день шила x сумок, тогда

$60-(\frac{60}{x-2}-4)x=4$, $56(x-2)-(60-4x+8)x=0$,

$x^2-3x-28=0$, $x_1=7$, $x_2=-4$ — не подходит по смыслу задачи

Ответ: 7 сумок в день.

55.

Пусть v — скорость второго велосипедиста, тогда получим:

$\frac{120}{v}-\frac{120}{v+3}=2$, $120v+360-120v=2v^2+6v$, $v^2+3v-180=0$,

$D=9+720=729=27^2$, $v_1=-\frac{3+27}{2}=12$, $v_2<0$.

Ответ: 12 км/ч и 15 км/ч

56.

Пусть v – скорость легкового автомобиля, тогда

$\frac{30}{v-20}-\frac{30}{v}=\frac{1}{4}$, $120v-120v+2400=v^2-20v$, $v^2-20v-2400=0$,

$D_2=100+2400=2500=50^2$, $v_1=+10+50=60$, $v_2<0$.

Ответ: 60 км/ч.

57.

Пусть n и v — скорости первого и второго туриста соответственно, тогда

$\begin{cases}\frac{50}{n+v}=1\\ \frac{50}{v}-\frac{50}{n}=\frac{5}{6}\end{cases}$ $\begin{cases}50=n+v\\ 60n-60v=nv\end{cases}$

$60(50-v)-60v=v(50-v)$, $v^2-170v+3000=0$,

$\frac{D}{4}=7225-3000=4225=65^2$. $v_1=85-65=20$, $v_2=85+65=150$.

$n_1=30$, $n_2<0$.

Ответ: 30 км/ч и 20 км/ч.

58.

Пусть v км/ч — скорость катера, тогда

$(v+6)\left(\frac{36}{v}-\frac{18}{60}\right)=36$. $(v+6)(36-0{,}3v)=36v$

$(v+6)(360-3v)=360v$, $-18v+360v+3v^2-360v+2160=0$,

$v^2+6v-720=0$, $D=9+720=729=27^2$, $v_1=-3+27=24$ (км/ч),

$v_2=-3-27<0$, что нас не устраивает.

Ответ: 24 км/ч. Опечатка в ответе задачника.

59.

Пусть $a_{см}$ и $b_{см}$ – длина катетов, тогда $\begin{cases}a+b+37=84\\ a^2+b^2=1369\end{cases}$ $\begin{cases}a=47-b\\ a^2+b^2=1369\end{cases}$

$2209-1369+2b^2-94b=0$, $b^2-47b-420=0$,

$D=2209-1680=529=23^2$, $b_1=\frac{47-23}{2}=12$, $b_2=\frac{47+23}{2}=35$

Для $b_1=12$ см, $a_1=35$ см $\Rightarrow S=210$ см^2

Для $b_2=35$ см, $a_2=12$ см $\Rightarrow S=210$ см^2

$S=\frac{1}{2}ab=210$ см^2

Ответ: 210 см^2

Глава 1. Неравенства и системы неравенств

§ 1. Линейные и квадратные неравенства

1.1.

а) $a=-1$ $-2-5>9$ — неверно. $a=-1$ не является решением.

$a=3$ $6-5=1>9$ — неверно. $a=3$ не является решением.

б) $a=-2$ $2+12=14<-10$ — неверно. Не является решением.

$a=4$ $2-24=-22<-10$ — верно. Является решением.

в) $a=-15$ $7+45=52<13$ — неверно. Не является решением.

$a=4$ $7-12=-5<13$ — верно. Является решением.

г) $a=-2$ $-8+5>17$ — неверно. Не является решением.

$a=5$ $20+5>17$ — верно. Является решением.

1.2.

а) $4a-11<a+13$, $3a<24$; $a<8$,

б) $6-4c>7+6c \Rightarrow 10c<-1 \Rightarrow c<-0{,}1$

в) $8b+3<9b-2$, $b>5$.

г) $3-2x<12-5x$, $3x<9$, $x<3$

1.3.

а) $\dfrac{5-a}{3}-\dfrac{3-2a}{5}<0$, $25-5a-9+6a<0$, $a<-16$;

б) $\dfrac{b+4}{2}+\dfrac{13-4b}{5}<0$, $5b+20+26-8b<0$, $3b>46$, $b>\dfrac{46}{3}$;

в) $\dfrac{x+7}{4}>\dfrac{5+4x}{3}$, $3x+21>20+16x$, $1>13x$, $x<\dfrac{1}{13}$;

г) $\dfrac{6-y}{7}<\dfrac{y+6}{5}$, $30-5y<7y+42$, $12y>-12$, $y>-1$

1.4.

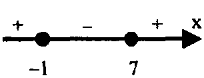
а) $a(a-2)-a^2>5-3a$, $a^2-2a-a^2>5-3a$, $a>5$;

б) $y(5y-4)-5y(y+4)\ge 96$, $5y^2-4y-5y^2-20y\ge 96$, $24y\le -96$, $y\le -4$

в) $3x(3x-1)-9x^2\le 2x+6$, $9x^2-3x-9x^2\le 2x+6$, $5x+6\ge 0$, $x\ge -\dfrac{6}{5}$,

г) $7c(c+2)-c(7c-1)<3$. $7c^2+14c-7c^2+c<3$, $15c<3$, $c<0{,}2$

1.5.



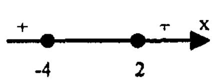
а) $x^2-6x-7\ge 0$, по теореме Виета: $x_1=7$,

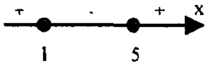
$x_2=-1$, $(x-7)(x+1)\ge 0$

$x\le -1$, $x\ge 7$

б) $-x^2-2x+8>0$, $x^2+2x-8<0$

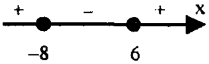
по теореме Виета: $x_1=2$, $x_2=-4$, $-4<x<2$





в) $-x^2+6x-5<0$, $x^2-6x+5>0$

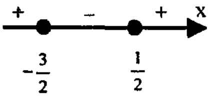
по теореме Виета: $x_1=5$, $x_2=1$, $x<1$, $x>5$



г) $x^2+2x-48\le 0$, по теореме Виета·

$x_1=6$, $x_2=-8$, $-8\le x\le 6$

1.6.

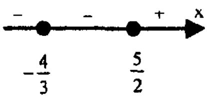


а) $4x^2+4x-3\ge 0$, $\dfrac{D}{4}=4+12=4^2$

$x_1=\dfrac{-2+4}{4}=\dfrac{1}{2}$, $x_1=\dfrac{-2-4}{4}=-\dfrac{3}{2}$, $x\ge\dfrac{1}{2}$, $x\le-\dfrac{3}{2}$

б) $12x^2+x-1<0$, $D=1+48=49$

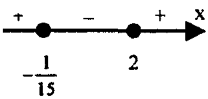
$x_1=\dfrac{-1+7}{24}=\dfrac{1}{4}$, $x_2=\dfrac{-1-7}{24}=-\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{4}$



в) $6x^2-7x-20\le 0$

$D=49+480=529=23^2$

$x_1=\dfrac{7+23}{12}=\dfrac{5}{2}$, $x_2=\dfrac{7-23}{12}=-\dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{4}{3}\le x\le\dfrac{5}{2}$;



г) $15x^2-29x-2>0$, $D=841+120=961=31^2$

$x_1=\dfrac{29+31}{30}=2$, $x_2=\dfrac{29-31}{30}=-\dfrac{1}{15}$, $x>2$, $x<-\dfrac{1}{15}$

1.7.

а) $3x^2+x+2>0$, $D=1-24=-23<0$.

Следовательно $-\infty<x<+\infty$ (т.к. первый коэффициент положителен).

б) $-3x^2+2x-1\ge 0$, $\dfrac{D}{4}=1-3=-2<0$. Следовательно, решений нет.

в) $5x^2-2x+1<0$, $\dfrac{D}{4}=1-5=-4<0$. Следовательно, решений нет

г) $-7x^2+5x-2\le 0$, $D=25-56=-31<0$.

$-\infty<x<+\infty$ (т.к. старший коэффициент положителен).

1.8.

а) $4x^2-12x+9>0$

$(2x-3)^2>0$

$-\infty<x<+\infty$

б) $25x^2+40x+16\le 0$

$(5x+4)^2\le 0$

$5x+4=0$

$x=-0{,}8$

в) $16x^2-40x+25\ge 0$

$(4x-5)^2\ge 0$

$-\infty<x<+\infty$

г) $9x^2+12x+4<0$

$(3x+2)^2<0$

нет решений

1.9.

а) $12x-6\geq 0$ $x\geq 0,5$

б) $9-2x\geq 0$ $x\leq 4,5$

в) $3x+4,5\geq 0$ $x\geq -1,5$

г) $13-5x\geq 0$ $x\leq 2,6$

1.10.

а) $3x^2+28x+9\geq 0$, $3\left(x+\frac{14}{3}\right)^2+9-\frac{196}{3}\geq 0$. $\left(x+\frac{14}{3}\right)^2\geq\frac{169}{9}$,

$\left|x+\frac{14}{3}\right|\geq\frac{13}{3}$, $\left[\begin{array}{l}x\geq -\frac{1}{3}\\ x\leq -9\end{array}\right.$

б) $5x-x^2+6\geq 0$, $6-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\geq 0$, $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\leq\frac{49}{4}$, $\left|x-\frac{5}{2}\right|\leq\frac{7}{2}$,

$-1\leq x\leq 6$

в) $2x^2+7x-9\geq 0$. $2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-9-\frac{49}{8}\geq 0$, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2\geq\frac{121}{16}$, $\left|x+\frac{7}{4}\right|\geq\frac{11}{4}$.

$\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\leq -4,5\end{array}\right.$

г) $21-4x-x^2\geq 0$. $25-(x+2)^2\geq 0$, $(x+2)^2\leq 25$, $|x+2|\leq 5$, $-7\leq x\leq 3$

1.11.

а) $4-2x>0$ $x<2$

б) $x+3>0$ $x>-3$

в) $-x-5>0$ $x<-5$

г) $2x-6>0$ $x>3$

1.12.

а) $x^2-18x+77>0$, $(x-9)^2+77-81>0$. $(x-9)^2>4$, $|x-9|>2$, $\left[\begin{array}{l}x>11\\ x<7\end{array}\right.$

б) $10x^2-11x-6>0$, $10\left(x-\frac{11}{20}\right)^2-6-\frac{121}{40}>0$, $\left(x-\frac{11}{20}\right)^2>\frac{361}{400}$.

$\left|x-\frac{11}{20}\right|>\frac{19}{20}$, $\left[\begin{array}{l}x>1,5\\ x<-0,4\end{array}\right.$

в) $x^2+9x-36>0$, $\left(x+\frac{9}{2}\right)^2-36-\frac{81}{4}>0$, $\left(x+\frac{9}{2}\right)^2>\frac{225}{4}$, $\left|x+\frac{9}{2}\right|>\frac{15}{2}$,

$\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-12\end{array}\right.$

г) $12x^2+13x-4>0$, $12\left(x+\frac{13}{24}\right)^2-4-\frac{169}{48}>0$, $\left(x+\frac{13}{24}\right)^2>\frac{361}{576}$,

$\left|x+\frac{13}{24}\right|>\frac{19}{24}$, $\left[\begin{array}{l}x>0,25\\ x<-1\frac{1}{3}\end{array}\right.$

1.13.

а) $-a^2-a+2>0,\ 2-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0,\ \left(a+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{9}{4},\ \left|a+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2},$

$-2<a<1$

б) $-b^2+3b+4>0,\ \ 4-\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}>0,\ \left(b-\frac{3}{2}\right)^2<\frac{25}{4},\ \left|b-\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2},$

$-1<b<4$

в) $14-2c^2-3c>0.\ \ 14-2\left(c+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}>0,\ \left(c+\frac{3}{4}\right)^2<\frac{121}{16},\ \left|c+\frac{3}{4}\right|<\frac{11}{4},$

$-3{,}5<c<2$

г) $-3y^2+10y-3>0,\ \frac{25}{3}-3\left(y-\frac{5}{3}\right)^2-3>0,\ \left(y-\frac{5}{3}\right)^2<\frac{16}{9},\ \left|y-\frac{5}{3}\right|<\frac{4}{3},$

$\frac{1}{3}<y<3$

1.14.

а) $(3-x)(x+7)\ge 0$

$-7\le x\le 3$

б) $(y-4)(3y+5)>0$

$$\left[\begin{array}{l} y>4 \\ y<-\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

в) $(t+4)(9+t)\ge 0$

$$\left[\begin{array}{l} t\ge -4 \\ t\le -9 \end{array}\right.$$

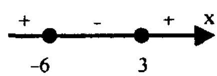
г) $(2z-1)(-z-3)>0$

$-3<z<0{,}5$

1.15.

Квадратное уравнение имеет 2 корня, при $D>0$, 1 корень при $D=0$ и не имеет корней при $D<0$.

$\frac{D}{4}=p^2+(p-6)\cdot 3=p^2+3p-18$



а) $p^2+3p-18>0$

по теореме Виета: $p_1=3$, $p_2=-6$, $p>3$, $p<-6$,

б) $p=3$, $p=-6$,

в) $-6<p<3$.

г) $3x^2-2px-p+6=0$

$$3\left(x-\frac{p}{3}\right)^2=\frac{p^2}{3}+p-6\Rightarrow p^2+3p-18\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le -6 \end{array}\right.$$

1.16.

а) $\left.\begin{array}{l} x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \\ x^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right. \end{array}\right| \Rightarrow$ неравенства не равносильны

б) $\left.\begin{array}{l} 2x+1\le -5 \Leftrightarrow x\le -3 \\ x^2+8x+15\le 0 \Leftrightarrow -5\le x\le -3 \end{array}\right| \Rightarrow$ неравенства не равносильны

в) $\left.\begin{array}{l} x\le 3 \\ x^2-3x\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 3 \end{array}\right| \Rightarrow$ неравенства не равносильны

г) $\left.\begin{array}{l} 3x-2>10 \Leftrightarrow 3x>12 \Leftrightarrow x>4 \\ x^2-14x+40<0 \Leftrightarrow 4<x<10 \end{array}\right| \Rightarrow$ неравенства не равносильны.

1.17.

а) $|x|<5$, $-5<x<5$

б) $|x-2|\le 3$, $-1\le x\le 5$

в) $|7x|\le 21$, $-3\le x\le 3$

г) $|x+3|<4$, $-7<x<1$

1.18.

а) $|4x|\ge 6$, $\left[\begin{array}{l} x\ge 1{,}5 \\ x\le -1{,}5 \end{array}\right.$

б) $|x-1|>8$, $\left[\begin{array}{l} x>9 \\ x<-7 \end{array}\right.$

в) $\left|\frac{x}{6}\right|>3$, $\left[\begin{array}{l} x>18 \\ x<-18 \end{array}\right.$

г) $|x+4|\ge 5$, $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -9 \end{array}\right.$

1.19.

а) $|1-x|>2$, $\left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$

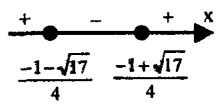
б) $|-2-x|\le 4$, $|x+2|\le 4$, $-6\le x\le 2$

в) $|3-x|\ge 3$, $\left[\begin{array}{l} x\ge 6 \\ x\le 0 \end{array}\right.$

г) $|-5-x|<7$, $|x+5|<7$, $-12<x<2$

1.20.

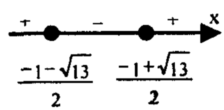
а) $2x^2+x<2$, $2x^2+x-2<0$, $D=1+16=17$



$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$;

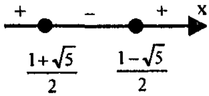
б) $3-x^2\le x$, $x^2+x-3\ge 0$, $D=1+12=13$



$x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$x\ge\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x\le\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, в) $x^2-4x+2\geq 0$, $x^2-4x+4\geq 2$

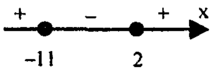
$(x-2)^2\geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq\sqrt{2}, \\ x-2\leq-\sqrt{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{2} \\ x\leq 2-\sqrt{2} \end{array}\right. \quad x\geq 2+\sqrt{2},\ x\leq 2-\sqrt{2}$,



г) $x+1>x^2$, $x^2-x-1<0$ $\quad D=1+4=5$.

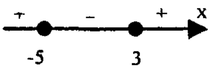
$x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.21.



а) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x^2+x-4}{4}>\dfrac{0{,}5x^2+1}{3}$, $\dfrac{x^2+9x-22}{12}>0$

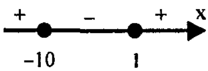
$x^2+9x-22>0$, $x_1=2$, $x_2=-11$, $x>2$, $x<-11$,



б) $\dfrac{x^2-5}{6}+\dfrac{x+1}{3}\geq 2$, $\dfrac{x^2-5+2x+2}{6}\geq 2$,

$x^2+2x-15\geq 0$, $x_1=3$, $x_2=-5$, $x\geq 3$, $x\leq -5$,

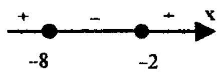
в) $\dfrac{x^2+3x}{8}<\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{3-2x}{2}$,



$\dfrac{x^2+3x-2x+2-12+8x}{8}<0$,

$x^2+9x-10<0$, $x_1=-10$, $x_2=1$, $-10<x<1$,

г) $\dfrac{x^2+1}{15}+3x>\dfrac{7x-3}{3}$



$x^2+1+45x>35x-15$, $x^2+10x+16>0$

по теореме Виета: $x_1=-2$, $x_2=-8$, $x>-2$, $x<-8$

1.22.

а) $|4x+3|>5$, $\left[\begin{array}{l} 4x+3>5, \\ 4x+3<-5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x>2, \\ 4x<-8; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{2}, \\ x<-2; \end{array}\right. \quad x>\frac{1}{2},\ x<-2$,

б) $6-|3x+1|>0$, $|3x+1|<6$,

$\left\{\begin{array}{l} 3x+1<6, \\ 3x+1>-6; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x<5, \\ 3x>-7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<\frac{5}{3}, \\ x>-\frac{7}{3}, \end{array}\right. \quad -\frac{7}{3}<x<\frac{5}{3}$,

в) $|3-2x|\geq 9$, $\left[\begin{array}{l} 3-2x\geq 9, \\ 3-2x\leq -9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\leq -6, \\ 2x\geq 12; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -3, \\ x\geq 6; \end{array}\right. \quad x\leq -3;\ x\geq 6$,

г) $4-|3+2x|\leq 0$, $|3+2x|\geq 4$.

$$\left[\begin{array}{l}3+2x\ge 4,\\ 3+2x\le -4;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x\ge 1,\\ 2x\le -7;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge \frac{1}{2},\\ x\le -\frac{7}{2}.\end{array}\right. \quad x\ge\frac{1}{2},\ \ x\le -\frac{7}{2}.$$

В задачнике приведен неверный ответ.

1.23.

$(p+4)x^2+2px+2=0$

$$p\ne -4 \Rightarrow (p+4)\left(x+\frac{p}{p+4}\right)^2+2-\frac{p^2}{p+4}=0$$

$((p+4)x+p)^2=p^2-2p-8$; $\quad p=-4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

а) $p^2-2p-8=0$ и $p=-4 \Rightarrow p=4, p=-2, p=-4$

б) $p^2-2p-8>0$ и $p\ne -4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p>4\\ p<-2\end{array}\right.$ и $p\ne -4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p<-4\\ -4<p<-2\\ p>4\end{array}\right.$

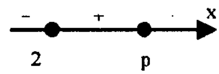
в) $p^2-2p-8\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p\ge 4\\ p\le -2\end{array}\right.$

1.24.

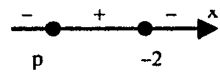
Сначала решим это неравенство.

$(x+2)(p-x)\ge 0$

Пусть $p\ge -2$, $-2\le x\le p$



При $p<-2$, $p\le x\le -2$



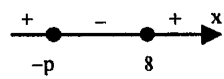
а) $p=1$, $p=-5$; б) $p=2$,

в) $p=-1$, $p=-3$; г) $p=-2$

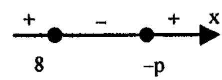
1.25.

$(x-8)(x+p)\le 0$

При $p\ge -8$, $-p\le x\le 8$



При $p<-8$



а) $p=1$; б) $p=2$; в) $p=3$; г) решений нет.

1.26.

$(7-x)(p-x)<0$, $(x-7)(x-p)<0$.

При $p>7$ $\ 7<x<p$;

При $p<7$ $\ p<x<7$;

При $p=7$ решений нет.

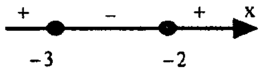
а) $p=11$, $p=3$;

б) $p=8$, $p=6$, $p=7$.

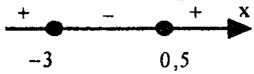
Опечатка в ответе задачника

§ 2. Рациональные неравенства

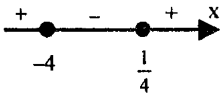
2.1.



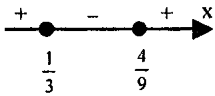
а) $(x+2)(x+3)>0$, $x>-2$, $x<-3$



б) $(x+3)(x-0{,}5)<0$, $-3<x<0{,}5$

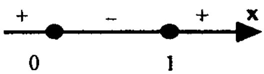


в) $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(x+4)>0$, $x>\dfrac{1}{4}$, $x<-4$

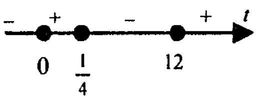


г) $\left(x-\dfrac{4}{9}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)<0$, $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{4}{9}$

2.2.

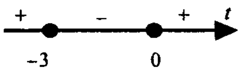


а) $t(t-1)<0$, $0<t<1$

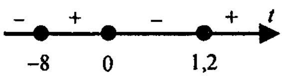


б) $t(t-\dfrac{1}{4})(t-12)\ge 0$

$0\le t\le\dfrac{1}{4}$, $t\ge 12$



в) $t(t+3)>0$, $t>0$, $t<-3$



г) $t(t+8)(t-1{,}2)\le 0$

$t\le -8$, $0\le t\le 1{,}2$

2.3.

а) $x^2-x>0$, $x(x-1)>0$, $x>1$, $x<0$;

б) $2x+x^2\le 0$, $x(x+2)\le 0$, $-2\le x\le 0$,

в) $x^2-3x\ge 0$, $x(x-3)\ge 0$, $x\ge 3$, $x\le 0$,

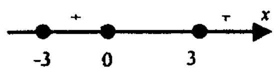
г) $5x+x^2<0$, $x(x+5)<0$, $-5<x<0$

2.4.

а) $x^2-4>0$, $x^2>4\Leftrightarrow |x|>2\Leftrightarrow x>2$, $x<-2$,

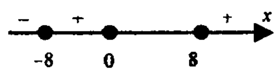
б) $x(x^2-9)\le 0$

$x(x-3)(x+3)\le 0$, $x\le -3$, $0\le x\le 3$



в) $x^2-25\ge 0$, $x^2\ge 25$, $|x|\ge 5$, $x\ge 5$, $x\le -5$;

г) $x(x^2-64)>0$, $x>8$, $-8<x<0$



2.5.

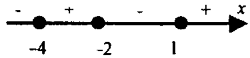
а) $a^2 > 225$, $|a| > 15$, $a > 15$, $a < -15$; б) $\frac{1}{9}z^2 < 0$. Решений нет.

в) $b^2 \le 16$, $|b| \le 4$. $-4 \le b \le 4$; г) $\frac{1}{4}c^2 \ge 1$, $c^2 \ge 4$, $|c| \ge 2$, $c \ge 2$, $c \le -2$.

2.6.

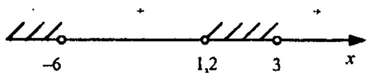
а) $(x+2)(x+4)(x-1) > 0$

$x > 1$; $-4 < x < -2$



б) $(x-3)(5x-6)(x+6) < 0$

$\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ 1{,}2 < x < 3 \end{array}\right.$

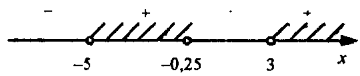


в) $(x-2)(x+3)(x+1) < 0$

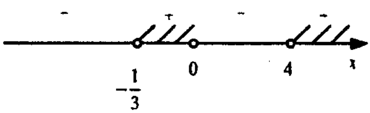
$x < -3$; $-1 < x < 2$

г) $(x+5)(4x+1)(x-3) > 0$

$\left[\begin{array}{l} -5 < x > -0{,}25 \\ x > 3 \end{array}\right.$



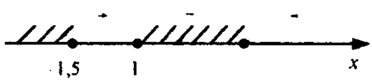
2.7.



а) $(x-4)(3x^2+x) > 0$

$(x-4)\cdot x\cdot(3x+1) > 0$

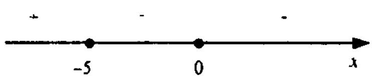
$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3} < x < 0 \\ x > 4 \end{array}\right.$



б) $(2x+3)(x^2-1) \le 0$

$(2x+3)(x-1)(x+1) \le 0$

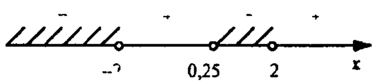
$\left[\begin{array}{l} x \le -1{,}5 \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right.$



в) $(x+5)(2x-x) \ge 0$

$x(x+5) \ge 0$

$\left[\begin{array}{l} x \le -5 \\ x \ge 0 \end{array}\right.$

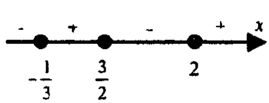


г) $(4x-1)(x^2-4) < 0$

$(4x-1)(x-2)(x+2) < 0$

$\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 0{,}25 < x < 2 \end{array}\right.$

2.8.

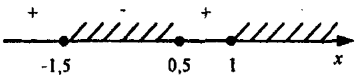


а) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$,

$(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) < 0$; $x < -\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2} < x < 2$.

б) $(2x+3)(1-2x)(x-1) \le 0$

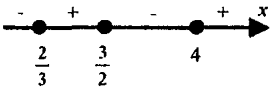
$\left[\begin{array}{l} -1{,}5 \le x \le 0{,}5 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$



в) $(3x-2)(x-4)(3-2x) < 0$,

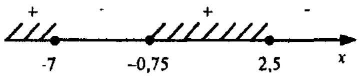
$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0$,

$x > 4,\ \frac{3}{2} > x > \frac{2}{3}$;



г) $(x+7)(4x+3)(5-2x) \ge 0$

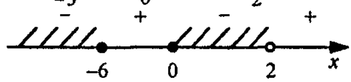
$\left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ -0{,}75 \le x \le 2{,}5 \end{array}\right.$



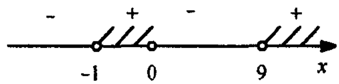
2.9.

а) $\frac{x(x-2)}{x+3} > 0$, $x > 2,\ \ 0 > x > -3$,

б) $\frac{x^2+6x}{x-2} \le 0$, $\frac{x(x+6)}{x-2} \le 0$, $\left[\begin{array}{l} x \le -6 \\ 0 \le x < 2 \end{array}\right.$

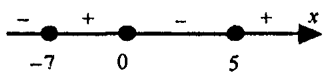


в) $\frac{x(x+1)}{x-9} > 0$, $\left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 9 \end{array}\right.$



г) $\frac{x-5}{x^2+7x} \le 0$; $\frac{x-5}{x(x+7)} \le 0$, $0 < x \le 5$,

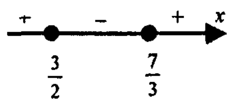
$x < -7$



2.10.

а) $\frac{3x-2}{2x-3} > 3 \Leftrightarrow \frac{3x-2-6x+9}{2x-3} > 0$

$\frac{-3x+7}{2x-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{7}{3}}{x-\frac{3}{2}} < 0$, $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$,

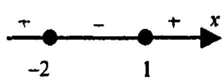


б) $\frac{x+3}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+3-x+2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} < 0$,

$x-2 < 0$, $x < 2$,

в) $\frac{7x-4}{x+2} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{7x-4-x-2}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{6x-6}{x+2} \ge 0$;

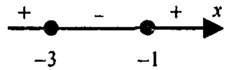
$\frac{x-1}{x+2} \ge 0$, $x \ge 1,\ \ x < -2$



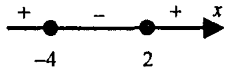
г) $\frac{7x-5}{x+5}<7 \Leftrightarrow \frac{7x-5-7x-35}{x+5}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+5}>0 \Leftrightarrow x>-5$

2.11.

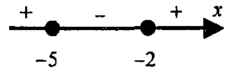
а) $x^2+4x+3\le 0$, по теореме Виета:
$x_1=-1,\ \ x_2=-3,\ -3\le x\le -1$



б) $8-2x\ge x^2,\ \ x^2+2x-8\le 0$,
по теореме Виета:
$x_1=2,\ \ x_2=-4,\ \ -4\le x\le 2$;



в) $-x^2-10\le 7x,\ \ x^2+7x+10\ge 0$,
по теореме Виета:
$x_1=-2,\ \ x_2=-5,\ \ x\ge -2,\ \ x\le -5$;



г) $x^2-6x+5\ge 0$, по теореме Виета:
$x_1=5,\ \ x_2=1,\ \ x\ge 5,\ \ x\le 1$.

2.12.

а) $x^2+6x+9\ge 0,\ \ (x+3)^2\ge 0,\ \ -\infty<x<+\infty$;

б) $-4x^2+20x>25,\ \ 4x^2-20x+25<0,\ (2x-5)^2<0$ — решений нет;

в) $49x^2+14x+1\le 0,\ \ (7x+1)^2\le 0 \Leftrightarrow 7x+1=0,\ \ x=-\frac{1}{7}$;

г) $-x^2+8x\ge 16,\ x^2-8x+16\le 0,\ (x-4)^2\le 0 \Leftrightarrow x-4=0,\ \ x=4$.

2.13.

а) $4x^2+x+1>0,\ \ D=1-16=-15<0$. Решением будут все $-\infty<x<+\infty$.

б) $7x^2+3\le 2x,\ \ 7x^2-2x+3\le 0,\ \frac{D}{4}=1-21=-20<0$. Решений нет.

в) $3x^2+4<x,\ \ 3x^2-x+4<0,\ \ D=1-48=-47<0$. Решений нет.

г) $5x^2+6x+13\ge 0,\ \frac{D}{4}=9-65=-54<0$. Решение – все $-\infty<x<+\infty$.

2.14.

а) $-2x^2+x-3<0,\ 2x^2-x+3>0,\ D=1-24=-23<0$,
$-\infty<x<+\infty$;

б) $-4x^2+x-1\ge 0,\ 4x^2-x+1\le 0,\ D=1-16=-15<0$, Решений нет;

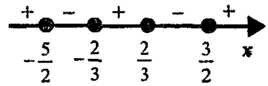
в) $-6x^2+5x-6>0,\ 6x^2-5x+6<0,\ D=25-4\cdot 6\cdot 8<0$, Решений нет;

г) $-3x^2+4x-5\le 0,\ 3x^2-4x+5\ge 0,\ \frac{D}{4}=4-15=-11<0$.

Решения: $-\infty<x<+\infty$.

2.15.

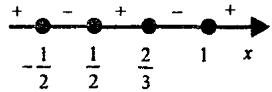
а) $(2-3x)(3x+2)(5+3x)(2x-3)>0$,



$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$,

$\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{3}<x<-\frac{2}{3}$;

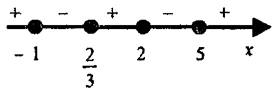
б) $(2x+1)(1-2x)(x-1)(2-3x)>0$,



$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0$,

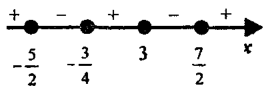
$x<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$, $x>1$;

в) $(3x-2)(5-x)(x+1)(2-x)<0$,



$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-5)(x-1)(x-2)<0$, $2<x<5$; $-1<x<\frac{2}{3}$;

г) $(2x+5)(4x+3)(7-2x)(x-3)<0$,

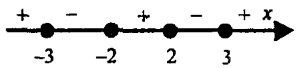


$\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-3)>0$,

$x>\frac{7}{2}$; $-\frac{3}{4}<x<3$; $x<-\frac{5}{2}$

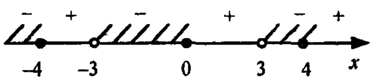
2.16.

а) $\frac{x^2-4}{x^2-9}\geq 0$, $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}\geq 0$



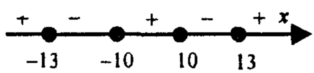
$x>3$, $2\geq x\geq -2$, $x<-3$;

б) $\frac{x(x^2-16)}{x^2-9}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+3)}\leq 0$



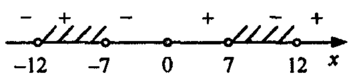
$\left[\begin{array}{l} x\leq -4 \\ -3<x\leq 0 \\ 3<x\leq 4 \end{array}\right.$

в) $\frac{x^2-169}{x^2-100}\leq 0$, $\frac{(x-13)(x+13)}{(x-10)(x+10)}\leq 0$,



$-13\leq x<-10$; $10<x\leq 13$;

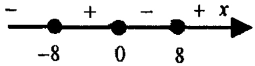
г) $\frac{x^2-49}{x(x^2-144)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-7)(x+7)}{x(x-12)(x+12)}>0$



$\left[\begin{array}{l} -12<x<-7 \\ 0<x<7 \\ x>12 \end{array}\right.$

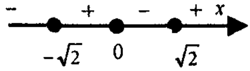
2.17.

а) $x^3-64x>0$, $x(x-8)(x+8)>0$.



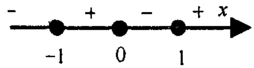
$x>8;\quad 0>x>-8$;

б) $x^3\le 2x \Leftrightarrow x^3-2x\le 0 \Leftrightarrow x(x^2-2)\le 0$



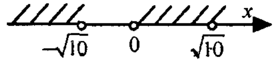
$x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\le 0$, $x\le-\sqrt{2};\quad 0\le x\le\sqrt{2}$;

в) $x^3\ge x \Leftrightarrow x(x^2-1)\ge 0$, $x(x-1)(x+1)\ge 0$,



$x\ge 1;\ 0\ge x\ge -1$;

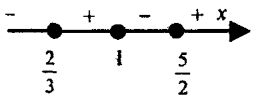
г) $x^3-10x<0,\ x\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)<0$,



$$\left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{10} \\ 0<x<\sqrt{10} \end{array}\right.$$

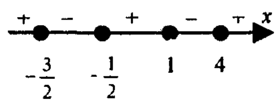
2.18.

а) $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x}>0$, $\dfrac{(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x-\frac{5}{2}}<0$



$x<\dfrac{2}{3};\ \ 1<x<\dfrac{5}{2}$.

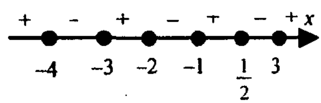
б) $\dfrac{(2x+3)(2x+1)}{(x-1)(x-4)}\ge 0$, $\dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x-4)}\ge 0$.



$x>4;\ \ 1>x\ge-\dfrac{1}{2};\ \ x\le-\dfrac{3}{2}$;

в) $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}\le 0$

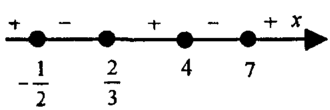
$\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4)(x-3)}\ge 0$



$x>3;\ \ \dfrac{1}{2}>x\ge-1,\ \ -3\le x\le-2;\ \ x<-4$

г) $\dfrac{7-x}{(3x-2)(2x+1)(x-4)}<0$.

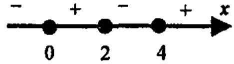
$\dfrac{x-7}{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)}>0$,



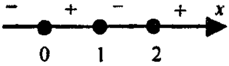
$x>7;\ \ 4>x>\dfrac{2}{3};\ \ x<-\dfrac{1}{2}$

2.19.

а) $x+\dfrac{8}{x}\le 6$, $\dfrac{x^2-6x+8}{x}\le 0$, $\dfrac{(x-4)(x-2)}{x}\le 0$,

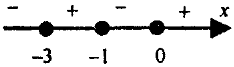


$4\ge x\ge 2$; $x<0$;



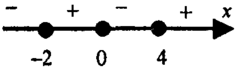
б) $x+\dfrac{2}{x}\ge 3$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$, $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}\ge 0$,

$x\ge 2$, $0<x\le 1$;



в) $x+\dfrac{3}{x}\le -4$, $\dfrac{x^2+4x+3}{x}\le 0$, $\dfrac{(x+3)(x+1)}{x}\le 0$,

$-1\le x<0$, $x\le -3$;



г) $x-\dfrac{8}{x}>2$, $\dfrac{x^2-2x-8}{x}>0$,

$\dfrac{(x-4)(x+2)}{x}>0$, $x>4$, $-2<x<0$

2.20.

а) $(x-1)(x^2-3x+8)<0$. Рассмотрим x^2-3x+8

$D=9-32=-23<0$, следовательно $x^2-3x+8>0$ при любых x

Разделим обе части на x^2-3x+8, $x-1<0\Leftrightarrow x<1$;

б) $(x+5)(x^2+x+6)\ge 0$. Рассмотрим x^2+x+6,

$D=1-24=-23<0$, следовательно $x^2+x+6>0$ при любых x

Разделим обе части на x^2+x+6, $x+5\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

в) $(x-7)(-x^2-3x-18)>0$, $(x-7)(x^2+3x+18)<0$,

$x^2+3x+18>0$ при любых x (т.к. $D=9-72=-63<0$).

Разделим обе части на этот множитель; $x-7<0\Leftrightarrow x<7$

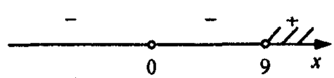
г) $(x+1{,}2)(x^2+5x+14)\le 0$,

$x^2+5x+14>0$ при любых x (т.к. $D=25-56=-31<0$).

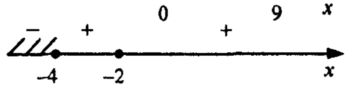
Разделим обе части на этот множитель; $x+1{,}2\le 0\Leftrightarrow x\le -1{,}2$.

2.21.

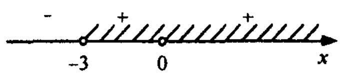
а) $x^2(x-9)>0$, $x>9$



б) $(x+2)^2(x+4)\le 0$, $\left[\begin{array}{l}x\le -4\\ x=-2\end{array}\right.$

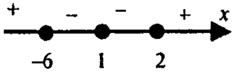


в) $x^2(x+3)>0$, $\left[\begin{array}{l}-3<x<0\\ x>0\end{array}\right.$



г) $(x-1)^2(x-5)\le 0$, $x\le 5$

2.22.

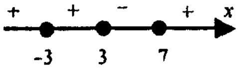


а) $(x-1)^2(x^2+4x-12)<0$,

$(x-1)^2(x-2)(x+6)<0$, $-6<x<1$; $1<x<2$,

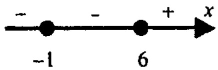
б) $(x+2)(x^2-6x-16)>0$,

$(x+2)(x-8)(x+2)>0$, $(x+2)^2(x-8)>0$, $x>8$;



в) $(x+3)^2(x^2-10x+21)\ge 0$.

$(x+3)^2(x-7)(x-3)\ge 0$, $x\le 3$; $x\ge 7$,



г) $(x-1)(x^2-7x+6)\ge 0$, $(x-1)(x-6)(x-1)\ge 0$,

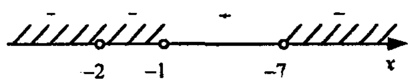
$(x-1)^2(x-6)\ge 0$, $x=1$; $x\ge 6$;

2.23.

а) $(x^2+4x+4)(6x-x^2+7)<0$

$(x+2)^2(7-x)(x+1)<0$

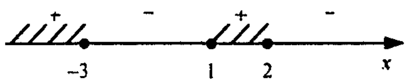
$$\left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\ x>7\\ x<-2\end{array}\right.$$



б) $(x+3)^3(3x-2-x^2)\ge 0$

$(x+3)^3(x-2)(1-x)\ge 0$

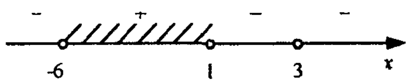
$$\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ 1\le x\le -2\end{array}\right.$$



в) $(x^2-6x+9)(6-5x-x^2)>0$

$(x-3)^2(x+6)(1-x)>0$

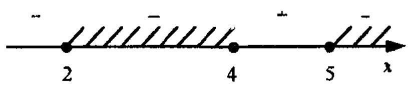
$-6<x<1$



г) $(x-4)^3(7x-x^2-10)\le 0$

$(x-4)^3(2-x)(x-5)\le 0$

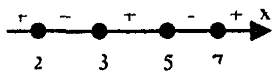
$$\left[\begin{array}{l}2\le x\le 4\\ x\ge 5\end{array}\right.$$



2.24.

а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0$, $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-7)(x-5)}>0$.

$x>7$; $3<x<5$; $x<2$,

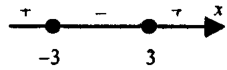


б) $\dfrac{x^2-4x+12}{9-x^2}<0$

Числитель $x^2-4x+12>0$ при любых x (т.к $\dfrac{D}{4}=4-12= =-8<0$)

Разделим на него обе части.

$$\frac{1}{9-x^2}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+3)(x-3)}>0,\ x>3;\ \ x<-3$$

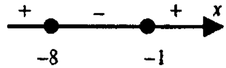


в) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9x+8}<0$, $x^2-2x+3>0$ при любых x

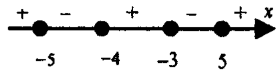
(т.к $\dfrac{D}{4}=1-3=-2<0$).

Разделим обе части на это положительное выражение

$$\frac{1}{x^2+x+8}<0,\ \frac{1}{(x+1)(x+8)}<0,\ -8<x<-1;$$



г) $\dfrac{x^2+7x+12}{25-x^2}>0$, $\dfrac{(x+3)(x+4)}{(5-x)(x+5)}>0$,



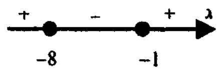
$$\frac{(x+3)(x+4)}{(x-5)(x+5)}<0,\ -5<x<-4,\ \ -3<x<5$$

2.25.

а) $\dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8}>2$, $\dfrac{2x^2+18x-4-2x^2-18x-16}{x^2+9x+8}>0$,

$$\frac{-20}{x^2+9x+8}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+8)}<0,$$

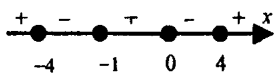
$-8<x<-1$,



б) $\dfrac{2x^2+x-16}{x^2+x}\le 1$, $\dfrac{2x^2+x-16-x^2-x}{x^2+x}\le 0$.

$$\frac{x^2-16}{x(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x(x+1)}\le 0,$$

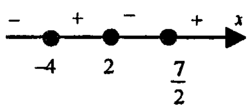
$0<x\le 4$, $-4\le x<-1$;

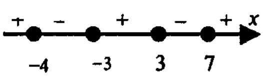


в) $\dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\ge -1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2+x^2+2x-8}{x^2+2x-8}\ge 0$,

$$\frac{2x-7}{x^2+2x-8}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{7}{2}}{(x-2)(x+4)}\ge 0,\ x\ge\frac{7}{2},$$

$-4<x<2$,





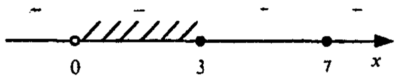
г) $\dfrac{x^2+3x+10}{x^2-9}<2$, $\dfrac{x^2+3x+10-2x^2+18}{x^2-9}<0$,

$$\frac{-x^2+3x+28}{x^2-9}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-28}{(x-3)(x+3)}>0,$$

$$\frac{(x-7)(x+4)}{(x-3)(x+3)}>0,\ x>7,\ \ -3<x<3,\ \ x<-4$$

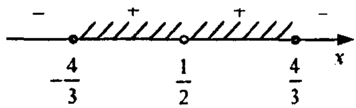
2.26.

а) $\dfrac{x^2-14x+49}{5x^2-15x}\le 0$



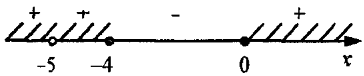
$\dfrac{(x-7)^2}{5x(x-3)}\le 0$, $\left[\begin{array}{l}0<x<3\\ x=7\end{array}\right.$

б) $\dfrac{16-9x^2}{4x^2-4x+1}\ge 0$



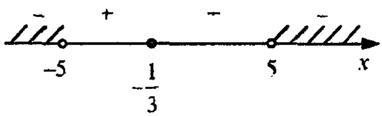
$\dfrac{(4-3x)(4+3x)}{(2x-1)^2}\ge 0$, $\left[\begin{array}{l}-\frac{4}{3}\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}\end{array}\right.$

в) $\dfrac{3x^2+12x}{x^2+10x+25}\ge 0$



$\dfrac{3x(x+4)}{(x+5)^2}\ge 0$, $\left[\begin{array}{l}x<-5\\ -5<x\le -4\\ x\ge 0\end{array}\right.$

г) $\dfrac{9x^2+6x+1}{25-x^2}\le 0$

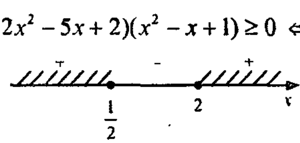


$\dfrac{(3x+1)^2}{(5-x)(5+x)}\le 0$, $\left[\begin{array}{l}x<-5\\ x=-\frac{1}{3}\\ x>5\end{array}\right.$

2.27.

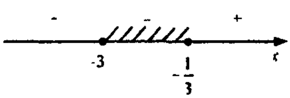
а) $(x^2-x+2)(x-4)<0 \Leftrightarrow x<4$

б) $(2x^2-5x+2)(x^2-x+1)\ge 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1)\ge 0$, $\left[\begin{array}{l}x\le\frac{1}{2}\\ x\ge 2\end{array}\right.$



в) $(x+8)(x^2+2x+5)>0 \Leftrightarrow x>-8$

г) $(3x^2+10x+3)(x^2+3x+4)\le 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x+3)\le 0$, $-3\le x\le -\frac{1}{3}$



2.28.

а) $\dfrac{x^2+x+1}{x+7}<0 \Leftrightarrow x<-7$

б) $\dfrac{9-4x^2}{2x^2+x+1}\le 0 \Leftrightarrow 9-4x^2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1,5 \\ x\ge 1,5 \end{array}\right.$

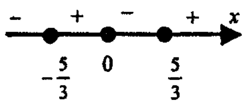
в) $\dfrac{6-x}{x^2+2x+5}\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\le 6$

г) $\dfrac{3x^2-2x+1}{5x^2-x}\le 0 \Leftrightarrow 5x^2-x<0 \Leftrightarrow 0<x<0,2$

2.29.

а) $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2+x+1)}{(3x-5)(3x+5)}\ge 0$,

$x^2+x+1>0$ (т.к. $D=1-4=-3<0$, следовательно можно разделить обе части на (x^2+x+1).



$\dfrac{x}{(3x-5)(3x+5)}\ge 0$, $\dfrac{x}{(x-\frac{3}{5})(x+\frac{3}{5})}\ge 0$

$-\dfrac{5}{3}<x\le 0,\ \ x>\dfrac{5}{3}$;

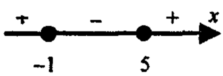
б) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{x+8}\le 0$, $\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x+8}\le 0$

Разделим обе части на строго положительное выражение x^2+1

$\dfrac{x-1}{x+8}\le 0 \Leftrightarrow -8<x\le 1$

в) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$

Числитель всегда строго положителен. Разделим на него обе части



$\dfrac{1}{x^2-4x-5}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-5)(x+1)}<0$, $-1<x<5$;

г) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x+1}<0$.

Знаменатель строго положителен ($D<0$).

Умножим обе части неравенства на него.

$x^4-2x^2-8<0$, $y=x^2$, $y^2-2y-8<0$, $y_1=4$, $y_2=-2$,

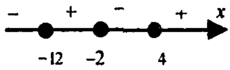
$(y-4)(y+2)<0$.

Вернемся к x:

$(x^2-4)(x^2+2)<0$, $x^2-4<0$, $x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

2.30.

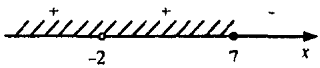
Выражение имеет смысл тогда, когда то, что стоит под корнем неотрицательно.



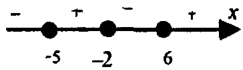
а) $\dfrac{2x+4}{x^2+8x-48}\geq 0$, $\dfrac{(x+2)}{(x-4)(x+12)}\geq 0$, $x>4$,

$-12<x\leq -2$,

б) $\dfrac{14-x^2+5x}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(7-x)}{x+2}\geq 0$, $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -2<x\leq 7 \end{array}\right.$



в) $\dfrac{x^2+7x+10}{6-x}\geq 0$, $\dfrac{(x+2)(x+5)}{x-6}\leq 0$.



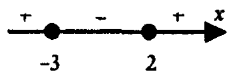
$-2\leq x<6$, $x\leq -5$

г) $\dfrac{x-3}{x^2+5x-24}\geq 0$, $\dfrac{x-3}{(x-3)(x+8)}\geq 0$, $x\neq 3$,

$\dfrac{1}{x+8}\geq 0$, $x\neq 3$, $x+8>0$, $x\neq 3$, $x>-8$, $x\neq 3$, то есть $-8<x<3$, $x>3$;

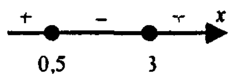
2.31.

а) $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}\geq 0$, $\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)}\geq 0$, $x\neq 3$,



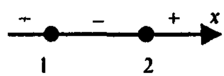
$x>2$, $x\leq -3$, $x\neq 3$, то есть $x\leq -3$, $2<x<3$, $x>3$,

б) $\dfrac{2x^2-5x+2}{5x-6-x^2}\geq 0$, $\dfrac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-3)(x-2)}\leq 0$,



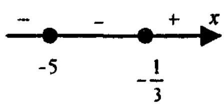
$x\neq 2$, $\dfrac{1}{2}\leq x<3$, $x\neq 2$, $\dfrac{1}{2}\leq x<2$, $2<x<3$;

в) $\dfrac{2-x-x^2}{x^2-4}\geq 0$



$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\leq 0$, $x\neq -2$, $2>x\geq 1$,

г) $\dfrac{3x^2+10x+3}{x^2+8x+15}\geq 0$, $\dfrac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)}{(x+3)(x+5)}\geq 0$,

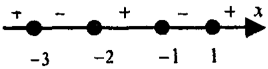


$x\neq -3$, $x\geq -\dfrac{1}{3}$, $x<-5$

2.32.

а) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$, $\dfrac{(x+3)(x+2)+2(x+1)(x+2)-3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$

$$\frac{x^2+5x+6+2x^2+6x+4-3x^2-12x-9}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0,$$

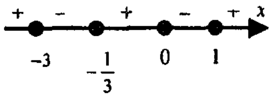


$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0.$$

$1>x>-1,\ \ -2>x>-3$.

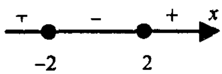
б) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>-3$,

$$\frac{2x+2-x+1+3(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}>0.$$



$$\frac{x+3+3x^2-3}{(x-1)(x+1)}>0,\quad \frac{x\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-1)(x+1)}>0,$$

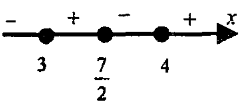
$x<-1,\ \ -\dfrac{1}{3}<x<0,\ \ x>1$;



в) $\dfrac{x+1}{x-2}>-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$,

$$\frac{2x+2x+6+x-2}{2(x-2)}>0,\quad \frac{3(x+2)}{2(x-2)}>0,\quad x>2,\quad x<-2$$

г) $\dfrac{x-4}{x-3}>\dfrac{x-3}{x-4}$, $\dfrac{(x-4)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-4)}>0$,



$$\frac{-2x+7}{(x-3)(x-4)}>0,\quad \frac{\left(x-\frac{7}{2}\right)}{(x-3)(x-4)}<0,$$

$x<3,\ \ \dfrac{7}{2}<x<4$

2.33.

а) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-12)\le 0$,

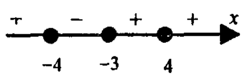
(x^2+4) и (x^2+x+1) строго положительны.

Разделим обе части на них.

$(16-x^2)(x^2-x-12)\le 0$,

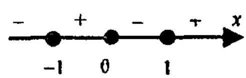
$(4-x)(x+4)(x-4)(x+3)\le 0$,

$(x-4)^2(x-4)(x+3)\ge 0$, $x\ge -3,\ \ x\le -4$

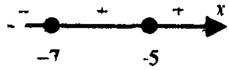


б) $\dfrac{x-1+2x+2-1+2x}{x^2-1}\le 0$,

$\dfrac{5x}{(x-1)(x+1)}\le 0$, $x<-1,\ \ 0\le x<1$;



в) $(x^2+12x+35)(2x+10)(x^2+14x+49)>0$,

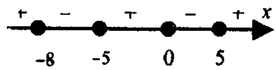


$(x+7)(x+5)(x+5)(x+7)^2>0$,

$(x+7)^3(x+5)^2>0$, $-7<x<-5$, $-5<x$.

г) $4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$, $\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{3x}{x^2-25}<0$,

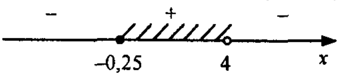
$\dfrac{x^2+5x+3x}{x^2-25}<0$, $\dfrac{x(x+8)}{(x-5)(x+5)}<0$.



$0<x<5$, $-8<x<-5$

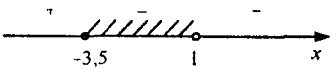
2.34.

а) $-4x^2+15x+4>0 \Leftrightarrow (4x+1)(4-x)>0$



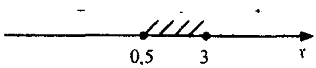
$\Rightarrow$ $x=1$; $x=2$; $x=3$, $x=0$

б) $\dfrac{2x+7}{x-1}\le 0$



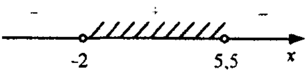
$\Rightarrow$ $x=-3$; $x=-2$, $x=-1$, $x=0$

в) $2x^2-7x+3\le 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x-1)\le 0$



$\Rightarrow$ $x=1$, $x=2$, $x=3$

г) $\dfrac{x+2}{22-4x}>0$

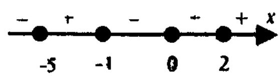


$\Rightarrow x=-1$, $x=0$; $x=1$, $x=2$; $x=3$, $x=4$, $x=5$

2.35.

$f(x)=x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)$.

а) $x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)>0$,



$-5<x<-1$; $0<x<2$, $x>2$;

б) $x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)<0$, $x<-5$, $-1<x<0$,

в) $x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)\ge 0$, $-5\le x\le -1$, $x\ge 0$;

г) $x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)\le 0$, $x\le -5$, $-1\le x\le 0$, $x=2$

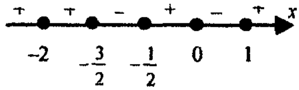
2.36.

$f(x)=\dfrac{(x+2)^2(x-1)(2x+3)}{x(2x+1)}=\dfrac{2(x+2)^2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2x\left(x+\frac{1}{2}\right)}=$

$$= \frac{(x+2)^2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

а) $f(x) > 0$,

$x > 1,\ -\frac{1}{2} < x < 0,\ -2 < x < -\frac{3}{2},\ x < -2$.

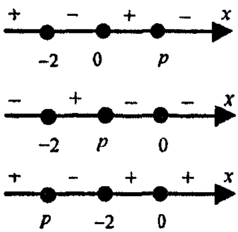


б) $f(x) < 0,\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2},\ 0 < x < 1$,

в) $f(x) \geq 0,\ x \geq 1,\ 0 > x > -\frac{1}{2},\ x \leq -\frac{3}{2}$

г) $f(x) \leq 0,\ 0 < x \leq 1,\ -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2},\ x = -2$

2.37.



$x^2(x+2)(p-x) \geq 0$, $x^2(x+2)(x-p) \leq 0$

При $p \geq 0$: $-2 \leq x \leq p$;

При p $-2 < p < 0$, $x \geq p$, $x \leq -2$,

При $p \leq -2$, $p \leq x \leq -2$, $x = 0$;

а) $p = -2$, б) $p = 1$, $p = -4$,

в) $p = 0$, $p = -3$, $p = -1$, г) $p = 2$

§ 3. Множества и операции над ними

3.1.

а) 6, 7, 8, 9; б) – 6, – 5, – 4, – 3, – 2, – 1

в) в, э, ю, я; г) 1814 – 1841, поэтому пустое множество.

3.2.

а) Множество неотрицательных четных целых чисел меньших, либо равных 8.

б) 4 члена арифметической прогрессии с 1-м членом $a_1 = 2$ и $d = 2$

в) положительные целые числа, кратные 3, с тройки до 30 включительно.

г) английский алфавит.

3.3.

а) $\left(-\infty; -\frac{13}{3}\right]$

б) $\frac{5-x-1-x}{1+x} > 0$; $\frac{4-2x}{1+x} > 0$; $\frac{2(x-2)}{1+x} < 0$,

$(-1; 2)$.

в) $x^2 < 1$; $-1 < x < 1 \Rightarrow (-1; 1)$

г) $y = x^2 - 6x + 10 = 0$

$D = 36 - 40 = -4 < 0 \Rightarrow$ не имеет действительных корней. Ветви параболы направлены вверх, поэтому $x^2 - 6x + 10 > 0$ для всех x. $x^2 + 1 > 0$ для всех $x \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-4} \le 0$, $x \in [-2; 4)$

3.4.

а) $-5 \in \mathbb{N}$ – неверно; б) $-5 \in \mathbb{Z}$ – верно; в) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; г) $2,(45) \in \mathbb{Q}$

3.5.

а) $x^2 \ge 0$, поэтому наше множество имеет вид $0 \le u^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le x \le 0 \Rightarrow x = 0$.

б) $x^2 + 18x + 81 \le 0$; $0 \le (x+9)^2 \le 0 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

в) $\begin{cases} 41\sqrt{x} \ge 0 \\ 41\sqrt{x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \left\{x \middle| 41\sqrt{x} \le 0\right\} = \{0\}$

г) $\left.\begin{matrix} x^2 + 16 \le 8x \Leftrightarrow (x-4)^2 \le 0 \\ x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \left\{x \middle| x^2 + 16 \le 8x\right\} = \{4\}$

3.6.

а) $-1 < 0,7 < 1 \Rightarrow$ верно.

б) $(x+8)^2 \le 0 \Rightarrow x = -8$; $-7 = -8 \Rightarrow$ неверно.

в) $x \in (-1; 2)$, $-0,999 \in (-1; 2) \Rightarrow$ верно.

г) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{4 - x} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x-5)}{4-x} \le 0 \Rightarrow x \in [1; 4) \cup (5; +\infty)$

$1,001 \in [1; 4) \cup [5; +\infty) \Rightarrow$ верно

3.7.

а) $x(x^2 + 19) + 6 = (2x + 3)(3x + 2) - x^2$

$x(x^2 + 19) + \cancel{6} = 2x(2x + 2) + 9x + \cancel{6} - x^2$; $x(x^2 + 19 - 6x - 4 - 9 + x) = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$; $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$; $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x(x-3)(x-2) = 0$, $x_3 = 0$.

б) М: 0, 2, 3 в) 023; 320; 203; 203; 230; 032 г) 6.

3.8.

$\left\{-8, 1; \sqrt{2}; \dfrac{17}{7}\right\}$

а) $\left\{-8, 1; \sqrt{2}\right\}$; $\left\{-8, 1; \dfrac{17}{7}\right\}$; б) $\left\{\sqrt{2}; \dfrac{17}{7}\right\}$

в) $\left\{-8, 1; \dfrac{17}{7}\right\}$; г) $\left\{-8, 1; \sqrt{2}\right\}$; $\left\{\sqrt{2}; \dfrac{17}{7}\right\}$.

3.9.

а) {к}, {л}, {ω}

б) {к л} {к; ω} {л; ω}

в) {к л} {к ω} {л ω} {к л ω} {ω л к}

{л к} {ω к} {ω л} {ω к л} {л к ω}

{л ω к} {к ω л}

г) {к ω} {л ω}

{ω к} {ω л} {ω к л} {л к ω}

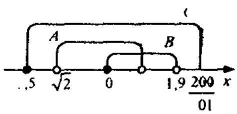
{л ω к} {к ω л}

3.10.

а) неверно, т.к например $1 \notin B$. б) неверно, т.к 40 не $\in C$ но $\in B$

в) верно г) верно.

3.11.



а) $1,5 \vee \sqrt{2}$

$2.25 > 2 \Rightarrow -1.5 < -\sqrt{2}$, $1.9 \vee \frac{200}{101}$; $\frac{190}{100} \vee \frac{200}{101}$

$190 \cdot (100+1) \vee 20000$, $19000+190 \vee 20000$, $19190 < 20000$.

а) $A \subset B$ – неверно; б) $B \subset C$ – верно;

в) $C \subset A$ неверно; г) $A \subset C$ – верно

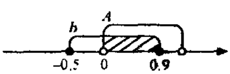
3.12.

$A \cap B$

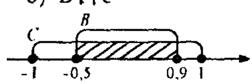
а) 10, 20, 30 40; б) 3, 9, 15, 21 прибавляет 6; в) −10; 0; г) 2.

3.13.

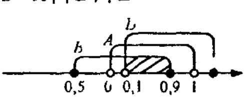
а) $A \cap B$



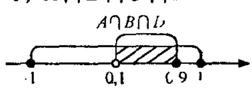
б) $B \cap C$



в) $A \cap B \cap C$

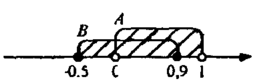


г) $A \cap B \cap C \cap D$

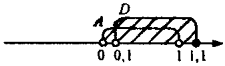


3.14.

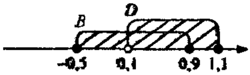
а) $A \cup B$



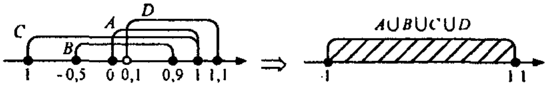
б) $A \bigcup D$



в) $B \bigcup D$



г) $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$



3.15.

а) $(A \bigcap B) \bigcap C = \{c,d\} \bigcap C = \{c\}$

б) $(A \bigcap B) \bigcup C = \{c,d\} \bigcup C = \{c,d\} \bigcup \{c,e,g,k\} = \{c,d,e,g,k\}$

в) $(A \bigcup B) \bigcap C = \{a,b,c,d,e,f\} \bigcap \{c,e,g,k\} = \{c,d,e,g,k\}$

г) $(A \bigcup B) \bigcup C = \{a,b,c,d,e,f\} \bigcup \{c,e,g,k\} = \{a,b,c,d,e,f,g,k\}$

3.16.

а) $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $\sqrt[3]{1000} = 10$. Поэтому, множество этих чисел.
$M = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
б) $M = \{729, 512, 343, 216, 125\}$
в) $A = \{2, 3, 5, 6, 9\}$;
г) $\{1, 2, 4\}$, существует 3! перестановок, т.е. 6.

3.17.

а) $\left\{x/3(x+1) - x^2 > 5\right\}$

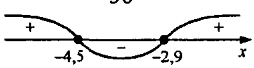
$x^2 + 3x + 3 \quad 5 > 0$; $-x^2 + 3x - 2 > 0$; $x^2 - 3x + 2 < 0$

$D = 9 - 8 = 1$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $x_1 = 2, x_2 = 1$

б) $\left\{x/18\left(x^2+1\right) \le -85x\right\}$; $18x^2 + 85x + 18 \le 0$

$D = 85^2 - 4 \cdot 18^2 = (85 - 36)(85 + 36) = 49 + 121$

$x_{1,2} = \dfrac{-85 \pm 7 \cdot 11}{36}$; $x_1 = -\dfrac{2}{9}$; $x_2 = -4,5$



$x \in \left[-4,5; -\dfrac{2}{9}\right]$.

3.18.

а) Если на первом месте стоит 2, то остался выбор из 3-х элементов на 1 место, т.е. $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$.

б) при 1 из а) получим 3 комбинации, при 2 вместо Δ 3 комбинации, итого 6.

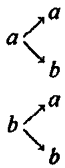
в) на * ставим 0, на Δ ставим 0, 1, 2, далее на * ставим 1, на Δ меняем 0, 1, 2, аналогично с 2. Т.е. всего $3 + 3 + 3 = 9$ комбинаций.

г) верные утверждения только с повторяющимися цифрами, поэтому, т.к. цифра на одном месте, соответствует 3 комбинации, то верных будет $\frac{1}{3}$ утверждений

3.19.

а) 2, т.к. на место * и Δ ставим a и меняем $\in$ или $\notin$

б) 2 места и 2 элемента

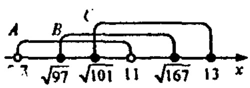


Из схемы видно, что будет 4 варианта

в) 4 для $\in$ и 4 для знака $\notin$. всего 8.

г) с a на первом месте 4 утверждения, 2 с $\in$ и 2 с $\notin$. Из каждой пары будет по 1 верному $\Rightarrow$ 2 верны, или четвертая часть всех утверждений.

3.20.



а) $(A \cap B) \cap C = \left(\sqrt{101}; 11\right)$; б) $(A \cap B) \cup C = \left[\sqrt{97}; 13\right]$

в) $(A \cup B) \cap C = \left(\sqrt{101}; \sqrt{167}\right]$, г) $(A \cup B) \cup C = (7,7; 13]$.

3.21.

$|A| = 99$, $|B| = 199$, $|A \cap B| = 73$

а) $|A \setminus B|$ — ?

$$\left.\begin{aligned} A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ (A \setminus B) \cap (A \cap B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow |A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 26$$

б) $|B \setminus A|$ — ?

$$\left.\begin{aligned} B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing \end{aligned}\right\} \Rightarrow |B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 126$$

в) $|A \cup B|$ — ?

$A \cap B \neq 0 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 25$

3.22.

A — ученики, выполнившие норматив по бегу

B — ученики, выполнившие норматив по прыжкам в высоту

$|A \cup B| = 25,\ |A \cap B| = 7,\ |A \setminus B| = 11$

а) $|A|$ — ?

$$\left.\begin{array}{r} A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ (A \setminus B) \cap (A \cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = |A \setminus B| + |A \cap B| = 18$$

б) $|B|$ — ?

$$B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \Rightarrow |B| = |A \cup B| - |A \setminus B| = 14$$

в) $|B \setminus A|$ — ?

$$B \setminus A = (A \cup B) \setminus A \Rightarrow |B \setminus A| = |A \cup B| - |A| = 7$$

3.23.

$|S_1| = 900$ м^2, $|S_2| = 700$ м^2, $|S_1 \cup S_2| = 1500$ м^2

а) $|S_1 \cap S_2|$ — ?

$$|S_1 \cap S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2| \Rightarrow |S_1 \cap S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cup S_2| = 100 \text{ м}^2$$

б) $|S_1 \setminus S_2|$ — ?

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_1 \cap S_2) \\ (S_1 \setminus S_2) \cap (S_1 \cap S_2) = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow |S_1 \setminus S_2| = |S_1| - |S_1 \cap S_2| = 800 \text{ м}^2$$

в) $|S_2 \setminus S_1|$ — ?

$$\left.\begin{array}{l} S_2 = (S_2 \setminus S_1) \cup (S_1 \cap S_2) \\ (S_2 \setminus S_1) \cap (S_1 \cap S_2) = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow |S_2 \setminus S_1| = |S_2| - |S_1 \cap S_2| = 600 \text{ м}^2$$

г) $|S_1 \Delta S_2|$ — ?

$$S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1) \Rightarrow |S_1 \Delta S_2| =$$
$$= |S_1 \setminus S_2| + |S_2 \setminus S_1| = 1400 \text{ м}^2$$

3.24.

$|A| = 25$, $|B| = 22$, $|C| = 22$, $|A \cup B| = 33$, $|B \cup C| = 31$, $|A \cup C| = 32$, $|A \cap B \cap C| = 10$

D — все ученики $\Rightarrow$ $|D| = 40$

а) $|(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))|$ — ?

$$|A \setminus (B \cup C)| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14$$

$$|A \cap C| = |A| + |C| - |A \cup C| = 15$$

$$|B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C| = 13 \Rightarrow |A \setminus (B \cup C)| = 6$$

$$|B \setminus (A \cup C)| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 5$$

$$|C \setminus (A \cup B)| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 4$$

$\Rightarrow \left|(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))\right| =$

$= |A \setminus (B \cup C)| + |B \setminus (A \cup C)| + |C \setminus (A \cup B)| = 15$

б) $|(A \cup B \cup B \cup C \cup A \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)|$ — ?

$|A \cap B \cup B \cap C \cup A \cap C| = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 2|A \cap B \cap C| = 22$

$|(A \cap B \cup B \cap C \cup A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)| =$

$= |A \cap B \cup B \cap C \cup A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 12$

в) $|D \setminus (A \cup B \cup C)|$ — ?

$A \cup B \cup C = M_1 \cup M_2 \cup M_3, \; M_1 \cap M_2 = \varnothing, \; M_1 \cap M_3 = \varnothing, \; M_2 \cap M_3 = \varnothing$

$M_1 = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \Rightarrow |M_1| = 15$

$M_2 = (A \cap B \cup B \cap C \cup A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \Rightarrow |M_2| = 12$

$M_3 = A \cap B \cap C \Rightarrow |M_3| = 10 \Rightarrow |A \cup B \cup C| = 37$

$|D \setminus (A \cup B \cup C)| = |D| - |A \cup B \cup C| = 3$

3.25.

$|A| = 25, \; |B| = 12, \; |C| = 23. \; |A \cup B \cup C|$ — ?

Т.к. каждый ученик был ровно 2 раза в театре, то $A \cap B \cap C = \varnothing$. $A \cup B \cup C = A \cap B \cup B \cap C \cup A \cap C$. $A = A \cap B \cup A \cap C$, $C = B \cap C \cup A \cap C$. $B = A \cap B \cup B \cap C$

$\Rightarrow$ Если $|A \cap C| = x \Rightarrow$

$|A \cap B| = |A| - |A \cap C| = 25 - x$

$$\left.\begin{aligned} &|B \cap C| = |C| - |A \cap C| = 23 - x \\ &|B \cap C| = |B| - |A \cap B| = 12 - (25 - x) = x - 13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 23 - x = x - 13$$

$x = 18$

$\Rightarrow |A \cap C| = 18 \Rightarrow |A \cap B| = 7, \; |B \cap C| = 5$

$\Rightarrow |A \cup B \cup C| = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| = 30.$

§ 4. Системы рациональных неравенств

4.1.

а) $\begin{cases} 20 - 3 < 10 + 10 \\ 7 - 10 > 5 + 11 \end{cases}$ — второе неравенство неверно.

Ответ: не является.

б) $\begin{cases} 10 + 5 < 35 - 8 \\ 12 - 5 > 15 - 11 \end{cases}$ — оба неравенства верны.

Ответ: является.

в) $\begin{cases} 10-30<40-40 \\ 20-1>25-3 \end{cases}$ — второе неравенство неверно.

Ответ: не является.

г) $\begin{cases} 8+5<15+2 \\ 19-10>5+3 \end{cases}$ — верно

Ответ: является.

4.2.

а) $x=-2$ $\begin{cases} -6-22<0 \\ -4-1>3 \end{cases}$ — второе неверно.

$x=0$ $\begin{cases} 0-22<0 \\ 0-1>3 \end{cases}$ — второе неверно.

$x=5$ $\begin{cases} 15-22<0 \\ 10-1>3 \end{cases}$ — верно.

$x=6$ $\begin{cases} 18-22<0 \\ 12-1>3 \end{cases}$ — верно.

Ответ: Числа 5 и 6 являются решениями.

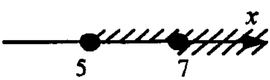
б) $x=-3 \Rightarrow \begin{cases} -12-7<0 \\ -9+2>5 \end{cases}$ — второе неверно.

в) $x=1{,}5 \Rightarrow \begin{cases} 6-7<0 \\ 4,5+2>5 \end{cases}$ — верно.

г) $x=4{,}8 \Rightarrow \begin{cases} 19,2-7<0 \\ 14,4+2>5 \end{cases}$ — первое неверно.

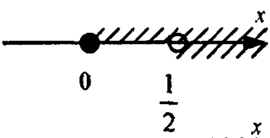
Ответ: Число 1,5 является решением.

4.3.

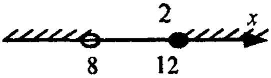


а) $\begin{cases} x>5 \\ x>7 \end{cases}$ $x>7$

б) $\begin{cases} x\le 1 \\ x<5 \end{cases}$ $x\le 1$



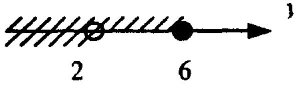
в) $\begin{cases} x\ge 0 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$ $x>\frac{1}{2}$



г) $\begin{cases} x<8 \\ x\ge 12 \end{cases}$, нет решений

4.4.

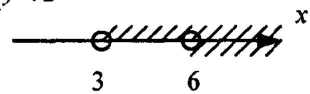
а) $-3<x<1$ б) нет решений в) $-5\le x\le 2$ г) нет решений



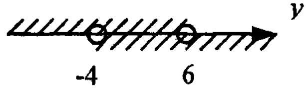
4.5.

а) $\begin{cases}7y\le 42\\2y<4\end{cases}$ $\begin{cases}y\le 6\\y<2\end{cases}$: $y<2$

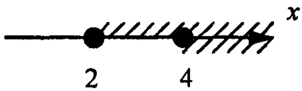
б) $\begin{cases}18-3y\le 0\\4y>12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 6\\y>3\end{cases}\Leftrightarrow y\ge 6$



в) $\begin{cases}8y<48\\-3y<12\end{cases}$ $\begin{cases}y<6\\y>-4\end{cases}$. $-4<y<6$

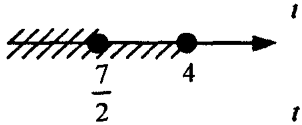


г) $\begin{cases}7x-14\ge 0\\2x\ge 8\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 2\\x\ge 4\end{cases}$ $x\ge 4$

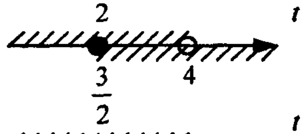


4.6.

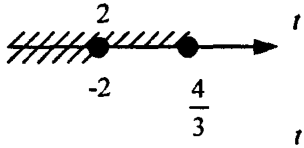
а) $\begin{cases}7-2t\ge 0\\5t-20<0\end{cases}$ $\begin{cases}t\le\dfrac{7}{2}\\t<4\end{cases}$. $t\le\dfrac{7}{2}$



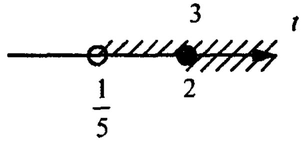
б) $\begin{cases}2t-8<0\\2t-3\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}t<4\\t\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$, $\dfrac{3}{2}\le t<4$



в) $\begin{cases}2t+4\le 0\\4-3t>0\end{cases}$ $\begin{cases}t\le -2\\t<\dfrac{4}{3}\end{cases}$. $t<-2$

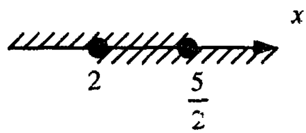


г) $\begin{cases}5t-1>0\\3t-6\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}t>\dfrac{1}{5}\\t\ge 2\end{cases}$. $t\ge 2$

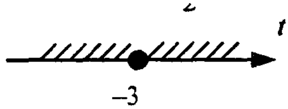


4.7

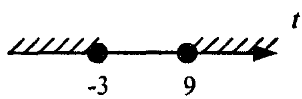
а) $\begin{cases}0.4x-1\le 0\\2,3x\ge 4.6\end{cases}$ $\begin{cases}x\le\dfrac{5}{2}\\x\ge 2\end{cases}$. $2\le x\le\dfrac{5}{2}$



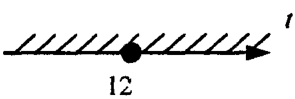
б) $\begin{cases}1,5t+4,5\le 0\\\dfrac{t}{3}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le -3\\t>-3\end{cases}\Leftrightarrow$ нет решений



в) $\begin{cases}1,5t+4.5\le 0\\\dfrac{1}{9}t\ge 1\end{cases}$ $\begin{cases}t\le -3\\t\ge 9\end{cases}$

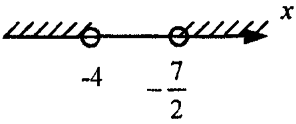


нет решений.



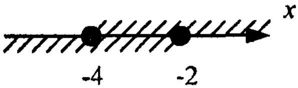
г) $\begin{cases}\dfrac{5}{6}z-10\le 0\\\dfrac{z}{9}\ge 1\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\le 12\\z\ge 12\end{cases}\Leftrightarrow z=12$

4.8.



а) $\begin{cases} 5x-7>-14+3x \\ -4x+5>29+2x \end{cases}$

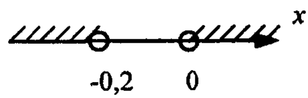
$\begin{cases} 2x>-7 \\ 6x<-24 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-\frac{7}{2} \\ x<-4 \end{cases}$. Решений нет



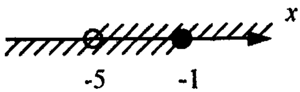
б) $\begin{cases} 3x+3\le 2x+1 \\ 3x-2\le 4x+2 \end{cases}$

$\begin{cases} x\le -2 \\ x\ge -4 \end{cases}$ $-4\le x\le -2$

в) $\begin{cases} 1-12x<3x+1 \\ 2-6x>4+4x \end{cases}$, $\begin{cases} 15x>0 \\ 10x<-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<-0{,}2 \end{cases}$



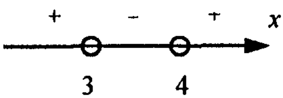
Решений нет



г) $\begin{cases} 4x+2\ge 5x+3 \\ 2-3x<7-2x \end{cases}$, $\begin{cases} x\le -1 \\ x>-5 \end{cases}$

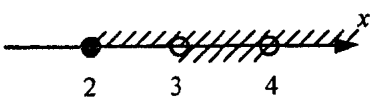
$-5<x\le -1$

4.9.



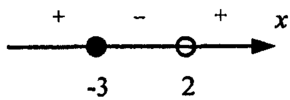
а) $\begin{cases} 2x-4\ge 0 \\ x^2-7x+12<0 \end{cases}$, $x_1=3$, $x_2=4$

$\begin{cases} x\ge 2 \\ (x-3)(x-4)<0 \end{cases}$



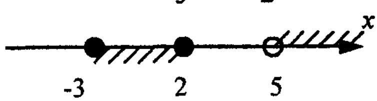
$\begin{cases} x\ge 2 \\ 3<x<4 \end{cases}$ $3<x<4$

б) $\begin{cases} 5x-10>15 \\ x^2+x-6\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2>3 \\ x^2+x-6\le 0 \end{cases}$

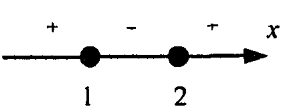


по теореме Виета: $x_1=2$, $x_2=-3$;

$\begin{cases} x-2>3 \\ (x-2)(x+3)\le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x>5 \\ -3\le x\le 2 \end{cases}$

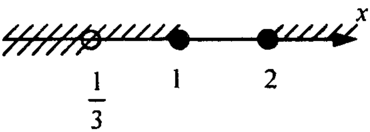


Решений нет



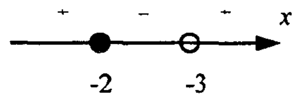
в) $\begin{cases} 3x-1<0 \\ x^2-3x+2\ge 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=2$, $x_2=1$



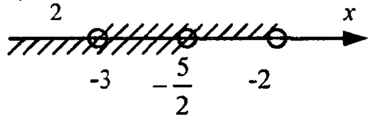
$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ (x-1)(x-2) \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \ge 2,\ x \le 1 \end{cases}, \quad x < \frac{1}{3}$$

г) $\begin{cases} 3x - 10 > 5x - 5 \\ x^2 + 5x + 6 < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x < -5 \\ x^2 + 5x + 6 < 0 \end{cases}$



по теореме Виста: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$;

$$\begin{cases} x < -\frac{5}{2} \\ (x+2)(x+3) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{5}{2} \\ -3 < x < -2 \end{cases}, \quad -3 < x < -\frac{5}{2}$$



4.10.

а) $\begin{cases} 7x^2 - x + 3 \le 0 \\ 2x + 3 > 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x^2 - x + 3 \le 0 \\ 2x + 3 > 7 \end{cases}$ $D = 1 - 83 = -81 < 0.$

Первое неравенство не имеет решений (т.к. $D < 0$). Следовательно, и вся система не имеет решений.

б) $\begin{cases} -3x^2 + 2x - 1 \le 0 \\ 6x > 3(x+1) - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 \ge 0 \\ 6x > 3x + 2 \end{cases}$ $\frac{D}{4} = 1 - 3 < 0.$

Следовательно, решениями первого неравенства будут все $-\infty < x < +\infty$.

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 3x > 2 \end{cases} \quad x > \frac{2}{3};$$

в) $\begin{cases} 5x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ 2(x+3) - (x-8) < 4 \end{cases}$ $\frac{D}{4} = 1 - 5 = -4 < 0.$

Первое неравенство не имеет решений (т.к. $D < 0$). Следовательно, и вся система не имеет решений.

г) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 2 < 0 \\ -3(6x-1) - 2x < x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 > 0 \\ -18x + 3 - 2x < x \end{cases}$ $D = 9 - 16 = -7 < 0.$

Поэтому решениями первого неравенства будут все $-\infty < x < +\infty$.

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 21x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ x > \frac{1}{7} \end{cases} \quad x > \frac{1}{7}.$$

4.11.

а) $\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 < 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0 \\ |x| < 3 \end{cases}$ $D = 1 - 24 = -23 < 0.$

Решениями первого неравенства будут все $-\infty < x < +\infty$.

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -3 < x < 3 \end{cases} \quad -3 < x < 3;$$

б) $\begin{cases}-7x^2+5x\quad 2>0\\ x^2\le 25\end{cases}$ $\begin{cases}7x^2-5x+2<0\\ |x|\le 5\end{cases}$ $D=25-56<0.$

Первое неравенство не имеет решений, значит решений не имеет и вся система.

в) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ |x|\ge 4\end{cases}$ $D=25-80=-55<0.$

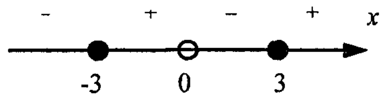
Решениями первого неравенства будут все $-\infty<x<+\infty$. $x\ge 4, x\le -4$

г) $\begin{cases}-5x^2+x-1>0\\ x^2>81\end{cases}$ $\begin{cases}5x^2-x+1<0\\ x^2>81\end{cases}$ $D=1-20=-19<0.$

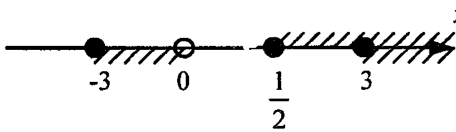
Первое неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся система решений не имеет.

4.12.

а) $\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$

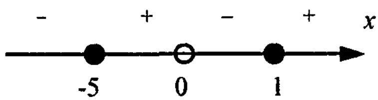


$\begin{cases}x\ge 3, -3\le x\le 0\\ x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$, $x\ge 3$

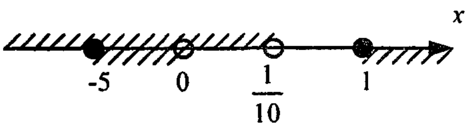


б) $\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x-1<0\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x<1\end{cases}$

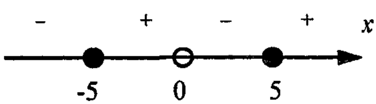


$\begin{cases}x\ge 1, -5\le x\le 0\\ x<\dfrac{1}{10}\end{cases}$, $-5\le x<0$

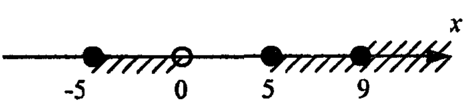


в) $\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{x}\le 0\\ 5x-10\ge 35\end{cases}$

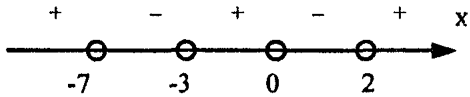
$\begin{cases}\dfrac{(5-x)(5+x)}{x}\le 0\\ 5x\ge 45\end{cases}$



$\begin{cases}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x}\ge 0\\ x\ge 9\end{cases}$, $x\ge 9$

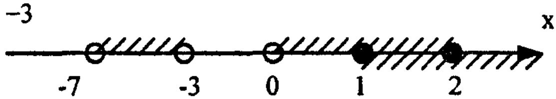


г) $\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)} < 0 \\ 20x \geq 20 \end{cases}$



$\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)} < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

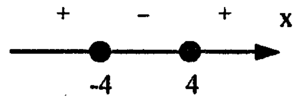
$\begin{cases} 0 < x < 2, -7 < x < -3 \\ x \geq 1 \end{cases}$



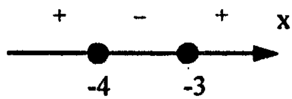
$1 \leq x < 2$.

4.13.

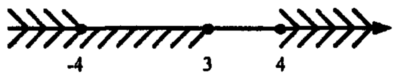
а) $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} (x-4)(x+4) \geq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \end{cases}$, $x_1 = 3$, $x_2 = -4$

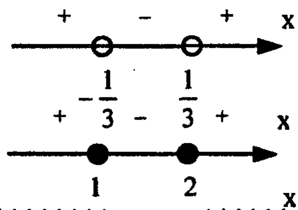


$\begin{cases} x \geq 4, x \leq -4 \\ (x-3)(x-4) \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \geq 4, x \leq -4 \\ x \leq 3, x \geq 4 \end{cases}$



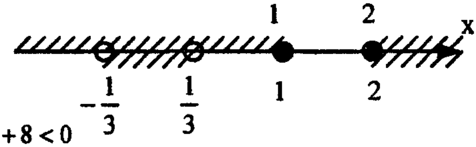
$x \leq -4, x \geq 4$

б) $\begin{cases} 9x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

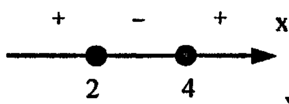
$\begin{cases} -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \\ x \geq 2, x \leq 1 \end{cases}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$



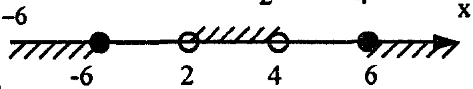
в) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0 \\ x^2 - 36 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0 \\ x^2 \geq 36 \end{cases}$

по теореме Виета:

$x_1 = 4, x_2 = 2$

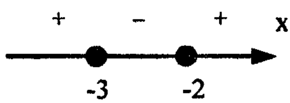


$\begin{cases} (x-2)(x-4) < 0 \\ |x| \geq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < x < 4 \\ x \geq 6, x \leq -6 \end{cases}$



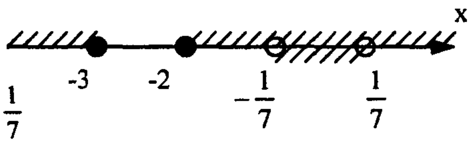
Решений нет

г) $\begin{cases} 49x^2 - 1 < 0 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (7x)^2 < 1 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$



по теореме Виета: $x_1 = -2, x_2 = -3$

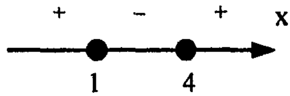
$$\begin{cases} |7x| < 1 \\ (x+2)(x+3) \ge 0 \end{cases}$$



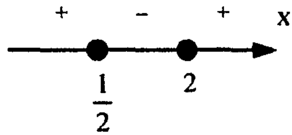
$$\begin{cases} -\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7} \\ x \ge -2;\ x \le -3 \end{cases}, \quad -\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7}$$

4.14.

а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \ge 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \le 0 \end{cases}$



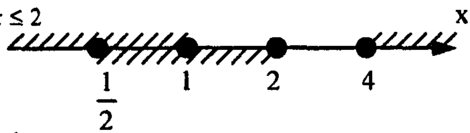
по теореме Виета: $x_1 = 1, x_2 = 4$



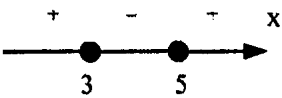
$D = 25 - 16 = 9.$

$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, \ x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$$\begin{cases} (x-1)(x-4) \ge 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 4, x \le 1 \\ \frac{1}{2} \le x \le 2 \end{cases}$$



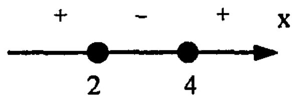
$\frac{1}{2} \le x \le 1$

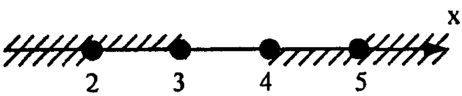


б) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \ge 0 \\ x^2 - 6x + 8 \ge 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 5, x_2 = 3$

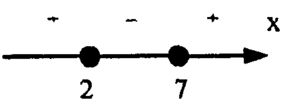
по теореме Виета: $x_1 = 4. x_2 = 2$





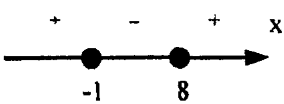
$$\begin{cases} (x-3)(x-5) \ge 0 \\ (x-2)(x-4) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 5, x \le 3 \\ x \ge 4, x \le 2 \end{cases}, \ x \ge 5, x \le 2$$



в) $\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 7x - 8 \le 0 \end{cases}$

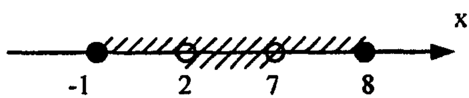
по теореме Виета: $x_1 = 7, x_2 = 2$



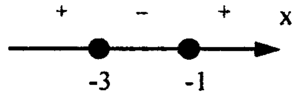
по теореме Виета: $x_1 = 8, x_2 = -1$

$$\begin{cases} (x-7)(x-2) < 0 \\ (x+1)(x-8) \le 0 \end{cases}$$

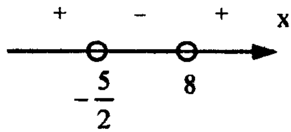
$$\begin{cases} 2 < x < 7 \\ -1 \le x \le 8 \end{cases}, \ 2 < x < 7$$



г) $\begin{cases} x^2+4x+3\le 0 \\ 2x^2+5x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+4x+3\le 0 \\ 2x\left(x+\dfrac{5}{2}\right)<0 \end{cases}$

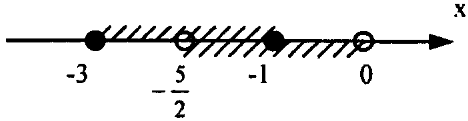


по теореме Виета: $x_1=-1, x_2=-3$



$\begin{cases} (x+1)(x+3)\le 0 \\ x\left(x+\dfrac{5}{2}\right)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} -3\le x\le -1 \\ -\dfrac{5}{2}<x<0 \end{cases}$



$-\dfrac{5}{2}<x\le -1$

4.15.

а) $-2\le 3x\le 6$, $-\dfrac{2}{3}\le x\le 2$; б) $-1<\dfrac{x}{6}<1$, $-6<x<6$.

в) $6<-6x<12$, $-1>x>-2$; г) $0\le\dfrac{x}{4}\le 2$, $0\le x\le 8$.

4.16.

а) $3<x+1<8$, $2<x<7$

б) $-3\le 2x+1\le 3$, $-4\le 2x\le 2$, $-2\le x\le 1$

в) $-4\le x-5\le 1$, $1\le x\le 6$

г) $-8<3x+4<1$, $-12<3x<-3$, $-4<x<-1$

4.17.

а) $-2\le 1-2x\le 2$, $-3\le -2x\le 1$, $\dfrac{3}{2}\ge x\ge -\dfrac{1}{2}$;

б) $-1\le\dfrac{6-2x}{4}\le 0$, $-4\le 6-2x\le 0$, $5\ge x\ge 3$;

в) $-5<3-4x\le 3$, $-8<-4x\le 0$, $0\le x<2$

г) $3<x+1<8$, $2<x<7$;

4.18.

а) $-6<3-5x<6$, $-9<-5x<3$, $\dfrac{9}{5}>x>\dfrac{3}{5}$;

б) $-4\le\dfrac{2x+1}{3}\le 0$, $-12\le 2x+1\le 0$, $-\dfrac{11}{2}\le x\le -\dfrac{1}{2}$.

4.19.

а) $0<1+4x<17$, $-\dfrac{1}{4}<x<4$.

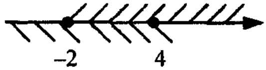
Наименьшее целое:– 0; Наибольшее целое: – 3.

б) $0<1-5x<13$, $-2{,}4<x<0{,}2$;

Наименьшее целое: – 2; Наибольшее целое: 0.

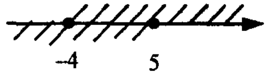
4.20.

а) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$



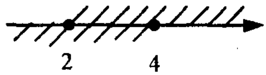
$\begin{cases}12-3x\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 4\\ x\ge -2\end{cases}$ $-2\le x\le 4$;

б) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{x+4}$



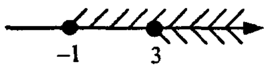
$\begin{cases}15-3x\ge 0\\ x+4\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 5\\ x\ge -4\end{cases}$ $-4\le x\le 5$;

в) $y=\sqrt{15x-30}+\sqrt{4-x}$



$\begin{cases}15x-30\ge 0\\ 4-x\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 2\\ x\le 4\end{cases}$ $2\le x\le 4$;

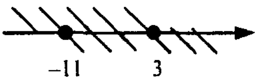
г) $y=\sqrt{6x-18}+\sqrt{x+1}$.



$\begin{cases}6x-18\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 3\\ x\ge -1\end{cases}$ $x\ge 3$.

4.21.

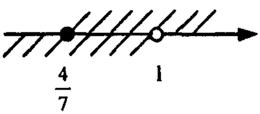
а) $\begin{cases}7x+3\ge 5(x-4)+1\\ 4x+1\le 43-3(7+x)\end{cases}$



$\begin{cases}7x+3\ge 5x-19\\ 4x+1\le 43-3(7+x)\end{cases}$ $\begin{cases}2x\ge -22\\ 7x\le 21\end{cases}$, $\begin{cases}x\ge -11\\ x\le 3\end{cases}$

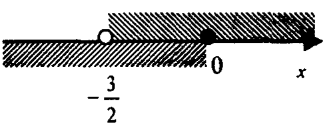
$-11\le x\le 3$

б) $\begin{cases}3(x+8)\ge 4(7-x)\\ (x+2)(x-5)>(x+3)(x-4)\end{cases}$



$\begin{cases}3x+24\ge 28-4x\\ x^2-3x-10>x^2-x-12\end{cases}$, $\begin{cases}7x\ge 4\\ 2x<2\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge \dfrac{4}{7}\\ x<1\end{cases}$

$\dfrac{4}{7}\le x<1$



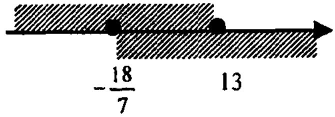
в) $\begin{cases}5(x+1)-x>2x+2\\ 4(x+1)-2\le 2(2x+1)-x\end{cases}$

$\begin{cases}4x+5>2x+2\\ 4x+4-2\le 3x+2\end{cases}$ $\begin{cases}2x>3\\ x\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\ x\le 0\end{cases}$ $-\dfrac{3}{2}<x\le 0$

г) $\begin{cases}(x+2)(x-6)\le (x+2)(x+1)+4\\ 2(6x-1)\ge 7(2x-4)\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-4x-12\le x^2+3x+6\\ 12x-2\ge 14x-28\end{cases}$

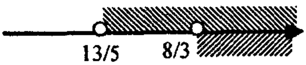
$\begin{cases}7x \ge -18\\ 2x \le 26\end{cases}$ $\begin{cases}x \ge -\dfrac{18}{7}\\ x \le 13\end{cases}$ $-\dfrac{18}{7} \le x \le 13$.



4.22.

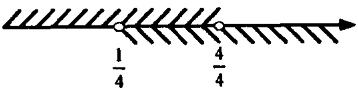
а) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}<7\\ 1-\dfrac{x}{6}>0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{4x+3x}{12}<7\\ \dfrac{6-x}{6}>0\end{cases}$

$\begin{cases}7x<84\\ 6-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<12\\ x<6\end{cases}$, $x<6$,



б) $\begin{cases}x-\dfrac{x}{4}\ge 2\\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}>1\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{4x-x}{4}\ge 2\\ \dfrac{3x-3+2x-4}{6}>1\end{cases}$

$\begin{cases}3x\ge 8\\ 5x-7>6\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge\dfrac{8}{3}\\ x>\dfrac{13}{5}\end{cases}$, $x\ge\dfrac{8}{3}$;



в) $\begin{cases}1-\dfrac{x}{4}>x\\ x-\dfrac{x-4}{5}>1\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{4-x}{4}>x\\ \dfrac{5x-x+4}{5}>1\end{cases}$

$\begin{cases}4-x>4x\\ 4x+4>5\end{cases}$ $\begin{cases}x<\dfrac{4}{5}\\ x>\dfrac{1}{4}\end{cases}$, $\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{4}{5}$;

г) $\begin{cases}x-\dfrac{x-1}{2}>1\\ \dfrac{x}{3}<5\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{2x-x+1}{2}>1\\ x<15\end{cases}$

$\begin{cases}x+1>2\\ x<15\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\ x<15\end{cases}$, $1<x<15$.

4.23.

а) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\ge\dfrac{x-3}{4}-x\\ 1-x>0{,}5x-4\end{cases}$

$\begin{cases}6x-6-4x+8\ge 3x-9-12x\\ 1{,}5x<5\end{cases}$ $\begin{cases}11x\ge -11\\ x<\dfrac{10}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -1\\ x<\dfrac{10}{3}\end{cases}$ $-1\le x<\dfrac{10}{3}$;

б) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{6}+\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-8}{2} > x\text{-}1 \\ 2-2x > 0{,}5x+0{,}5 \end{cases}$ | Умножим на 6

$\begin{cases} 2x-1+2x+4-3x+24 > 6x-6 \\ 2{,}5x < 1{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x < 33 \\ x < \dfrac{3}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x < \dfrac{33}{5} \\ x < \dfrac{3}{5} \end{cases}$ $x < \dfrac{3}{5}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6}-\dfrac{3x}{4} < \dfrac{11x-7}{12} \\ \dfrac{1-3x}{2}-\dfrac{1-4x}{3} \ge \dfrac{x}{6}-1 \end{cases}$

$\begin{cases} 10x+14-9x < 11x-7 \\ 3-9x-2+8x \ge x-6 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x > 21 \\ 2x \le 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{21}{10} \\ x \le \dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\dfrac{21}{10} < x \le \dfrac{7}{2}$;

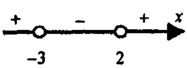
г) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{3} > \dfrac{4x+9}{2}-\dfrac{x-1}{3} \\ \dfrac{5x-2}{3} < \dfrac{2x+13}{2}-\dfrac{x+2}{3} \end{cases}$

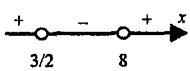
$\begin{cases} 16x+2 > 12x+27-2x+2 \\ 10x-4 < 6x+39-2x-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x > 27 \\ 6x < 39 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{27}{6} \\ x < \dfrac{39}{6} \end{cases}$

$\dfrac{27}{6} < x < \dfrac{39}{6} \Leftrightarrow 4{,}5 < x < 6{,}5$.

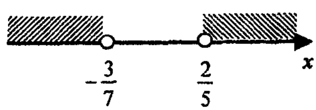
4.24.

а) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2} < 1 \\ \dfrac{3x+2}{2x-3} > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2x+1-x+2}{x-2} < 0 \\ \dfrac{3x+2-4x+6}{2x-3} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} < 0 \\ \dfrac{-x+8}{2x-3} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} < 0 \\ \dfrac{x-8}{x-\frac{3}{2}} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 2 \\ \dfrac{3}{2} < x < 8 \end{cases}$ $\dfrac{3}{2} < x < 2$

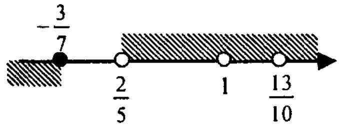




б) $\begin{cases} \dfrac{7-3x}{2-5x} \le 2 \\ \dfrac{2x+1}{3x-3} > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{7-3x-4+10x}{2-5x} \le 0 \\ \dfrac{2x+1-12x+12}{3x-3} > 0 \end{cases}$



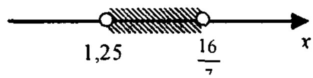
$$\begin{cases}\dfrac{7x+3}{2-5x}\le 0\\ \dfrac{-10x+13}{3x-3}>0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x+\frac{3}{7}}{x-\frac{2}{5}}\ge 0\\ \dfrac{x-\frac{13}{10}}{x-1}<0\end{cases}$$



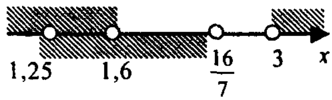
$$\begin{cases}x\le -\dfrac{3}{7},\quad x>\dfrac{2}{5}\\ 1<x<1{,}3\end{cases}\qquad 1<x<1{,}3\,,$$

в) $$\begin{cases}\dfrac{3x-2}{3-x}<2\\ \dfrac{5x+1}{4x-5}>3\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{3x-2-6+2x}{3-x}<0\\ \dfrac{5x+1-12x+15}{4x-5}>0\end{cases}$$

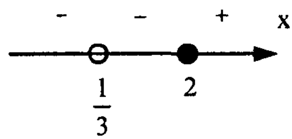
$$\begin{cases}\dfrac{5x-8}{3-x}<0\\ \dfrac{-7x+16}{4x-5}>0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x-1{,}6}{x-3}>0\\ \dfrac{x-\frac{16}{7}}{x-1{,}25}<0\end{cases}$$



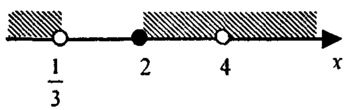
$$\begin{cases}x>3,\quad x<1{,}6\\ 1{,}25<x<\dfrac{16}{7}\end{cases}\qquad 1{,}25<x<1{,}6\,,$$



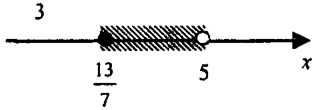
г) $$\begin{cases}\dfrac{x+3}{3x-1}\le 1\\ \dfrac{2x+5}{x-4}\ge 2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x+3-3x+1}{3x-1}\le 0\\ \dfrac{2x+5-2x+8}{x-4}\ge 0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\dfrac{-2x+4}{3x-1}\le 0\\ \dfrac{13}{x-4}\ge 0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x-2}{x-\frac{1}{3}}\ge 0\\ x-4>0\end{cases}$$

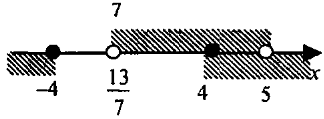


$$\begin{cases}x\ge 2,\quad x<\dfrac{1}{3}\\ x>4\end{cases}\qquad x>4$$



4.25.

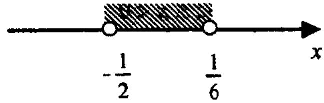
а) $$\begin{cases}\dfrac{3x-4}{5-x}\ge\dfrac{1}{2}\\ x^2\ge 16\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{6x-8-5+x}{2(5-x)}\ge 0\\ |x|\ge 4\end{cases}$$



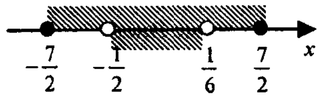
$$\begin{cases}\dfrac{7x-13}{5-x}\ge 0\\ x\ge 4, x\le -4\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x-\frac{13}{7}}{x-5}\le 0\\ x\ge 4, x\le -4\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{13}{7}\le x<5\\ x\ge 4, x\le -4\end{cases},\quad 4\le x<5\,.$$

б) $\begin{cases} 4x^2 \le 49 \\ \dfrac{2x+5}{1-6x} > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} |2x| \le 7 \\ \dfrac{2x+5-1+6x}{1-6x} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -7 \le 2x \le 7 \\ \dfrac{8x+4}{1-6x} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{7}{2} \le x \le \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{x-\dfrac{1}{6}} < 0 \end{cases}$

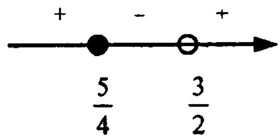


$\begin{cases} -\dfrac{7}{2} \le x \le \dfrac{7}{2} \\ -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{6} \end{cases}$ $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{6}$;

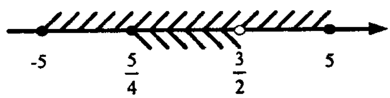


в) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3-2x} \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 \le 25 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2(x-1)-3+2x}{2(3-2x)} \ge 0 \\ |x| \le 5 \end{cases}$

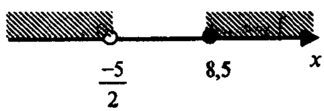
$\begin{cases} \dfrac{4x-5}{2(3-2x)} \ge 0 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{5}{4}}{x-\dfrac{3}{2}} \le 0 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$



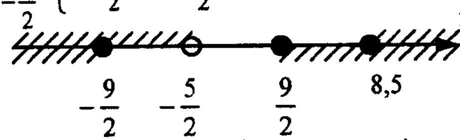
$\begin{cases} \dfrac{5}{4} \le x < \dfrac{3}{2} \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$ $\dfrac{5}{4} \le x < \dfrac{3}{2}$;



г) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{2x+5} \ge \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 \ge 81 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{8x-2-6x-15}{2(2x+5)} \ge 0 \\ x^2 \ge \dfrac{81}{4} \end{cases}$



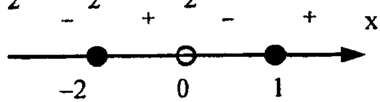
$\begin{cases} \dfrac{2x-17}{4\left(x+\dfrac{5}{2}\right)} \ge 0 \\ |x| \ge \dfrac{9}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-8{,}5}{x+\dfrac{5}{2}} \ge 0 \\ x \ge \dfrac{9}{2}, x \le -\dfrac{9}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 8{,}5; x < -\dfrac{5}{2} \\ x \ge \dfrac{9}{2}, x \le -\dfrac{9}{2} \end{cases}$



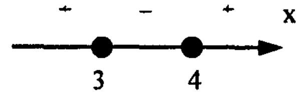
$x \ge 8{,}5;\quad x \le -\dfrac{9}{2}$

4.26.

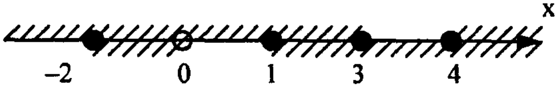
а) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{2x} \ge 0 \\ x^2 - 7x + 12 \ge 0 \end{cases}$



по теореме Виета: $x_1 = 4, x_2 = 3$



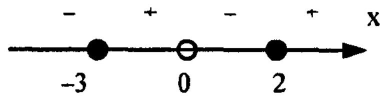
$\begin{cases} x \ge 1; -2 \le x < 0 \\ (x-3)(x-4) \ge 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x \ge 1; -2 \le x < 0 \\ x \ge 4, x \le 3 \end{cases}$

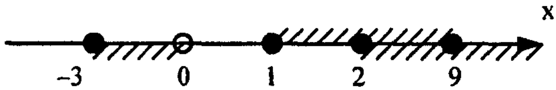
$-2 \le x < 0;\ \ 1 \le x \le 3;\ \ x \ge 4$

б) $\begin{cases} x^2 - 10x + 9 \le 0 \\ \dfrac{(x+3)(x-2)}{2x} \ge 0 \end{cases}$



по теореме Виета:
$x_1 = 9, x_2 = 1$

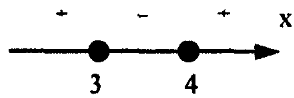
$\begin{cases} (x-1)(x-9) \le 0 \\ x \ge 2; -3 \le x < 0 \end{cases}$

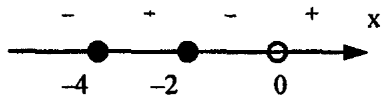


$\begin{cases} 1 \le x \le 9 \\ x \ge 2; -3 \le x < 0 \end{cases}$

$2 \le x \le 9$

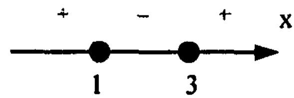
в) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \le 0 \\ \dfrac{(x+2)(x+4)}{5x} \le 0 \end{cases}$





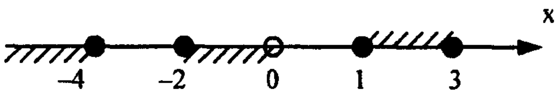
по теореме Виета:
$x_1 = 3, x_2 = 1$

$\begin{cases} (x-1)(x-3) \le 0 \\ -2 \le x < 0, x \le -4 \end{cases}$

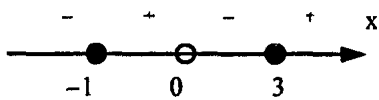


$\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ x \le -4; -2 \le x < 0 \end{cases}$

Нет решений.

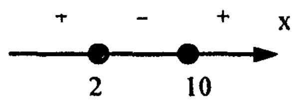


г) $\begin{cases} x^2 - 12x + 20 \le 0 \\ \dfrac{(x-3)(x+1)}{3x} \le 0 \end{cases}$



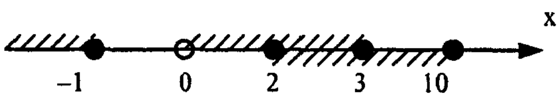
по теореме Виета:
$x_1 = 10, x_2 = 2$

$\begin{cases} (x-2)(x-10) \le 0 \\ x \le -1, 0 < x \le 3 \end{cases}$



$\begin{cases} 2 \le x \le 10 \\ x \le -1; 0 < x \le 3 \end{cases}$

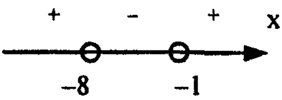
$2 \le x \le 3$

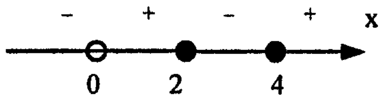


4.27.

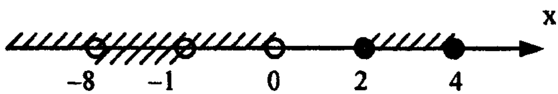
а) $\begin{cases}\dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8}>2\\ x+\dfrac{8}{x}\le 6\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{2x^2+18x-4-2x^2-18x-16}{x^2+9x+8}>0\\ \dfrac{x^2+8-6x}{x}\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{-20}{x^2+9x+8}>0\\ \dfrac{x^2+8-6x}{x}\le 0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{20}{(x+8)(x+1)}<0\\ \dfrac{(x-2)(x-4)}{x}\le 0\end{cases}$





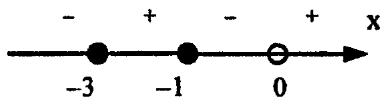
$\begin{cases}-8<x<1\\ x<0; 2\le x\le 4\end{cases}$



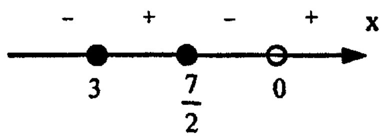
$-8<x<-1$

б) $\begin{cases}x+\dfrac{3}{x}\le -4\\ \dfrac{x-4}{x-3}>\dfrac{x-3}{x-4}\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x}\le 0\\ \dfrac{(x-4)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-4)}>0\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{(x+3)(x+1)}{x}\le 0\\ \dfrac{(x-4-x+3)(x-4+x-3)}{(x-3)(x-4)}>0\end{cases}$

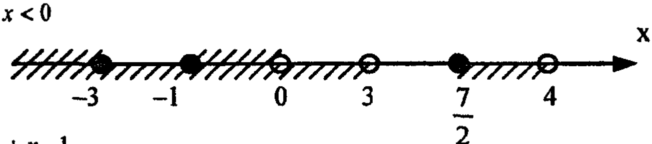


$\begin{cases}x\le -3, -1\le x<0\\ \dfrac{x-\frac{7}{2}}{(x-3)(x-4)}<0\end{cases}$



$\begin{cases}x\le -3, -1\le x<0\\ x<+3, \dfrac{7}{2}\le x<+4\end{cases}$

$x\le -3, -1\le x<0$

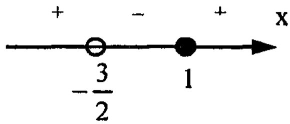


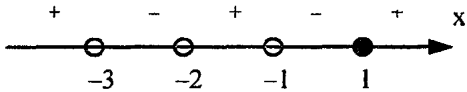
в) $\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x+3}\le 0\\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}\le 0\\ \dfrac{(x+2)(x+3)+2(x+1)(x+2)-3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}\le 0\\ \dfrac{-x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0\end{cases}$$

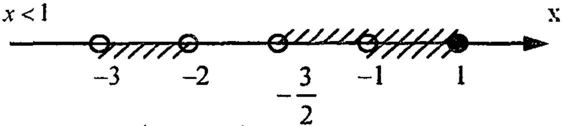
Разделим первое неравенство на положительное выражение $\dfrac{x^2+1}{2}$

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+\dfrac{3}{2}}\le 0\\ \dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}<0\end{cases}$$





$$\begin{cases}-\dfrac{3}{2}<x\le 1\\ -3<x<-2,\ -1<x<1\end{cases}$$

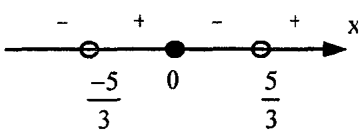


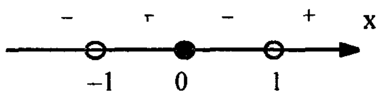
$-1<x<1$

г) $$\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\ge 0\\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}\le\dfrac{1-2x}{x^2-1}\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x(x^2+x+1)}{(3x-5)(3x+5)}\ge 0\\ \dfrac{x-1+2x+2-1+2x}{x^2-1}\le 0\end{cases}$$

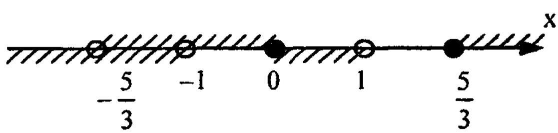
Разделим первое неравенство на положительное выражение x^2+x+1 (оно положительно, т.к. $D=1-4=-3<0$).

$$\begin{cases}\dfrac{x}{(3x-5)(3x+5)}\ge 0\\ \dfrac{5x}{(x-1)(x+1)}\le 0\end{cases}$$





$$\begin{cases}x>\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{5}{3}<x\le 0\\ x<-1,\ 0\le x<1\end{cases}$$

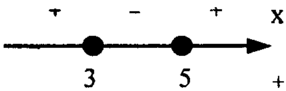


$x=0,\ -\dfrac{5}{3}<x<-1$

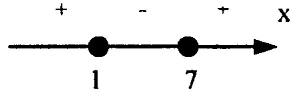
4.28.

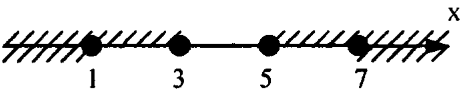
Выражение определено, если стоящее под корнем выражения неотрицательны.

а) $\begin{cases}(x-3)(x-5)\ge 0\\(1-x)(7-x)\ge 0\end{cases}$;

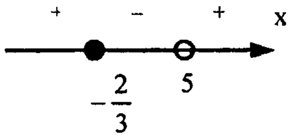


$\begin{cases}x\ge 5,\ \ x\le 3\\x\ge 7,\ \ x\le 1\end{cases}$; $x\le 1;\ x\ge 7.$

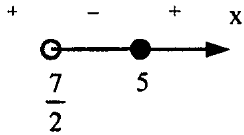




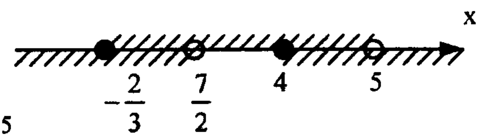
б) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$



$\begin{cases}\dfrac{3x+2}{5-x}\ge 0\\ \dfrac{4-x}{7-2x}\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x+\frac{2}{3}}{x-5}\le 0\\ \dfrac{x-4}{x-\frac{7}{2}}\ge 0\end{cases}$

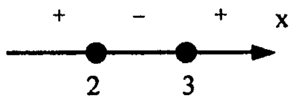


$\begin{cases}-\dfrac{2}{3}\le x<5\\ x\ge 4,\ \ x<\dfrac{7}{2}\end{cases}$



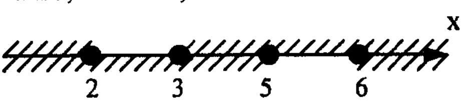
$-\dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{7}{2},\quad 4\le x<5$

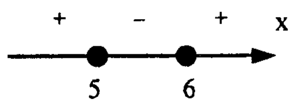
в) $\begin{cases}(x-2)(x-3)\ge 0\\(5-x)(6-x)\ge 0\end{cases}$



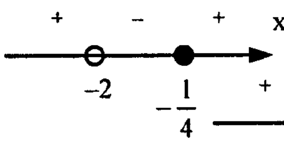
$\begin{cases}x\ge 3,\ \ x\le 2\\x\ge 6,\ \ x\le 5\end{cases}$

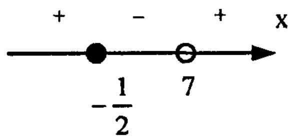
$x\le 2,\quad 3\le x\le 5,\quad x\ge 6$



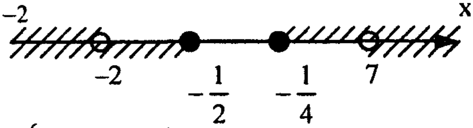


г) $\begin{cases}\dfrac{4x+1}{x+2}\ge 0\\ \dfrac{2x+1}{x-7}\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x+\frac{1}{4}}{x+2}\ge 0\\ \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-7}\ge 0\end{cases}$



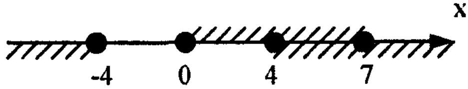


$\begin{cases} x < -2,\ x \geq -\dfrac{1}{4} \\ x \leq -\dfrac{1}{2},\ x > 7 \end{cases}$, $x > 7$, $x < -2$



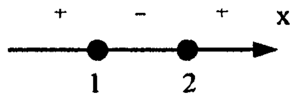
4.29.

а) $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ 7x - x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \geq 16 \\ x(7 - x) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 4,\ x \leq -4 \\ 0 \leq x \leq 7 \end{cases}$, $4 \leq x \leq 7$



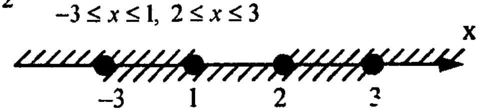
б) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$



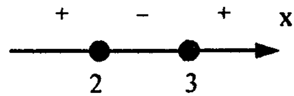
$\begin{cases} (x-2)(x-1) \geq 0 \\ x^2 \leq 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1,\quad x \geq 2 \\ |x| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,\quad x \geq 2 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $-3 \leq x \leq 1,\ 2 \leq x \leq 3$

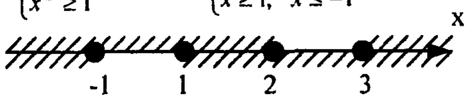


в) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 2,\ x_2 = 3$



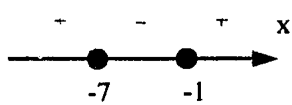
$\begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3,\quad x \leq 2 \\ x \geq 1,\quad x \leq -1 \end{cases}$



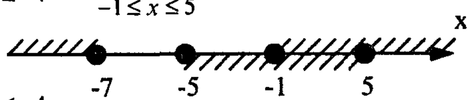
$x \leq -1,\ 1 \leq x \leq 2,\ x \geq 3$

г) $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 \geq 0 \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = -7 \end{matrix}$

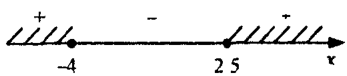


$\begin{cases} (x+1)(x+7) \geq 0 \\ x^2 \leq 25 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1,\quad x \leq -7 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$ $-1 \leq x \leq 5$



4.30.

а) $(2x - 5)(x + 4) \geq 0$ $\left[\begin{matrix} x \leq -4 \\ x \geq 2{,}5 \end{matrix}\right.$



б) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2{,}5$

в) $\dfrac{3x+2}{x-5} \ge 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{2}{3} \\ x > 5 \end{array}\right.$

г) $\begin{cases} 3x+2 \ge 0 \\ x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>5$

4.31.

а) $\begin{cases} -\dfrac{13}{4}+\dfrac{3x}{4} \le \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{7}{8} \\ 2 \ge \dfrac{x}{4}+\dfrac{3-2x}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3x-x+1}{4} \le \dfrac{26-7}{8} \\ \dfrac{3x+12-8x}{12} \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{4} \le \dfrac{19}{8} \\ \dfrac{-5x-12}{12} \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+1 \le \dfrac{19}{2} \\ -5x-12 \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \dfrac{17}{4} \\ x \ge -\dfrac{12}{5} \end{cases}$ $\quad -\dfrac{12}{5} \le x \le \dfrac{17}{4}$. Серединой промежутка [a, b] будет число $\dfrac{a+b}{2}$. В данном случае $\dfrac{\frac{17}{4}-\frac{12}{5}}{2}=\dfrac{37}{40}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3}{5}+\dfrac{3x-1}{10} \ge \dfrac{2-x}{5}-0{,}3 \\ 1 \ge \dfrac{x-1}{3}+0{,}5(x+3) \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{6+3x-1-4+2x+3}{10} \ge 0 \\ \dfrac{x-1+1{,}5x+4{,}5-3}{3} \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{5x+4}{10} \ge 0 \\ \dfrac{2{,}5x+0{,}5}{3} \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x \ge -4 \\ 2{,}5x \le -0{,}5 \end{cases}$ $\quad -\dfrac{4}{5} \le x \le -\dfrac{1}{5}$. Середина [a, b] – это $\dfrac{a+b}{2}$.

$\dfrac{-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

4.32.

а. $\begin{cases} 3-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{30-3+7x+5x+5-35-40x}{10}<0 \\ 21x-35+68-4x-18+5x-15>0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{-28x-3}{10}<0 \\ 22x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{3}{28} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

1 — наименьшее целое число, удовлетворяющее системе.

б. $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{3x-1}{6}<\frac{2-x}{12}-\frac{x+1}{2}+3 \\ x>\frac{5x-4}{10}-\frac{3x-1}{5}-2{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4x-6x+2-2+x+6x+6-36}{12}<0 \\ \frac{5x-4-6x+2-25-10x}{10}<0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{5x-30}{12}<0 \\ \frac{-11x-27}{10}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x<30 \\ 11x>-27 \end{cases}$ $\begin{cases} x<6 \\ x>-\frac{27}{11} \end{cases}$ $-\frac{27}{11}<x<6$.

6 — наибольшее целое, удовлетворяющее системе.
–2 — наименьшее целое, удовлетворяющее системе

4.33.

а) $\begin{cases} 0{,}2x>-1 \\ -\frac{x}{3}\geq 1 \end{cases}$ $-5<x\leq -3$. Целые числа: –4, -3

б) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}<\frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2}\geq\frac{x}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3x-3-2x}{6}<0 \\ \frac{5x+5-2x}{10}\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-3}{6}<0 \\ \frac{3x+5}{2}\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<3 \\ x\geq -\frac{5}{3} \end{cases}$

$-\frac{5}{3}\leq x<3$ –1, 0, 1, 2

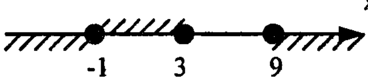
в) $\begin{cases} 1-0{,}5x\geq 0 \\ -\frac{x+5}{5}<-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}5x\leq 1 \\ x+5>5 \end{cases}$ $0<x\leq 2$; 1. 2

г) $\begin{cases} \frac{x-1}{4}\leq\frac{x}{5} \\ \frac{x}{3}>\frac{x+4}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5x-5-4x}{20}\leq 0 \\ \frac{7x-3x-12}{21}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-5}{20}\leq 0 \\ \frac{4x-12}{21}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 5 \\ x>3 \end{cases}$ $3<x\leq 5$; 4. 5

4.34.

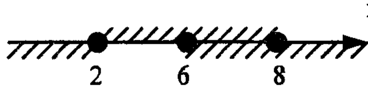
а) $\begin{cases} |x-1|\leq 2 \\ |x-4|\geq 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -2\leq x-1\leq 2 \\ x-4\geq 5,\quad x-4\leq -5 \end{cases}$

$\begin{cases} -1\leq x\leq 3 \\ x\geq 9,\quad x\leq -1 \end{cases}$ $x=-1$;



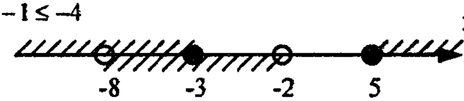
б) $\begin{cases} |x-5|\leq 3 \\ |x-4|\geq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -3\leq x-5\leq 3 \\ x-4\geq 2,\quad x-4\leq -2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\leq x\leq 8 \\ x\geq 6,\quad x\leq 2 \end{cases}$ $x=2,\quad 6\leq x\leq 8$;



в) $\begin{cases} |x+5|<3 \\ |x-1|\geq 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -3<x+5<3 \\ x-1\geq 4,\quad x-1\leq -4 \end{cases}$

$\begin{cases} -8<x<-2 \\ x\geq 5,\quad x\leq -3 \end{cases}$, $-8<x\leq -3$

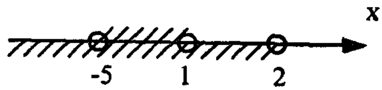


г) $\begin{cases} |x-3| < 5 \\ |x+2| \ge 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -5 \le x-3 \le 5 \\ x+2 \ge 1, \quad x+2 \le -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 < x < 8 \\ x \ge -1, \quad x \le -3 \end{cases}$, $-1 \le x < 8$

4.35.

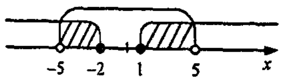
а) $\begin{cases} |2x+4| < 6 \\ 3-2x > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} -6 \le 2x+4 \le 6 \\ 4 > 2x \end{cases}$



$\begin{cases} -10 < 2x < 2 \\ x < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -5 < x < 1 \\ x < 2 \end{cases}$ $-5 < x < -1$

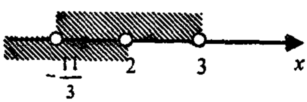
б) $\begin{cases} x^2 < 25; \\ |2x+1| \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 5; \\ |2x+1| \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 5$, $2x+1 \ge 3$ или $2x+1 \le -3$.

Отсюда: $-5 < x < 5$, $x \ge 1$ или $x \le -2$.



Т.е. $-5 < x \le -2$, $1 \le x < 5$

Ответ: $x \in (-5; -2] \cup [1, 5)$; $-5 < x \le -2$, $1 \le x < 5$.

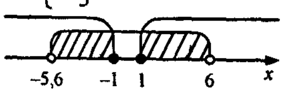


в) $\begin{cases} |3x+1| < 10 \\ 4x+3 < 11 \end{cases}$ $\begin{cases} -10 < 3x+1 < 10 \\ 4x < 8 \end{cases}$

$\begin{cases} -11 < 3x < 9 \\ x < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{11}{3} < x < 3 \\ x < 2 \end{cases}$, $-\frac{11}{3} < x < -2$,

г) $\begin{cases} x^2 \ge 1 \\ |5x-1| < 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ge 1 \\ |5x-1| < 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -1 \end{array}\right. \\ -29 < 5x-1 < 29 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ -\frac{28}{5} < x < 6 \end{cases}$



Ответ: $-5{,}6 < x \le -1$, $1 \le x < 6$

4.36.

а) $(x-1)\sqrt{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right. \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$

б) $(x+3)\sqrt{(x+4)(2-x)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(2-x) \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 2 \\ x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \le x \le 2$

в) $\sqrt{x^2+3x+4}\cdot(x-2)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+4>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>2 \\ x>2 \end{cases}$

г) $(5-x)\sqrt{(x-1)(x+5)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+5)\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -5 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -5 \\ 1\leq x\leq 5 \end{array}\right.$

4.37.

а) $\dfrac{2x+10}{\sqrt{x^2-16}}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+10\geq 0 \\ x^2-16>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -5 \\ |x|>4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5\leq x<-4 \\ x>4 \end{array}\right.$

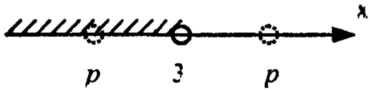
б) $\dfrac{\sqrt{-x^2+4x}}{2x-2}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x>0 \\ 2x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<4 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-6x}}{4x-28}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x\geq 0 \\ 4x-28<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \\ x<7 \end{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ 6\leq x<7 \end{array}\right.$

г) $\dfrac{5x+10}{\sqrt{9-x^2}}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+10>0 \\ 9-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ |x|<3 \end{cases} \Leftrightarrow \{-2<x<3$

4.38.

а) $\begin{cases} x<3 \\ x>p \end{cases}$

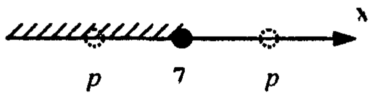


Изобразим на рисунке различные положения точки p

Видно, что при $p<3$ решения есть

При $p\geq 3$ решений нет.

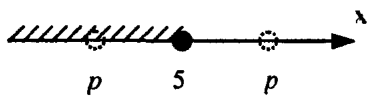
б) $\begin{cases} x\leq 7 \\ x\geq p \end{cases}$



При $p>7$ решений нет

При $p\leq 7$ решения есть

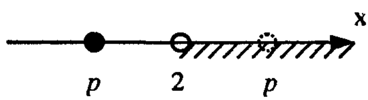
в) $\begin{cases} x\leq 5 \\ x>p \end{cases}$



При $p\geq 5$ решений нет

При $p\leq 5$ решения есть.

г) $\begin{cases} x\leq p \\ x\geq 2 \end{cases}$



При $p\geq 2$ решения есть. При $p<2$ решений нет.

4.39.

$\begin{cases} x>3 \\ x>p \end{cases}$;

а) $p=5$; б) Таких p нет; в) $p\leq 3$ г) Таких p нет

4.40.

$(p-2)x^2-(p-4)x+(3p-2)>0$

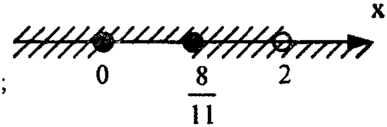
а) 1. Неравенство не имеет решений, если первый (старший) коэффициент отрицателен и дискриминант меньше либо равен 0.

2. Оно также может не иметь решений, если и первый и второй коэффициент равны 0, а свободный член меньше либо равен 0.

$$1. \begin{cases} p-2<0 \\ (p-4)^2-4(p-2)(3p-2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-2<0 \\ p^2-8p+16-12p^2+16p-16\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p<2 \\ -11p^2+8p\le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p<2 \\ p\left(p-\frac{8}{11}\right)\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p<2 \\ p\ge\frac{8}{11}, \quad p\le 0 \end{cases} \quad p\le 0, \ \frac{8}{11}\le p<2;$$



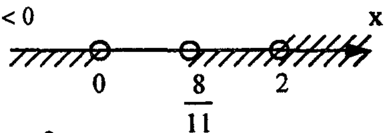
$$2. \begin{cases} p-2=0 \\ p-4=0 \\ 3p-2\le 0 \end{cases}$$ Решений нет. Итак, $p\le 0, \ \frac{8}{11}\le p<2$

б) 1. Неравенство выполняется при любых x, если первый коэффициент положителен и дискриминант отрицателен.

2. Неравенство выполняется при любых x, если и первый и второй коэффициент нулевые, а свободный член положителен.

$$1 \ \begin{cases} p-2>0 \\ -11p^2+8p<0 \end{cases} \quad \begin{cases} p>2 \\ p>\frac{8}{11}, \quad p<0 \end{cases}$$

$p>2$



$$2. \begin{cases} p-2=0 \\ p-4=0 \\ 3p-2>0 \end{cases}$$ Решений нет. Итак, $p>2$.

Ответы решебника неверны.

Домашняя контрольная работа

ВАРИАНТ 1.

1. 18; 29; 40; 51; 62; 73; 84; 95

2. M = {1; 4; 9; 16; 25; ...; 81}; числа, меньшие 100 и являющиеся полным квадратом какого-либо натурального числа.

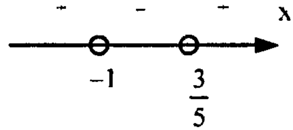
3. $A=[1;5)$; $B=[4;6]$; $C=(-3;2]$; $(A\cup B)=[1;6]$; $(A\cup B)\cap C=[1;2]$

4. $|2x+4|\le 7$, $-7\le 2x+4\le 7$, $-11\le 2x\le 3$, $-\frac{11}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

5. Выражение определено, если $5x^2+2x-3\ge 0$, $\frac{D}{4}=1+15=16$;

$x_1 = \frac{-1+4}{5} = \frac{3}{5}$; $x_2 = \frac{-1-4}{5} = -1$

$5\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+1) \ge 0$, $\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+1) \ge 0$

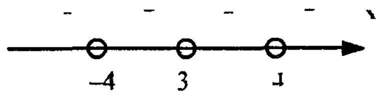


$x \ge \frac{3}{5}$, $x \le -1$

6. $\frac{x^2+2{,}5x-18}{1{,}5x-6} > 1$, $\frac{x^2+2{,}5x-18-1{,}5x+6}{1{,}5x-6} > 0$, $\frac{x^2+x-12}{1{,}5(x-4)} > 0$

по теореме Виета: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$

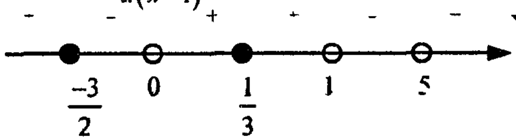
$\frac{(x-3)(x+4)}{x-4} > 0$. $x > 4$, $-4 < x < 3$



7. $f(x) \ge 0$

$\frac{(3x-1)^2(2x+3)(5-x)}{x(x-1)} \ge 0$ $\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)}{x(x-1)} \le 0$

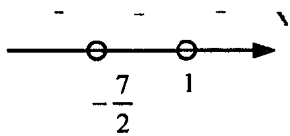
$1 < x \le 5$. $-\frac{3}{2} \le x < 0$.



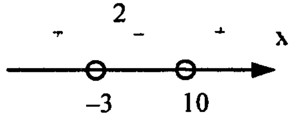
8. $\begin{cases} 2x^2+5x-7 > 0 \\ \frac{3x-4}{2x+6} \le 1 \end{cases}$ $D = 25+56 = 81$ $x_1 = \frac{-5+9}{4} = 1$

$x_2 = \frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2}$

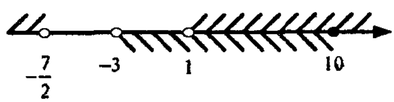
$\begin{cases} 2(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right) > 0 \\ \frac{3x-4-2x-6}{2x+6} \le 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x > 1, \quad x < -\frac{7}{2} \\ \frac{x-10}{2(x+3)} \le 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x > 1, \quad x < -\frac{7}{2} \\ -3 < x \le 10 \end{cases}$, $1 < x \le 10$.



9. $-3 \le \frac{5+3x}{4} \le -1$

$-12 \le 5+3x \le -4$

$-\frac{17}{3} \le x \le -3 \Rightarrow x \in \left[-\frac{17}{3}; -3\right] \Rightarrow$ длина отрезка $= 2\frac{2}{3}$, середина $= -4\frac{1}{3}$

10. $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2x-11+38-4x-8x}{4}<0 \\ \dfrac{10x+75-9x+9-15x}{45}>0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{-10x+27}{4}<0 \\ \dfrac{-14x+84}{45}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x>27 \\ 14x<84 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{27}{10}=2{,}7 \\ x<6 \end{cases}$, $2{,}7<x<6$

Целые 3, 4, 5.

ВАРИАНТ 2.

1. 11; 14; 19; 26; 35; 46; 59; 59; 74; 91.

2. M = {10; 19; 28; 37; 46; 46; ...; 91}

Множество двузначных чисел, при делении на 9 дающих остаток 1.

3. $A=[1;4)$ $B=[2;5]$ $C=(3;7]$

$(A\cap B)\cup C$; $A\cap B=[2;4)$; $(A\cap B)\cup C=[2;7]$

4. $|4-3x|\geq 6$

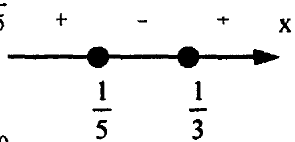
$4-3x\geq 6$, $3x\leq -2$, $x\leq -\dfrac{2}{3}$, $4-3x\leq -6$, $3x\geq 10$, $x\geq\dfrac{10}{3}$.

5. Выражение определено, если

$8x-15x^2-1\geq 0;\quad 15x^2-8x+1\leq 0$

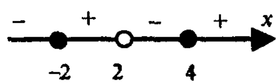
$\dfrac{D}{4}=16-15=1$, $x_1=\dfrac{4+1}{15}=\dfrac{1}{3}$; $x_2=\dfrac{4-1}{15}=\dfrac{1}{5}$

$15\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)\leq 0$, $\dfrac{1}{5}\leq x\leq\dfrac{1}{3}$



6. $\dfrac{x^2-4{,}5x-3}{5-2{,}5x}\leq 1$; $\dfrac{x^2-4{,}5x-3+2{,}5x-5}{-2{,}5(x-2)}\leq 0$,

$\dfrac{x^2-2x-8}{x-2}\geq 0$,



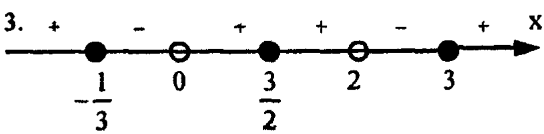
по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=-2$

$\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-2}\geq 0$, $-2\leq x<2$, $x\geq 4$

7 $f(x)\leq 0$

$\dfrac{(2x-3)^2(3x+1)(x-3)}{x(2-x)}\leq 0$; $\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\cdot\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-3)}{x(x-2)}\geq 0$

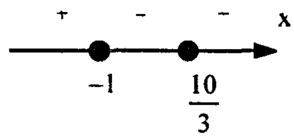
$x\leq -\dfrac{1}{3}$, $0<x<2$, $x\geq 3$.



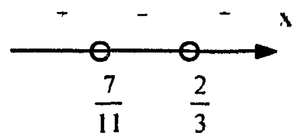
8. $\begin{cases} 3x^2-7x-10\le 0 \\ \dfrac{2x-1}{2-3x}>3 \end{cases}$ $\quad D=49+120=169=13^2$

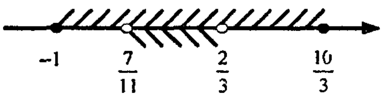
$x_1=\dfrac{7+13}{6}=\dfrac{10}{3},\ x_2=\dfrac{7-13}{6}=-1$

$\begin{cases} 3\left(x-\dfrac{10}{3}\right)(x+1)\le 0 \\ \dfrac{2x-1-6+9x}{2-3x}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\le x\le\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{11x-7}{-1(3x-2)}>0 \end{cases}$



$\begin{cases} -1\le x\le\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{x-\dfrac{7}{11}}{x-\dfrac{2}{3}}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\le x\le\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{7}{11}<x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\dfrac{7}{11}<x<\dfrac{2}{3}$





9. $2\le\dfrac{4x-7}{5}\le 4$

$10\le 4x-7\le 20$

$\dfrac{17}{4}\le x\le\dfrac{27}{4}\Rightarrow x\in\left[4\dfrac{1}{4};6\dfrac{3}{4}\right]$ $\Rightarrow$ длина отрезка = 2,5, середина = 5,5

10. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x}{6}<2-\dfrac{x+5}{2}, \\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}<3x-\dfrac{x+1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3x-3-4x-6+x-12+3x+15}{6}<0 \\ \dfrac{8-x-5+16-4x-24x+2x+2}{8}<0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{3x-6}{6}<0 \\ \dfrac{-27x+21}{8}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-6<0 \\ -27x+21<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<+6 \\ 27x>21 \end{cases}$ $\begin{cases} x<+2 \\ x>\dfrac{7}{9} \end{cases}$, $\dfrac{7}{9}<x<2$

Целое: 1.

ГЛАВА 2. Системы уравнений

§ 5. Основные понятия

5.1.

а) $3x+y=10$. Подставим пару чисел (3, 1) в уравнение: $9+1=10$, верно. Пара чисел (3, 1) удовлетворяет уравнению, значит является его решением б) $x^2 - 2y = 1$. Подставим: $9 - 2 = 1$; $7 = 1$. Неверно. (3, 1) – не решение уравнения.

в) $5x^3 - y = 134$. Подставим: $135 - 1 = 134$; $134 = 134$. Верно.

(3, 1) – решение уравнения.

г) $\frac{x}{y} + 2 = -5y$; $\frac{3}{1} + 2 = -5$; $5 = -5$ – неверно.

(3, 1) – не решение уравнения.

5.2.

$2x^2 - y^2 = 1$

а) (1; 1); $2 \cdot 1 - 1 = 1$ — верно. Эта пара является решением.

б) $(2; \sqrt{7})$; $2 \cdot 4 - (\sqrt{7})^2 = 1$ — верно. Эта пара является решением.

в) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$; $2 \cdot \frac{1}{4} - 16 = 1$ — неверно. Эта пара не является решением.

г) $(\sqrt{3}; \sqrt{5})$; $2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 1$ — верно. Эта пара является решением.

5.3.

По формуле расстояния $A(x_0 y_0)$ и $B(x_1 y_1)$:

$l = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

а) $l = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$

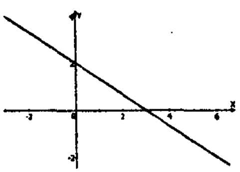
б) $l = \sqrt{(0+5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

в) $l = \sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2} = 5$

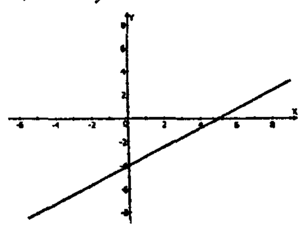
г) $l = \sqrt{(-8-0)^2 + (-9-6)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

5.4.

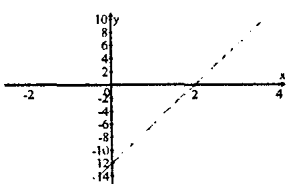
а) $2x + 3y = 6$



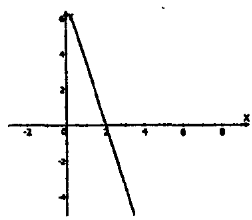
б) $4x - 5y = 20$



в) $6x - y = 12$

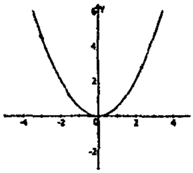


г) $7x + 2y = 14$

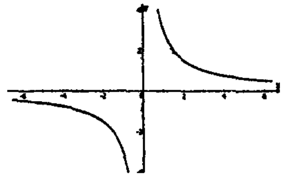


5.5.

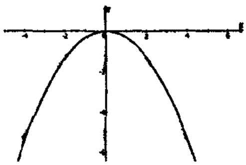
а) $2y-x^2=0$



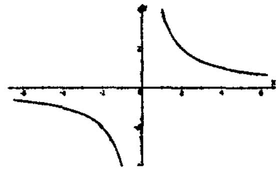
б) $\frac{3}{x}-y=0$



в) $y+\frac{x^2}{3}=0$

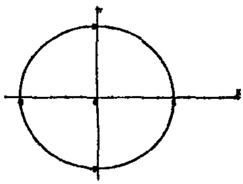


г) $\frac{1}{x}-\frac{y}{4}=0$

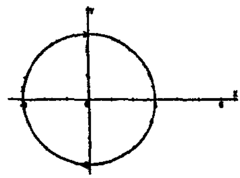


5.6.

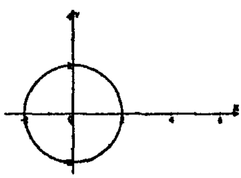
а) $x^2+y^2=25$



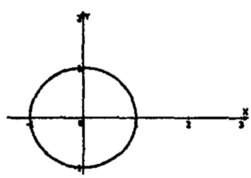
б) $x^2+y^2=9$



в) $x^2+y^2=4$



г) $x^2+y^2=1$



5.7.

а) $(x+1)^2+(y-3)^2=25$, $(x-(-1))^2+(y-3)^2=5^2$.
Центр (–1; 3). Радиус 5.

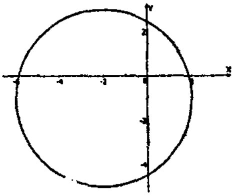
б) $(x+5)^2+(y+7)^2=1$, $(x-(-5))^2+(y-(-7))^2=1^2$
Центр (–5; –7). Радиус 1

в) $(x-10)^2+(y+1)^2=17$. $(x-10)^2+(y-(-1))^2=(\sqrt{17})^2$
Центр (+10; –1). **Радиус $\sqrt{17}$**

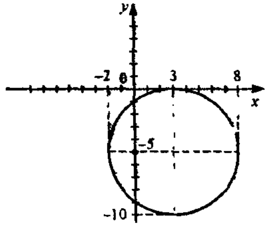
г) $(x-4)^2+(y-5)^2=144$. $(x-4)^2+(y-5)^2=12^2$
Центр (4; 5). Радиус 12.

5.8.

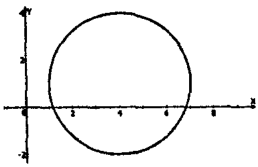
а) $(x+2)^2+(y+1)^2=16$



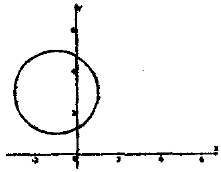
б) $(x-3)^2+(y+5)^2=25$



в) $(x-4)^2+(y-1)^2=9$

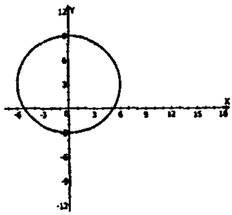


г) $(x+1)^2+(y-3)^2=4$

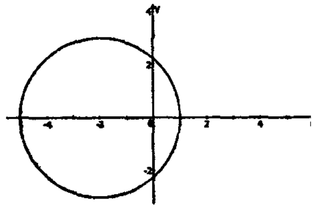


5.9.

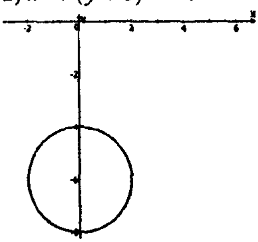
а) $x^2+(y-3)^2=36$



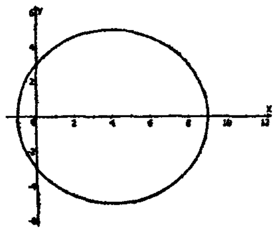
б) $(x+2)^2+y^2=9$



в) $x^2+(y+6)^2=4$



г) $(x-4)^2+y^2=25$



5.10.

а) $(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$, $x^2+y^2=25$;

б) $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$, $x^2+y^2=3$,

в) $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$,

г) $(x-0)^2+(y-0)^2=1$, $x^2+y^2=1$

5.11.

Если (a, b) – центр и R – радиус, то уравнение имеет вид: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

а) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$;

б) $(x-(-3))^2+(y-8)^2=11^2$, $(x+3)^2+(y-8)^2=121$;

в) $(x-0)^2+(y-(-10))^2=7^2$, $x^2+(y+10)^2=49$;

г) $(x-(-5))^2+(y-(-2))^2=4^2$, $(x+5)^2+(y+2)^2=16$.

5.12.

а) Окружность с центром (0; 0). Радиус ее 2.

$(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$, $x^2+y^2=4$

б) Окружность с центром (0; 0). Радиус ее $\sqrt{3}$.

$(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{3})^2$, $x^2+y^2=3$

в) Окружность с центром (0; 0). Радиус 1,5.

$(x-0)^2+(y-0)^2=(1{,}5)^2$, $x^2+y^2=2{,}25$

г) Окружность с центром (0; 0). Радиус $\frac{1}{2}$.

$(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $x^2+y^2=\frac{1}{4}$.

5.13.

а) Окружность с центром (–2; 2). Радиус 1.

$(x-(-2))^2+(y-2)^2=1$, $(x+2)^2+(y-2)^2=1$

б) Окружность с центром (3; –1). Радиус 2.

$(x-3)^2+(y-(-1))^2=2^2$, $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

в) Окружность с центром (1; 4). Радиус 2.

$(x-1)^2+(y-4)^2=2^2$, $(x-1)^2+(y-4)^2=4$

г) Окружность с центром (–3; –2). Радиус 1.

$(x-(-3))^2+(y-(-2))^2=1^2$, $(x+3)^2+(y+2)^2=1$

5.14.

а) Окружность с центром (0; –2). Радиус 2.

$(x-0)^2+(y-(-2))^2=2^2$, $x^2+(y+2)^2=4$

б) Окружность с центром (–3; 0). Радиус 3

$(x-(-3))^2+(y-0)^2=3^2$, $(x+3)^2+y^2=9$

в) Окружность с центром (0; 3). Радиус 3.

$(x-0)^2+(y-3)^2=3^2$, $x^2+(y-3)^2=9$

г) Окружность с центром (1; 0). Радиус 1.

$(x-1)^2+(y-0)^2=1^2$, $(x-1)^2+y^2=1$

5.15.

а) $(x+2)^2+(y-3)^2=0$

$(x+2)^2\geq 0$, $(y-3)^2\geq 0$ поэтому равенство 0 достигается, когда оба слагаемых равны 0.

Т.е. $\begin{cases}(x+2)^2=0\\(y-3)^2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+2=0\\y-3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

б) $\sqrt{2x-1}+|2y+3|=0$, $\sqrt{2x-1}\geq 0$ и $|2y+3|\geq 0$.

аналогично с 100 (а) $\begin{cases}2x-1=0\\2y+3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-\frac{3}{2}\end{cases}$

в) аналогично с 100 (а) $\begin{cases}3x-4=0\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\y=0\end{cases}$

г) аналогично с 100 (а) $\begin{cases}x=0\\y-1=0\\z-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=2\end{cases}$

Ответ: а) (–2; 3); б) $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; в) $\left(\frac{4}{3};0\right)$; г) (0; 1; 2).

5.16.

а) $\begin{cases}4+9=13\\2\cdot 2+3=7\end{cases}$ – верны оба уравнения. Является

б) $\begin{cases}4+3=5\\3\cdot 2-1=3\end{cases}$ – неверны оба уравнения. Не является

в) $\begin{cases}4+3\cdot 3=13\\3+2=1\end{cases}$ – второе неверно. Не является

г) $\begin{cases}4+9=4\\10-6=4\end{cases}$ – первое неверно Не является

5.17. $\begin{cases}x^2+y^2=1\\y-2x=1\end{cases}$

а) $\begin{cases}0+1=1\\1-2\cdot 0=1\end{cases}$ – оба верны. Является

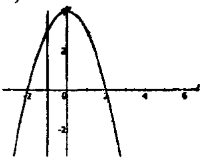
б) $\begin{cases}1+1=1\\-1-2\cdot(-1)=1\end{cases}$ – первое неверно Не является

в) $\begin{cases}1+0=0\\0-2\cdot 1=1\end{cases}$ – второе неверно. Не является

г) $\begin{cases}1+1=1\\1-2\cdot 0=1\end{cases}$ – оба неверны. Не является

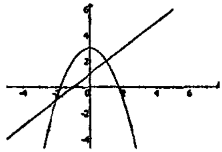
5.18.

а)



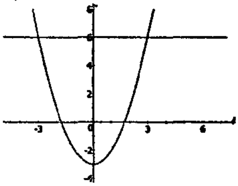
Ответ : (-1;3).

б)



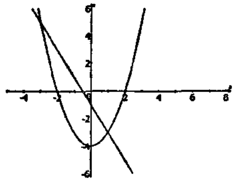
Ответ : (-2;-1) ; (1;2) .

в)



Ответ : (-3;6) ; (3;6).

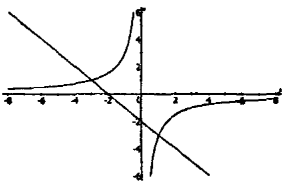
г)



Ответ : (-3;5) ; (1;-3) .

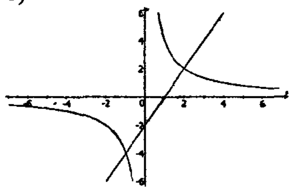
5.19.

а)



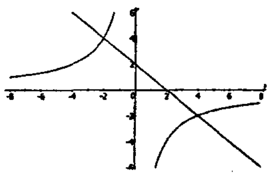
Ответ : (-3;1) ; (1;-3).

б)



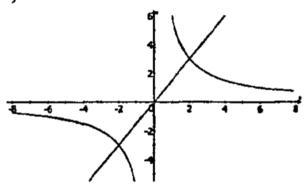
Ответ : (-1;-4) ; (2;2).

в)



Ответ : (-2;4) ; (4;-2).

г)



Ответ : (-2;-3) ; (2;3).

5.20.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2=1 \\ y=x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{2} \\ y=x \end{cases}$ $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}},\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right);\ \left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}},-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$

Два решения.

б) $\begin{cases} y=2x-1 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x-1 \\ (x-1)^2+(2x-1+2)^2=9 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-1 \\ x^2-2x+1+4x^2+4x+1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x-1 \\ 5x^2+2x-7=0 \end{cases}$

$\dfrac{D}{4}=1+35=36=6^2,\ x_1=\dfrac{-1+6}{5}=\dfrac{5}{5}=1,\ x_2=\dfrac{-1-6}{5}=-\dfrac{7}{5}$

Нашли два значения x, для каждого есть соответствующее y.
2 решения.

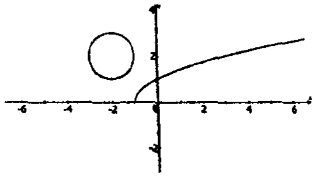
в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ x^2 = y + 2 \end{cases}$

$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2, y = 1 \Rightarrow$

решение: (0; –2), $\left(\sqrt{3}; 1\right)$, $\left(-\sqrt{3}; 1\right) \Rightarrow$ 3 решения.

г) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = \sqrt{x+1} \end{cases}$

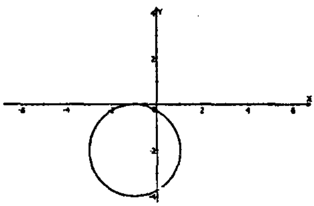
Построим графики для обоих уравнений



Нет точек пересечения, следовательно нет решений.

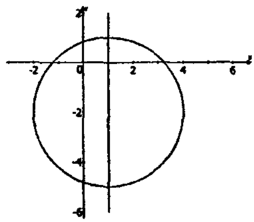
5.21.

а)



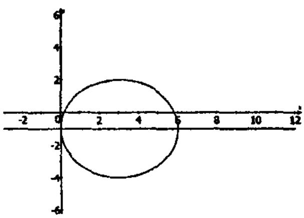
Ответ : (-1;0) .

б)



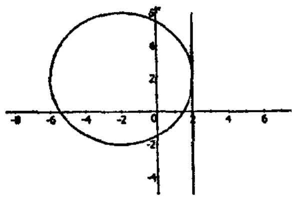
Ответ : (1;1) (1; –5).

в)



Ответ : (0;-1) ; (6;-1).

г)

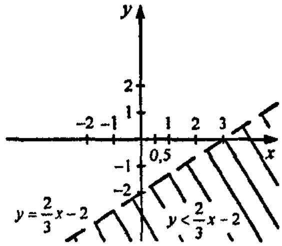


Ответ : (2;2) .

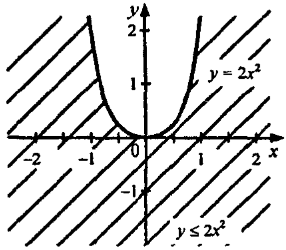
5.22.

а) $2x - 3y > 6$, $-3y > 6 - 2x$, $y < \frac{2}{3}x - 2$

Построим прямую $y = \frac{2}{3}x - 2$.



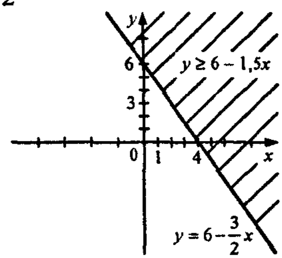
б) $y \le 2x^2$. Построим параболу $y = 2x^2$.



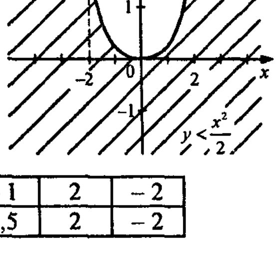
в) $12-3x-2y \le 0$

Строим прямую $12 - 3x - 2y = 0$;

$2y = 12 - 3x$; $y = 6-\frac{3}{2}x$



г) $x^2-2y>0$; $y<\frac{x^2}{2}$. Построим параболу $y=\frac{x^2}{2}$.



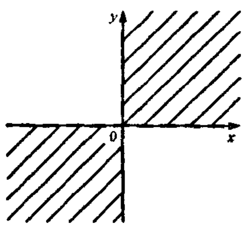
x	0	1	– 1	2	– 2
y	0	0,5	0,5	2	– 2

5.23.

а) $xy > 0$

x	0	любое
y	любое	0

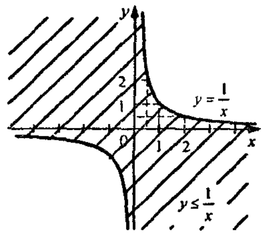
$xy = 0$



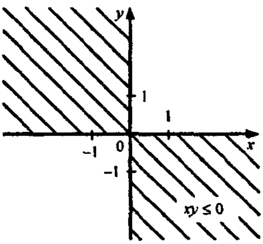
б) $xy \le 1$. Строим $xy = 1$.

гипербола

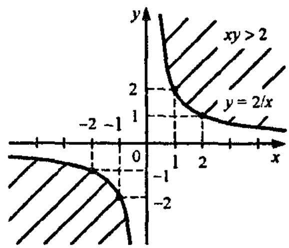
x	1	-1	$\frac{1}{2}$	2
y	1	-1	2	$\frac{1}{2}$



в) $xy \le 0$ (см. 108 а))

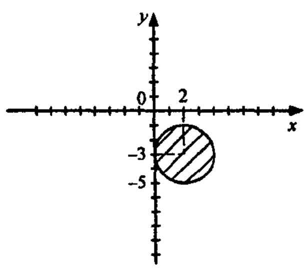


г) $xy > 2$. Строим гиперболу $y = \frac{2}{x}$



5.24.

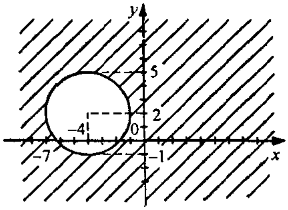
а) $(x-2)^2 + (y+3)^2 < 4$



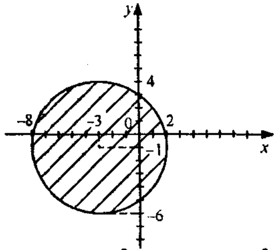
Построим окружность $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$. Решением будет внутренность круга без границы.

б) $(x+4)^2 + (y-2)^2 \ge 9$

Построим окружность $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Решением будет часть плоскости, лежащая вне круга, включая границу.

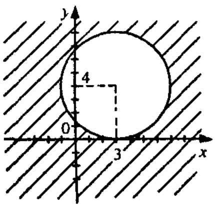


в) $(x+3)^2+(y+1)^2 \le 25$



Построим окружность $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$. Решением будет внутренность круга с границей.

г) $(x-3)^2+(y-4)^2 > 16$



Построим окружность $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$. Решением будет часть плоскости, лежащая вне круга, не включая границу.

5.25.

а) $(x+5)^2+(y-2)^2=r^2$

(т.к. она касается оси y) $\Rightarrow$ $r=5$ $\Rightarrow$ $(x+5)^2+(y-2)^2=25$

б) $(x-12)^2+(y+5)^2=r^2$

(т.к. она проходит через начало координат) $\Rightarrow$ $r = 13$ $\Rightarrow$ $(x - 12)^2 +$ $+ (y+5)^2=169$

в) $(x+4)^2+(y+6)^2=r^2$

(т.к. она касается оси x) $\Rightarrow$ $r=6$ $\Rightarrow$ $(x+4)^2+(y+6)^2=36$

г) $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

(т.к. она проходит через точку $(-4; -7)$) $\Rightarrow$ $r=10$ $\Rightarrow$ $(x-2)^2+(y-1)^2=100$.

5.26.

а) $A(-4; 7)$, $B(6; -3)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Центр окружности } O=\dfrac{A+B}{2} \Rightarrow O(1;2) \\ \text{Радиус равен } \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(6-1)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2} \end{array}\right| \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=50$$

б) $A(-1; -6)$, $B(7; 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Центр окружности } O = \dfrac{A+B}{2} \Rightarrow O(3;-3) \\ \text{Радиус равен } \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(7-3)^2+3^2} = 5 \end{array}\right| \Rightarrow (x-3)^2+(y+3)^2 = 25$$

5.27.

а) Центр окружности: $O(x_0; 0) \Rightarrow (x-x_0)^2+y^2=r^2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Она проходит через } (-4;4) \Rightarrow (x_0+4)^2+16=r^2 \\ \text{Она проходит через } (-4;0) \Rightarrow (x_0+2)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

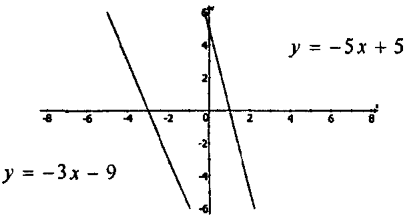
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-7 \\ r=5 \end{array}\right| \Rightarrow (x+7)^2+y^2=25$$

б) Центр окружности: $O(0; y_0) \Rightarrow x^2+(y-y_0)^2=r^2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Она проходит через } (8;0) \Rightarrow 64+y_0^2=r^2 \\ \text{Она проходит через } (-6;2) \Rightarrow 36+(y_0-2)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_0=-6 \\ r=10 \end{array}\right| \Rightarrow$$

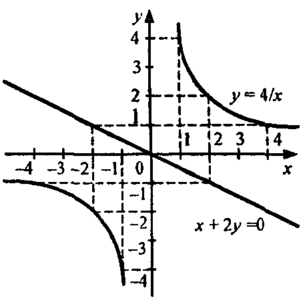
$$\Rightarrow x^2+(y+6)^2=100$$

5.28.



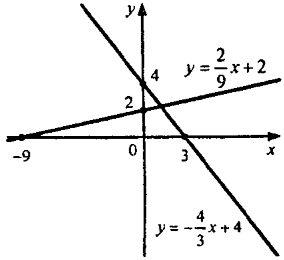
а)

б) $(xy-4)(x+2y)=0 \Leftrightarrow xy-4=0$ или $x+2y=0$.
Гипербола $xy-4=0$
прямая $x+2y=0$



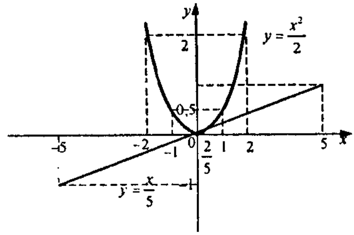
в) $(4x+3y-12)(2x-9y+18)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-12=0$
или $2x-9y+18=0$.

Строим эти прямые: $y=-\dfrac{4}{3}x+4$ и $y=\dfrac{2}{9}x+2$.



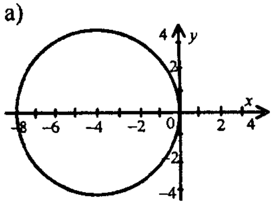
г) $(x-5y)(2y-y^2)=0 \Leftrightarrow x-5y=0,\ 2y=x^2=0.$

Строим прямую $y=\frac{x}{5}$ и параболу $y=\frac{x^2}{2}$.



5.29.

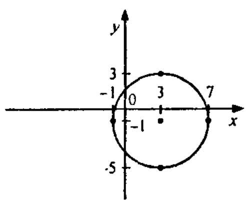
а)

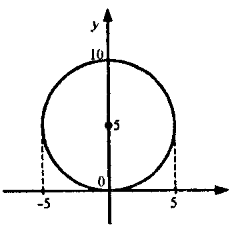


б) $x^2+y^2-6x+2y=6$. Преобразуем это выражение:

$(x^2-6x+9)-9-6+(y^2+2y+1)-1=0$

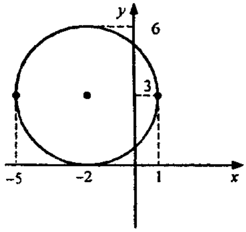
$(x-3)^2+(y+1)^2=16$





в)

г) $x^2 + y^2 = 6y - 4x - 4$. Преобразуем:
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$



5.30.

а) $2x - 3y = 7$

НОК (2; 3) = 6. Решение (2, – 1) удовлетворяет уравнению. Значит решение $x = 3k + 2$, $y = 2k - 1$, где $k \in \mathbb{Z}$ – тоже удовлетворяет уравнению:

$6k + 4 - 6k + 3 = 7$

$7 = 7$, верно для любого $k \in \mathbb{Z}$.

б) $2x + 3y = 1$

НОК(2; 3) = 6 решение (2; –1) удовлетворяет уравнению $\Rightarrow$ решение $x = 3k + 2$

$y = -2k - 1$, где $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет уравнению для любого $k \in \mathbb{Z}$:

$2(3k + 2) + 3(-2k - 1) = 6k + 4 - 6k - 3 = 1$.

в) $5x + 3y = 13$

Аналогично, КОН(5, 3) = 15, решение (2; 1) – удовлетворяет $\Rightarrow$ $x = 3k + 2$, $y = -5k + 1$ тоже удовлетворяет для любого $k \in \mathbb{Z}$.

г) $4y - 5x = 19$; решение: (–3; 1)

НОК(5; 4) = 20 $\Rightarrow$ $x = 4k - 3$, $y = 5k + 1$ – решение для любого $k \in \mathbb{Z}$.

5.31.

а) $9x^2 - 4y^2 = 5$

$(3x - 2y)(3x + 2y) = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 \Rightarrow$

или $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} 6x = x \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

также $(3x - 2y)(3x + 2y) = (-5)(-1) = (-1)(-5)$.

Отсюда получаем:

$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

(1; 1); (1; –1); (–1; 1); (–1; –1).

б) $x^2 - 9y^2 = 7 \Rightarrow (x - 3y)(x + 3y) = 7$.

7 – простое $\Rightarrow$ аналогично с а) получаем, (4; 1); (4; –1); (–4; 1); (–4; –1).

5.32.

а) $xy = 2x + y$

$x(y-2) = y - 2 + 2$, $(y-2)(x-1) = 2 \cdot 1 = 1 \cdot = (-1)(-2) = (-2)(-1)$

то есть: $\begin{cases} y-2=2 \\ x-1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y-2=1 \\ x-1=2 \end{cases}$; $\begin{cases} y-2=-1 \\ x-1=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y-2=-2 \\ x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow$

Ответ: (2; 4); (3; 3); (–1; 1); (0; 0).

б) $2x^2 + xy - y^2 = 5 \Rightarrow (2x)^2 + 2xy + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 2y^2 = 10$

$\left(2x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 = 10$, $\left(2x + \frac{y}{2} - \frac{9}{4}y\right)\left(2x + \frac{y}{2} + \frac{9}{4}y\right) = 10$

$\left(2x - \frac{7}{4}y\right)\left(2x + \frac{11}{4}y\right) = 10 = 10 \cdot 1 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = (-10) \cdot (-1) =$ и т.д. аналогично.

Ответ: (2; 3); (2; –1); (–2; 1); (–2; –3).

5.33.

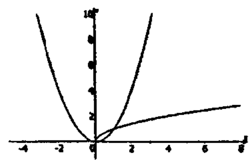
$10a + b = 6(a + b)$, $\overline{ab}$ — ?

$\left.\begin{array}{l} 4a = 5b \Rightarrow a - \text{делится на } 5 \\ 0 < a \le 9 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 54$

Ответ: 54.

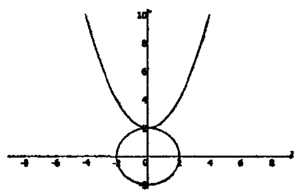
5.34.

а) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$



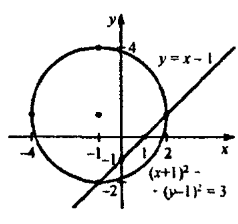
Точки пересечения (0; 0), (1; 1)

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 0{,}5x^2 + 2 \end{cases}$



Точка пересечения (0; 2)

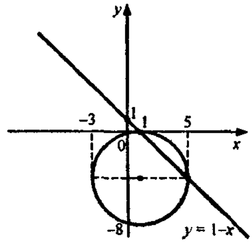
в) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ y + 1 = x \end{cases}$ –



окружность с центром (–1; 1) и радиусом 3.

Из графика видно, что точки (2; 1) и (–1; –2) – решения системы.

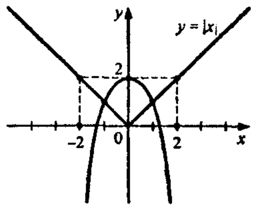
г) $\begin{cases}(x-1)^2+(y+4)^2=16\\ x+y=1\end{cases}$ –



окружность с центром в (1; –4) и радиусом 4.
Из графика видно, что точки (1; 0) и (5; –4) – решения системы.

5.35.

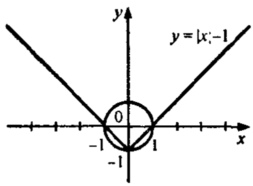
а) $\begin{cases}y=|x|;\\ x^2+y=2 - \text{парабола } y=2-x^2\end{cases}$



x	0	1	–1
y	2	1	1

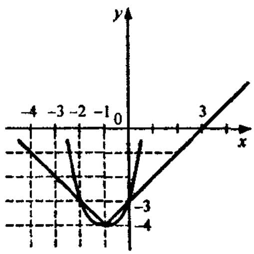
Из графика видно, что точки (–1; 1) и (1; 1) удовлетворяют системе.

б) $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y=|x|-1\end{cases}$ – окружность с центром в начале координат и радиусом 1.



Из графика: (–1; 0); (1; 0) и (0; –1) решения системы уравнений.

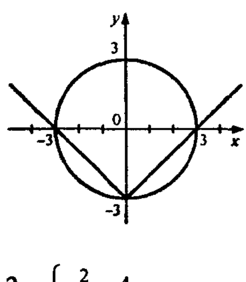
в) $\begin{cases}x^2-y=3-2x\\ y=|x+1|-4\end{cases}$ – парабола $y=$
$=x^2+2x-3$
Преобразуем: $y=x^2+2x+1-4$
$y=(x+1)^2-4$



x	0	1	–1
y	2	1	1

(–2; –3); (–1; –4); (0; –3) – решения.

г) $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=|x|-3\end{cases}$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 3.



Из графика: (–3; 0); (0; –3); (3; 0) – решения системы.

5.36.

а) Подставим (1; -2) в уравнения: $\begin{cases}p^2-2=2\\ 1+4=p+3\end{cases}$ $\begin{cases}p^2=4\\ p=2\end{cases}$. При $p=2$.

б) Подставим (1; -2) в уравнения: $\begin{cases} p^2 - 4p = 5 \\ 4 + 9 = 2p + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-5)(p+1) = 0 \\ p = 5 \end{cases}$.

При $p = 5$.

5.37.

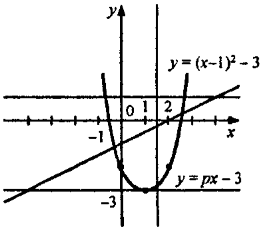
а) $\begin{cases} y - x^2 = 4 \\ y + px = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ x^2 + 4 + px = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ x(x + p) = 0 \end{cases}$

Для того, чтобы система имела одно решение, второе уравнение должно иметь одно решение.

Оно имеет решения x = 0 и x = -p. Чтобы они совпали, p должно быть равно 0. p = 0.

б) $\begin{cases} y - px + 3 = 0 \\ y = (x-1)^2 - 3 \end{cases}$

Решим эту задачу графически. Построим параболу $y = (x-1)^2 - 3$.

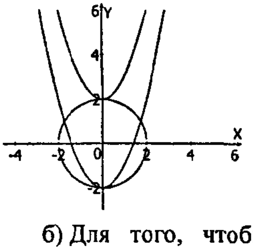


$y = px - 3$ – прямая. Одно решение (из графика) может быть при прямой $y = -3$ или $x = k$, где k – любое. Второе быть не может, т.к. в нашем уравнении есть переменная y.

Тогда, $px - 3 = -3 \Rightarrow p = 0$.

5.38.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x^2 = p \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + p \end{cases}$



Рассмотрим графики обоих уравнений.

График первого – окружность с центром (0; 0) и радиусом 2.

График второго – парабола $y = x^2$, сдвинутая вверх на величину p.

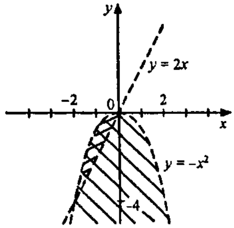
а) Для того, чтобы было 3 решения, парабола должна иметь вершину в точке (0; -2). То есть p = –2.

б) Для того, чтобы было 1 решение, парабола должна касаться окружности. Это может быть только если ее вершина – (0; 2). То есть p = 2.

5.39.

а) $\begin{cases} x^2 + y < 0; \\ y - 2x > 0. \end{cases}$

Построим параболу $y = -x^2$ и прямую $y = 2x$.

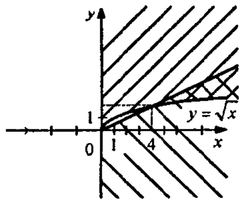


б) $\begin{cases} y - \sqrt{x} \ge 0; \\ x - 2y \ge 0. \end{cases}$

Решим графически. Построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \dfrac{x}{2}$.

ОДЗ: $x \ge 0$, $y = \sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2



§ 6. Методы решения систем уравнений

6.1.

а) $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 2y = 26 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 1 \\ x = 6. \ \ x = -4 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 6$; $x_2 = -4$

Решения (6; 5), (-4; -5).

б) $\begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y^2 \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$, $\begin{cases} x = y^2 \\ y = 2, \ \ y = -3 \end{cases}$

Решения (4; 2), (9; -3).

в) $\begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 - 2x = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 - 2y - 6 = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 3 \\ y = 5, \ \ y = -3 \end{cases}$

$y_1 = 5$; $y_2 = -3$

Решения (8; 5), (0; -3).

г) $\begin{cases} y = x^2 \\ x - y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ x - x^2 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 3$; $x_2 = -2$. Решения (-2; 4), (3; 9).

6.2.

а) $\begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y - y^2 = -2 \\ x = 1 - y \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1 = 2$; $y_2 = -1$, $\begin{cases} y = 2, \quad y = -1 \\ x = 1 - y \end{cases}$

Решения (-1; 2), (2; -1).

б) $\begin{cases} 5x^2 + 2y = -3 \\ x - y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 5(y+5)^2 + 2y = -3 \\ x = y + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 5y^2 + 52y + 128 = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$

$$\frac{D}{4} = 26^2 - 5 \cdot 128 = 676 - 640 = 36$$

$$y_1 = \frac{-26 + 6}{5} = -4; \quad y_2 = \frac{-26 - 6}{5} = -\frac{32}{5} = -6{,}4$$

$\begin{cases} y = -4, \quad y = -6{,}4 \\ x = y + 5 \end{cases}$ Решения (1; -4), (-1,4; -6,4).

в) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + y^2 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 11 - 3y \\ 22 - 6y + y^2 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 11 - 3y \\ y^2 - 6y + 8 = 0 \end{cases}$

$y_1 = 4$, $y_2 = 2$ $\begin{cases} x = 11 - 3y \\ y = 2, \quad y = 4 \end{cases}$ Решения (5; 2), (-1; 4).

г) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ (8 - y)y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ y^2 - 8y + 12 = 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1 = 6$; $y_2 = 2$, $\begin{cases} x = 8 - y \\ y = 2, \quad y = 6 \end{cases}$

Решения (6; 2), (2; 6).

6.3.

а) $\begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - (3y - 10)y = 12 \\ x = 3y - 10 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ x = 3y - 10 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1 = 3$; $y_2 = 2$, $\begin{cases} y = 2, \quad y = 3 \\ x = 3y - 10 \end{cases}$

Решения (-4; 2), (-1; 3).

б) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 32 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - (2x - 8)^2 = 32 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 16x + 48 = 0 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 12$; $x_2 = 4$, $\begin{cases} x = 4, \quad x = 12 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$

Решения (4; 0), (12; 16).

в) $\begin{cases}2x^2-xy=33\\4x-y=17\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-x(4x-17)=33\\y=4x-17\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-17x+33=0\\y=4x-17\end{cases}$

$D=289-264=25,\ x_1=\dfrac{17+5}{4}=\dfrac{11}{2};\ x_2=\dfrac{17-5}{4}=3$

$\begin{cases}x=\dfrac{11}{2},\quad x=3\\y=4x-17\end{cases}$ Решения ($\dfrac{11}{2}$; 5), (3; -5)

г) $\begin{cases}x^2-y^2=24\\2y-x=-7\end{cases}$ $\begin{cases}(2y+7)^2-y^2=24\\x=2y+7\end{cases}$ $\begin{cases}3y^2+28y+25=0\\x=2y+7\end{cases}$

$\dfrac{D}{4}=196-75=121=11^2,\ y_1=\dfrac{-14+11}{3}=-1;\ y_2=\dfrac{-14-11}{3}=-\dfrac{25}{3}$

$\begin{cases}y=-1,\ y=-\dfrac{25}{3}\\x=2y+7\end{cases}$ Решения (5; -1), $\left(-\dfrac{29}{3};-\dfrac{25}{3}\right)$

6.4.

а) $\begin{cases}x^2+xy-y^2=11\\x-2y=1\end{cases}$ $\begin{cases}(2y+1)^2+(2y+1)y-y^2=11\\x=2y+1\end{cases}$ $\begin{cases}y^2+y-2=0\\x=2y+1\end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=1;\ y_2=-2$, $\begin{cases}y=1,\quad y=-2\\x=2y+1\end{cases}$

Решения (3; 1), (-3; -2).

б) $\begin{cases}xy+y^2+x-3y=15\\x+y=5\end{cases}$ $\begin{cases}y(-y+5)+y^2-y+5-3y=15\\x=-y+5\end{cases}$

$\begin{cases}y=10\\x=-y+5\end{cases}$ $\begin{cases}y=10\\x=-5\end{cases}$ Решение (-5; 10).

в) $\begin{cases}x^2+xy-x-y=2\\y=x-2\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x(x-2)-x-x+2=2\\y=x-2\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-4x=0\\y=x-2\end{cases}$

$\begin{cases}x=0,\quad x=2\\y=x-2\end{cases}$ Решения (0; -2), (2; 0).

г) $\begin{cases}x^2+y^2+3xy=-1\\x+2y=0\end{cases}$ $\begin{cases}y^2=1\\x=-2y\end{cases}$ $\begin{cases}y=1,\quad y=-1\\x=-2y\end{cases}$ Решения (-2; 1), (2, -1)

6.5.

а) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\2y-x=1\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{1}{2y-1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\x=2y-1\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{-10y^2+23y-6}{6y(2y-1)}=0\\x=2y-1\end{cases}$

Решим первое уравнение.

$\dfrac{10y^2-23y+6}{6y(2y-1)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}10y^2-23y+6=0\\6y(2y-1)\neq 0\end{cases}$

$D=529-240=289$, $y_1=\frac{23+17}{20}=2$; $y_2=\frac{23-17}{20}=0{,}3$

$\begin{cases} y=2, \quad y=0{,}3 \\ 6y(2y-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2, \quad y=0{,}3$

Для $y=2$, $x=2\cdot 2-1=3$. Для $y=0{,}3$, $x=2\cdot 0{,}3-1=-0{,}4$

Решения (3; 2), (-0,4; 0,3).

б) $\begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{12}{xy}+\frac{4}{y}=2 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{12}{x(x-3)}+\frac{4}{x-3}=2 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2+15x+3}{x(x-3)}=0 \\ y=x-3 \end{cases}$

Решим первое уравнение:

$\frac{2x^2-15x+27}{x(x-3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-9)(x-3)=0 \\ x(x-3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4{,}5 \Rightarrow y=1{,}5$

Ответ: (4,5; 1,5).

в) $\begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \\ x-2y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{1}{2(y+1)}-\frac{1}{3}=0 \\ x=2(y+1) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-2y^2+y+6}{6y(y+1)}=0 \\ x=2(y+1) \end{cases}$

Решим первое уравнение.

$\frac{2y^2-y-6}{6y(y+1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-y-6=0 \\ 6y(y+1)\neq 0 \end{cases}$

$D=1+48=49$; $y_1=\frac{1+7}{4}=2$; $y_2=\frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}$

$\begin{cases} y=2, \quad y=-\frac{3}{2} \\ 6y(y+1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2, \quad y=-\frac{3}{2}$ Решения (6; 2), (-1; $-\frac{3}{2}$).

г) $\begin{cases} \frac{4}{x}-\frac{12}{xy}+\frac{3}{y}=1 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{y+1}-\frac{12}{y(y+1)}+\frac{3}{y}=1 \\ x=y+1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7y-9-y^2-y}{y(y+1)}=0 \\ x=y+1 \end{cases}$

Решим первое уравнение:

$\frac{-y^2+6y-9}{y(y+1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+6y-9=0 \\ y(y+1)\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -(y-3)^2=0 \\ y(y-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=3$

Решение (4; 3).

6.6.

а) $\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 2a=4 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=a-1 \end{cases}$ Решение (2; 1).

б) $\begin{cases} a+2b=5 \\ -a+7b=13 \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} a+2b=5 \\ 9b=18 \end{cases}$ $\begin{cases} a=5-2b \\ b=2 \end{cases}$. Решение (1; 2).

в) $\begin{cases} 2a+3b=3 \\ 2a-3b=9 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 4a=12 \\ 2a-3b=9 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ 6-3b=9 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$. Решение (3; –1).

г) $\begin{cases} 3a+5b=8 \\ -3a+b=-2 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 6b=6 \\ -3a+b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} b=1 \\ -3a+b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$. Решение (1; 1).

6.7.

а) $\begin{cases} 40m+3n=-10 \\ 20m-7n=-5 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на (–2), заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 40m+3n=-10 \\ 17n=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 40m+3n=-10 \\ n=0 \end{cases}$ $\begin{cases} m=-\dfrac{1}{4} \\ n=0 \end{cases}$ Решение $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)$.

б) $\begin{cases} 3m+2n=0,5 \\ 2m+5n=4 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, и заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 3m+2n=0,5 \\ -\dfrac{11}{2}n=-5,5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3m+2n=0,5 \\ -11n=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} m=-0,5 \\ n=1 \end{cases}$ Решение $(-0,5;1)$.

в) $\begin{cases} 5m+2n=1 \\ 15m+3n=3 \end{cases}$

Умножим первое уравнение на (–3), и заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} -3n=0 \\ 15m+3n=3 \end{cases}$ $\begin{cases} n=0 \\ 15m=3 \end{cases}$ $\begin{cases} n=0 \\ m=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ Решение $\left(\dfrac{1}{5};0\right)$.

г) $\begin{cases} 4m+7n=11 \\ 5m-2n=3 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на $\frac{7}{2}$

$$\begin{cases} 4m+7n=11 \\ \frac{35}{2}m-7n=\frac{21}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 4m+7n=11 \\ \frac{43}{2}m=\frac{43}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 4m+7n=11 \\ m=1 \end{cases} \quad \begin{cases} n=1 \\ m=1 \end{cases}.$$

Решение $(1;1)$.

6.8.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=61 \\ x^2-y^2=11 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} 2x^2=72 \\ x^2-y^2=11 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=36 \\ 36-y^2=11 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 6 \\ y=\pm 5 \end{cases}$$

Решения (6; –5), (6; 5), (–6; –5), (–6; 5).

б) $\begin{cases} 2x^2-y^2=41 \\ 2x^2+y^2=59 \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} 2x^2-y^2=41 \\ 4x^2=100 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-y^2=41 \\ x^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} 50-y^2=41 \\ x=\pm 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm 3 \\ x=\pm 5 \end{cases}$$

Решения (5; –3), (5; 3), (–5; –3), (–5; 3).

в) $\begin{cases} x^2-3y^2=22 \\ x^2+3y^2=28 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} 2x^2=50 \\ x^2+3y^2=28 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=25 \\ 25+3y^2=28 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 5 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Решения (5; –1), (5; 1), (–5; –1), (–5; 1).

г) $\begin{cases} x^2-2y^2=14 \\ x^2+2y^2=18 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} 2x^2=32 \\ x^2+2y^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=16 \\ 16+2y^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 4 \\ 2y^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 4 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Решения (4; –1), (4; 1), (–4; –1), (–4; 1).

6.9.

а) $\begin{cases} x^2y^2+xy=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

Введем переменную $t = xy$. Первое уравнение примет вид $t^2 + t - 2 = 0$ по теореме Виета: $t_1 = 1$; $t_2 = -2$

Решим по отдельности две системы

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(3-2x) = 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$D = 9 - 8 = 1,$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1, x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 1, \quad x = \dfrac{1}{2} \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(3-2x) = -2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$D = 9 + 16 = 25,$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2, x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2, \quad x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

Решения (1; 1), $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, (2, –1), $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$.

б) $\begin{cases} 3(x-y) - 2(x-y)^2 = -2 \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}$

Введем переменную $p = x - y$

Первое уравнение примет вид

$3p - 2p^2 = -2$

$2p^2 - 3p - 2 = 0$

Решим его: $D = 9 + 16 = 25$; $p_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$; $p_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Решим отдельно две системы:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ 2y + 4 + 7y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 9y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$x = 1, \quad y = -1$

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{2} \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = y - \dfrac{1}{2} \\ 2y - 1 + 7y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{1}{2} \\ 9y = -4 \end{cases}$$

$$x = -\frac{17}{18}, \quad y = -\frac{4}{9}$$

Решения (1; –1), $\left(-\frac{17}{18}; -\frac{4}{9}\right)$.

в) $\begin{cases} 5\dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 14 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$

Введем новую переменную $g=\frac{x}{y}$.

Первое уравнение примет вид:

$$5g+g^2=14;\ g^2+5g-14=0$$

$$D=25+56=81$$

$$g_1=\frac{-5+9}{2}=2;\ g_2=\frac{-5-9}{2}=-7$$

То есть $\frac{x}{y}=2$ или $\frac{x}{y}=-7$

Решим отдельно две системы:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=2\\5x+3y=13\end{cases},\ \begin{cases}x=2y,\quad y\neq0\\10y+3y=13\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x}{y}=-7\\5x+3y=13\end{cases},\ \begin{cases}x=-7y,\quad y\neq0\\-35y+3y=13\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2,\quad y\neq0\\y=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\frac{91}{32},\quad y\neq0\\y=-\frac{13}{32}\end{cases}$$

Решения (2; 1), $\left(\frac{91}{32};-\frac{13}{32}\right)$.

г) $\begin{cases}4(x+y)^2-7(x+y)=15\\5x-2y=1\end{cases}$

Введем переменную $p=x+y$.

Первое уравнение примет вид $4p^2-7p-15=0$

$$D=49+240=289=17^2,\ p_1=\frac{7-17}{8}=-\frac{5}{4};\ p_2=\frac{7+17}{8}=3$$

То есть $x+y=-\frac{5}{4}$ или $x+y=3$

Решим отдельно две системы:

$$\begin{cases}x+y=-\frac{5}{4}\\5x-2y=1\end{cases},\ \begin{cases}x=-\frac{5}{4}-y\\-\frac{25}{4}-5y-2y=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=3\\5x-2y=1\end{cases},\ \begin{cases}x=3-y\\15-5y-2y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{5}{4}-y\\-7y=\frac{29}{4}\end{cases},\ \begin{cases}x=-\frac{3}{14}\\y=-\frac{29}{28}\end{cases}$$

Решения $\left(-\frac{3}{14};-\frac{29}{28}\right)$, (1; 2).

6.10.

а) $\begin{cases} xy(x+y)=6 \\ xy+(x+y)=5 \end{cases}$. Введем новые переменные $p=xy$ и $t=x+y$.

Система примет вид

$\begin{cases} pt=6 \\ p+t=5 \end{cases}$ $\begin{cases} (5-t)t=6 \\ p=5-t \end{cases}$ $\begin{cases} 5t-t^2=6 \\ p=5-t \end{cases}$ $\begin{cases} t^2-5t+6=0 \\ p=5-t \end{cases}$

по теореме Виета: $t_1=3; t_2=2$, $\begin{matrix} \text{при } t=3:\ p=5-3=2 \\ \text{при } t=2:\ p=5-2=3 \end{matrix}$

То есть (1) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$.

Решим первую систему:

$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=2;\ y_2=1$

при $y=3:\ x=3-2=1$; при $y=1:\ x=3-1=2$

Для первой системы решения (1; 2), (2; 1)

Решим вторую систему:

$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y+3=0 \end{cases}$

$\frac{D}{4}=1-3=-2<0$ Решений нет.

Решениями исходной системы будут решения системы (1).

Решения (1; 2), (2; 1).

б) $\begin{cases} 3(x-y)^2+2(x+2y)^2=5 \\ 2(x+2y)-x+y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(x-y)^2+2(x+2y)^2=5 \\ 2(x+2y)-(x-y)=1 \end{cases}$

Введем новые переменные $p=x-y$ и $t=x+2y$.

Система примет вид: $\begin{cases} 3p^2+2t^2=5 \\ 2t-p=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(2t-1)^2+2t^2=5 \\ p=2t-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 7t^2-6t-1=0 \\ p=2t-1 \end{cases}$

$\frac{D}{4}=9+7=16;\ t_1=\frac{3+4}{7}=1;\ t_2=\frac{3-4}{7}=-\frac{1}{7}$

при $t=1:\ p=2-1=1$; при $t=-\frac{1}{7}:\ p=-\frac{2}{7}-1=-\frac{9}{7}$

То есть (1) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x-y=-\frac{9}{7} \\ x+2y=-\frac{1}{7} \end{cases}$

Решим первую систему: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+1 \\ y+1+2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x-y=-\dfrac{9}{7} \\ x+2y=-\dfrac{1}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x=y-\dfrac{9}{7} \\ y-\dfrac{9}{7}+2y=-\dfrac{1}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x=y-\dfrac{9}{7} \\ 3y=\dfrac{8}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{19}{21} \\ y=\dfrac{8}{21} \end{cases}$$

Решения: $(1;\,0)$, $\left(-\dfrac{19}{21};\dfrac{8}{21}\right)$.

в) $\begin{cases} 5(x+y)+4xy=32 \\ xy(x+y)=12 \end{cases}$

Введем переменные $t=x+y$ и $p=xy$.
Система примет вид

$$\begin{cases} 5t+4p=32 \\ pt=12 \end{cases} \quad \begin{cases} 4p=32-5t \\ pt=12 \end{cases} \quad \begin{cases} p=8-\dfrac{5}{4}t \\ \left(8-\dfrac{5}{4}t\right)t=12 \end{cases} \quad \begin{cases} p=8-\dfrac{5}{4}t \\ \dfrac{5}{4}t^2-8t+12=0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4}=16-15=1;\ t_1=\frac{4+1}{\frac{5}{4}}=4;\ t_2=\frac{4-1}{\frac{5}{4}}=\frac{12}{5}$$

при $t=4$: $p=8-\dfrac{5}{4}\cdot 4=3$; при $t=\dfrac{12}{5}$: $p=8-\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=5$

Итак, имеем (1) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{12}{5} \\ xy=5 \end{cases}$

Решим систему (1): $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4-y \\ (4-y)y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{cases} x=4-y \\ y=1,\ y=3 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1=3 \\ y_2=1 \end{matrix}$

Для $y=1$: $x=4-1=3$; Для $y=3$, $x=4-3=1$;
Решения системы (1) $(3;\,1)$, $(1;\,3)$
Решим систему (2):

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{12}{5} \\ xy=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{12}{5}-y \\ \left(\dfrac{12}{5}-y\right)y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{12}{5}-y \\ y^2-\dfrac{12}{5}y+5=0 \end{cases}$$

$$D=\frac{144}{25}-20=\frac{144-500}{25}<0$$

Решений нет.
Решениями исходной системы будут решения системы (1).
Решения: $(3;\,1)$, $(1;\,3)$.

г) $\begin{cases} 2(x+y)^2+3(x+2y)=5 \\ 3(x+2y)-2(x+y)=5 \end{cases}$

Введем переменные $t=x+y$ и $p=x+2y$

Система примет вид: $\begin{cases} 2p^2+3t=5 \\ 3t-2p=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2p^2+3t=5 \\ 3t=5+2p \end{cases}$ $\begin{cases} 2p^2+5+2p=5 \\ t=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}p \end{cases}$

$\begin{cases} 2p(p+1)=0 \\ t=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}p \end{cases}$ $\begin{cases} p=0,\ p=-1 \\ t=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}p \end{cases}$

при $p=0: t=\frac{5}{3}+0=\frac{5}{3}$; при $p=-1$ $p=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$

То есть (1) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Решим систему (1): $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} -x-y=0 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases} -x-y=0 \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$

Решим систему (2): $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} -x-y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Заменим второе уравнение на сумму первого и второго

$\begin{cases} -x-y=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$. Решения: $\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$, (–3; 2).

6.11.

а) $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-y^2=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ (x+y)(x-y)=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ 6(x-y)=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$

Заменим первое уравнение на сумму первого и второго

$\begin{cases} 2x=8 \\ x-y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ Решение: (4; 2).

б) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2=5 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-2=0 \end{cases}$ $y_1=1$ $y_2=-2$

при $y=1$: $x=1+1=2$, при $y=-2$, $x=-2+1=-1$

Решения (2; 1), (–1; –2)

в) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ (x-y)(x+y)=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ 2(x+y)=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$

Заменим первое уравнение на сумму первого и второго

$\begin{cases} 2x=6 \\ x+y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ Решение (3; 1).

г) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y \\ (5-y)^2+y^2=17 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{cases} x=5-y \\ y^2-5y+4=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y_1=4 \\ y_2=1 \end{matrix}$

при $y=1$: $x=5-1=4$, при $y=4$, $x=5-4=1$.

Решения (1; 4), (4; 1).

6.12.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^4-y^4=15 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ (x^2-y^2)(x^2+y^2)=15 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 3(x^2+y^2)=15 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=3+y^2 \\ 2y^2+3=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=3+y^2 \\ y^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}$.

Решения (2; 1), (2; –1), (–2; 1), (–2; –1).

б) $\begin{cases} x^2-2y^2=1 \\ x^4+3y^4=129 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2y^2+1 \\ (2y^2+1)^2+3y^4=129 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=2y^2+1 \\ 7y^4+4y^2-128=0 \end{cases}$ - биквадратное уравнение.

$\frac{D}{4}=4+896=900$, $(y^2)_1=\frac{-2+30}{7}=4$, $(y^2)_2=\frac{-2-30}{7}=-\frac{32}{7}$, чего быть не может, т.к. $y^2 \geq 0$

Итак $\begin{cases} x^2=2y^2+1 \\ y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 2 \end{cases}$

Решения (3; 2), (3; –2), (–3; 2), (–3; –2).

в) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=15 \\ x^4-y^4=80 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\dfrac{3y^2+15}{2} \\ \left(\dfrac{3y^2+15}{2}\right)^2-y^4=80 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{3y^2+15}{2} \\ \dfrac{9y^4+90y^2+225}{4}-y^4=80 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=\dfrac{3y^2+15}{2} \\ \dfrac{9y^4+90y^2+225-4y^4-320}{4}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{3y^2+15}{2} \\ y^4+18y^2-19=0 \end{cases}$$ - биквадратное уравнение

$\dfrac{D}{4}=81+19=100;\ \left(y^2\right)_1=\dfrac{-9+10}{1}=1;\ \left(y^2\right)_2=-9-10=-19,$

чего быть не может, т.к. $y^2\geq 0$.

Итак $\begin{cases} x^2=\dfrac{3y^2+15}{2} \\ y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Решения (3; 1), (3; –1), (–3; 1), (–3; –1).

г) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^4+y^4=82 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=10-y^2 \\ \left(10-y^2\right)^2+y^4=82 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2=10-y^2 \\ y^4-10y^2+9=0 \end{cases}$$ - биквадратное уравнение

по теореме Виета: $\left(y^2\right)_1=9;\ \left(y^2\right)_2=1$

Рассмотрим две системы

(1) $\begin{cases} x^2=10-y^2 \\ y^2=9 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 3 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} x^2=10-y^2 \\ y^2=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Решения (1)
(1; 3), (1; –3), (–1; 3), (–1; –3).

Решения (2)
(3; 1), (-3; 1), (3; -1), (–3; –1).

Решения исходной системы
(1; 3), (1; –3), (–1; 3), (–1; –3), (3; 1), (-3; 1), (3; -1), (–3; –1).
Ответ, приведенный в задачнике, неверен.

6.13.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ xy=20 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ y=\dfrac{20}{x};\ x\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-\dfrac{400}{x^2}=9 \\ y=\dfrac{20}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^4-9x^2-400}{x^2}=0 \\ y=\dfrac{20}{x};\ x\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^4-9x^2-400=0 \\ y=\dfrac{20}{x};\ x\neq 0 \end{cases}$ $D=81+1600=1681=(41)^2$

$\left(x^2\right)_1=\dfrac{9+41}{2}=25,\ \left(x^2\right)_2=\dfrac{9-41}{2}=-\dfrac{32}{2}<0,$

чего быть не может, т.к. $x^2\geq 0$

$$\begin{cases} x^2=25 \\ y=\dfrac{20}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 5 \\ y=\dfrac{20}{x} \end{cases}$$

при $x=5$ $y=\dfrac{20}{5}=4$; при $x=-5$ $y=\dfrac{20}{-5}=-4$.

Ответ: (5; 4), (–5; –4).

б) $\begin{cases} xy=2 \\ 9x^2+y^2=13 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{2}{x}, x\neq 0 \\ 9x^2+\dfrac{4}{x^2}=13 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{x}, x\neq 0 \\ \dfrac{9x^4-13x^2+4}{x^2}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{2}{x} \\ 9x^4-13x^2+4=0, x\neq 0 \end{cases}$$

$D=169-144=25;\ \left(x^2\right)_1=\dfrac{13+5}{18}=1;\ \left(x^2\right)_2=\dfrac{13-5}{18}=\dfrac{4}{9}$

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{x} \\ x^2=1 \text{ или } x^2=\dfrac{4}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{2}{x} \\ x=1, x=-1, x=\dfrac{2}{3}, x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

при $x=1$, $y=2$; при $x=-1$, $y=-2$; при $x=\dfrac{2}{3}$, $y=3$,

при $x=-\dfrac{2}{3}$, $y=-3$;

Решения (1; 2), (–1; –2), ($\dfrac{2}{3}$; 3), ($-\dfrac{2}{3}$; –3).

Опечатка в ответе задачника.

в) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x=\dfrac{8}{y}, y\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2+\dfrac{64}{y^2}-20=0 \\ x=\dfrac{8}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y^4-20y^2+64}{y^2}=0 \\ x=\dfrac{8}{y} \end{cases}$

$$\begin{cases} y^4-20y^2+64=0, y^2\neq 0 \\ x=\dfrac{8}{y} \end{cases}$$

$D=100-64=36$

$\left(y^2\right)_1=10+6=16$

$\left(y^2\right)_2=10-6=4$

$$\begin{cases} y^2=16 \text{ или } y^2=4 \\ x=\dfrac{8}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} y=4, y=-4, y=2, y=-2 \\ x=\dfrac{8}{y} \end{cases}$$

при $y=4; x=2$, при $y=-4$; $x=-2$, при $y=2; x=4$, при $y=-2; x=-4$

Решения (2; 4), (–2; –4), (4; 2), (–4; –2).

Опечатка в ответе задачника.

г) $\begin{cases}2x^2-y^2=34\\xy=20\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-\dfrac{400}{x^2}=34\\y=\dfrac{20}{x},\ x\neq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{2x^4-34x^2-400}{x^2}=0\\y=\dfrac{20}{x},\ x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x^4-17x^2-200=0, x^2\neq 0\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}$

$D=289+800=1089=33^2, \left(x^2\right)_1=\dfrac{17+33}{2}=25, \left(x^2\right)_2=\dfrac{17-33}{2}<0,$

что не верно, т.к. $x^2\geq 0$

$\begin{cases}x^2=25\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm 5\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}$, при $x=5$, $y=4$, при $x=-5$, $y=-4$

Решения: (5; 4), (–5; –4)

6.14.

а) $\begin{cases}x^2-2y=3\\x^2y=27\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=3+2y\\(3+2y)y-27=0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=3+2y\\2y^2+3y-27=0\end{cases}$

$D=9+216=225=15^2$

$y_1=3;\ y_2=-\dfrac{9}{2}$ $\begin{cases}x^2=3+2y\\y=3, y=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$

при $y=3;\ x^2=9;\ x=\pm 3$

при $y=-\dfrac{9}{2};\ x^2=-6<0$, – не верно, т.к. $x^2\geq 0$

Решения (3; 3), (–3; 3).

б) $\begin{cases}x^2+y=10\\x^4+x^2y=90\end{cases}$ $\begin{cases}y=10-x^2\\x^4+x^2\left(10-x^2\right)=90\end{cases}$ $\begin{cases}y=10-x^2\\x^2=9\end{cases}$ $\begin{cases}y=1\\x=\pm 3\end{cases}$

Решения (3; 1), (–3; 1).

в) $\begin{cases}x+y^2=2\\2y^2+x^2=3\end{cases}$ $\begin{cases}y^2=2-x\\4-2x+x^2=3\end{cases}$ $\begin{cases}y^2=2-x\\x^2-2x+1=0\end{cases}$ $\begin{cases}y^2=2-x\\(x-1)^2=0\end{cases}$

$\begin{cases}y^2=1\\x=1\end{cases}$ $\begin{cases}y=\pm 1\\x=1\end{cases}$ Решения (1; 1), (1; –1).

г) $\begin{cases}x^2+y^4=5\\xy^2=2\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^4=5\\y^2=\dfrac{2}{x},\ x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+\dfrac{4}{x^2}=5\\y^2=\dfrac{2}{x},\ x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2}=0\\y^2=\dfrac{2}{x}\end{cases}$

$$\begin{cases} x^4-5x^2+4=0, x^2\neq 0 \\ y^2=\dfrac{2}{x} \end{cases}$$; по теореме Виета:

$(x^2)_1=4;\ (x^2)_2=1$, $\begin{cases} x^2=4,\ x^2=1 \\ y^2=\dfrac{2}{x} \end{cases}$

Рассмотрим 4 системы

1. $\begin{cases} x=2 \\ y^2=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=-2 \\ y^2=-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=1 \\ y^2=2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=-1 \\ y^2=-2 \end{cases}$

Вторая и четвертая системы решений не имеют.

Решения первой: (2; 1), (2; –1), третьей: $(1;\sqrt{2})$, $(1;-\sqrt{2})$

Решения: (2; 1), (2; –1), $(1;\sqrt{2})$, $(1;-\sqrt{2})$.

6.15.

а) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases} 3x^2+3x=6 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x=2 \\ 2(x^2+x)-y^2-y=4 \end{cases}$

по теореме Виета:

$\begin{cases} x^2+x-2=0 \\ 4-y^2-y=4 \end{cases}$ $\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{matrix}$ $\begin{cases} x=1;\ x=-2 \\ y(y+1)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1;\ x=-2 \\ y=0;\ y=-1 \end{cases}$

Решения: (1; 0), (1; –1), (–2; 0), (–2; –1).

б) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y=31 \\ x^2+y^2-2x-y=15 \end{cases}$

Умножим первое уравнение на (–1) и заменим суммой полученного и второго.

$\begin{cases} -4y=-16 \\ x^2+y^2-2x-y=15 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=3, x_2=-1$, $\begin{cases} y=4 \\ x=-1,\ \ x=3 \end{cases}$

Решения: (–1; 4), (3; 4).

в) $\begin{cases} x^2+y^2-5x+y=2 \\ 5y^2+5x^2+x+5y=36 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=2+5x-y \\ 5(x^2+y^2)+x+5y=36 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+y^2=2+5x-y \\ 10+25x-5y+x+5y=36 \end{cases}$; $\begin{cases} 26x=26 \\ x^2+y^2=2+5x-y \end{cases}$;

$\begin{cases} x=1 \\ 1+y^2=2+5-y \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$.

г) $\begin{cases}3x^2+y^2+3x+y=18\\x^2-y^2+x-y=6\end{cases}$; $\begin{cases}4x^2+4x=24\\x^2-y^2+x-y=6\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+x-6=0\\x^2-y^2+x-y=6\end{cases}$ $\Rightarrow$

$\begin{cases}x=2\\4-y^2+2-y=6\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-3\\9-y^2-3-y=6\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\\y(y+1)=0\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-3\\y(y+1)=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ или $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-3\\y=0\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$.

Ответ: (2; 0); (2; –1); (–3; 0); (–3; –1).

6.16.

а) $\begin{cases}(x+y)^2-(x-y)-8=0\\(x+y)^2+(x-y)-10=0\end{cases}$

Введем новые переменные t = x + y, p = x – y

$\begin{cases}t^2-p-8=0\\t^2+p-10=0\end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases}t^2-p-8=0\\2t^2=18\end{cases}$ $\begin{cases}p=t^2-8\\t^2=9\end{cases}$ $\begin{cases}p=1\\t=\pm3\end{cases}$

Для пары (3; 1): $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=3-y\\3-2y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Для пары (–3; 1): $\begin{cases}x+y=-3\\x-y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3-y\\-3-2y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

Решения (2; 1); (–1; –2).

б) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}\\x-y=6\end{cases}$.

Пусть p = $\dfrac{x}{y}$. Первое уравнение примет вид:

$p+\dfrac{1}{p}=\dfrac{10}{3}$; $\dfrac{3p^2-10p+3}{3p}=0$; $3p^2-10p+3=0$; $p\neq0$; $\dfrac{D}{4}=25-9=16$;

$p_1=\dfrac{5+4}{3}=3$; $p_2=\dfrac{5-4}{3}=\dfrac{1}{3}$.

при p=3: $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=3\\x-y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=3y,\ y\neq0\\2y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=9\\y=3\end{cases}$

при $p=\frac{1}{3}$ · $\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\\ x-y=6\end{cases}$ $\begin{cases}y=3x,\ y\neq 0\\ -2x=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=-9\\ y=-3\end{cases}$ Решения (9; 3), (–3: –9)

в) $\begin{cases}2x+y+(x-2y)^2=3\\ x^2-4xy+4y^2=9-3(2x+y)\end{cases}$ $\begin{cases}(2x+y)+(x-2y)^2=3\\ (x-2y)^2=9-3(2x+y)\end{cases}$

Пусть $p=2x+y$, $t=x-2y$

Тогда система примет вид: $\begin{cases}p+t^2=3\\ t^2=9-3p\end{cases}$ $\begin{cases}p=3-t^2\\ t^2=9-9+3t^2\end{cases}$ $\begin{cases}p=3\\ t=0\end{cases}$

Возвращаясь к x и y $\begin{cases}2x+y=3\\ x-2y=0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=3\\ x=2y\end{cases}$ $\begin{cases}5y=3\\ x=2y\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{3}{5}\\ x=\frac{6}{5}\end{cases}$

Решение (1,2: 0,6)

г) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4}\\ x+y=10\end{cases}$ Пусть $\frac{x}{y}=p$ Первое уравнение примет вид: $p+\frac{1}{p}=\frac{17}{4}$

Решим его.

$\frac{4p^2+4-17p}{p}=0$. $4p^2-17p+4=0$, $p\neq 0$, $D=289-64=225$,

$p_1=\frac{17+15}{8}=4$, $p_2=\frac{17-15}{8}=\frac{1}{4}$,

Для $p=4$: $\begin{cases}\frac{x}{y}=4\\ x+y=10\end{cases}$ $\begin{cases}x=4y,\ y\neq 0\\ 5y=10\end{cases}$ $\begin{cases}x=8\\ y=2\end{cases}$

Для $p=\frac{1}{4}$: $\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{1}{4}\\ x+y=10\end{cases}$ $\begin{cases}y=4x,\ y\neq 0\\ 5x=10\end{cases}$ $\begin{cases}y=8\\ x=2\end{cases}$ Решения (8: 2); (2: 8).

6.17.

а) $\begin{cases}x^2-3x-2y=4\\ x^2+x-3y=18\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x-2\\ x^2+x-\frac{3x^2}{2}+\frac{9}{2}x+6=18\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x-2\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{11}{2}x-12=0\end{cases}$

$\begin{cases}y=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x-2\\ x^2-11x+24=0\end{cases}$ $D=121-96=25$. $x_1=\frac{11+5}{2}=8$. $x_2=\frac{11-5}{2}=3$.

при $x=8$, $y=\frac{64}{2}-\frac{3\cdot 8}{2}-2=18$ при $x=3$, $y=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}-2=-2$

Решения (8; 18); (3: –2).

б) $\begin{cases} xy+x=56 \\ xy+y=54 \end{cases}$. Умножим второе на (-1)

$\begin{cases} xy+x=56 \\ -xy-y=-54 \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} xy+x=56 \\ y=x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-2)+x=56 \\ y=x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-56=0 \\ y=x-2 \end{cases}$

D=1+224=225, $x_1=\frac{1+15}{2}=8$, $x_2=\frac{1-15}{2}=-7$.

при x=8; y=8–2=6; при x=–7; y=–7–2=–9. Решения (8; 6); (–7; –9).

в) $\begin{cases} x^2+2x+3y=3 \\ x^2+x+2y=4 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на (–1) и заменим его суммой первого и второго: $\begin{cases} x^2+2x+3y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x-3-3x=3 \\ y=-1-x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-6=0 \\ y=-1-x \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=3$; $x_2=-2$? при x=3: y=–4; при x=–2: y=1.
Решения (3; –4); (–2; 1).

г) $\begin{cases} 3x-xy=10 \\ y+xy=6 \end{cases}$.

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 3x+y=16 \\ y+xy=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=16-3x \\ 16-3x+x(16-3x)=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=16-3x \\ 3x^2-13x-10=0 \end{cases}$

D=169+120=289, $x_1=\frac{13+17}{6}=5$, $x_2=\frac{13-17}{6}=-\frac{2}{3}$;

при x=5; y=1; при $x=-\frac{2}{3}$; y = 18. Решения (5; 1); $(-\frac{2}{3}; 18)$.

6.18.

а) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^2+2xy+y^2=1-xy \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-2 \\ (x+y)^2=1-xy \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2-y \\ -2y-y^2=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2-y \\ y^2+2y-3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=1$, $y_2=-3$, при y=–3; x=–2+3=1, при y=+1; –2–1=–3.
Решения (–3; 1); (1; –3).

б) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x^2-4xy+y^2=2x+3y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ (2x-y)^2=2x+3y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=y+3 \\ 4y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{9}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ Решение $(\frac{9}{4}; \frac{3}{2})$.

в) $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=x-y \\ x-3y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3y)^2=x-y \\ (x-3y)=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=1 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=y+1 \\ y+1-3y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+1 \\ -2y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ Решение (2; 1).

г) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x^2+4y+4y^2=2y+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=2 \\ (x+2y)^2=2y+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2y+4x=4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2y=2-x \\ 3x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ Ответ: $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

6.19.

а) $\begin{cases} xy-2x+3y=6 \\ 2xy-3x+5y=11 \end{cases}$ $\begin{cases} xy-2x+3y=6 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-y-2y+2+3y=6 \\ x=y-1 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=4 \\ x=y-1 \end{cases}$ при y=2, x=2–1=1, при y=–2, x=–2–1=–3.

Решения (1; 2), (–3; –2).

б) $\begin{cases} y^2+3x-y=1 \\ y^2+6x-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x=1+y-y^2 \\ y^2+2+2y-2y^2-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x=1+y-y^2 \\ y^2=1 \end{cases}$

при y=1; x=$\dfrac{1}{3}$; при y=–1: x=–$\dfrac{1}{3}$. Решения $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$; $\left(-\dfrac{1}{3};-1\right)$

в) $\begin{cases} x^2+3x-4y=20 \\ x^2-2x+y=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+3x-8x+4x^2+20=20 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2-5x=0 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$ при x=0; y=–5; при x=1; y=2–1–5=–4.

Решения (0; –5); (1; –4).

г) $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ xy-2x-2y+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)=5-xy \\ xy-2(x+y)+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)=5-xy \\ xy-10+2xy+4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)=5-xy \\ xy=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=2$, $y_2=1$. при y=2; x=3–2=1; при y=1; x=3–1=2.
Решения (1; 2); (2; 1).

6.20.

а) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \dfrac{x-2}{y-3}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ x-2=y-3,\ y\neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)^2=1 \\ y-3=x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=\pm 1 \\ y=x+1 \end{cases}$

при x–2=1; x=3; y=3+1=4; при x–2=–1; x=1; y=1+1=2.
Решения (3; 4), (1; 2).

б) $\begin{cases}(x-3)(y-2)=3\\ \dfrac{y-2}{x-3}=3\end{cases}$ $\begin{cases}(x-3)(y-2)=3\\ (y-2)=3(x-3),\ x\neq 3\end{cases}$ $\begin{cases}3(x-3)^2=3\\ y=3x-7\end{cases}$ $\begin{cases}x-3=\pm 1\\ y=3x-7\end{cases}$

при x-3=1; x=4; y=12–7=5; при x–3=–1; x=2; y=6–7=–1.
Решения (4; 5), (2; –1).

в) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y-3}=1\\ (x+1)(y-3)=4\end{cases}$ $\begin{cases}x+1=y-3,\ y\neq 3\\ (y-3)^2=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=y-4\\ y-3=\pm 2\end{cases}$

при y–3=2; y=5; x=5–4=1; при y–3=–2; y=1; x=–3
Решения (1; 5), (–3; 1).

г) $\begin{cases}(x+3)(y-1)=8\\ \dfrac{x+3}{y-1}=2\end{cases}$ $\begin{cases}(x+3)(y-1)=8\\ (x+3)=2(y-1),\ y\neq 1\end{cases}$ $\begin{cases}(y-1)^2=4\\ x+3=2(y-1),\ y\neq 1\end{cases}$

$\begin{cases}y-1=\pm 2\\ x=2y-5\end{cases}$, при y–1=2; y=3; x=1; при y–1=–2; y=–1; x=–7

Решения (1; 3), (–7; –1).

6.21.

а) $\begin{cases}(x+2y)^2+(y-2x)^2=90\\ (x+2y)+(y-2x)=12\end{cases}$

Пусть x+2y=t, y–2x=p.
Система примет вид:

$\begin{cases}t^2+p^2=90\\ t+p=12\end{cases}$ $\begin{cases}t^2+144+t^2-24t=90\\ p=12-t\end{cases}$ $\begin{cases}t^2-12t+27=0\\ p=12-t\end{cases}$

t_1=9, t_2=3, при t=9; p=3 (1); при t=3; p=9 (2);

Рассмотрим первую пару $\begin{cases}x+2y=9\\ y-2x=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=9-2y\\ 5y=21\end{cases}$ $\begin{cases}x=0{,}6\\ y=4{,}2\end{cases}$

Рассмотрим вторую пару $\begin{cases}x+2y=3\\ y-2x=9\end{cases}$ $\begin{cases}x=3-2y\\ 5y=15\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\ y=3\end{cases}$.

Решения (–3; 3), (0,6;4,2).

б) $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=15\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=56\end{cases}$

Пусть x+y=p, $\dfrac{x}{y}$=t. Система примет вид: $\begin{cases}p+t=15\\ pt=56\end{cases}$ $\begin{cases}p=15-t\\ t^2-15t+56=0\end{cases}$

по теореме Виета: t_1=8, t_2=7, при t=8; p=7 (1), при t=7; p=8 (2).
Рассмотрим (1)

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=8\\ x+y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x=8y,\ y\neq 0\\ 9y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{56}{9}\\ y=\dfrac{7}{9}\end{cases}$$

Рассмотрим (2)

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=7\\ x+y=8\end{cases}\quad\begin{cases}x=7y,\ y\neq 0\\ 8y=8\end{cases}\quad\begin{cases}x=7\\ y=1\end{cases}.$$

Решения: $(\frac{56}{9};\frac{7}{9})$, $(7; 1)$.

в) $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

Пусть $x+y=p$, $\frac{x}{y}=t$. Система примет вид: $\begin{cases}p+t=9\\ pt=20\end{cases}$ $\begin{cases}p=9-t\\ t^2-9t+20=0\end{cases}$

по теореме Виета: $t_1=5$, $t_2=4$, при $t=5$, $p=4$ (1), при $t=4$, $p=5$ (2).
рассмотрим (1)

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=5\\ x+y=4\end{cases}\quad\begin{cases}x=5y,\ y\neq 0\\ 6y=4\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{10}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Рассмотрим (2)

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=4\\ x+y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x=4y\\ 5y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$$

Решения: $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$; $(4; 1)$.

г) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=16\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{y-x}{xy}=2\\ \dfrac{(y-x)(y+x)}{xy\cdot xy}=16\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{y-x}{xy}=2\\ \dfrac{x+y}{xy}=8\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8\end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}=10\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{1}{x}=5\\ \dfrac{1}{y}=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{5}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Решение $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)$.

6.22.

а) $\begin{cases}(x+y)^2+2x=35-2y\\ (x-y)^2-2y=3-2x\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)^2+2x=35-2y\\ (x-y)^2+2x=3+2y\end{cases}$

$$\begin{cases}(x+y)^2+2(x+y)-35=0\\ (x-y)^2+2(x-y)-3=0\end{cases}$$

Пусть x + y = p, x – y = t; $\begin{cases} p^2+2p-35=0 \\ t^2+2t-3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $p_1=5$, $p_2=-7$, $t_1=1$, $t_2=-3$; $\begin{cases} p=5, p=-7 \\ t=1, t=-3 \end{cases}$

Всевозможные пары: (5, 1) (1), (–7; 1) (2), (5; –3) (3), (–7; –3) (4).

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y \\ -2y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-7-y \\ -2y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y \\ -2y=-8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$, 4. $\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-7-y \\ -2y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases}$

Решения (3; 2), (–3; –4), (1; 4), (–5; –2).

б) $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y \end{cases}$ $\begin{cases} 12(x+y)^2+(x+y)-2{,}5=0 \\ 6(x-y)^2+(x-y)-0{,}125=0 \end{cases}$

Пусть p=x+y, t=x–y.

Система примет вид $\begin{cases} 12p^2+p-2{,}5=0 \\ 6t^2+t-0{,}125=0 \end{cases}$.

Найдем p: D=1+120=121 $p_1=\frac{-1+11}{24}=\frac{5}{12}$; $p_2=\frac{-1-11}{24}=-\frac{1}{2}$

Найдем *t*: D=1+3=4 $t_1=\frac{-1+2}{12}=\frac{1}{12}$; $t_2=\frac{-1-2}{12}=-\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} p=\frac{5}{12}, p=-\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{4}, t=\frac{1}{12} \end{cases}$$

Получим 4 случая:

1) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{12} \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=\frac{1}{6} \\ y=x+\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{12} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{12} \\ x-y=\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=\frac{1}{2} \\ y=x-\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{6} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=-\frac{3}{4} \\ y=x+\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{8} \\ y=-\frac{1}{8} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ x-y=\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=-\frac{5}{12} \\ y=x-\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{5}{24} \\ y=-\frac{7}{24} \end{cases}$

Решения: $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$, $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{5}{24}; -\frac{7}{24}\right)$

6.23.

а) $\begin{cases} \frac{5}{x^2-xy}+\frac{4}{y^2-xy}=-\frac{1}{6} \\ \frac{7}{x^2-xy}-\frac{3}{y^2-xy}=\frac{6}{5} \end{cases}$

Пусть $\dfrac{1}{x^2-xy}=p$, $\dfrac{1}{y^2-xy}=t$.

Система примет вид

$$\begin{cases}5p+4t=-\dfrac{1}{6}\\ 7p-3t=\dfrac{6}{5}\end{cases}\quad \begin{cases}p=-\dfrac{1}{30}-\dfrac{4}{5}t\\ -\dfrac{7}{30}-\dfrac{28}{5}t-3t=\dfrac{6}{5}\end{cases}\quad \begin{cases}p=-\dfrac{1}{30}-\dfrac{4}{5}t\\ -\dfrac{43}{5}t=\dfrac{43}{30}\end{cases}\quad \begin{cases}p=\dfrac{1}{10}\\ t=-\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

То есть $\begin{cases}x^2-xy=10\\ y^2-xy=-6\end{cases}$ $\begin{cases}(x-y)(x-y)=4\\ y(x-y)=6\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=\pm 2\\ y(x-y)=6\end{cases}$

1) $\begin{cases}x-y=2\\ y\cdot 2=6\end{cases}$ $\begin{matrix}x=5\\ y=3\end{matrix}$;   2) $\begin{cases}x-y=-2\\ y(-2)=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=-5\\ y=-3\end{cases}$

Решения (5; 3); (–5; –3).

б) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0\\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0\end{cases}$

Пусть $a=\dfrac{1}{x+y-1}$, $b=\dfrac{1}{2x-y+3}$.

Система примет вид:

$$\begin{cases}4a-5b+\dfrac{5}{2}=0\\ 3a+b+\dfrac{7}{5}=0\end{cases}\quad \begin{cases}4a-5(-3a-\dfrac{7}{5})=-\dfrac{5}{2}\\ b=-3a-\dfrac{7}{5}\end{cases}\quad \begin{cases}19a=-\dfrac{19}{2}\\ b=-3a-\dfrac{7}{5}\end{cases}\quad \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{10}\end{cases}$$

Значит, $\begin{cases}x+y-1=-2\\ 2x-y+3=10\end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго:

$\begin{cases}3x=6\\ y=2x-7\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases}$.   Решение (2; –3).

6.24.

а) $A(3;13)$, $B(-7;-11)$, $C(10;6)$

Центр окружности $O(x_0, y_0)$ равноудален от точек A, B, C на радиус R

$\Rightarrow (x_0-3)^2+(y_0-13)^2=(x_0+7)^2+(y_0+11)^2=(x_0-10)^2+(y_0-6)^2=R^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-6x_0-26y_0+178=14x_0+22x_0+170\\ -6x_0-26y_0+178=-20x_0-12y_0+136\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x_0+12y_0=2\\ y_0-x_0=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x_0+12x_0+36=2\\ y_0=x_0+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=-2\\ y_0=1\end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-13)^2}=13$$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=169$ — уравнение окружности

б) $A(7;-7)$, $B(-2;-4)$, $C(6;0)$

Центр окружности $O(x_0, y_0)$ равноудален от A, B, C на радиус $R \Rightarrow$

$(x_0-7)^2+(y_0+7)^2=(x_0+2)^2+(y_0+4)^2=(x_0-6)^2+y_0^2=R^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x_0+14y_0+98=4x_0+8y_0+20 \\ -14x_0+14y_0+98=-12x_0+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0-y_0=13 \\ x_0-7y_0=31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=3x_0-13 \\ x_0-21x_0+91=31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=3 \\ y_0=-4 \end{cases} \Rightarrow \ R=\sqrt{(x_0-7)^2+(y_0+7)^2}=5$$

$\Rightarrow\ (x-3)^2+(y+4)^2=25$ — уравнение окружности.

§ 7. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций

7.1.

Пусть скорости поездов равны u и v соответственно, тогда скорость их сближения равна u+v, значит $\frac{700}{u+v}=5$.

Если 2-й поезд отправится на 7 часов раньше первого, то в момент начала движения 1-го поезда между ними будет 700–7v километров, отсюда 2-е уравнение: $\frac{700-7v}{u+v}=2$.

Получим систему: $\begin{cases} \dfrac{700}{u+v}=5 \\ \dfrac{700-7v}{u+v}=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 700=5u+5v \\ 700=2v+9v \end{cases}$ $\begin{cases} u=140-v \\ 700=2u+9v \end{cases}$

700=280–2v+9v, 7v=420 $\Rightarrow$ v=60 $\Rightarrow$ u=80.

Ответ: 60 км/ч, 80 км/ч.

7.2.

Пусть u – скорость лодки, v – скорость течения реки, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{14}{u+v}=2 \\ \dfrac{14}{u-v}=2{,}8 \end{cases} \quad \begin{cases} 14=2u+2v \\ 70=144-14v \end{cases} \quad \begin{cases} u=7-v \\ 70=144-14v \end{cases}$$

70=98–14v–14v, 28v=28 $\Rightarrow$ v=1 $\Rightarrow$ u=6. Ответ: 6 км/ч, 1 км/ч.

7.3.

Пусть u – скорость лодки в стоячей воде, v – скорость течения реки.
Получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{10}{u-v}=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{9}{u+v}=\dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 8=u-v \\ 12=u+v \end{cases} \quad \begin{cases} 2u=20 \\ v=4-8 \end{cases} \quad \begin{cases} u=10 \\ v=2 \end{cases}$$

Ответ: 10 км/ч, 2 км/ч.

7.4.

Пусть a и b искомые числа, тогда: $\begin{cases} a+b=12 \\ ab=35 \end{cases}$ $\begin{cases} a=12-b \\ ab=35 \end{cases}$

$(12-b)b=35$, $b^2-12b+35=0$, по теореме Виета: $b_1=5$, $b_2=7$.

Т. к. $a=12-b$, то $a_1=7$, $a_2=5$. Ответ: 5 и 7.

7.5.

Пусть a и b – искомые числа, тогда: $\begin{cases} a+b=46 \\ a^2+b^2=1130 \end{cases}$ $\begin{cases} a=46-b \\ a^2+b^2=1130 \end{cases}$

$(46-b)^2+b^2=1130$, $2b^2-92b+2116-1130=0$. $b^2-46b+493=0$.

$D=(-46)^2-4\cdot 1\cdot 493=144$, $b_1=\frac{46+12}{2}=29$, $b_2=\frac{46-12}{2}=17$.

$a_1=46-29=17$; $a_2=46-17=29$. Ответ: 17 и 29.

7.6.

Пусть a и b – искомые числа, тогда: $\begin{cases} a-b=24 \\ a\cdot b=481 \end{cases}$ $\begin{cases} a=24+b \\ a\cdot b=481 \end{cases}$

$b^2+24b-481=0$. $D_1=144+481=625$. $b_1=-12-25=-37$, $b_2=-12+25=13$.

Т. к. по условию задачи b натуральное число, то b_1 не подходит, значит $b=13 \Rightarrow a=37$. Ответ: (37, 13).

7.7.

Пусть a и b – искомые натуральные числа, тогда:

$\begin{cases} a-b=16 \\ ab+553=a^2+b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=16+b \\ ab+553=a^2+b^2 \end{cases}$

$b^2+16b=256+b^2+32b+b^2-553$. $b^2+16b-297=0$. $D_1=64+297=361$.

$b_1=-8-19=-27$, $b_2=-8+19=11$. Т. к. $b\in N$, то $b=11 \Rightarrow a=27$.

Ответ: (27, 11).

7.8.

Пусть a и b – искомые натуральные числа, тогда:

$\begin{cases} a+b=50 \\ ab+11=a^2-b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=50-b \\ 50b-b^2+11=2500+b^2-b^2-100b \end{cases}$

$b^2-150b+2489=0$. $D_1=75^2-2489=3136=56^2$.

$b_1=75-56=19$, $b_2=75+56=131$. Тогда $a_1=31$, $a_2<0 \Rightarrow a=31$, $b=19$.

7.9.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-значное число, тогда

$\begin{cases} 10a+b=4(a+b) \\ 10a+b=3ab \end{cases}$ $\begin{cases} 6a-3b=0 \\ 10a+b-3ab=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=2a \\ 10a+2a-6a^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=2a \\ 2a=a^2 \end{cases}$

Решениями полученной системы является пара чисел (0, 0), (2, 4), но поскольку число 0 не принято считать двузначным, то ответом задачи является число 24. Ответ: 24.

7.10.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-значное число, тогда

$\begin{cases} a+b=12 \\ 10a+b+36=10b+a \end{cases}$ $\begin{cases} a=12-b \\ 9a+36=9b \end{cases}$

108–9b+36=9b; 18b=144.; b=8⇒a=4. Ответ: 48.

7.11.

Пусть $\frac{a}{b}$ – искомая дробь, тогда $\begin{cases} \frac{a+1}{b+1} = \frac{1}{2} \\ a^2+b^2=136 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a+2=b+1 \\ a^2+b^2=136 \end{cases}$

$\begin{cases} b=2a+1 \\ a^2+b^2=136 \end{cases}$

$a^2+4a^2+4a+1-136=0$. $5a^2+4a-135=0$. $D_1=16-4\cdot5(-135)=2716$.

В условии задачи опечатка.

7.12.

Пусть a и b – стороны прямоугольника, тогда

$\begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=100 \end{cases}$ $\begin{cases} a=14-b \\ a^2+b^2=100 \end{cases}$

$196+b^2-28b+b^2=100$. $b^2-14b+48=0$. $D_1=49-48=1$; $b_1=6$, $b_2=8$, тогда $a_1=8$, $a_2=6$.

Ответ: 6 и 8 см.

7.13.

Пусть a и b – катеты, тогда $\begin{cases} a+b=49 \\ a^2+b^2=1681 \end{cases}$ $\begin{cases} a=49-b \\ a^2+b^2-1681=0 \end{cases}$

$2b^2-98b+2401-1681=0$. $b^2-49b+360=0$. $D=2401-1440=961=31^2$.

$b_1=49-31=18$, $b_2=49+31=60$.

$b_1=\frac{49+31}{2}=40$; $b_2=\frac{49-31}{2}=9$; $a_1=49-40=9$; $a_2=49-9=40$;

$S=\frac{1}{2}\cdot40\cdot9=180$ (м^2). Ответ: 180 м^2.

7.14.

Пусть a и b –катеты, c – гипотенуза, тогда: $\begin{cases} a-b=23 \\ a^2+b^2=1369 \end{cases}$

$\begin{cases} a=23+b \\ a^2+b^2-1369=0 \end{cases}$

$529+2b^2+46b-1369=0$. $b^2+23b-420=0$. $D=529+1680=2209=47^2$.

$b_1=\frac{-23+47}{2}=12$; $b_2=\frac{-23-47}{2}=-35$ – не подходит по смыслу задачи;

$a=23+12=35$; $c=\sqrt{35^2+12^2}=37$; p=12+35+37=84 (дм).

Ответ: 84 дм.

7.15.

Пусть a и b – катеты, тогда:

$\begin{cases} ab=420 \\ a^2+b^2=1369 \end{cases}$ $\Rightarrow (a+b)2=47^2 \Rightarrow a+b=47$, т.к. a, $b>0$.

Тогда периметр равен $a+b+37=47+37=84$ (см). Ответ: 84 см.

7.16.

Пусть u – скорость лодки в стоячей воде и v – скорость течения реки, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{20}{u-v}+\dfrac{20}{u+v}=7 \\ \dfrac{2}{u-v}=\dfrac{5}{u+v} \end{cases}$$

По смыслу задачи на u–v и u+v не равны нулю. поэтому можно умножить обе части каждого из уравнений на u^2-v^2, получаем:

$$\begin{cases} 20u+20v+20u-20v=7u^2-7v^2 \\ 2u+2v=5u-5v \end{cases} \quad \begin{cases} 7u^2-7v^2-40u=0 \\ 7v=3u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{7}{3}v \\ 7u^2-7v^2-40u=0 \end{cases} \qquad \frac{7^2v^2}{9}-7v^2-\frac{7\cdot 40v}{3}=0.$$

$49v^2-9v^2-120v=0$. $v(v-3)=0$. По смыслу задачи $v\neq 0 \Rightarrow v=3$. Ответ: 3 км/ч.

7.17.

Пусть u – скорость первого пешехода, v – второго, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{24}{u}=\dfrac{24}{v}-2 \\ \dfrac{24}{u+2}=\dfrac{24}{v+1}-2 \end{cases}$$

По смыслу задачи ни один из знаменателей не равен нулю, поэтому умножим 1-е уравнение на uv, и 2-е на (u+2)(v+1), получим равносильную

систему: $\begin{cases} 24v-24u+2uv=0 \\ 24v+24-24u-42+24v+24+4v+u=0 \end{cases}$

Учитывая 1-е уравнение системы, 2-е можно переписать в виде:

24–42+24+4v+4=0, т. е. получим систему:

$$\begin{cases} 24v-24u+2uv=0 \\ 4v+2u-20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u=10-2v \\ 24v-24u+2uv=0 \end{cases}$$

$24v-240+48v+20v-4v^2=0$; $v^2-23v+60=0$; $D=529-240=289=17^2$;

$v_1=\dfrac{23-17}{2}=\dfrac{6}{2}=3$, $v_2=\dfrac{23+17}{2}=\dfrac{40}{2}=20$; $u_1=4$, $u_2<0$. Ответ: 4 км/ч, 3 км/ч.

7.18.

Пусть в первом зале x мест в ряду, а во втором – y, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{350}{x}=\dfrac{480}{y}+5 \\ y=x+10 \end{cases}$$

По смыслу задачи и x и y отличны от нуля, поэтому:

$$\begin{cases} 350y-480x-5xy=0 \\ y=x+10 \end{cases}$$

$350x+3500-480x-5x^2-50x=0$; $x^2+36x-700=0$; $D=1296+2800=64^2$;

$x_1=\dfrac{-36+64}{2}=14$; $x_2=\dfrac{-36-64}{2}=-50$ – не подходит по смыслу задачи.

$y=14+10=24$. Ответ: 14 и 24 места.

7.19.

Пусть в красном зале x рядов, а в синем – y, тогда получим систему·

$$\begin{cases} x=y+2 \\ \dfrac{320}{x}=\dfrac{360}{y}-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+2 \\ 320y-360x+4xy=0 \end{cases}$$

$320y-360y-720+4y^2+8y=0$; $y^2-18y-180=0$; $\dfrac{D}{4}=16+180=196=14^2$;

$y_1=4+14=18$, $y_2<0$; $x_1=20$. Ответ: 20 – в красном, 18 – в синем.

7.20.

Пусть x человек должно было сдавать экзамен по математике, тогда каждому человеку предполагалось выдать $\dfrac{400}{x}$ листов бумаги, получили уравнение: $\dfrac{400}{x}+1=\dfrac{400}{x-20}$.

$400x-8000+x^2-20x-400x=0$; $x^2-20x-8000=0$; $\dfrac{D}{4}=100+8000=8100=90^2$.

$x_1=10+90=100$, $x_2<0$.

Так как отсеялось 20 человек, то экзамен по математике сдавало $100-20=80$ человек. Ответ: 80 человек.

7.21.

Пусть 1-й комбайн работая один может выполнить задание за x часов, а второй за y, примем объем всей работы за 1, тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=6 \\ x=y-5 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=6 \\ x=y-5 \end{cases} \quad \begin{cases} xy=6x+6y \\ y=x+5 \end{cases}$$

$x^2+5x=6x+6x+30$; $x^2-7x-30=0$; $D=49+120=169=13^2$; $x_1\dfrac{7+13}{2}=10$, $x_2<0$.

Ответ: за 10 часов.

7.22.

Пусть 1-я бригада может выполнить работу за x часов, а вторая – за y. Примем весь объем работы за 1. Получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=8 \\ x=y-12 \end{cases} \quad \begin{cases} xy=8x+8y \\ y=x+12 \end{cases}$$

$x^2+12x=8x+8x+96$; $x^2-4x-96=0$; $D_1=4+96=10^2$; $x_1=2+10=12$, $x_2<0$.

Ответ: 12 часов.

7.23.

Пусть 1-му экскаватору требуется x часов, а 2-му – y часов. Приняв весь объем работы за 1 получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{15}{4} \\ x = y - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4xy = 15x + 15y \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$4x^2 - 16x - 15x - 15x + 60 = 0$, $2x^2 - 23x + 30 = 0$,

$D = 529 - 4 \cdot 2 \cdot 30 = 289$, $x_1 = \dfrac{23+17}{4} = 10$; $x_2 = \dfrac{23-17}{4} = \dfrac{3}{2}$

$y_1 = 10 - 4 = 6$; $y_2 = \dfrac{3}{2} - 4 < 0$ – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: за 10 ч. и 6 ч.

7.24.

Пусть 1-й кран наполняет чан за x часов, а 2-й – за y, тогда

$$\begin{cases} x = 2y \\ \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ \dfrac{xy}{x+y} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ xy = x + y \end{cases}$$

$2y^2=3y$; $y(2y-3)=0$; $y=\dfrac{3}{2}$ $=2x=3$. $x = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$

Ответ: первый – за 3, второй – за $\dfrac{3}{2}$ часа.

7.25.

Пусть пропускная способность 1–ого крана x м^3/ч, 2–ого – y м^3/ч. Тогда:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 54 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{60} = \dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60y - xy = 60x \\ 2y = 54 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow, \begin{cases} 2y = 54 - 3x \\ 54 \cdot 30 - 90x - x\left(27 - \dfrac{3}{2}x\right) = 60x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y = 54 - 3x \\ 54 \cdot 30 - 90x - 27x + \dfrac{3}{2}x^2 = 60x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 54 - 3x \\ x^2 - 118x + 1080 = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{D}{4} = 3481 - 1080 = 2401 = 49^2$

$x_1=59-49=10$ $x_2=59+49=108$, $y_1=12$ $y_2<0$

Ответ: 10 м^3/ч.

7.26.

Пусть 1-й тракторист вспахивает поле за x часов, а второй – за y. Приняв весь объем работы за 1, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = 48 \\ \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{x}} + \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{y}} = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 48x + 48y \\ x + y = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 9600 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

$200y-y^2-9600=0$; $y^2-200y+9600=0$; $D_1=10000-9600=400=20^2$;

$y_1=100-20=80$, $y_2=120$; $x_1=120$, $x_2=80$. Ответ: 120 часов: 80 часов.

7.27.

Пусть первый рабочий может выполнить задание за x часов, а второй – за y. Приняв весь объем работ за 1 получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = 2 \\ \dfrac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{1}{x}} + \dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{y}} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy = 4x + 4y \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 20y - 3y^2 = 40 - 6y + 4y \\ 2x = 20 - 3y \end{cases}$$

$3y^2-22y+40=0$; $D = 484 - 4 \cdot 3 \cdot 40 = 4$

$y_1=\dfrac{22+2}{6}=4$, $y_2=\dfrac{22-2}{6}=\dfrac{10}{3}$; $x_1=4$, $x_2=5$.

Т.к по условию задачи $x \neq y$, то ответ: 5 ч., 3ч. 20 мин.

7.28.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда получим:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ 10a + b - 9 = 10b + a \end{cases} \quad \begin{cases} 9a - 9b = 9 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 + b \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

$1+b^2+2b+b^2=13$; $2b^2+2b-12=0$; $b^2+b-6=0$. По т. Виета $b_1=-3$, $b_2=2$.

По смыслу задачи $b>0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=3$, искомое число $10 \cdot 3 + 2 = 32$

Ответ: 32.

7.29.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда

$$\begin{cases} b(10a + b) = 376 \\ 10a + b - 10b - a = 45 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b = 5 \\ 10ab + b^2 - 376 = 0 \end{cases}$$

$50b+11b^2-376=0$; $\dfrac{D}{4}=625+4136=4761=69^2$; $b_1=\dfrac{-25+69}{11}=4$, $b_2<0$; $a_1=9$

Ответ: 94.

7.30.

Пусть a и b – искомые натуральные числа, тогда: $\begin{cases} ab = 720 \\ a = 3b + 3 \end{cases}$

$3b^2+3b-720=0$; $b^2+b-240=0$; $D=1+960=961=31^2$

$b_1=\frac{-1+31}{2}=15$, $b_2<0$; $a_1=48$. Ответ: 48 и 15.

7.31.

Пусть a и b – искомые числа, тогда ($a>b$)

$$\begin{cases} a-b=7 \\ ab+400=52b+26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ b^2+7b+400-52b-26=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+7 \\ b^2-45b+374=0 \end{cases} \quad D=2025-1406=529=23^2$$

$$b_1=\frac{45-23}{2}=11,\ b_2=\frac{45+23}{2}=34$$

Но $b\neq 11$, т.к. при этом остаток не мог быть равным $26>11$; $b=34$ $a=41$.

7.32.

Пусть $\overline{a}\overline{b}$ – искомое 2-е число, тогда

$$\begin{cases} 10a+b=7(a+b)+6 \\ 10a+b=3ab+a+b \end{cases} \begin{cases} 3a-6b=6 \\ 9a=3ab \end{cases} \begin{cases} a=2+2b=8 \\ b=3 \end{cases}$$

Ответ: 83.

7.33.

Пусть имеется x рельсов по 25 м и y рельсов по 12,5 м, тогда

$$\begin{cases} 25x+\frac{y}{2}\cdot 12{,}5=20000 \\ 12{,}5y+\frac{2}{3}x\cdot 25=20000 \end{cases} \quad \begin{cases} 100x+25y=80000 \\ 75y+100x=120000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100x=80000-25y \\ 75y+80000-25y=12000 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{80000-25y}{100} \\ y=\dfrac{40000}{50} \end{cases}$$

$\begin{cases} x=600 \\ y=800 \end{cases}$ Общее количество: 600 + 800 = 1400 (штук) Ответ: 1400 штук.

7.34.

Пусть u – скорость велосипедиста, v – скорость мотоциклиста, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{60}v-\frac{1}{60}u=0{,}60 \\ \frac{120}{u}=\frac{120}{v}+3 \end{cases} \quad \begin{cases} v-u=36 \\ 40v=40u+uv \end{cases} \quad \begin{cases} u=v-36 \\ 40v=40v-1440+v^2-36v \end{cases}$$

$v^2-36v-1440=0$; $D=1296-4\cdot 1\cdot(-1440)=84^2$;

$v_1=\frac{36+84}{2}=60$; $v_2<0$ – не подходит по условию задачи.

$u=60-36=24$ (км/ч). Ответ: 60 км/ч, и 24 км/ч.

7.35.

Пусть u м/с – скорость 1-й модели, v м/с – 2-й, тогда имеем систему:

$$\begin{cases}60 = 21u + 6v \\ 45u + 30v = 180\end{cases} \quad \begin{cases}20 = 7u + 2v \\ 12 - 3u = 2v\end{cases} \quad \begin{cases}20 = 7u + 12 - 34 \\ v = \dfrac{12-34}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}u = 2 \\ v = 3\end{cases}$$

Ответ: 2 м/с, 3 м/с.

7.36.

Пусть u и v – скорости лыжников, тогда: $\begin{cases}\dfrac{2}{u} = \dfrac{2}{v} + 0{,}1 \\ \dfrac{4}{v} = \dfrac{2}{u}\end{cases} \quad \begin{cases}v = 2u \\ 2v = 2u + 0{,}1uv\end{cases}$

$4u = 2u + 0{,}1 \cdot 2u^2$; $u^2 - 10u = 0$; $u_1 = 0$ – не подходит по смыслу задачи.

$u_2 = 10$ (км/ч); $v = 2 \cdot 10 = 20$ (км/ч). Ответ: 10 и 20 км/ч.

7.37.

Пусть скорость велосипедиста v км/ч и t – время, через которое из A выехал мотоциклист, тогда получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{20}{v} = \dfrac{20}{50} + t \\ t + \dfrac{70}{50} + \dfrac{6}{10} + \dfrac{70 - \frac{10}{3}v}{50} = \dfrac{10}{3}\end{cases} \qquad \begin{cases}t = 20\left(\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{50}\right) \\ 50t + 70 + 30 + 70 - \dfrac{10}{3}v = \dfrac{100}{3}\end{cases}$$

$15t - v + 1 = 0$; $\dfrac{300}{v} - 6 - v + 1 = 0$; $v^2 + 5v - 300 = 0$; $D = 25 + 1200 = 1225 = 35^2$;

$v_1 = \dfrac{-5+35}{2} = 15$ (км/ч), $v_2 = \dfrac{-5-35}{2} = -20$ – не подходит по смыслу задачи. Ответ: 15 км/ч.

7.38.

Пусть вторая встреча произошла на расстоянии a км. от пункта А. Тогда расстояние от места второй встречи до пункта В – $(a + 4)$ км. $\Rightarrow$

Скорость 1-го пешехода $v_1 = \dfrac{a}{1} = a$ (км/ч).

Скорость 2-го пешехода $v_2 = \dfrac{a+4}{2{,}5} = \dfrac{2(a+4)}{5}$ (км/ч). АВ = $2a + 4$

2-й пешеход пришел в пункт В на 1,5 ч. позже, чем 1-й пешеход в пункт А, поэтому $\dfrac{2AB}{v_2} - \dfrac{2AB}{v_1} = 1{,}5$ ч., т.е.

$$\frac{2(2a+4)\cdot 5}{2(a+4)} - \frac{2(2a+4)}{a} = 1{,}5 \Rightarrow 9a^2 - 20a - 64 = 0$$

$\Rightarrow a_1 = 4$; $a_2 = -\dfrac{16}{9}$ – не подходит по смыслу задачи.

$v_1 = a = 4$ (км/ч); $v_2 = \dfrac{2(a+4)}{5} = 3{,}2$ (км/ч).

Ответ: $v_1 = 4$ (км/ч), $v_2 = 3{,}2$ (км/ч).

7.39.

Пусть v км/ч – скорость поезда, выходящего из A и S км – расстояние между A и B, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{S}{2v}=\dfrac{S}{2(v+40)}+2\\ \dfrac{S}{v+(v+40)}=\dfrac{15}{4}\end{cases}\quad \begin{cases}S=\dfrac{4}{\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{v+40}},\\ \dfrac{S}{2v+40}=\dfrac{15}{4}\end{cases}\quad \dfrac{\dfrac{4}{\dfrac{40}{v(v+40)}}}{2v+40}=\dfrac{15}{4}\quad \dfrac{\dfrac{v(v+40)}{10}}{2v+40}=\dfrac{15}{4}$$

$4v(v+40)=150(2v+40)$; $4v^2+160v-300v-6000=0$; $4v^2-140v-6000=0$,

$D_1=70^2+24000=4900+24000=28900=170^2$

$v_1=\dfrac{70+170}{4}=\dfrac{240}{4}=60$ км/ч, $v_2<0$.

$v+40=100$ км/ч. $S=\dfrac{15(v+20)}{2}=\dfrac{15\cdot(60+20)}{2}=600$ (км).

Ответ: 60 и 100 км/ч, 600 км.

7.40.

Пусть x м/с и y м/с – скорость точек. $x>y$ Примем за начальный момент времени – совпадения точек. тогда через 1 минуту, точка с большей скоростью пройдет на 1 круг больше, т.е. получили систему

$$\begin{cases}\dfrac{60}{y}-\dfrac{60}{x}=5\\ 60x=60y+60\end{cases}\quad \begin{cases}12x-12y=xy\\ x=y+1\end{cases}\quad \begin{cases}12y+12-12y=y(y+1)\\ x=y+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2+y-12=0\\ x=y+1\end{cases}\quad \begin{cases}y=3,\ y=-4\\ x=3+1=4\end{cases}\quad y=-4 \text{ – не подходит.}$$ Ответ: 3м/с и 4 м/с

7.41.

Пусть на реке он плыл x часов, а пешком шел y часов, тогда получим

$$\begin{cases}x-y=4\\ (\dfrac{90}{x})\dfrac{}{}=(\dfrac{10}{y})x\end{cases}\quad \begin{cases}x=y+4\\ \dfrac{9y}{x}=\dfrac{x}{y}\end{cases}\quad \dfrac{9y}{y+4}=\dfrac{y+4}{y};$$ $9y^2=y^2+8y+16$; $y^2-y-2=0$.

По т. Виета $y_1=2$, $y_2=-1$. По смыслу задачи $y>0$, поэтому $y=2\Rightarrow x=6$.

Ответ: 6 часов по реке и 2 – пешком.

7.42.

Пусть y км/ч – скорость катера, x км/ч – скорость течения, тогда получим:

$$\begin{cases}\dfrac{96}{x+y}+\dfrac{96}{y-x}=14\\ (x+y)=\dfrac{4}{3}(y-x)\end{cases}\quad \begin{cases}48(y-x)+48(x+y)=7(y-x)(y+x)\\ (x+y)=\dfrac{4}{3}(y-x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}48(y-x)+64(y-x)=\dfrac{28}{3}(y-x)^2\\ (x+y)=\dfrac{4}{3}(y-x)\end{cases}\quad \begin{cases}y-x=12\\ y+x=\dfrac{4}{3}(y-x)\end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 12 \\ y + x = 16 \end{cases} \begin{cases} y = 14 \\ x = 2 \end{cases}$$

Теперь нетрудно вычислить расстояние до места встречи по формуле:

$\dfrac{96}{x+y}$ – столько времени был катер в пути до поворота.

$\dfrac{96}{x+y} \cdot x$ – столько за это время проплыл катер.

$96 - \dfrac{96 \cdot x}{x+y}$ – такое расстояние между ними

$\dfrac{96 - \frac{96x}{x+y}}{y}$ – они проплывут его за столько времени.

$\left(\dfrac{96}{x+y} + \dfrac{96 - \frac{96x}{x+y}}{y}\right)x$ – то, что надо найти

$\left(\dfrac{96}{2+14} + \dfrac{96 - \frac{96 \cdot 2}{2+14}}{14}\right) \cdot 2 = 24$ (км) Ответ: 24 км.

7.43.

Пусть вся работа равна A. Тогда скорость работы 1–ого ученика $\dfrac{A}{x}$, 2–ого $\dfrac{A}{y}$, где x и y – искомые промежутки времени. Получили систему

$$\begin{cases} \left(\dfrac{A}{x} + \dfrac{A}{y}\right) \cdot 6 = A \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 12{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ x = 25 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6y = xy \\ y = 25 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 - x \\ 6x + 150 - 6x = 25x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 - x \\ x^2 - 25x + 150 = 0 \end{cases}$$

$D=625-600=25=5^2$, $x_1 = \dfrac{25+5}{2} = 15$, $x_2 = \dfrac{25-5}{2} = 10$, $y_1=10$ $y_2=15$

Ответ: 10 и 15 ч.

7.44.

Пусть бригаде учеников требуется x часов, тогда бригаде слесарей – y часов. Примем весь объем работ за 1, получим:

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 18 \cdot \dfrac{1}{x} + 6 \cdot \dfrac{1}{y} = 0{,}6 \end{cases} \begin{cases} y = x - 15 \\ 18y + 6x = 0{,}6xy \end{cases}$$

$18x-270+6x=0{,}6x^2-9x$; $x^2-55x+450=0$;

$D=55^2-4\cdot 450=35^2$

$x_1=\dfrac{55+35}{2}=45$; $x_2=\dfrac{55-35}{2}=10$;

$y_1=45-15=30$ (ч); $y_2=10-15<0$ – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 45 часов.

7.45.

Пусть вся работа равна A, оператор тратит на нее x часов, ученик – y часов. Тогда

$$\begin{cases}\left(\dfrac{A}{x}+\dfrac{A}{y}\right)\cdot 2{,}4=A\\ \dfrac{2A}{x}+\dfrac{A}{y}=\dfrac{2}{3}A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot 2{,}4=1\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=6\end{cases}.$$

Ответ: 4 ч и 6 ч.

7.46.

Пусть для выполнения работы 1-й бригаде требуется x дней, а 2-й – y дней, тогда, приняв всю работу за 1, получим:

$$\begin{cases}\dfrac{18}{x}+\dfrac{18}{y}=1\\ \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}+\left(40-\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}}\right)\cdot\dfrac{1}{y}=1\end{cases}$$

$\dfrac{1}{x}$ – часть работы, которую 1-я бригада выполняет за 1 день.

$$\begin{cases}18y+18x=xy\\ \dfrac{2}{3}+(40-\dfrac{2x}{3})\dfrac{1}{y}=1\end{cases}\quad\begin{cases}18y+18x=xy\\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{40}{y}-\dfrac{2x}{3y}=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}18y+18x=xy\\ 2y+120-2x=3y\end{cases}\quad\begin{cases}18y+18x=xy\\ y=120-2x\end{cases}$$

$2160-36x+18x=120x-2x^2$; $2x^2-138x+2160=0$; $x^2-69x+1080=0$;

$D=4761-4320=441=21^2$; $x_1=\dfrac{69-21}{2}=24$, $x_2=\dfrac{69+21}{2}=45$., $y_1=72$, $y_2=30$

Ответ: 24 – первой и 72 – второй или 45 – первой и 30 – второй.
Опечатка в ответе задачника.

7.47.

Пусть бассейн наполняется за x часов, а опустошается за y часов, тогда

$$\begin{cases} x-y=2 \\ \dfrac{1}{3(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})}=8 \end{cases} \begin{cases} x-y=2 \\ \dfrac{xy}{3(x-y)}=8 \end{cases} \begin{cases} x-y=2 \\ xy=48 \end{cases} \begin{cases} x=2+y \\ xy=48 \end{cases}$$

$y^2+2y-48=0$; $D_1=1+48=49=7^2$; $y_1=-1+7=6$, $y_2<0 \Rightarrow x=8$.

Ответ: за 8 – наполняет, за 6 – опустошает.

7.48.

Пусть u и v – скорости точек, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} (60-3u)^2+(80-3v)^2=4900 \\ (60-5u)^2+(80-5v)^2=2500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3600+9u^2+9v^2-360u-480v+6400-4900=0 \\ 25u^2+25v^2-600u-800v+7500=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(u^2+v^2-40u-40v)-120v+5100=0 \\ u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -144u-72v-2700-120v+5100=0 \\ u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -144u-192v+2400=0 \\ u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u+4v=50 \\ u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300 \end{cases}, \quad \begin{cases} u=\dfrac{50-4v}{3} \\ u^2+v^2-24u-32v+300=0 \end{cases}$$

$2500+16v^2-400v+9v^2-3600+288v-288v+2700=0$; $25v^2-400v+1600=0$;
$v^2-16v+64=0$; $(v-8)^2=0 \Rightarrow v=8 \Rightarrow u=6$. Ответ: 6 и 8 м/с.

7.49.

Пусть вкладчик положил x рублей под y%. Тогда получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{100}=2000 \\ \left(x+\dfrac{xy}{100}+18000\right)\left(\dfrac{y}{100}+1\right)=44000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=200000 \\ xy+100x+20000y+2000000=4400000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=200000 \\ x+200y=22000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=22000-200y \\ (20000-200y)y=200000 \end{cases}$$

$$-200y^2+22000y-200000=0$$

$$y^2-110y+1000=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=10 \\ y_2=100 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=20000 \\ x_2=2000 \end{array}\right.$$

Т.к. ставки 100% в реальности нет, то получаем, что $x=20000$ р., $y=10\%$.

7.50.

Пусть у младшего было x руб., а его банк дает $y\%$ годовых. Тогда:

$$\begin{cases} xy=240000 \\ 2x(y-5)=460000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=240000 \\ 10x=20000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7000 \\ y=120 \end{cases}$$

Банк старшего брата дает 20–5=15% годовых. Тогда искомая сумма равна

$2000\cdot1{,}15+4000\cdot1{,}2=2300+4800=7100$ (руб.) Ответ: 7100 р.

7.51.

Пусть доход 1–ого предприятия x, 2–ого y. k – искомое.

Тогда: $\begin{cases} 3(x+y)=x+4y \\ 4(x+y)=kx+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ 12x=kx+2x \end{cases} \Rightarrow 10-k=0 \Rightarrow k=10.$

Ответ: в 10 раз.

7.52.

Пусть в 1–ой партии x кг, во 2–ой y кг. Тогда

$80\,(x+y)=0{,}85\,(80x+(80-1{,}25)\,y)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 80\,(x+y)=0{,}85\,(80x+100y)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 80x+80y=68x+85y \Leftrightarrow 12x=5y \Leftrightarrow \dfrac{y}{x}=\dfrac{12}{5}$

Нам необходимо найти число $\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{12}{5}}=\dfrac{5}{17}$ Ответ: $\dfrac{5}{17}$

7.53.

Пусть взяли x г. 40% раствора и y г. 10%-го, тогда

$$\begin{cases} x+y=800 \\ \dfrac{x}{100}\cdot40+\dfrac{y}{100}\cdot10=\dfrac{800}{100}\cdot21{,}25 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=800 \\ 4x+y=1700 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=920 \\ y=800-x \end{cases} \quad \begin{cases} x=300 \\ y=500 \end{cases}$$

Ответ: 300 г – 40%-го раствора и 500 – 10%.

7.54.

Пусть было x л 40%-го и y л 60%-го раствора, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{100}\cdot40+\dfrac{y}{100}\cdot60=\dfrac{x+y+5}{100}\cdot20 \\ \dfrac{x}{100}\cdot40+\dfrac{y}{100}\cdot60+\dfrac{5}{100}\cdot80=\dfrac{x+y+5}{100}\cdot70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=x+y+5 \\ 4x+6y+40=7x+7y+35 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y \\ 3x+y-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y \\ 15-6y+y-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: 1 литр 40%-го и 2 л 60%-го раствора.

7.55.

Пусть m кг – масса 3-го слитка, и ω – %-е содержание в нем меди, тогда

$$\begin{cases}\frac{5}{100}\cdot 30+\frac{m}{100}\cdot\omega=\frac{5+m}{100}\cdot 56\\ \frac{3}{100}\cdot 30+\frac{m}{100}\cdot\omega=\frac{3+m}{100}\cdot 60\end{cases}\quad \begin{cases}150+\omega m=280+56m\\ 90+\omega m=180+60m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega m=130+56m\\ 90+130+56m=180+60m\end{cases}\quad \begin{cases}m=10\ (\%)\\ \omega=69\ (\%)\end{cases}$$

Процентное содержание меди в сплаве всех трех слитков вычислим по формуле: $100\%\dfrac{\frac{5}{100}\cdot 30+\frac{3}{100}\cdot 30+\frac{10}{100}\cdot 69}{5+3+10}=51\frac{2}{3}\%$.

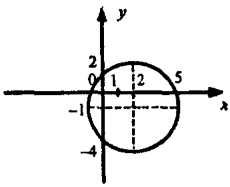
Домашняя контрольная работа

ВАРИАНТ 1

1. $x^2+(y-8)^2=25$ $(x, y)=(3, 4)$. Подставим:

$3^2+(4-8)^2=9+16=25$ – верно. (3, 4) является решением.

2.



3. а) $\begin{cases}x^2-y=3\\ x+y=3\end{cases}$

Построим графики функций $y=x^2-3$ и $y=3-x$ (см. б)

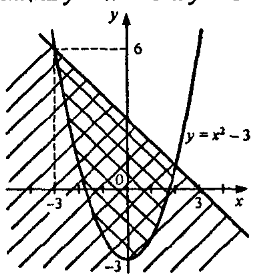
$x=-3\Rightarrow y=6$

$x=2\Rightarrow y=1$

Ответ: (–3; 6), (2; 1).

б) $\begin{cases}x^2-y\le 3\\ x+y\le 3\end{cases}$

Построим графики функций $y=x^2-3$ и $y=3-x$.



$x^2-3=3-x;\ x^2+x-6=0$

$D = 1 + 24 = 25 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}; x_1 = -3; x_2 = 2.$

4. $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 - 12y + 32 = 0 \\ x = 6 - y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 14 \\ y = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$ (14; –8) и (4; 2)

Решим первое уравнение: $y^2 + 6y - 16 = 0 \Rightarrow y_1 = -8, y_2 = 2$

5. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4 \\ 2x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$

6. Пусть $xy=p$, тогда

$$\begin{cases} p^2 + 3y = 45 \\ 5y - 2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - \frac{p^2}{3} \\ 75 - \frac{5}{3}p^2 - 2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - \frac{p^2}{3} \\ 5p^2 + 6p - 216 = 0 \end{cases}$$

$D_1=9+1080=1089=33^2 \qquad p_1 = \frac{-3+33}{5} = 6 \quad p_2 = \frac{-3-33}{5} = -\frac{36}{5}$

$$y_1 = 15 - \frac{36}{3} = 3$$

$$y_2 = 15 - \frac{36^2}{3 \cdot 25} = 15 - \frac{3^4 \cdot 2^4}{3 \cdot 5^2} = 15 - \frac{648}{25} = \frac{375 - 648}{25} = -\frac{273}{25}$$

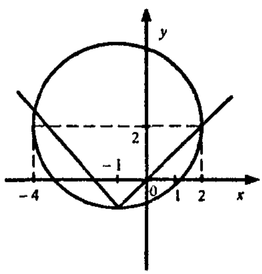
$$x_1 = \frac{p_1}{y_1} = 2 \quad x_2 = \frac{p_2}{y_2} = \frac{36 \cdot 25}{273 \cdot 5} = \frac{18 \cdot 5}{91} = \frac{90}{91}.$$

7. $x+2y=a$; $x-2y=b$

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 11 \\ 5a + b = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -18 - 5a \\ a^2 + 36 + 10a = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -18 - 5a \\ a^2 + 10a + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

8.



Ответ: (–1; –1); (2; 2); (–4; 2).

9. Пусть 1–ый каменщик выполняет работу A за x часов, второй за y часов. Тогда:

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25\\ \left(\frac{A}{x}+\frac{A}{y}\right)\cdot 12=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=50\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=50-x\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=50-x\\ \frac{50}{x(50-x)}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}50x-x^2-600=0\\ y=50-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-50x+600=0\\ y=50-x\end{cases}$$

$$\frac{D}{4}=625-600=25=5^2$$

$x_1=25+5=30$ $y_1=20$; $x_2=25-5=20$ $y_2=30$

Ответ: 20 ч, 30 ч.

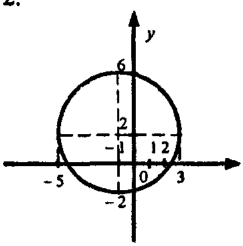
10. Автомобиль двигался 5 ч с постоянной скоростью, затем увеличил скорость и ехал еще 3 ч (V=const), проехав в сумме 380 км. Найдите скорость автомобиля на 1–ом и 2–ом отрезке пути, если известно, что, если бы он не менял скорости, он проехал бы эти 380 км на 3 ч 10 мин мёдленнее, чем он проехал бы это расстояние со скоростью, которой он обладал на 2–ом отрезке пути.

ВАРИАНТ 2

1. $(x-1)^2+y^2=18$ $(x, y)=(-2, 3)$. Подставим:

$(-2-1)^2+3^2=9+9=18$ – верно. $(-2, 3)$ является решением.

2.



Ответ: (0; 3); (–1; 2).

3. а) $\begin{cases}x^2+y=3\\ y-x+3=0\end{cases}$

Построим графики функций $y=3-x^2$, $y=x-3$ (см. б)

$x=-3\Rightarrow y=-6$

$x=2\Rightarrow y=-1$

Ответ: (–3; –6), (2; –1).

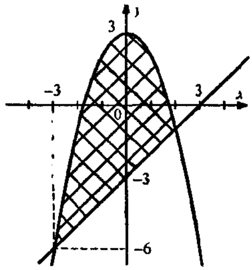
б) $\begin{cases}x^2+y\le 3\\ y-x+3\ge 0\end{cases}$

Построим графики функций $y=3-x^2$, $y=x-3$

Найдем абсциссы точек пересечения:

$3-x^2=x-3$

$x^2+x-6=0$ (см. вариант 1 № 3б); $x_1=-3$; $x_2=2$



4. $\begin{cases}2x^2-y^2=14\\3x+2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+30x-81=0\\2y=5-3x\end{cases} \Leftrightarrow$

Решим первое уравнение: $x^2-30x+81=0 \Rightarrow x_1=27,\ x_2=3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=27\\y=-38\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow (27,-38)$ и $(3;-2)$

5. $\begin{cases}3x^2+y^2=7\\x^2+2y^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+y^2=7\\-5y^2=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=4\\x^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm1\\y=\pm2\end{cases}$

6. $\begin{cases}(xy)^2-3xy=18\\4x+y=1\end{cases}$

Пусть $xy=p$, тогда $\begin{cases}p^2-3p=18\\4x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p^2-3p-18=0\\4x+y=1\end{cases}$

$D=9+72=81=9^2$ $\qquad p_1=\dfrac{3+9}{2}=6;\ p_2=\dfrac{3-9}{2}=-3$

Получили 2 системы

а) $\begin{cases}xy=6\\4x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{6}{x}\\4x+\dfrac{6}{x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{6}{x}\\4x^2-x+6=0\end{cases}$

$D=1-24\cdot4<0.$ Решений нет;

б) $\begin{cases}xy=-3\\4x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\dfrac{3}{x}\\4x-\dfrac{3}{x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\dfrac{3}{x}\\4x^2-x-3=0\end{cases}$

$D=1+48=49=7^2$ $x_1=\dfrac{1+7}{8}=1$ $y_1=-3;$ $x_2=\dfrac{1-7}{8}=-\dfrac{3}{4}$ $y_2=4$

7. $\begin{cases}(x+y)^2-3(x-3y)=22\\4(x+y)+x-3y=21\end{cases}$ $\quad \begin{array}{l}x+y=a\\x-3y=b\end{array}$

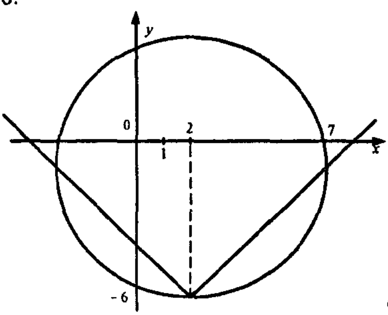
$$\begin{cases} a^2-3b=22 \\ 4a+b=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=21-4a \\ a^2-63+12a=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=21-4a \\ a^2+12a-85=0 \end{cases}$$

D_1=36+85=121=112 $\quad$ a_1=–6+11=5; a_2=–6–11=–17;
b_1=1; b_2=21+68=89.
Получим 2 системы:

$$(1) \begin{cases} x+y=5 \\ x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ 5-4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=-17 \\ x-3y=89 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-17-y \\ -17-4y=89 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{53}{2} \\ x=-17-\dfrac{53}{2} \end{cases}$$

8.



Ответ: (2; –6); (7; –1); (–5; –1).

9. Пусть первый делает работу A за x ч, второй за y ч.

$$\begin{cases} y=x+1 \\ \left(\dfrac{A}{x}+\dfrac{A}{y}\right)\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{A}{y}\cdot 2\dfrac{1}{4}=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{9}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{12}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{12}{x+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{15x+3}{x(x+1)}=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 15x+3=4x^2+4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 4x^2-11x-3=0 \end{cases}$$

$D=121+48=169=13^2$

$x_1=\dfrac{11+13}{8}=3$; $x_2<0$; $y_1=4$. $\qquad$ Ответ: 3 ч, 4 ч.

10. Два автоматических станка изготовляют детали. Первый станок, работая 6 ч, и второй, работая 5 ч, изготовляют в сумме 780 деталей. Каковы производительности станков, если известно, что на изготовление 600 деталей первому станку требуется на 2 ч 30 мин больше, чем второму?

Глава 3. Числовые функции

§ 8. Определение числовой функции. Область определения, область значений функции

8.1. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $(0; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

8.2. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

8.3. а) Знаменатель не нулевой при любых x $(-\infty; +\infty)$;

б) Знаменатель не равен 0 ни при каких x. $(-\infty; +\infty)$;

в) Из тех же соображений $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

8.4.

а) $x\neq7$, т. е. $(-\infty; 7)\cup(7; +\infty)$; б) $4x+1\neq0\Leftrightarrow x\neq-\frac{1}{4}$; $(-\infty; -\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{4}; +\infty)$;

в) $x+3\neq0\Leftrightarrow x\neq-3$; $(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$;

г) $8+5x\neq0\Leftrightarrow 5x\neq-8\Leftrightarrow x\neq-\frac{8}{5}$; $(-\infty; -\frac{8}{5})\cup(-\frac{8}{5}; +\infty)$

8.5.

а) $x-2\neq0$, т. е. $x\neq2$. $(-\infty; 2)\cup(2;+\infty)$;

б) $2x+1\neq0$, т. е. $x\neq-\frac{1}{2}$. $(-\infty; -\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}; +\infty)$;

в) $3-x\neq0$, т. е. $x\neq3$. $(-\infty; 3)\cup(3;+\infty)$;

г) $2+3x\neq0$, т. е. $x\neq-\frac{2}{3}$. $(-\infty;-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3}; +\infty)$.

8.6.

а) $x(x+1)\neq0$, т. е. $x\neq0$, $x\neq-1$. $(-\infty;-1)\cup(-1; 0)\cup(0; +\infty)$;

б) $x^2(x-5)\neq0$, т. е. $x\neq0$, $x\neq5$. $(-\infty;0)\cup(0; 5)\cup(5;+\infty)$;

в) $x(7-x)\neq0$, т. е. $x\neq0$, $x\neq7$. $(-\infty; 0)\cup(0; 7)\cup(7; +\infty)$;

г) $x^2(6+x)\neq0 \Leftrightarrow x\neq0$, $x\neq-6$. $(-\infty; -6)\cup(-6; 0)\cup(0; +\infty)$.

8.7.

а) $(x-1)(x+2)\neq0$, т. е. $x\neq1$, $x\neq-2$. $(-\infty; -2)\cup(-2; 1)\cup(1; +\infty)$;

б) $(x+50)(2x+7)\neq0$, т. е. $x\neq-50$, $x\neq-\frac{7}{2}$. $(-\infty; -50)\cup(-50; -\frac{7}{2})\cup(-\frac{7}{2}; +\infty)$.

в) $(x+12)(6x-3)\neq0$, т. е. $x\neq-12$, $x\neq\frac{1}{2}$. $(-\infty; -12)\cup(-12; \frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}; +\infty)$;

г) $(5x-4)(x-13)\neq0$, т. е. $x\neq\frac{4}{5}$, $x\neq13$. $(-\infty; \frac{4}{5})\cup(\frac{4}{5}; 13)\cup(13; +\infty)$.

8.8.

а) $x^2-5x+4\neq0$

по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=1$. $x\neq4$, $x\neq1$. $(-\infty; 1)\cup(1; 4)\cup(4; +\infty)$;

б) $2x^2-9x+7\neq0$, $D=81-56=25$ $x_1=\frac{9+5}{4}=\frac{7}{2}$; $x_2=\frac{9-5}{4}=1$, $x\neq1$, $x\neq\frac{7}{2}$

$(-\infty; 1)\cup(1; \frac{7}{2})\cup(\frac{7}{2}; +\infty)$;

в) $x^2+2x+3\neq0$, при $x\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow(-\infty;+\infty)$

г) $3x^2-x-10\neq0$, $D=1+120=121$

$x_1=\dfrac{1+11}{6}=2$; $x_2=\dfrac{1-11}{6}=-\dfrac{5}{3}$, $x\neq2$; $x\neq\dfrac{5}{3}$ $(-\infty;-\dfrac{5}{3})\cup(-\dfrac{5}{3};2)\cup(2;+\infty)$.

8.9.

Функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно.

а) $x-3\ge0$, $x\ge3$; б) $x+11\ge0$, $x\ge-11$; в) $x+4\ge0$, $x\ge-4$; г) $2-x\ge0$, $x\le2$

8.10.

а) $x^2+13>0$ всегда; б) $x^2+x^4\ge0$, всегда;

в) $x^2+24>0$ всегда; г) $2x^6+x^2\ge0$, всегда.

а)–г) $(-\infty;+\infty)$.

8.11.

а) $x^2-9\ge0$, $x^2\ge9$, $|x|\ge3$, $x\ge3$, $-3\ge x$. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$;

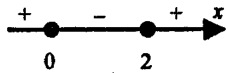
б) $7-x^2\ge0$, $x^2\le7$, $|x|\le\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}\le x\le\sqrt{7}$;

в) $x^2-144\ge0$, $x^2\ge144$, $|x|\ge12$, $x\ge12$, $x\le-12$;

г) $20-x^2\ge0$, $x^2\le20$, $|x|\le\sqrt{20}$, $-\sqrt{20}\le x\le\sqrt{20}$.

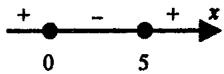
8.12.

а) $2x-x^2\ge0$, $x-(x-2)\le0$, $0\le x\le2$



б) $\dfrac{1}{3}x^2-3\ge0$, $x^2-9\ge0$, $x\ge3$, $x\le-3$ (см. 209а)

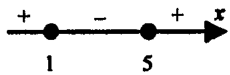
в) $x^2-5x\ge0$, $x(x-5)\ge0$, $x\ge5$, $x\le0$



г) $5-\dfrac{1}{5}x^2\ge0$, $x^2\le25$, $-5\le x\le5$.

8.13.

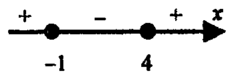
а) $x^2-6x+5\ge0$



по теореме Виета: $x_1=5$, $x_2=1$, $(x-5)(x-1)\ge0$, $x\ge5$, $x\le1$;

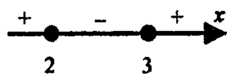
б) $-x^2+3x+4\ge0$

$x^2-3x-4\le0$



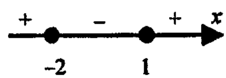
по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=-1$, $(x-4)(x+1)\le0$, $-1\le x\le4$;

в) $x^2-5x+6\ge0$



по теореме Виета: $x_1=3$, $x_2=2$, $(x-2)(x-3)\ge0$, $x\ge3$, $x\le2$;

г) $-2+x+x^2\ge0$; $x^2+x-2\ge0$

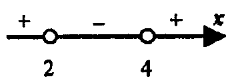


по теореме Виета: $x_1=1$, $x_2=-2$, $(x-1)(x+2)\ge0$, $x\ge1$, $x\le-2$.

8.14.

а) $x-2>0$, $x>2$;

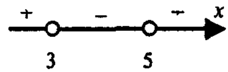
б) $x^2-6x+8>0$



по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=2$, $(x-2)(x-4)>0$; $x>4$, $x<2$;

в) $x+3>0$, $x>-3$;

г) $x^2-8x+15>0$



по теореме Виета: $x_1=5$. $x_2=3$. $(x-3)(x-5)>0$. $x>5$, $x<3$.

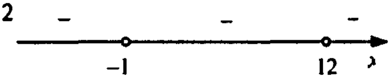
8.15.

а) $3x-5>0 \Rightarrow x>1\frac{2}{3}$

б) $x^2-11x-12>0$

по теореме Виета: $x_1=12$, $x_2=-1$

$(x+1)(x-12)>0$ $\qquad x<-1$, $x>12$

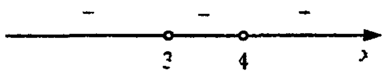


в) $20-5x>0 \Rightarrow x<4$

г) $-x^2+7x-12>0$

по теореме Виета: $x_1=3$, $x_2=4$

$(x-3)(x-4)<0$ $\qquad 3<x<4$



8.16.

а) $y=\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$; $\begin{cases}2-x\ge 0\\ x+2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 2\\ x>-2\end{cases}$ $-2<x\le 2$.

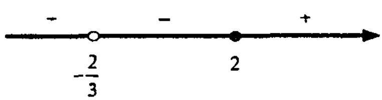
б) $y=\frac{\sqrt{4x+6}}{\sqrt{3x+4}}$; $\begin{cases}4x+6\ge 0\\ 3x+4>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -\frac{3}{2}\\ x>-\frac{4}{3}\end{cases}$ $x>-\frac{4}{3}$.

в) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$ $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x+3>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -1\\ x>-3\end{cases}$ $x\ge -1$.

г) $y=\frac{\sqrt{5-3x}}{\sqrt{4x+8}}$ $\begin{cases}5-3x\ge 0\\ 4x+8>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x\le 5\\ 4x>-8\end{cases}$ $\begin{cases}x\le \frac{5}{3}\\ x>-2\end{cases}$ $-2<x\le\frac{5}{3}$

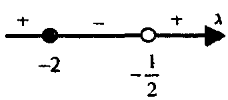
8.17.

а) $y=\sqrt{\frac{2-x}{3x+2}}$



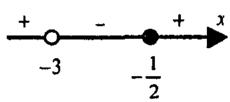
$\frac{2-x}{3x+2}\ge 0$; $\frac{x-2}{x+\frac{2}{3}}\le 0$; $-\frac{2}{3}<x\le 2$

б) $y=\sqrt{\frac{3x+6}{2x+1}}$



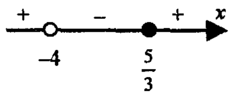
$\frac{3x+6}{2x+1}\ge 0$; $\frac{x+2}{x+\frac{1}{2}}\ge 0$; $x>-\frac{1}{2}$, $x\le -2$

в) $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$; $\frac{2x+1}{x+3}\ge 0$; $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+3}\ge 0$



$x\ge -\frac{1}{2}$, $x<-3$;

г) $y=\sqrt{\dfrac{5-3x}{2x+8}}$; $\dfrac{5-3x}{2x+8}\geq 0$; $\dfrac{3(x-\frac{5}{3})}{2(x+4)}\leq 0$;



$\dfrac{x-\frac{5}{3}}{x+4}\leq 0$; $-4<x\leq\dfrac{5}{3}$.

8.18. а) $y=x^2$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$; г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+10}}$.

8.19.

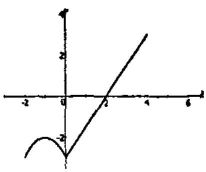
а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\sqrt{x-1}}$; б) $y=\sqrt{(x+1)(6-x)}$;

в) $y=\sqrt{x(3-x)}$; г) $y=\sqrt{(x+5)(x+2)}$.

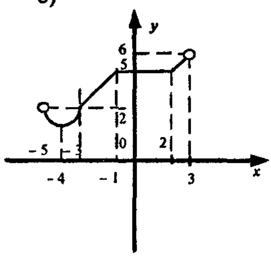
8.20.

а) $y=x$; б) $y=x^2$. в) $y=\sqrt{x}$; г) $y=\dfrac{-1}{\sqrt{x}}$

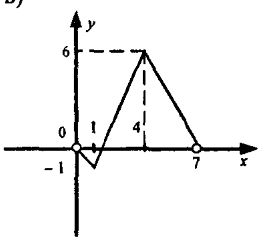
8.21. а)



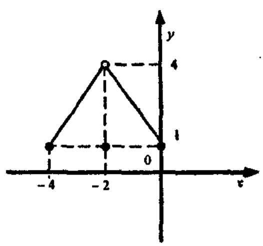
б)



в)



г)



Точка (–2; 1) принадлежит графику

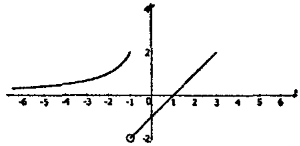
8.22.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, & \text{если } \leq -1\\ x-1, & \text{если } -1<x\leq 3\end{cases}$$

а) $D(f)=(-\infty;\ 3]$;

б) $f(-2)=1$, $f(-1)=2$, $f(0)=-1$, $f(3)=2$, $f(7)$ – не существует.

в)



г) E(f)=(−2; 2]

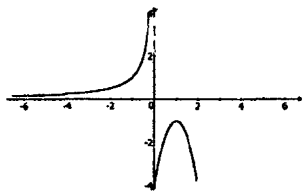
8.23.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, \text{ если } x<0\\ -3x^2+6x-4, \text{ если } 0\le x\le 2\end{cases}$$

а) D(f)=(−∞; 2]; б) $f(-3)=\dfrac{1}{3}$; f(−1)=1; f(0)=−4; f(2)=−3·4+12−4=−4.

f(5) – не существует.

в)



г) E(f)=[−4; −1]∪(0; +∞).

8.24.

а) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } -2\le x\le 1\\ x+1, \text{ если } 0<x<3\end{cases}$. Найдем f(1). С одной стороны f(1)=1, с другой – 2. Задание некорректно.

б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ если } 0\le x\le 4\\ x^2, \text{ если } x\ge 4\end{cases}$

Подозрения вызывает только точка x=4. С одной стороны f(4)=2, с другой – 16. Задание некорректно.

в) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{если} -2\le x\le 0\\ x+1, \text{если } 1\le x\le 3\end{cases}$

Да, является, т.к. кусочно заданные области определений не пересекаются и на каждом f определена.

г) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x\le 4\\ \dfrac{x^2}{8} & x\ge 4\end{cases}$

С одной стороны, $f(x)=\sqrt{4}=2$, с другой, $f(4)=\dfrac{4^2}{8}=2$. Задание корректно.

8.25.

а) $y=\dfrac{1}{(x+1)(x^2-7x-8)}$; $(x+1)(x^2-7x-8)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=8$, $x_2=-1$, $(x+1)^2(x-8)\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 8$;

б) $y=\dfrac{x+1}{(x^2-9)(x^2+x-2)}$; $(x^2-9)(x^2+x-2)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=1$, $x_2=-2$, $(x-3)(x+3)(x-1)(x+2)\neq 0$.

$(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$;

в) $y=\dfrac{x}{(x^2-1)(x^2-2x-15)}$; $(x^2-1)(x^2-2x-15)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=5$, $x_2=-3$, $(x-1)(x+1)(x+3)(x-5)\neq 0$,

$(-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;1)\cup(1;5)\cup(5;+\infty)$;

г) $y=\dfrac{3}{(x+5)(x^2-5x-6)}$; $(x+5)(x^2-5x-6)\neq 0$;

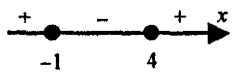
по теореме Виета: $x_1=6$, $x_2=-1$, $(x+5)(x-6)(x+1)\neq 0$, $x\neq -5$, $x\neq -1$, $x\neq 6$

$D(f)=(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(-1;6)\cup(6;+\infty)$

8.26.

а) $y=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x+2}$ $\begin{cases}3x-2\geq 0\\ x^2-x+2\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq \dfrac{2}{3}\\ (-\infty;+\infty)\end{cases}$ $D=1-8=-7<0$; $x\geq\dfrac{2}{3}$,

б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$ $\begin{cases}x^2-3x-4\geq 0\\ 16-x^2\neq 0\end{cases}$



по теореме Виета:, $x_1=4$, $x_2=-1$

$\begin{cases}(x-4)(x+1)\geq 0\\ x\neq \pm 4\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq -1,\ x\geq 4\\ x\neq \pm 4\end{cases}$

$x<-4$, $-4<x\leq -1$, $x>4$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; $\begin{cases}x+2\geq 0\\ 3-2x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq -2\\ x\neq \dfrac{3}{2}\end{cases}$ $-2\leq x<\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{3}{2}<x$;

г) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$ $\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ 1-2x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}|x|\leq 2\\ x\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ x\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$ $-2\leq x<\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<x<2$.

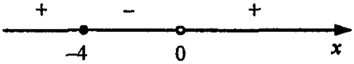
8.27.

а) $y=\dfrac{3-2x}{\sqrt{5x+2}}$; $5x+2>0$; $x>-\dfrac{2}{5}$, б) $y=\dfrac{4x+5}{\sqrt{2-4x}}$, $2-4x>0$; $x<\dfrac{1}{2}$,

в) $y=\dfrac{4-3x}{\sqrt{x+3}}$; $x+3>0$; $x>-3$; г) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x}}$; $4-x>0$; $x<4$

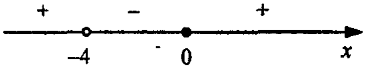
8.28.

а) $y=\sqrt{x^{-1}(x+4)} \Rightarrow \dfrac{x+4}{x} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$



б) $y=\sqrt{(3x+2)x^{-2}} \Rightarrow \dfrac{3x+2}{x^2} \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$

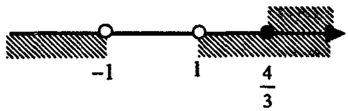
в) $y=\sqrt{x(x+4)^{-1}} \Rightarrow \dfrac{x}{x+4} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$



г) $y=\sqrt{-x(2x-3)^{-2}} \Rightarrow \dfrac{x}{(2x-3)^2} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0]$

8.29.

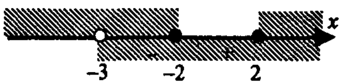
а) y=$\dfrac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{x^2-1}}$; $\begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ x^2-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \dfrac{4}{3} \\ x^2>1 \end{cases}$



$\begin{cases} x \geq \dfrac{4}{3} \\ x>1, x<-1 \end{cases}$ x≥$\dfrac{4}{3}$;

б) y=$\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+3}}$, $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x>-3 \end{cases}$

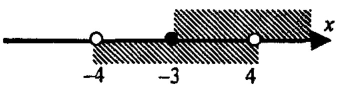
$\begin{cases} |x| \geq 2 \\ x>-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2, \quad x \leq -2 \\ x>-3 \end{cases}$



–3<x≤–2, x≥2;

в) y=$\dfrac{\sqrt{2x+6}}{\sqrt{16-x^2}}$

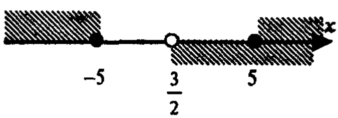
$\begin{cases} 2x+6 \geq 0 \\ 16-x^2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ |x|<4 \end{cases}$



$\begin{cases} x \geq -3 \\ -4<x<4 \end{cases}$ –3≤x<4;

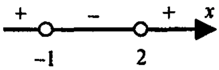
г) y=$\dfrac{\sqrt{2x^2-50}}{\sqrt{2x-3}}$

$\begin{cases} 2x^2-50 \geq 0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \geq 25 \\ x>\dfrac{3}{2} \end{cases}$

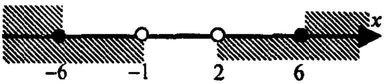


$\begin{cases} x \geq 5, \quad x \leq -5 \\ x>\dfrac{3}{2} \end{cases}$ x≥5.

8.30.



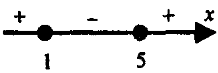
а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-36}}{\sqrt{x^2-x-2}}$



$\begin{cases}x^2-36\ge 0\\ x^2-x-2>0\end{cases}$

$\begin{cases}|x|\ge 6\\ (x-2)(x+1)>0\end{cases}$

$\begin{cases}x\ge 6, x\le -6\\ x>2, x<-1\end{cases}$ x≥6, x≤–6;

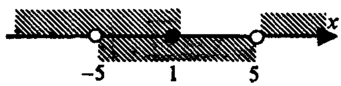


б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{25-x^2}}$; $\begin{cases}x^2-6x+5\ge 0\\ 25-x^2>0\end{cases}$

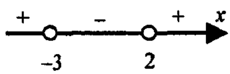
по теореме Виета: $x_1=5$, $x_2=+1$

$\begin{cases}(x-1)(x-5)\ge 0\\ |x|<5\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 1, x\ge 5\\ -5<x<5\end{cases}$ –5<x≤1;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{6-x-x^2}}$



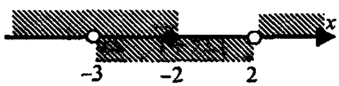
$\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ 6-x-x^2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2\ge 4\\ x^2+x-6<0\end{cases}$



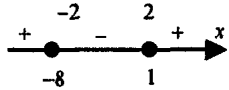
по теореме Виета: $x_1=2$, $x_2=-3$

$\begin{cases}|x|\ge 2\\ (x-2)(x+3)<0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 2, x\le -2\\ -3<x<2\end{cases}$ –3<x≤–2;

г) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+7x-8}}{\sqrt{9-x^2}}$; $\begin{cases}x^2+7x-8\ge 0\\ 9-x^2>0\end{cases}$



по теореме Виета: $x_1=1$, $x_2=-8$



$\begin{cases}(x-1)(x+8)\ge 0\\ |x|<3\end{cases}$, $\begin{cases}x\ge 1, x\le -8\\ -3<x<3\end{cases}$

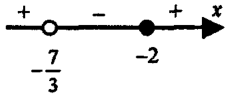
1≤x<3.

8.31. а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7x+1}}{x^2-x-2}$; $\begin{cases}7x+1\ge 0\\ x^2-x-2\ne 0\end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=2$, $x_2=-1$

$\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{7}\\ x\ne 2, x\ne -1\end{cases}$ $-\dfrac{1}{7}\le x<2$, $x>2$;

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+7}{x+2}}$; $\dfrac{3x+7}{x+2}\ge 0$



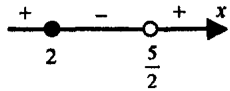
$\dfrac{x+\frac{7}{3}}{x+2}\ge 0$; $x\le -\dfrac{7}{3}$, $x>-2$.

Опечатка в ответе задачника.

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$; $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-5x+4\ne 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=1$; $\begin{cases} x\ge 2 \\ x\ne 1, x\ne 4 \end{cases}$; $2\le x<4$, $x>4$;

г) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{5-2x}}$; $\dfrac{x-2}{5-2x}\ge 0$



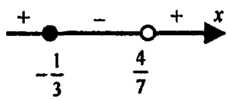
$\dfrac{x-2}{x-\frac{5}{2}}\le 0$; $2\le x<\dfrac{5}{2}$.

8.32.

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-3}}$; $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x>3 \end{cases}$; $x>3$;

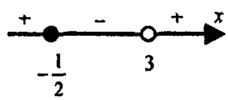
б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+1}{7x-4}}$; $\dfrac{3x+1}{7x-4}\ge 0$

$\dfrac{x+\frac{1}{3}}{x-\frac{4}{7}}\ge 0$; $x>\dfrac{4}{7}$, $x\le -\dfrac{1}{3}$;



в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}$; $\dfrac{2x+1}{x-3}\ge 0$

$\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-3}\ge 0$; $x>3$, $x\le -\dfrac{1}{2}$;



г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{7x-4}}$; $\begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 7x-4>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3} \\ x>\dfrac{4}{7} \end{cases}$ $x>\dfrac{4}{7}$

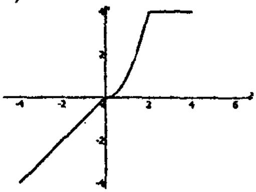
8.33.

а) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{(x-5)(x-7)}$;   в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x^2-1}}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{10-x}\cdot\sqrt{(x-3)(x-6)}}{x-3}$;   г) $y=\dfrac{\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{(x+2)(x-1)}}{\sqrt{x+5}\cdot(x+2)}$

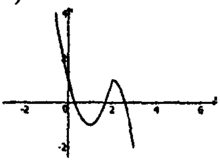
8.34. y=f(x)=$\begin{cases} x, \text{если } x \le 0 \\ x^2, \text{если } 0 < x < 2 \\ 4, \text{если } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

а) D(f)=(–∞; 4]; б) f(–2)=–2; f(0)=0, f(2)=4, f(4)=4, f(8) – не существует;
в) г) E(f)=(–∞; 4].



8.35.
y=f(x)=$\begin{cases} 2x^2 - 4x + 1, \text{если } x \le 2 \\ -3(x-2)^2 + 1, \text{если } 2 < x \le 3 \end{cases}$

а) D(f)=(–∞; 3]; б) f(0)=1, f(2)=1, f(3)=–2, f(4), f(5) – не существует;
в) г) E(f)=[–2; +∞).



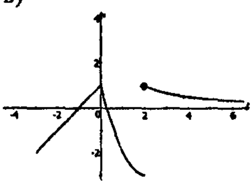
8.36.

y=f(x)=$\begin{cases} x+1, \text{если } -3 \le x \le 0 \\ x^2 - 4x + 1, \text{если } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x}, \text{если } x > 2 \end{cases}$

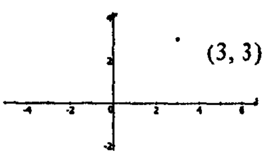
а) D(f)=[–3; +∞);

б) f(–5) – не существует; f(–2)=–1, f(0)=1, f(2)=–3, f(4)=$\frac{1}{2}$,

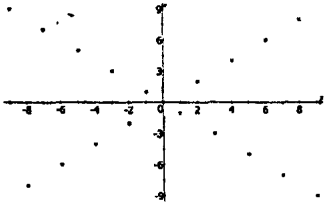
в) г) E(f)=[–3; 1].



8.37.



8.38.



§ 9. Способы задания функций

9.1.

а) Да, является. б) Да, является. На горизонтальной оси стоит y.

в) Да, является. г) Нет, не является.

9.2. а).

9.3. а) Является, $y=x+2$; б) да, является. $y=2|x|-2$;

в) нет, не является; г) да, является. $y=\dfrac{|x+2|-|x-2|}{2}$.

9.4.

а) Задает. $y=x^2$. б) Не задает.

в) Задает. $y=\sqrt{x+4}$. г) Задает. $y=-(x+2)^2+4=-x^2-4x$.

9.5.

а) $f(x)=-2x-2$; б) $f(x)=(x+2)^2-2=x^2+4x+2$;

в) $f(x)=\dfrac{3}{2}x+2$; г) $f(x)=-(x-2)^2+4=-x^2+4x$.

9.6.

а) $f(x)=\dfrac{2}{x}$; б) $f(x)=-\sqrt{x+5}+2$; в) $f(x)=\sqrt{x+2}-1$; г) $y=-\dfrac{3}{x}$.

9.7.

а) $S(1)=90$ (км); $S(2,5)=225$ (км); $S(4)=360$ (км);

б) $1800=90t$; $t=20$ (ч);

в) 15 мин.=0,25 ч. $S=90\cdot 0,25=22,5$ (км);

г) 450 м=0,45 км; $t=0,005$ ч.

9.8.

а) $t(36)=3$: $t(2,7)=\dfrac{9}{40}$; $t(144)=12$; б) $\dfrac{S}{12}=4,5$; $S=54$;

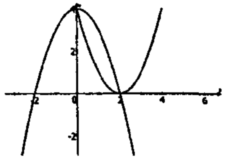
в) 150 м=0,15 км; $t(0,15)=\dfrac{0,15}{12}=\dfrac{0,05}{4}=\dfrac{5}{400}$ ч.;

г) 45 с$=\dfrac{3}{4}$ мин.$=\dfrac{3}{240}$ ч. $\dfrac{3}{240}=\dfrac{S}{12}$. $S=\dfrac{3}{20}=0,15$ (км)=150 м.

9.9.

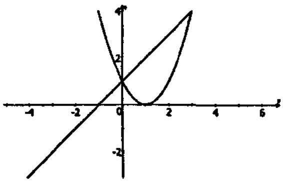
а) $-x^2+4=(x-2)^2$

Строим график правой и левой части.



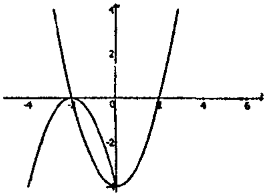
Абсциссы точек пересечения: 0; 2. Решения: 0; 2.

б) Строим график обеих частей.



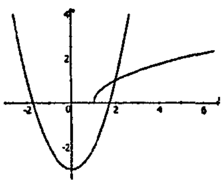
Абсциссы точек пересечения: 0; 3

в) $x^2-4=-(x+2)^2$



Абсциссы точек пересечения: 0; –2

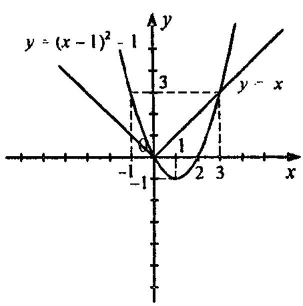
г) $x^2-3=\sqrt{x-1}$



Абсциссы точек пересечения: 2.

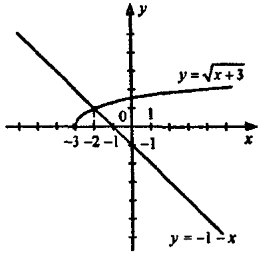
9.10.

а) $|x| = (x-1)^2 - 1$

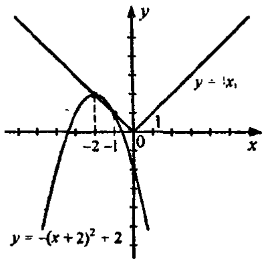


Строим график правой и левой части. Абсциссы точек пересечения: 0; 3.
Решение: 0; 3.

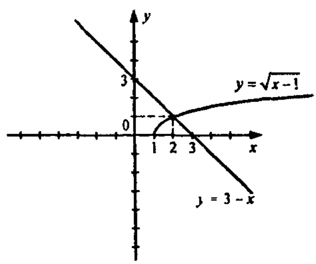
б) $\sqrt{x+3} = -1 - x$



Строим график правой и левой части.
Абсцисса точки пересечения: –2.
Решение: –2.
в) $|x| = -(x+2)^2 + 2$



Строим график правой и левой части.
Абсциссы точек пересечения: –2; –1.
Решение: –1; –2.
г) $\sqrt{x-1} = 3 - x$



Строим график правой и левой части.
Абсцисса точки пересечения: 2.
Решение: 2
9.11.
а) S(1)=6; S(2,5)=22,5; S(4)=48;
б) $240=2t^2+4t$, $t^2+2t-120=0$; $D = 4 - 4\cdot 1(-120) = 22^2$

$t_1=\dfrac{-2+22}{2}=10$; $t_2=\dfrac{-2-22}{2}=-12$ – не подходит по смыслу задачи.

Итак, $t = 10$ (ч.)

в) 45 мин.=0,75 ч.=$\frac{3}{4}$ ч. $S=2\cdot\frac{9}{16}+4\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{16}+3=4\frac{1}{8}$ (км);

г) 350 м=0,35 км; $2t^2+4t=0,35$; $2t^2+4t-0,35=0$ $\frac{D}{4}=4+0,7=4,7$

$t_1=\frac{-2+\sqrt{4,7}}{2}$ (ч.); $t_2=\frac{-2-\sqrt{4,7}}{2}$ (ч.) – не подходит по смыслу.

9.12.

а) $V=\frac{1}{3}Sh$; $S=\frac{3V}{h}$; $h=\frac{3V}{S}$; б) $V=\frac{1}{3}\cdot2\cdot1,4=\frac{2,8}{3}$ м^3;

в) 45 дм^3=0,045 м^3; $S=\frac{3\cdot0,045}{0,4}=\frac{3\cdot0,45}{4}=\frac{1,35}{4}$ м^2;

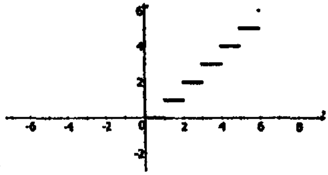
г) 2500 см^2=0,25 м^2; $h=\frac{3\cdot5}{0,25}=60$. (м).

9.13. а) $y=2x^2-1$;   б) $y=-3(x+1)^2$;   в) $y=-3x^2+4$;   г) $y=3(x-2)^2$.
9.14. а) f(1)=1;   б) f(8)=2;   в) f(15)=3;   г) f(22)=4.
9.15. а) f(73)=9. Опечатка в ответе задачника.
б) f(–6)=6;   в) f(–3)=9;   г) f(12)=4.
9.16.
Область значений – множество {0, 1, 4, 5, 6, 9}, вследствие того, что квадраты целых чисел оканчиваются всегда на одну из этих цифр.
9.17.

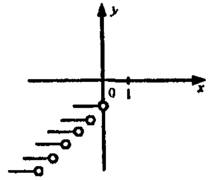
а) $y=f(x)=\begin{cases}4,\text{если } x\le-5\\(x+3)^2,\text{если } -5<x<-2\\x+3,\text{если } x\ge-2\end{cases}$

б) $y=f(x)=\begin{cases}(x+2)^2+1,\text{если } -4\le x\le-1\\2|x|,\text{если } -1<x<1\\\sqrt{x-1}+2,\text{ если } x\ge1\end{cases}$

9.18.



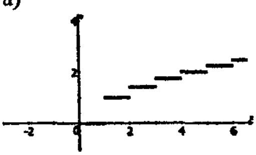
а)



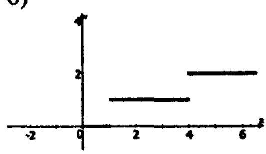
б)

9.19.

а)



б)



§ 10. Свойства функций

10.1.

а) $f(x)=y=5x$.

Возьмем произвольные x_1, x_2, такие что $x_1<x_2$. Тогда, умножая неравенство на 5, получаем: $f(x_1)=5x_1<5x_2=f(x_2)$

$f(x_1)<f(x_2)$. **Функция возрастает.**

б) $f(x)=y=2x+3$.

Возьмем произвольные x_1, x_2: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x \Leftrightarrow 2x_1+3<2x_2+3$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=2x-3$.

Возьмем произвольные x_1, x_2: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \Leftrightarrow 2x_1-3<2x_2-3$

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=\frac{x}{2}+4$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2}<\frac{x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2}+4<\frac{x_2}{2}+4$; $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

10.2.

а) $f(x)=y=x^3$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$. $f(x_1)<f(x_2)$. **Функция возрастает.**

б) $f(x)=y=2x^3$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает

в) $f(x)=y=x^3+1$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3+1<x_2^3+1$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=\frac{x^3}{2}$. Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow \frac{x_1^3}{2}<\frac{x_2^3}{2}$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

10.3.

а) $f(x)=y=x^2$, $x\geq 0$.

Для произвольных положительных (точнее неотрицательных) x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^2<x_2^2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $f(x)=y=-\frac{1}{x}$, $x<0$.

Для произвольных отрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$; $-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=-\frac{1}{x}$, $x>0$.

Для произвольных положительных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$; $-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=3x^2$, $x\geq0$.

Для произвольных неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^2<x_2^2$; $3x_1^2<3x_2^2$. То есть $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

10.4.

а) $f(x)=-5x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -5x_1>-5x_2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=5-2x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$. $5-2x_1>5-2x_2$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=-7x+1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -7x_1>-7x_2$. $-7x_1+1>-7x_2+1$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=4-\frac{x}{3}$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -\frac{x_1}{3}>-\frac{x_2}{3} \Leftrightarrow 4-\frac{x_1}{3}>4-\frac{x_2}{3}$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

10.5.

а) $f(x)=y=-x^3$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=-3x^3$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -3x_1^3>-3x_2^3$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=-\frac{x^3}{5}$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -\frac{x_1^3}{5}>\frac{-x_2^3}{5}$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=-x^3+7$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3+7>-x_2^3+7$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает

10.6.

а) $f(x)=y=x^2$, $x\leq0$.

Для отрицательных (точнее неположительных) x_1 и x_2, $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2$

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=-2x^2$, $x\geq0$.

Для неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -2x_1^2>-2x_2^2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=3x^2$, $x\leq0$.

Для неположительных x_1 и x_2 из неравенства $x_1<x_2$ следует, что

$x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow 3x_1^2>3x_2^2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=-3x^2$, $x\geq 0$.

Для неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -3x_1^2>-3x_2^2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

10.7.

а) Не ограничена ни сверху, ни снизу.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена и сверху и снизу, то есть ограничена.

10.8.

а) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена и сверху и снизу , то есть ограничена.

10.9.

а) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

10.10.

а) $y=\sqrt{15-x^2}$

$15-x^2\geq 0 \Rightarrow |x|\leq\sqrt{15} \Rightarrow 0\leq 15-x^2\leq 15 \Rightarrow 0\leq y\leq\sqrt{15}$

б) $y=-\sqrt{16-x^4}$

$16-x^4\geq 0 \Rightarrow |x|\leq 2 \Rightarrow 0\leq 16-x^4\leq 16 \Rightarrow -4\leq y\leq 0$

10.11.

а) Функция возрастающая, значит наименьшее значение будет при наименьшем значении аргумента, а наибольшее – при наибольшем значении аргумента. $y_{\min}=y(0)=3$. $y_{\max}=y(1)=5$.

б) $y_{\min}=-2$, $y_{\max}=0$;

в) $y_{\min}=y(0)=1$. Функция неограничена сверху.

г) Наименьшего значения нет. $y_{\max}=y(2)=2$.

10.12.

$y=\sqrt{x}$

а) $x\in[0;+\infty)$, $y_{\min}=y(0)=0$.

Наибольшего значения нет, так как функция сверху неограничена.

б) $x\in[0;3]$. $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(3)=\sqrt{3}$;

в) $x\in[1;4]$. $y_{\min}=y(1)=1$, $y_{\max}=y(4)=2$;

г) $x\in(0;2]$. Наименьшего значения нет. $y_{\max}=\sqrt{2}$.

10.13.

а) $y=\sqrt{x-4}$. $y_{\min}=0$. Сверху функция неограничена.

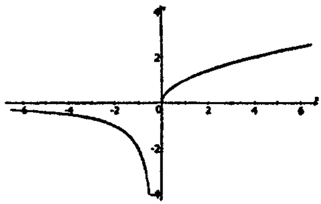
б) $y=3-\sqrt{x}$. $y_{\max}=3$. Снизу функция неограничена.

в) $y=\sqrt{x}+2$. $y_{\min}=y(0)=2$. Сверху функция неограничена.

г) $y=4-\sqrt{x}$. $y_{\max}=y(0)=4$. Снизу функция неограничена.

10.14.

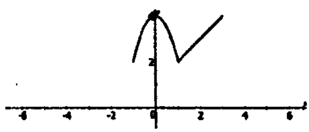
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, \text{если } x<0\\ \sqrt{x}, \text{если } x\ge 0\end{cases}.$$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Убывает при x<0. Возрастает на [0; +∞).
3) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
4) Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.
5) Непрерывна на (–∞; 0). Непрерывна на (0; +∞).
6) E(f) =(–∞; +∞). 7) На (–∞; 0) выпукла вверх. На [0; +∞) выпукла вверх.

10.15.

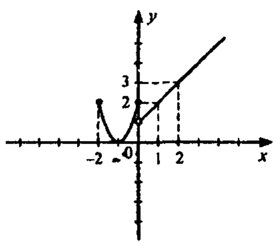
$$f(x)=\begin{cases}4-2x^2, \text{если } -1\le x\le 1\\ x+1, \text{если } 1<x\le 3\end{cases}$$



1) D(f)=[–1; 3].
2) Возрастает на [–1; 0] и на [1; 3]. Убывает на [0; 1].
3) Ограничена.
4) Наибольшее значение $f_{\max}=4$. Наименьшее: $f_{\min}=2$
5) Непрерывна на [–1; 3]. 6) E(f)=[2; 4]. 7) Выпукла вверх на [–1; 1].
На [1; 3] функцию можно считать как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

10.16.

а) $f(-3)$ не определено, $f(0)=2$, $f(5)=6$

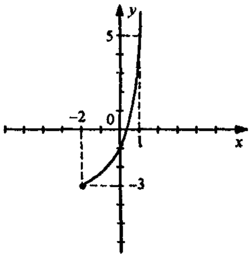


б)

в) не отрицательная; не ограниченная сверху; не является ни четной, ни нечетной; убывает на отрезке $[-2; -1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и $(0; +\infty)$; определена при $x \geq -2$; имеет разрыв при $x = 0$.

10.17.

а) $f(-2) = -3$, $f(0) = -1$; $f(5) = 69$



б)

в) ограничена снизу; неограничена сверху; не является ни четной, ни нечетной; возрастающая; определена при $x \geq -2$; непрерывная.

10.18.

а) $y=x^3+3x$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.

$x_1<x_2$; $3x_1<3x_2$, $x_1^3<x_2^3$.

Сложим эти неравенства: $x_1^3+3x_1<x_2^3+3x_2$; $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция возрастает.

б) $y=x^4+3x$, $x\geq 0$.

Возьмем произвольные неотрицательные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.

Тогда $x_1^4<x_2^4$ и $3x_1<3x_2$. Сложим эти неравенства.

$x_1^4+3x_1<x_2^4+3x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $y=2x^3+x$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.

Тогда $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3$. Сложим последнее неравенство с неравенством $x_1<x_2$. $2x_1^3+x_1<2x_2^3+x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $y=2x^4+x$, $x \geq 0$.

Возьмем произвольные неотрицательные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.

Тогда $x_1^4<x_2^4 \Leftrightarrow 2x_1^4<2x_2^4$. Сложим последнее неравенство с неравенством $x_1<x_2$. $2x_1^4+x_1<2x_2^4+x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

10.19.

а) $y=\dfrac{x-5}{x+3}=\dfrac{x+3}{x+3}-\dfrac{8}{x+3}=1-\dfrac{8}{x+3}$, $x>-3$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-3; +\infty)$ имеем: $x_1<x_2$

$0<x_1+3<x_2+3$, $-\dfrac{8}{x_1+3}<-\dfrac{8}{x_2+3} \Leftrightarrow 1-\dfrac{8}{x_1+3}<1-\dfrac{8}{x_2+3}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $y=\dfrac{3-2x}{1-x}$, $x<1$

$$\frac{3-2x}{1-x}=2+\frac{1}{1-x}$$

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, из промежутка $(-\infty; 1)$ имеем:

$$1-x_1 > 1-x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow 2+\frac{1}{1-x_1} < 2+\frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Функция возрастает.

в) $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$; $x>1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(1; +\infty)$ имеем:

$0<x_1-1<x_2-1$, $\frac{2}{x_1-1}>\frac{2}{x_2-1}$; $1-\frac{2}{x_1-1}<1-\frac{2}{x_2-1}$.

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

Задание некорректно.

г) $y=\frac{6-4x}{2-x}$, $x<2$

$$\frac{6-4x}{2-x}=4-\frac{2}{2-x}$$

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, из промежутка $(-\infty; 2)$ имеем:

$$2-x_1 > 2-x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2-x_1} < \frac{1}{2-x_2} \Leftrightarrow 4-\frac{2}{2-x_1} > 4-\frac{2}{2-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > (x_2)$$

Функция убывает.

10.20.

а) $y=-x^3-2x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

1. $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3$; 2. $-2x_1>-2x_2$

Складывая неравенства, получаем $-x_1^3-2x_1>-x_2^3-2x_2$;

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $y=x^6-0{,}5x$, $x\le 0$.

Для произвольных неположительных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1^6>x_2^6$; $-0{,}5x_1>-0{,}5x_2$

Складывая эти неравенства, получаем

$x_1^6-0{,}5x_1>x_2^6-0{,}5x_2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $y=x^4-5x$, $x\le 0$.

Для произвольных неположительных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1^4>x_2^4$; $-5x_1>-5x_2$

Сложим эти неравенства.

$x_1^4-5x_1>x_2^4-5x_2$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

г) $y=-3x^5-x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем: $-3x_1^5>-3x_2^5$; $-x_1>-x_2$

Сложим эти неравенства.

$-3x_1^5-x_1>-3x_2^5-x_2$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

10.21.

а) $y=x^2+4x-3$. Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.

$x_0=-\frac{4}{2}=-2$. $y_{\min}=y_0=4-8-3=-7$.

Наибольшего не существует.

б) $y=-4x^2-12x+1$.

Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.

$x_0=-\frac{-12}{-8}=-\frac{3}{2}$. $y_{\max}=y_0=-4\cdot\frac{9}{4}+12\cdot\frac{3}{2}+1=10$.

Наименьшего не существует.

в) $y=9x^2+6x-5$.

Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.

$x_0=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$. $y_{\min}=y_0=9\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{3}-5=-6$.

Наибольшего не существует.

г) $y=-x^2+8x-12$.

Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.

$x_0=-\frac{-8}{-2}=4$. $y_{\max}=y_0=-16+32-12=4$. $y_{\min}$ не существует.

10.22.

а) $y=|x|+3$, $x\in[-5; 1]$.

y будет наименьшим (наибольшим) при $|x|$ наименьшем (наибольшем)

$|x|_{наим}=0$; $|x|_{наиб}=5$; $y_{наим}=3$; $y_{наиб}=8$.

б) $y=-|4x|+1$, $x\in(-6; 2]$.

y будет наибольшим (наименьшим) при $|4x|$ наименьшем (наибольшем).

$|4x|_{наиб}$ – не существует; $|4x|_{наим}=0$

$y_{наим}$ – не существует; $y_{наиб}=1$.

в) $y=-|2x|-1$, $x\in[-1; 1]$.

y будет наибольшим при $|2x|$ наименьшем $|2x|_{наим}=0$, $y_{наим}=-3$

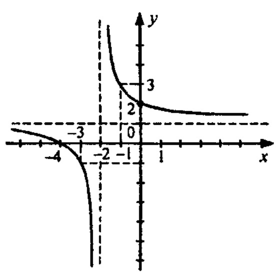
г) $y=|x|+3$, $x\in[-5; 1)$.

y будет наибольшим (наименьшим) при $|x|$ наибольшем (наименьшем)

$|x|_{наиб}=5$, $y_{наиб}=8$, $|x|_{наим}=0$, $y_{наим}=3$.

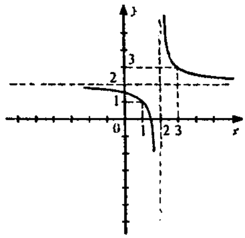
10.23.

а) $y=\frac{x+4}{x+2}=\frac{2}{x+2}+1$



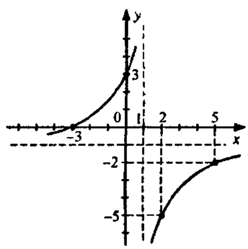
Определена на $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$; Убывающая на $(-\infty;-2)$ и $(-2;+\infty)$; неограничена; не является ни четной, ни нечетной.

б) $y=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{1}{x-2}+2$



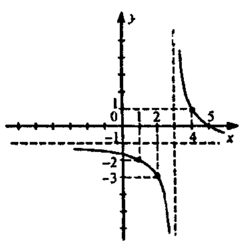
Определена на $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; Убывает на $(-\infty;2)$ и $(2;+\infty)$; неограничена; не является ни четной, ни нечетной.

в) $y=-\frac{x+3}{x-1}=-\frac{4}{x-1}-1$



Определена на $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; Возрастает на $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$; неограничена; не является ни четной, ни нечетной.

г) $y=\frac{5-x}{x-3}=\frac{2}{x-3}-1$

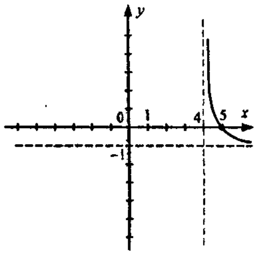


Определена на $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; Убывает на $(-\infty;3)$ и $(3;+\infty)$; неограничена; не является ни четной, ни нечетной.

10.24.

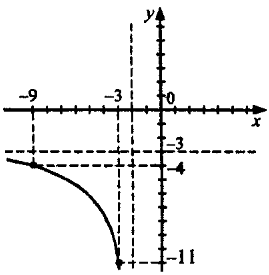
а) $y=\frac{x-5}{4-x}=\frac{1}{x-4}-1,\ x>4$

Определена на $(4;+\infty)$; Убывает; ограничена снизу; Неограничена сверху; не является ни четной, ни нечетной; непрерывна.



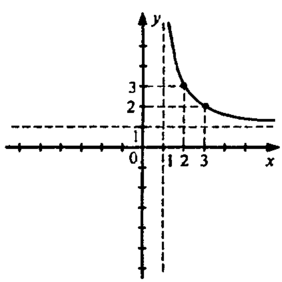
б) $y=\dfrac{2-3x}{2+x}=\dfrac{8}{x+2}-3,\ x<-2$

Определена на $(-\infty;-2)$; Убывает; ограничена сверху; Неограничена снизу; не является ни четной, ни нечетной; непрерывна.



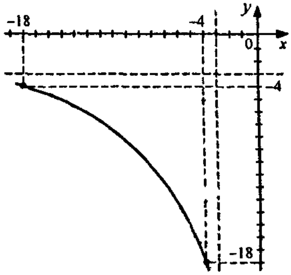
в) $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1,\ x>1$

Определена на $(1;+\infty)$; Убывает; ограничена снизу; Неограничена сверху; не является ни четной, ни нечетной; непрерывна.



г) $y=\dfrac{6-3x}{3+x}=\dfrac{15}{x+3}-3,\ x<-3$

Определена на $(-\infty;-3)$; Убывает; ограничена сверху; Неограничена снизу; не является ни четной, ни нечетной; непрерывна.



10.25.

а) $y=\sqrt{x^2-6x+8}$

$x^2-6x+8\geq 0$, при $x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)\Rightarrow y\geq 0$

Функция ограничена снизу, но неограничена сверху

б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}$

$x^2-6x+8>0$, при $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)\Rightarrow y>0$

Функция ограничена снизу, но неограничена сверху

в) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

$0\leq 3-x^2-2x\leq 4$, при $x\in[-3;1]\Rightarrow 0\leq y\leq 2$

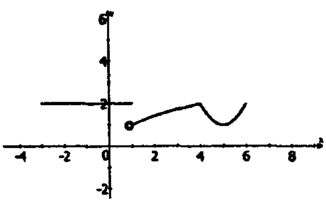
Функция ограничена.

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}}$

$0\leq 3-x^2-2x\leq 4$, при $x\in(-3;1)\Rightarrow 0\leq y\leq -\dfrac{1}{2}$

Функция ограничена сверху, но неограничена снизу

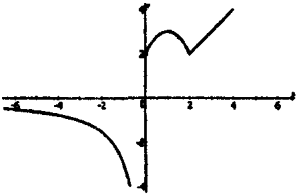
10.26.



$$f(x)=\begin{cases}2,\text{ если } -3\leq x\leq 1\\ \sqrt{x},\text{ если } 1<x\leq 4\\ (x-5)^2+1,\text{ если } 4<x\leq 6\end{cases}$$

1) D(f) =[–3; 6]
2) На [–3; –1] постоянна
На [3; 4] и на [5; 6] возрастает
На [4; 5] убывает.
3) Ограничена.
4) $y_{наиб}=2$, $y_{наим}=1$.
5) Непрерывна на [–3; 1). Непрерывна на (1; 6].
6) E(f)=[1; 2].
7) На [1; 4] выпукла вверх. На [4; 6] выпукла вниз.
На [–3; 1] можно считать выпуклой как вверх? так и вниз.

10.27.



$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}, \text{ если } x<0\\ -x^2+2x+2, \text{ если } 0\le x\le 2\\ x, \text{ если } 2<x\le 4\end{cases}$$

1) D(f) =[–∞; 4]

2) На [–∞; 0] и на [1; 2] убывает. На [0; 1] и на [2; 4] возрастает.

3) Ограничена сверху, неограничена снизу.

4) $y_{наиб}=4$; $y_{наим}$ – не существует.

5) Непрерывна на (–∞; 0). Непрерывна на (0; 4].

6) E(f)=(–∞; 0)∪[2; 4].

7) На [–∞; 0] и на [0; 2] выпукла вверх.

На [2; 4] выпукла как вверх, так и вниз.

10.28.

а) $f(x)=3,7x^2-7,4x-9=3,7(x-1)^2-12,7\Rightarrow$ на $(-\infty;\ 1]$ — убывает, на $[1;+\infty]$ — возрастает

$f(2,9)=3,7\cdot(1,9)^2-12,7<3,7\cdot(2,1)^2-12,7=f(3,1)$

б) $f(x)=-4,1x^2-16,4x+3=-4,1\cdot(x+2)^2+19,4\Rightarrow$ на $(-\infty;-2]$ — возрастает, на $[-2;+\infty]$ — убывает

$f(-1,8)=-4,1\cdot(0,2)^2+19,4>-4,1\cdot(0,7)^2+19,4=f(-1,3)$

в) $f(x)=1,9x^2+5,7x+4=1,9\cdot(x+\frac{3}{2})^2+4-\frac{9}{4}\cdot1,9\Rightarrow$ на $(-\infty;\ -\frac{3}{2}]$ — убывает, на $[-\frac{3}{2};\ +\infty)$ — возрастает

$f(-5,2)=1,9\cdot(3,7)^2+4-\frac{9}{4}\cdot1,9>1,9\cdot(0,7)^2+4-\frac{9}{4}\cdot1,9=f(-2,2)$

г) $f(x)=-3,3x^2+3,3x=-3,3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3,3}{4}\Rightarrow$ на $(-\infty;\ \frac{1}{2}]$ — возрастает, на $[\frac{1}{2};\ +\infty)$ — убывает

$f(0,55)=-3,3\cdot(0,05)^2+\frac{3,3}{4}<-3,3\cdot(0,03)^2+\frac{3,3}{4}$

§ 11. Четные и нечетные функции

11.1.

а) Да, симметрично.

б) Да, симметрично.

в) Нет, не симметрично.

г) Нет, не симметрично.

11.2.

а) Нет, не симметрично.

б) Нет, не симметрично.

в) Нет, не симметрично.

г) Нет, не симметрично.

11.3.

а) $f(x)=3x^2+x^4$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=3(-x)^2+(-x)^4=3x^2+x^4=f(x)$. Функция четная.

б) $f(x)=4x^6-x^2$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=4(-x)^6-(-x)^2=4x^6-x^2=f(x)$. Функция четная.

в) $f(x)=2x^8-x^6$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=2(-x)^8-(-x)^6=2x^8-x^6=f(x)$. Функция четная.

г) $f(x)=5x^2+x^{10}$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=5(-x)^2+(-x)^{10}=5x^2+x^{10}=f(x)$. Функция четная.

11.4.

а) $y=x^2(2x-x^3)$ $D(f)=(-\infty; +\infty)$

$y(-x)=x^2(-2x+x^3)=-x^2(2x-x^3)=-y(x)$. Функция нечетная.

б) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{2x^3}$; $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^4+1}{2(-x)^3}=-\dfrac{x^4+1}{2x^3}=-f(x)$. Функция нечетная

в) $f(x)=x(5-x^2)$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=-x(5-(-x)^2)=-x(5-x^2)=-f(x)$. Функция нечетная

г) $f(x)=\dfrac{3x}{x^6+2}$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\dfrac{3(-x)}{(-x)^6+2}=-\dfrac{3}{x^6+2}=-f(x)$. Функция нечетная

11.5.

$f(x)=x^2+x$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=(-x^2)-x=x^2-x$, при $x=1$: $f(1)=2$, $f(-1)=0$

$f(-x)\neq f(x)$ $f(-x)\neq -f(x)$. Функция ни четная, ни нечетная

11.6.

а) $f(x)=y=x^2$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Функция четная.

б) $f(x)=y=x^7$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^7=-x^7=f(x)$. Функция нечетная.

в) $f(x)=y=x^6$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x)$. Функция четная.

г) $f(x)=y=x^3$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=f(x)$. Функция нечетная.

11.7.

а) $f(x)=y=|x|$, $x\in[-1; 1]$; $D(f)=[-1; 1]$ – симметрично.

$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$. Функция четная.

б) $f(x)=y=x^5$, $x\in[-3; 3)$; $D(f)=[-3; 3)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

в) $f(x)=y=|x|$, $x\in[-2; 2)$; $D(f)=(-2; 2)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

г) $f(x)=x^5$, $x\in[-4;\ 4]$; $D(f)=[-4;\ 4]$ – симметрично.

$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$. Функция нечетная.

11.8.

а) $f(x)=y=2x^3$, $x\in[-2;\ 2]$; $D(f)=[-2;\ 2]$ – симметрично.

$f(-x)=2(-x)^3=-2x^3=-f(x)$. Функция нечетная.

б) $f(x)=y=-x^2$, $x\in[-1;\ 0]$; $D(f)=[-1;\ 0]$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

в) $f(x)=-x^2$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$; $D(f)=(-\infty;\ \infty)$ – симметрично.

$f(-x)=-(-x)^2=-x^2=f(x)$. Функция четная.

г) $f(x)=y=2x^3$, $x\in[-3;\ 3)$; $D(f)=[-3;\ 3)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

11.9.

а) Четная. б) Нечетная.

в) Нечетная. г) Четная.

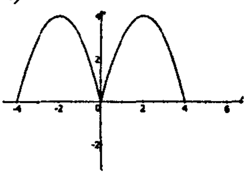
11.10.

а) Нечетная. б) Ни четная, ни нечетная.

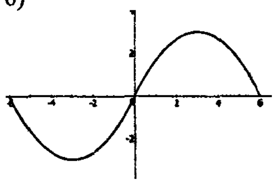
в) Четная. г) Ни четная, ни нечетная.

11.11.

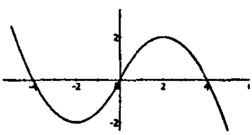
а)



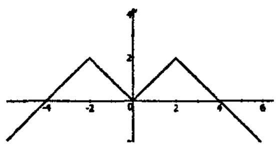
б)



в)



г)



11.12.

а) График $f(x)$ симметричен относительно оси ординат. Значи направления монотонности при $x>0$ и $x<0$ противоположны.

То есть при $x<0$ функция убывает.

б) Из тех же соображений, что и в п. а) функция возрастает при $x<0$.

в) Возьмем произвольные x_1 и x_2, $x_1<x_2<0$, и рассмотрим $f(x_1)$ и $f(x_2)$

$f(x_1)=-f(-x_1)$; $f(x_2)=-f(-x_2)$.

Но $0<-x_2<-x_1$, а функция возрастает при $x>0$.

Значит, $f(-x_1)>f(-x_2)\Leftrightarrow -f(-x_1)<-f(-x_2)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Функция возрастает при $x<0$.

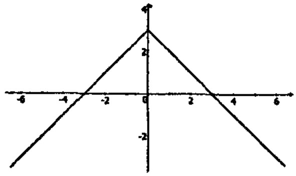
г) Возьмем произвольные x_1 и x_2, $x_1<x_2<0$.

Так как функция нечетная, то $f(-x_1)=-f(x_1)$; $f(-x_2)=-f(x_2)$.

Так как $0<-x_2<-x_1$, и функция убывает при $x>0$, то $f(-x_1)>f(-x_2)$;

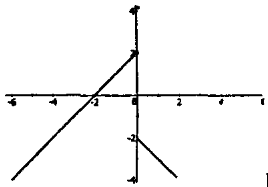
$-f(x_1)<-f(-x_2)$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает при $x<0$.

11.13. а) Можно б) Нельзя
11.14. а) Можно б) Нельзя
11.15. а) Нельзя б) Можно.
11.16. а) Нельзя б) Можно.
11.17.



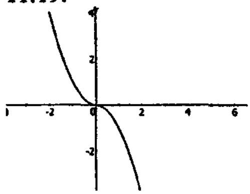
Четная

11.18.



Ни четная, ни нечетная

11.19.



Нечетная

11.20.

а) $f(x)=y=\sqrt{x+1}$; $D(f)=[-1; +\infty)$ – не симметрично
Ни четная, ни нечетная.

б) $f(x)=y=\dfrac{x-2}{x^2-1}$; $D(f)=[-\infty; -1)\cup(-1: 1)\cup(1; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\dfrac{-x-2}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x-2}{x^2-1}$.

При $x=2$, $f(-x)=-4$, $f(x)=0$. $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$
Ни четная, ни нечетная.

в) $f(x)=y=\sqrt{x-5}$; $D(f)=[5; +\infty)$ – не симметрично
Ни четная, ни нечетная.

г) $f(x)=y=\dfrac{x+2}{x^2-16}$; $D(f)=[-\infty; -4)\cup(-4; 4)\cup(4; +\infty)$ – симметрично.

Возьмем $x=2$. $f(2)=\dfrac{4}{-8}=-\dfrac{1}{2}$.

$f(-2)=0$, $f(2)\neq f(-2)$, $f(-2)\neq -f(2)$.
Функция ни четная, ни нечетная

11.21.

а) $f(x)=4x-2x^3+6x^5$. $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=4(-x)-2(-x)^3+6(-x)^5=-(4x-2x^3+6x^5)=-f(x)$.

Функция нечетная.

б) $f(x)=y=\dfrac{x-2}{x^2+4}$; $D(f)=(-\infty; +\infty)$ – симметрично.

Возьмем $x=2$. $f(2)=0$; $f(-2)=-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}$.

$f(-2)\neq f(2)$, $f(-2)\neq -f(2)$.

Функция ни четная, ни нечетная.

в) $f(x)=\sqrt{x}$; $D(f)=[0; +\infty)$ – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

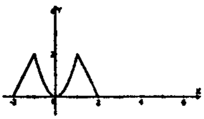
г) $f(x)=y=\dfrac{x^2+8}{x^2-9}$; $D(f)=(-\infty; -3)\cup(-3; 3)\cup(3; +\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+8}{(-x)^2-9}=\dfrac{x^2+8}{x^2-9}=f(x)$. Функция четная.

11.22.

$f(x)=4x^4-x^3+2x^2-x+5$. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=4x^4+2x^2+5$ – четная, $f_2(x)=-x^3-x$ – нечетная.

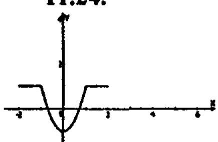
11.23.



$$f(x)=\begin{cases}2x+4, \text{ если } -2\le x\le -1\\ 2x^2, \text{ если } -1<x\le 1\\ -2x+4, \text{ если } 1<x\le 2\end{cases}$$

1) $D(f)=[-2; 2]$.
2) Четная.
3) Возрастает на $[-2; -1]$ и на $[0; 1]$. Убывает на $[-1; 0]$ и на $[1; 2]$.
4) Ограничена.
5) $y_{наим}=0$; $y_{наиб}=2$.
6) Непрерывна.
7) $E(f)=[0; 2]$.
8) На $[-1; 1]$ выпукла вниз. На $[-2; -1]$ и на $[1; 2]$ функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

11.24.



$$f(x)\begin{cases}1, \text{ если } -2\le x\le -1\\ 2x^2-1, \text{ если } -1<x\le 1\\ 1, \text{ если } 1<x\le 2\end{cases}$$

1) $D(f)=[-2; 2]$.
2) Четная.
3) Возрастает на $[0; 1]$. Убывает на $[-1; 0]$. Постоянна на $[-2, -1]$ и на $[1; 2]$
4) Ограничена.

5) $y_{наим}=-1$; $y_{наиб}=1$.

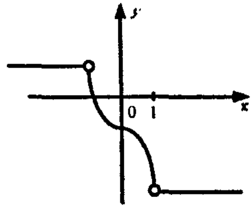
6) Непрерывна.

7) E(f)=[−1; 1].

8) На [−1; 1] выпукла вниз. На [−2; −1] и на [1; 2] функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

11.25.

$$f(x)=\begin{cases}2, \text{ если } x \le -1\\ -2x^3-1, \text{ если } -1 < x \le 1\\ -2, \text{ если } x > 1\end{cases}$$



1) D(f)=(−∞; +∞).

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Убывает на [−1; 1]. На (−∞; −1] и на (1; +∞) функция постоянна.

4) Ограничена.

5) $y_{наим}=-3$; $y_{наиб}=2$.

6) Непрерывна на (−∞; −1), на (−1; 1) и на (1; +∞).

7) E(f)=[−3; 1]∪{2}.

8) На (−1; 0) выпукла вниз. На (−∞; −1] и на [1; +∞) функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

11.26.

а) Четная. $h(-x)=f(-x)\, g^2(-x)=f(x)\,(-g(x))^2=f(x)\, g^2(x)=h(x)$; четная

б) $h(-x)=f(-x)-g(-x)=f(x)-g(x)=h(x)$, четная;

в) $h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-h(x)$, нечетная;

г) $h(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot(-g(x))=f(x)g(x)=h(x)$, четная.

11.27. $h(x)=3+x^2$.

11.28. $h(x)=-4-3x^2$

11.29. а) $h(x)=3-2x^2$ б) $h(x)=-3+2x^2$

11.30.

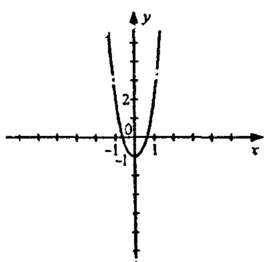
а) $h(x)=1+x^2$;

б) не существует, т.к. f(0) должно быть равным 0 (в данном случае).

11.31.

а) $y = x^2 + 2|x| - 1$

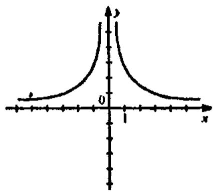
$f(-x) = (-x)^2 + 2|-x| - 1 = x^2 + 2|x| - 1 = f(x)$



Функция четная.

б) $y = \frac{3}{|x|}$

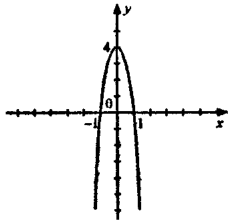
$f(-x) = \frac{3}{|-x|} = \frac{3}{|x|} = f(x)$



Функция четная.

в) $y = -x^2 - 3|x| + 4$

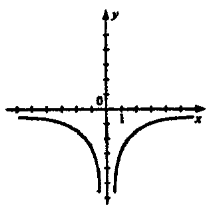
$f(-x) = -(-x)^2 - 3|-x| + 4 = -x^2 - 3|x| + 4 = f(x)$



Функция четная.

г) $y = -\frac{4}{|x|}$

$f(-x) = \frac{-4}{|-x|} = \frac{-4}{|x|} = f(x)$

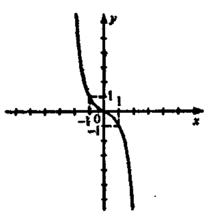


Функция четная.

11.32.

а) $y = -x|x|$

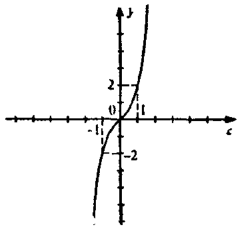
$f(-x) = x|-x| = x|x| = -f(x)$



Функция нечетная.

б) $y=\dfrac{2x^3}{|x|}$

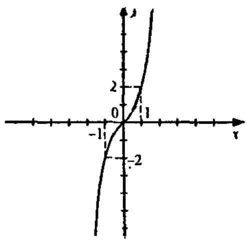
$$f(-x)=\frac{2(-x)^3}{|-x|}=-\frac{2x^3}{|x|}=-f(x)$$



Функция нечетная.

в) $y=2x|x|$

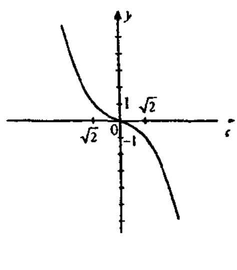
$f(-x)=-2x|-x|=-2x|x|=-f(x)$



Функция нечетная.

г) $y=-\dfrac{0,5x^5}{|x^3|}$

$$f(-x)=-\frac{0,5(-x)^5}{|(-x)^3|}=\frac{0,5x^5}{|x^3|}=-f(x)$$

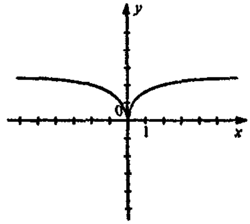


Функция нечетная.

11.33.

а) $y=\sqrt{|x|}$

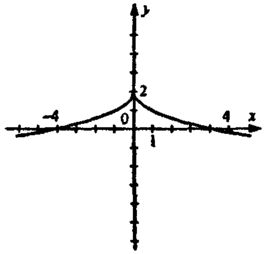
$$f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=\delta(x)$$



Функция четная.

б) $y = -\sqrt{|x|} + 2$

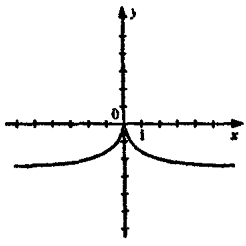
$f(-x) = -\sqrt{|-x|} + 2 = -\sqrt{|x|} + 2 = f(x)$



Функция четная.

в) $y = -\sqrt{|x|}$

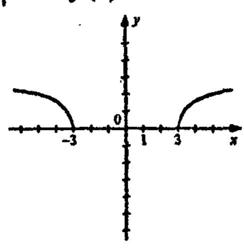
$f(-x) = -\sqrt{|-x|} = -\sqrt{|x|} = f(x)$



Функция четная.

г) $y = \sqrt{|x| - 3}$

$f(-x) = \sqrt{|-x| - 3} = \sqrt{|x| - 3} = f(x)$

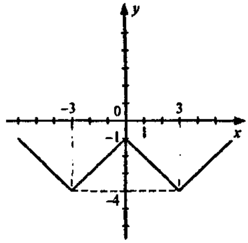


Функция четная.

11.34.

а) $y = \sqrt{(|x|-3)^2} - 4$

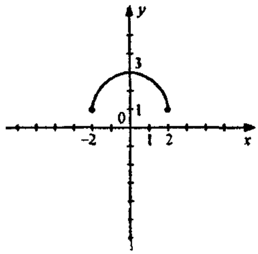
$f(-x) = \sqrt{(|-x|-3)^2} - 4 = \sqrt{(|x|-3)^2} - 4 = f(x)$



Функция четная.

б) $y = \sqrt{4-x^2} + 1$

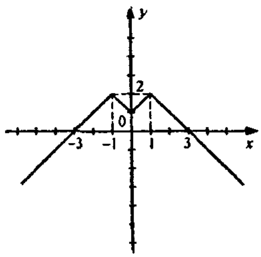
$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} + 1 = \sqrt{4-x^2} + 1 = f(x)$



Функция четная.

в) $y = 2 - \sqrt{(|x|-1)^2}$

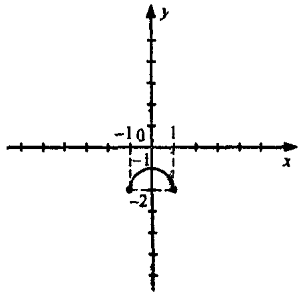
$f(-x) = 2 - \sqrt{(|-x|-1)^2} = 2 - \sqrt{(|x|-1)^2} = f(x)$



Функция четная.

г) $y = \sqrt{1-x^2} - 2$

$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} - 2 = \sqrt{1-x^2} - 2 = f(x)$

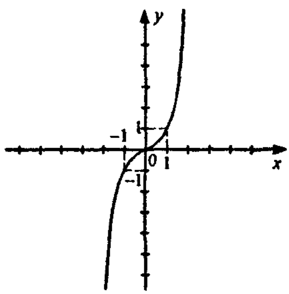


Функция четная.

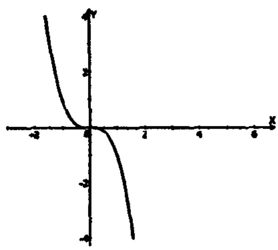
§ 12. Функции $y = x^n$ ($n \in N$), их свойства и графики

12.1.

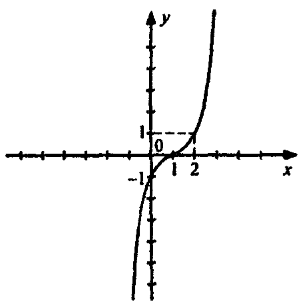
а) $y = x^3$



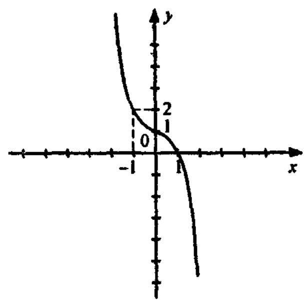
б) $f(x) = y = -x^3$



в) $y = (x - 1)^3$



г) $y = -x^3 + 1$



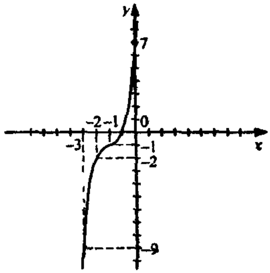
12.2.

а) $f(-1) = 0, f(-3) = -2, f(0) = 7$

б) $x = -4$

в) $x < -1$

г) $y_{наиб} = 7$; $y_{наим} = -2$.

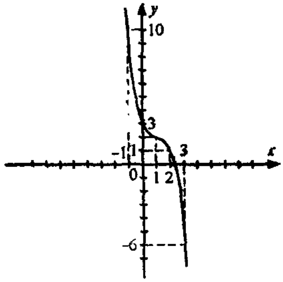


12.3.

а) $f(0)=3, f(-1)=10, f(3)=-6$ б) $x=3$

в) $x>2$ г) $x=0 \Rightarrow$ функция выпукла вниз

$x=2 \Rightarrow$ функция выпукла вверх



12.4.

а) $f(x)=x^3-4, A(6; 212)$

$f(6)=6^3-4=212 \Rightarrow$ принадлежит

б) $f(x)=-(x+6)^3, A(-8; -8)$

$f(-8)=-(-8+6)^3=8 \Rightarrow$ не принадлежит

в) $f(x)=(x-2)^3+200, A(-8; 800)$

$f(-8)=(-8-2)^3+200=-800 \Rightarrow$ не принадлежит

г) $f(x)=-(x+7)^3+25, A(-2; -100)$

$f(-2)=-(2+7)^3+25=-100 \Rightarrow$ принадлежит.

12.5.

а) $y=x^3-3,\ x\in[-1; 2]$

$f(x)=x^3-3$ — возрастающая функция $\Rightarrow$ $y_{наиб}=f(2)=5; y_{наим}=f(-1)=-4$

б) $y=-(x+4)^3,\ x\in[-4; 10]$

$f(x)=-(x+4)^3$ — убывающая функция $\Rightarrow$ $y_{наиб}=f(-4)=0; y_{наим}=f(10)=-2744$

в) $y=(x-2)^3+5,\ x\in[-1; 2]$

$f(x)=(x-2)^3+5$ — возрастающая функция $\Rightarrow$ $y_{наиб}=f(2)=5$; $y_{наим}=f(-1)=-22$

г) $y=-(x-3)^3-1,\ x\in[-4, 8]$

$f(x)=-(x-3)^3-1$ — убывающая функция $\Rightarrow$ $y_{наиб}=f(-4)=342$, $y_{наим}=f(8)=-126$

12.6.

а) $y=(x+2)^3$

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, имеем:

$$x_1+2<x_2+2 \Leftrightarrow (x_1+2)^3<(x_2+2)^3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Функция возрастает.

б) $y=-(x-4)^3+1$

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, имеем:

$$x_1-4<x_2-4 \Leftrightarrow (x_1-4)^3<(x_2-4)^3 \Leftrightarrow -(x_1-4)^3+1>-(x_2-4)^3+1$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Функция убывает.

в) $y=x^3-1$

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, имеем:

$$x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3-1<x_2^3-1 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Функция убывает.

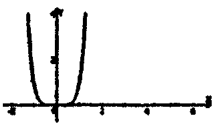
г) $y=-(x+1)^3-3$

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, имеем:

$$x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow (x_1+1)^3<(x_2+1)^3 \Leftrightarrow -(x_1+1)^3-3<-(x_2+1)^3-3$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Функция убывает.

12.7.



а) $f(x)=y=x^6$.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$. 2) Четная.

3) Возрастает на $(0;+\infty)$. Убывает на $(-\infty;0)$.

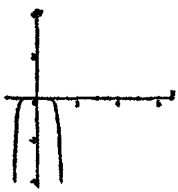
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Функция непрерывна.

7) $E(f)=[0;+\infty)$.

8) Выпукла вниз.



б) $f(x)=-x^{10}$.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$. 2) Четная.

3) Возрастает на $(-\infty;0)$. Убывает на $(0;+\infty)$.

4) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

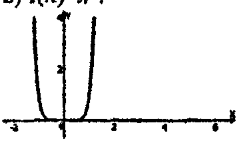
5) $y_{наиб}=0$, $y_{наим}$ – не существует.

6) Функция непрерывна.

7) $E(f)=(-\infty;0]$.

8) Выпукла вверх.

в) $f(x)=x^8$.



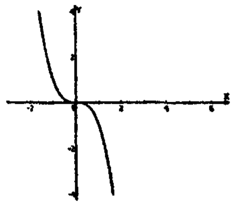
Свойства в точности такие же, что и в пункте а).

г) $y=x^{12}$.

Свойства в точности такие же, что и в пункте а).

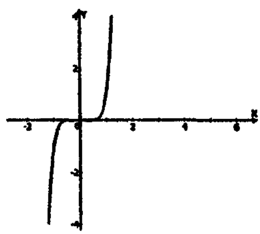
12.8.

а) $f(x)=y=-x^3$



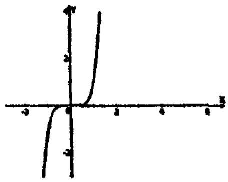
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Нечетная.
3) Убывает.
4) Не ограничена ни сверху, ни снизу.
5) $y_{наиб}$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) $E(f)=(-\infty; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0]$. Выпукла вверх на $[0; +\infty)$.

б) $f(x)=y=x^7$



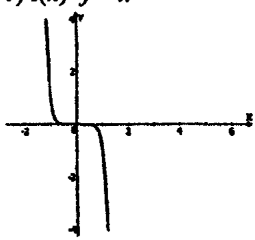
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Нечетная.
3) Возрастает.
4) Не ограничена ни сверху, ни снизу.
5) $y_{наиб}$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) $E(f)=(-\infty; +\infty)$.
8) Выпукла вверх на $(-\infty; 0]$.
Выпукла вниз на $[0; +\infty)$.

в) $f(x)=y=x^5$



Свойства в точности те же. что и в предыдущем пункте.

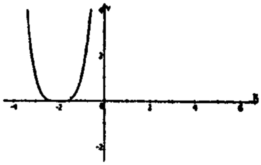
г) $f(x)=y=-x^9$



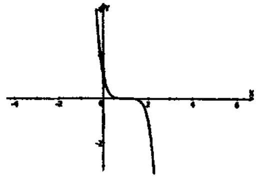
Свойства в точности те же. что и в пункте а.

12.9.

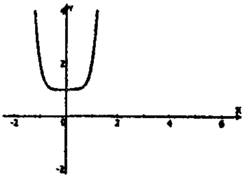
а)



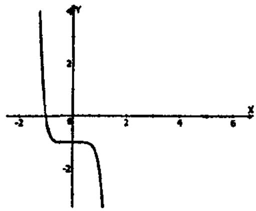
б)



в)

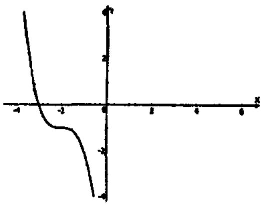


г)

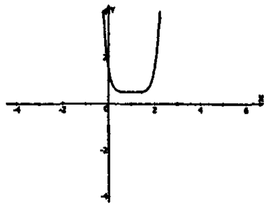


12.10.

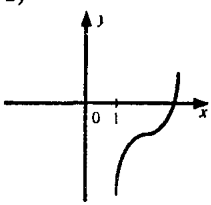
а)



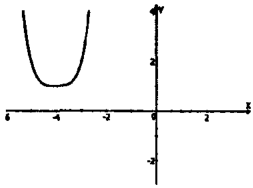
б)



в)



г)



12.11.

а) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=1$;

б) $y_{\text{наим}}=\dfrac{1}{64}$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует;

в) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=64$;

г) $y_{\text{наим}}=729$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.

12.12.

а) $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}=1$;

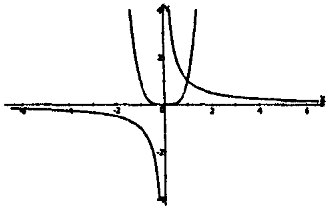
б) $y_{\text{наиб}}=0$, $y_{\text{наим}}$ – не существует;

в) $y_{\text{наим}}$ – не существует, $y_{\text{наиб}}=243$;

г) $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.

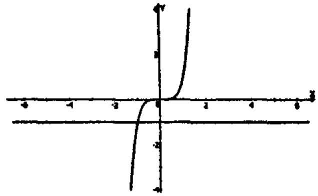
12.13.

а)



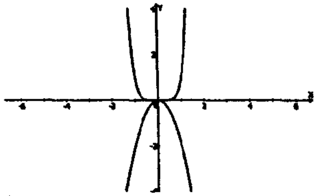
Точка пересечения (1; 1);

б)



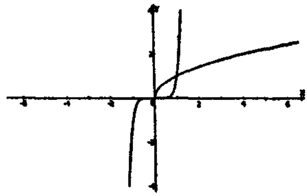
Точка пересечения (–1; –1);

в)



Точка пересечения (0; 0).

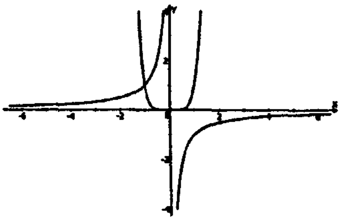
г)



Точка пересечения (0; 0) и (1; 1).

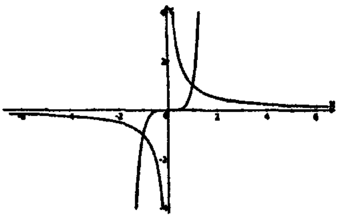
12.14.

а) Построим графики обеих частей уравнения.



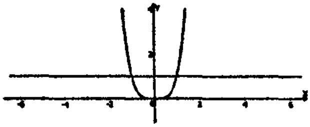
Точка пересечения (–1; 1). x=–1;

б)



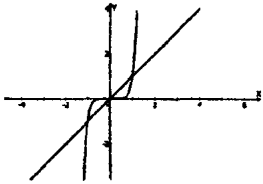
Точки пересечения (1; 1) и (–1; –1), x=1, x=–1;

в)



Точки пересечения (1; 1), (–1; –1), x=1, x=–1;

г)



$x=1$, $x=-1$, $x=0$.

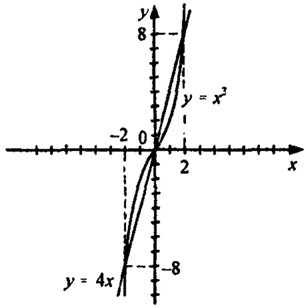
12.15.

а) $x^3 = 4x$

Построим графики правой и левой части.

Абсциссы точек пересечения: -2; 0; 2.

Решение: -2; 0; 2.

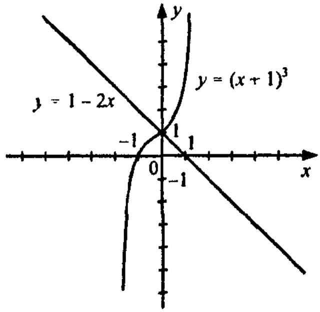


б) $(x + 1)^3 = 1 - 2x$

Построим график правой и левой части.

Абсцисса точки пересечения: 0.

Решение: 0.

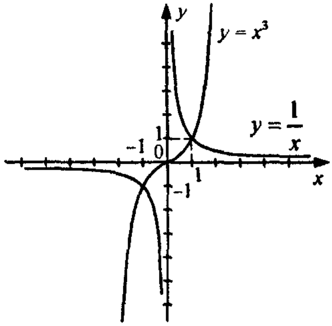


в) $x^3 = \dfrac{1}{x}$

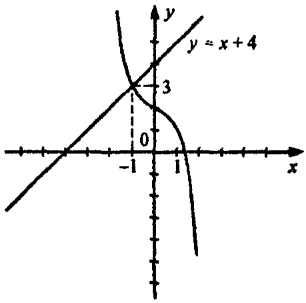
Построим график правой и левой части.

Абсциссы точек пересечения: -1, 1.

Решение: -1, 1.

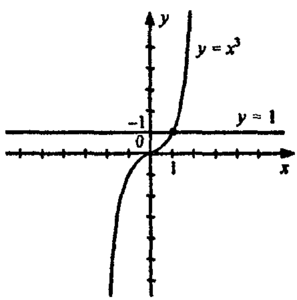


г) $-x^3 + 2 = x + 4$
Построим график правой и левой части.
Абсцисса точки пересечения: −1.
Решение: −1.

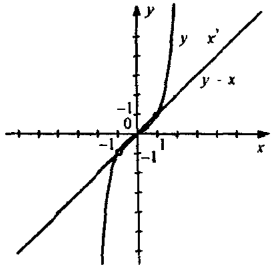


12.16.

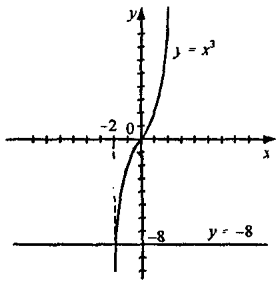
а) Построим график правой и левой части.
Решение: $x \in (-\infty; 1)$.



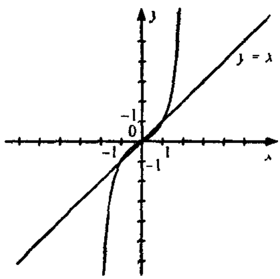
б) Построим график правой и левой части.
Решение: $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.



в) Построим график правой и левой части.
Решение: $x \in (-2; +\infty)$.

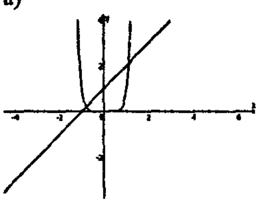


г) Построим график правой и левой части.
Решение: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1]$.



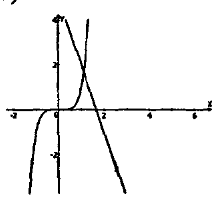
12.17.
Будем определять количество решений по графикам.

а)



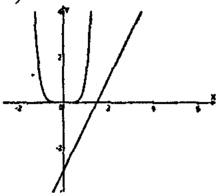
2 решения

б)



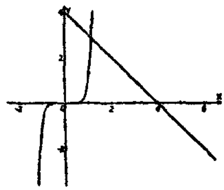
1 решение

в)



Нет решений.

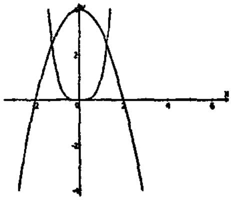
г)



1 решение.

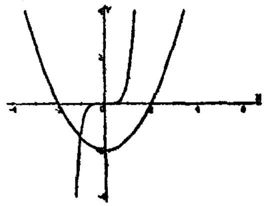
12.18.

а)



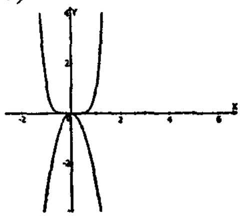
2 решения.

б)



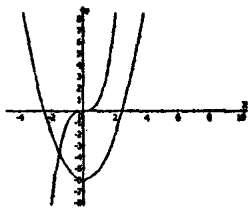
1 решение.

в)



1 решение.

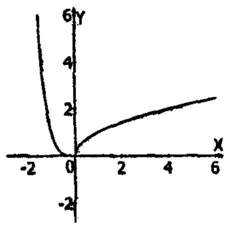
г)



1 решение.

12.19.

а) $f(x)=\begin{cases} x^4, \text{если } x<0 \\ \sqrt{x}, \text{если } x\ge 0 \end{cases}$



1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$. 2) Ни четная, ни нечетная.

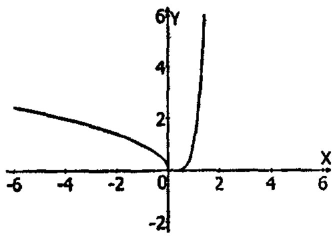
3) Убывает на $(-\infty; 0]$. Возрастает на $[0; +\infty)$.

4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.

5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует. 6) Непрерывна.

7) $E(f)=[0; +\infty)$.

8) Выпукла: вниз на $(-\infty; 0]$, вверх на $[0; +\infty)$.



б) $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, \text{если } x<0 \\ x^5, \text{если } x\ge 0 \end{cases}$

1) $D(f)=[0; +\infty)$.

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает.

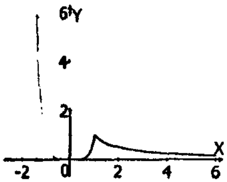
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.

5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна на области определения.

7) $E(f)=[0; +\infty)$.

8) Выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, вниз $[0; +\infty)$.



в) $f(x)=\begin{cases} x^6, \text{если } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{если } x > 1 \end{cases}$

1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на $[0; 1]$.

Убывает на $[-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$.

4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.

5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна. 7) $E(f)=[0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на $(-\infty; 1]$ и на $[0; +\infty)$.

г) $f(x)=\begin{cases} x^7, \text{ если } x < -1 \\ -2-x, \text{ если } -1 \le x \le 2 \end{cases}$

1) $D(f)=(-\infty, 2]$. 2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на $(-\infty; -1]$. Убывает на $[-1; 2]$.

4) Не ограничена снизу, ограничена сверху.

5) $y_{наиб}=-1$,

6) Непрерывна на области определения.

7) $E(f)=(-\infty, -1]$.

8) Выпукла вверх на $(-\infty; -1]$. На $[-1; 2]$ можно считать выпуклой как вверх так и вниз.

12.20.

Если точка принадлежит графику, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y=x^2$

а) $256=2^r$, $n=8$; б) $-128=(-2)^n$, $n=7$; в) $243=3^n$, $n=5$; г) $256=(-4)^n$, $n=4$

12.21.

Если график проходит через заданную точку, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y=x^n$.

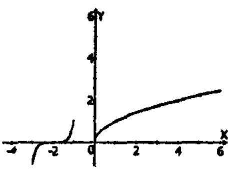
а) $1=(-1)^n$, n – четное. Функция четная.

б) $-1=(-1)^n$, n – нечетное. Функция нечетная.

в) $1=1^n$, n –любое. Функция либо четная, либо нечетная.

г) $-1=1^n$, чего быть не может. Задание некорректно.

12.22.

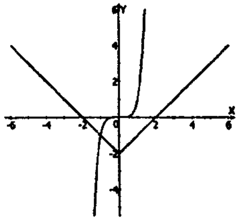


P>Q; P=1, Q=0

12.23. k=L=0.

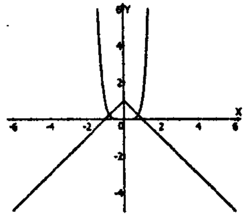
12.24.

а)



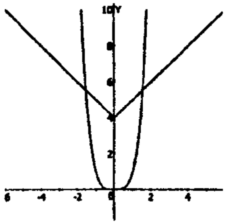
1 решение.

б)



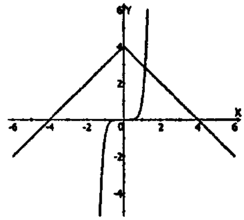
2 решения.

в)



2 решения.

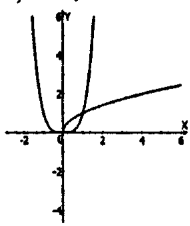
г)



1 решение.

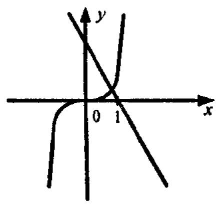
12.25.

а) $x^4 \le \sqrt{x}$



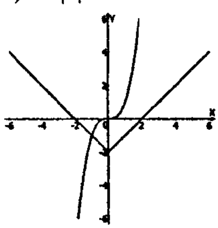
$0 \le x \le 1$;

б) $x^5 < 5 - 4x$.



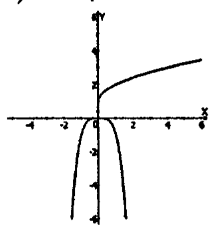
$x < 1$;

в) $x^3 \ge |x| - 2$.



$x \ge -1$.

г) $-x^4 < \sqrt{x} + 1$.



$x \ge 0$.

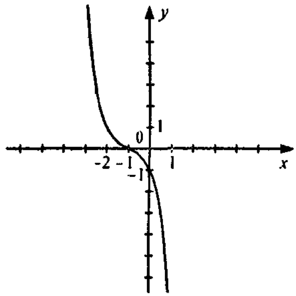
12.26.

а) $y = -(x+1)^3$

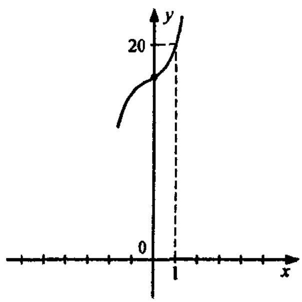
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) ни четная, ни нечетная;

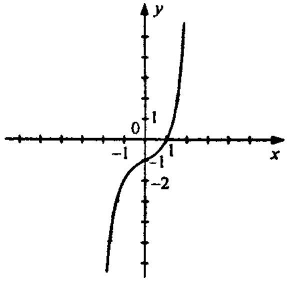
3) убывающая;
4) неограниченная;
5) непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
7) выпукла вниз на $(-\infty; -1]$, вверх на $[-1; +\infty)$.



б) $y = (x-1)^3 + 20$
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) ни четная, ни нечетная;
3) возрастающая;
4) неограниченная;
5) непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
7) выпукла вниз на $[1; +\infty)$, вверх на $(-\infty; 1]$.



в) $y = x^3 - 1$
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) ни четная, ни нечетная;
3) возрастающая;
4) неограниченная;
5) непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
7) выпукла вниз на $[0; +\infty)$, вверх на $(-\infty; 0]$.



г) $y = -(x+3)^3 + 2$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) ни четная, ни нечетная;

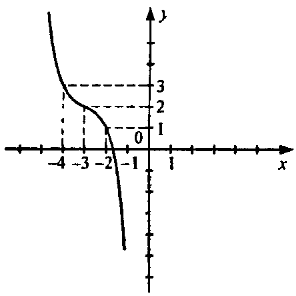
3) убывающая;

4) неограниченная;

5) непрерывна;

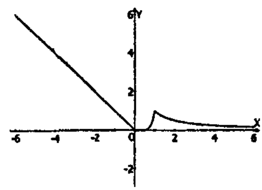
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

7) выпукла вниз на $(-\infty; -3]$, вверх на $[-3; +\infty)$.



12.27.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{если } x \le 0 \\ x^7, \text{если } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{если } x > 1 \end{cases}$$



1) D(f)=$(-\infty; +\infty)$.

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на $[0; 1]$. Убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$.

4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.

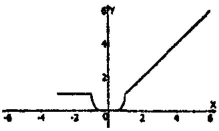
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна.

7) E(f)=$[0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на $[0; 1]$ и на $[1; +\infty)$. На $(-\infty; 0]$ выпукла как вверх, так и вниз.

12.28.



$$f(x)=\begin{cases}1, \text{если } -3 \le x \le -1\\ x^6, \text{если } -1 < x \le 1\\ x, \text{если } x > 1\end{cases}$$

1) D(f)=[−3; +∞).

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на [0; +∞). Убывает на [−1; 0]. Постоянна на [−3; −1]

4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.

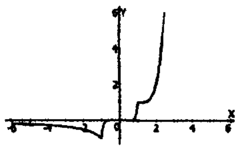
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна на области определения.

7) E(f)=[0; +∞).

8) Выпукла вниз на [−1; 1]. На [−3; −1] и на [1; +∞) можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

12.29.



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{если } x < -1\\ x^{11}, \text{если } -1 \le x \le 1\\ (x-1)^4+1, \ \text{если } 1 < x \le 3\end{cases}$$

1) D(f)=(−∞; 3]. 2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на [−1; +∞). Убывает на (−∞; −1].

4) Ограничена снизу, ограничена сверху.

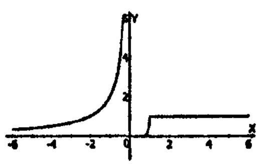
5) $y_{наим}=-1$, $y_{наиб}=17$.

6) Непрерывна на области определения.

7) E(f)=[−1; 17].

8) Выпукла вниз на [0;1] и на [1;3). Выпукла вверх на [−∞;−1] и на [−1;0].

12.30.



$$f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{x}, \text{если } x < 0\\ x^{12}, \text{если } \ 0 \le x \le 1\\ 1, \text{если } \ x > 1\end{cases}$$

1) D(f)=(−∞; +∞).

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на (−∞; 0) и на [0; 1]. На [1; +∞) постоянна.

4) Ограничена снизу, неограничена сверху.

5) Непрерывна на (−∞; 0) и на (0; +∞).

6) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

7) E(f)=[0; +∞).

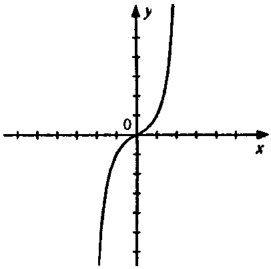
8) Выпукла вниз на (−∞; 0] и на [0; 1]. На [1; +∞) можно считать функцию как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

12.31.

а) $y = \frac{x^4}{x}$

$f(-x) = \frac{(-x)^4}{-x} = -\frac{x^4}{x} = -f(x)$

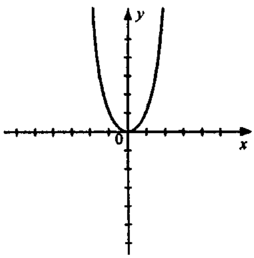
Функция нечетная.



б) $y = \frac{x^4}{|x|}$

$f(-x) = \frac{(-x)^4}{|-x|} = \frac{x^4}{x} = f(x)$

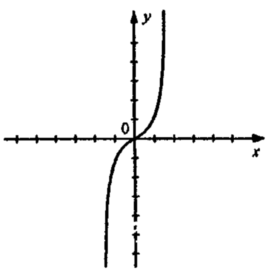
Функция четная.



в) $y = \frac{x^5}{x^2}$

$f(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^2} = -\frac{x^5}{x^2} = -f(x)$

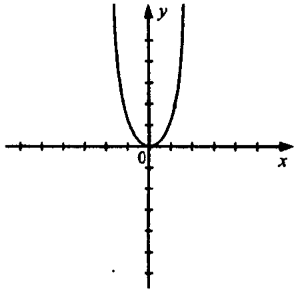
Функция нечетная.



г) $y = x^2|x|$

$f(-x) = (-x)^2|-x| = x^2|x| = f(x)$

Функция четная.

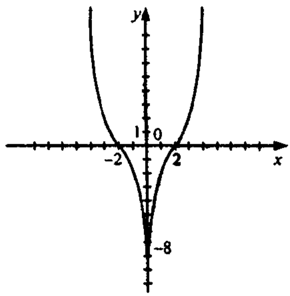


12.32.

а) $y = \left(|x| - 2\right)^3$

$f(-x) = \left(|-x| - 2\right)^3 = \left(|x| - 2\right)^3 = f(x)$

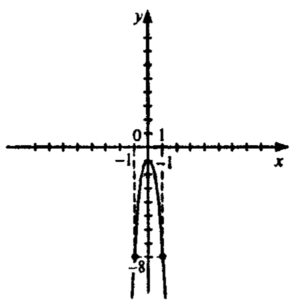
Функция четная.



б) $y = -\left(|x| + 1\right)^3$

$f(-x) = -\left(|-x| + 1\right)^3 = -\left(|x| + 1\right)^3 = f(x)$

Функция четная.

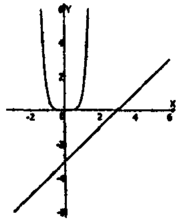


12.33.

а) $x^4+x^2+1=0$; $x^4=-x^2-1$.

Правая часть отрицательна, левая – неотрицательна. Корней нет.

б) $x^6-x+3=0$; $x^6=x-3$.



Точек пересечения нет.

Корней нет.

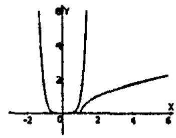
в) $x^4+x^2-2x+3=0$

$x^4+x^2+(x-1)^2=0$; $x^4+x^2=-(x-1)^2$.

Правая часть не положительна, левая – положительна.

Корней нет.

г) $x^6-\sqrt{x-1}=0$; $x^6=\sqrt{x-1}$.



Точек пересечения нет. Корней нет.

12.34.

$y=f(x)$, $f(x)=x^7$;

$f(2x)\cdot f(\frac{x}{2})=(2x)^7\cdot(\frac{x}{2})^7=x^{14}=(x^7)^2=(f(x))^2$.

12.35.

$y=f(x)$, $f(x)=-x^4$; $f(4x)\cdot f(-\frac{x}{4})=-(4x)^4\cdot-(\frac{-x}{4})^4=x^8=(x^4)^2=(f(x))^2$.

12.36.

$y=f(x)$, $f(x)=x^{10}$; $f(x^2)\cdot f(x^{-1})=(x^2)^{10}\cdot(x^{-1})^{10}=x^{20}\cdot x^{-10}=x^{10}=f(x)$.

12.37.

$y=f(x)$, $f(x)=-x^3$;

$(f(x))^9 : f(-\frac{1}{2}x^4)=(-x^3)^9 : -(-\frac{1}{2}x^4)^3=-x^{27} : \frac{x^{12}}{8}=-8x^{15}=-(2x^5)^3=f(2x^5)$.

§ 13. Функции $y = x^{-n}$ ($n \in N$), их свойства и графики

13.1.

а) $f(x)=x^{-4}$, $A\left(\frac{1}{2};16\right)$, $B\left(-2;\frac{1}{8}\right)$.

$16=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ – верно. А принадлежит графику.

$\frac{1}{8}=(-2)^{-4}$ – неверно. В не принадлежит графику.

б) $f(x)=x^{-5}$. А (0; 0), В (–1; –1)

$0=0^{-5}$ – неверно. А не принадлежит графику.

$-1=-1^{-5}$ – верно. Принадлежит графику.

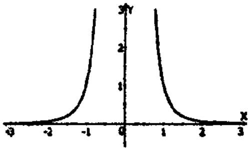
в) $f(x)=x^{-6}$, $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{8}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};64\right)$.

$\frac{1}{8}=\left(\sqrt{2}\right)^{-6}$ – верно. А принадлежит графику.

$64=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$ – верно. В принадлежит графику.

г) $f(x)=x^{-7}$. $A(-1;\ 1)$, $B\ (1;\ -1)$; $1=-1^{-7}$ – неверно; $-1=1^{-7}$ – неверно. Ни А, ни В не принадлежат графику.

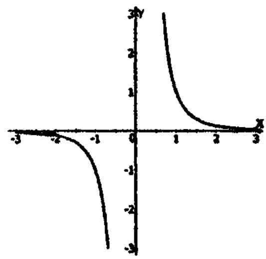
13.2.



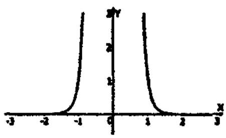
а) $f(x)=y=\frac{1}{x^4}$.

1) $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. 2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty;\ 0)$. Убывает на $(0;\ +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.
7) $E(f)=(0;\ +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.

б) $f(x)=y=x^{-3}$.



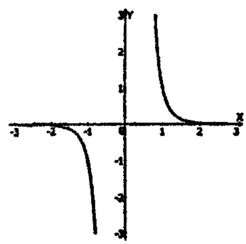
1) $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. 2) Нечетная.
3) Убывает на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.
4) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.
7) $E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.
8) Выпукла вверх на $(-\infty;\ 0)$, вниз на $(0;\ +\infty)$.



в) $f(x)=y=x^{-8}$.

1) $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. 2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty;\ 0)$. Убывает на $(0;\ +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.
7) $E(f)=(0;\ +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.

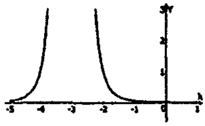
г) $f(x)=y=\frac{1}{x^5}$.



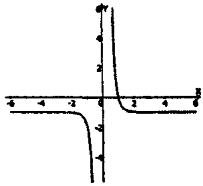
1) $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. 2) Нечетная.
3) Убывает на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.
4) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty;\ 0)$ и на $(0;\ +\infty)$.
7) $E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.
8) Выпукла: вверх на $(-\infty;\ 0)$, вниз на $(0;\ +\infty)$.

13.3.

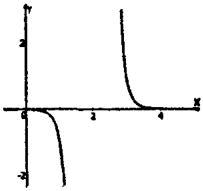
а)



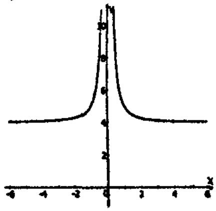
б)



в)

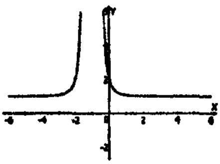


г)

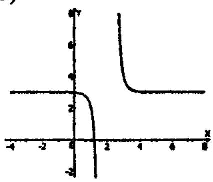


13.4.

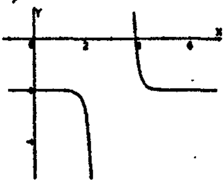
а)



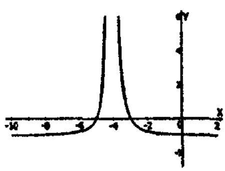
б)



в)



г)

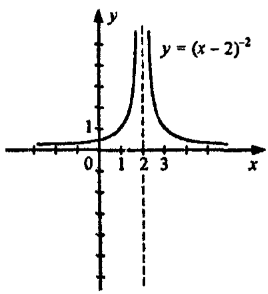


13.5.

Функция возрастает на $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$.

$y = 0$ — горизонтальная асимптота.

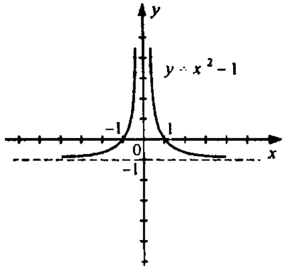
$x = 2$ — вертикальная асимптота.



13.6.

$E(f) = (-1; +\infty)$

$y = 1$ — горизонтальная асимптота. $x = 0$ — вертикальная асимптота.



13.7.

$f(x)=y=x^{-4}$.

а) $y_{наиб}=f(\frac{1}{2})=16$ на $[\frac{1}{2}; 1]$, $y_{наим} =1 = f(1)$;

б) на $(-\infty; -2]$ $y_{наиб}=\frac{1}{16}$, $y_{наим}$ – не существует;

в) на $(-3; -1]$ $y_{наиб}=1$, $y_{наим}$ – не существует;

г) на $[3; +\infty)$ $y_{наиб}=f(3) = \frac{1}{81}$, $y_{наим}$ – не существует

13.8.

$f(x)=y=x^{-5}$

а) на $[-2; -1]$ $y_{наиб}=f(-2)=-\frac{1}{32}$, $y_{наим} =f(-1)=-1$;

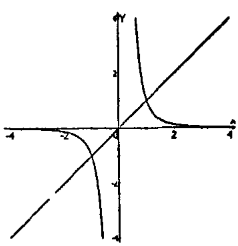
б) на $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ $y_{наиб}$– не существует, $y_{наим} =f(-\frac{1}{2})=-32$;

в) на $(\frac{1}{2}; 4]$ $y_{наиб}$ –не существует, $y_{наим} =f(4)=\frac{1}{1024}$;

г) на $[2; +\infty)$ $y_{наиб}=f(2)=\frac{1}{32}$, $y_{наим}$ – не существует.

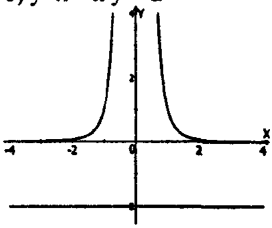
13.9.

а) $y=x$ и $y=\frac{1}{x^3}$



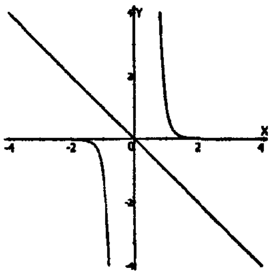
Точки пересечения (1; 1) и (−1; −1);

б) $y=x^{-4}$ и $y=-2$



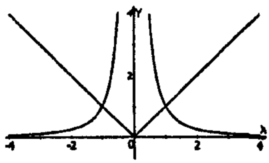
Точек пересечения нет;

в) $y=x^{-7}$ и $y=-x$



Точек пересечения нет,

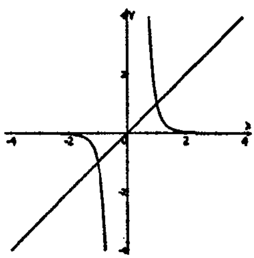
г) $y=\dfrac{1}{x^2}$ и $y=|x|$



Точки пересечения (1; 1) и (−1, 1).

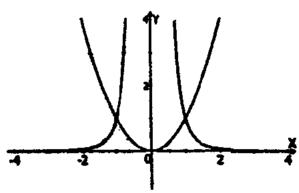
13.10.

а) $x^{-5}=x$



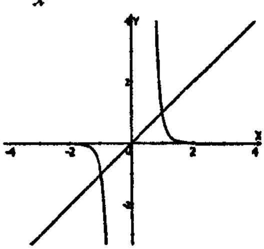
$x=1$, $x=-1$;

б) $\dfrac{1}{x^4}=x^2$



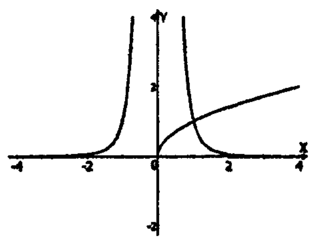
$x=1$, $x=-1$;

в) $\dfrac{1}{x^7}=x$



$x=1$, $x=-1$;

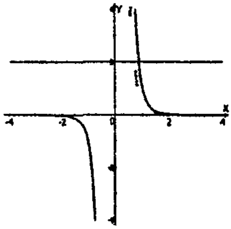
г) $x^{-4}=\sqrt{x}$



$x=1$.

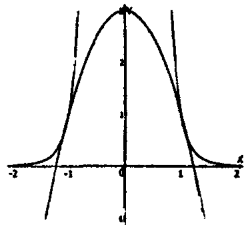
13.11.

а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^5} \\ y = 2 \end{cases}$



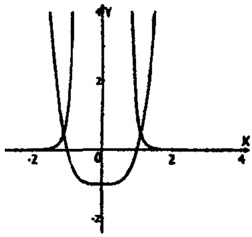
1 решение;

б) $\begin{cases} y = x^{-6} \\ y = 3 - 2x^2 \end{cases}$



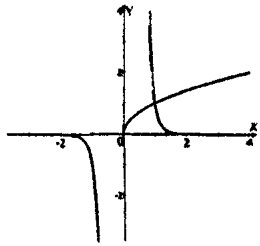
4 решения;

в) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^8} \\ y = x^4 - 1 \end{cases}$



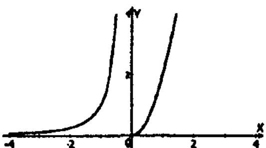
2 решения;

г) $\begin{cases} y = x^{-7} \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$



1 решение.

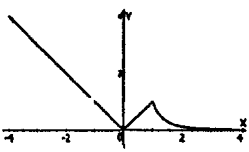
13.12.



$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \text{если } x < 0 \\ 2x^2, \text{если } x \ge 0 \end{cases}$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $[0; +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f) = [0; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

13.13.



$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{если } x \le 1 \\ x^{-3}, \text{если } x > 1 \end{cases}$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[0; 1]$. Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $[1; +\infty)$.

4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна на D(f).

7) E(f)=[0; +∞).

8) Выпукла вниз на [1; +∞).

На (−∞; 1] можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

13.14.

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)^2+2, \text{если } -2 \le x \le 0\\ x^{-12}, \text{если } x>0\end{cases}$$

1) D(f)=[−2; +∞).

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на [−2; −1]. Убывает на [−1; 0] и на (0; +∞).

4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна на (0; +∞) и на [−2; 0).

7) E(f)=[0; +∞).

8) Выпукла: вверх на [−2; 0], вниз на (0; +∞).

13.15.

$y=x^{-n}$

а) $(2; \frac{1}{256})$; $\frac{1}{256}=2^{-n}$, n=8;

б) $(-2; -\frac{1}{32})$; $-\frac{1}{32}=-2^{-n}$, n=5;

в) $(7; \frac{1}{343})$; $\frac{1}{343}=7^{-n}$, n=3;

г) $(\frac{1}{5}; 625)$; $625=(\frac{1}{5})^{-n}$, n=4.

13.16.

$y=x^{-n}$

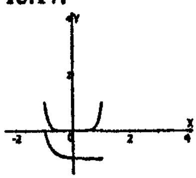
а) (−1; 1); $1=-1^{-n}$, n – четное. Функция четная.

б) (−1; −1); $-1=-1^{-n}$, n – нечетное. Функция нечетная.

в) (1; 1); $1=1^{-n}$, n –любое. Функция либо четная, либо нечетная.

г) (1; −1); $-1=1^{-n}$, таких n не существует. Задание некорректно.

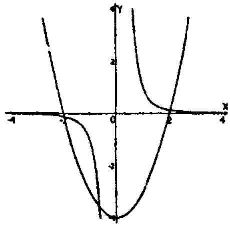
13.17.



P=Q=0.

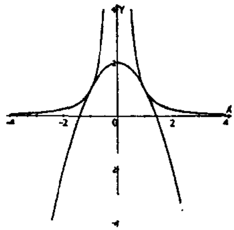
13.18.

а) $\begin{cases} y = x^{-3} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$



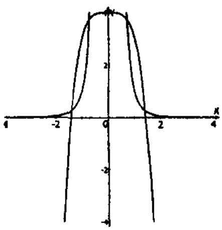
3 решения.

б) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$



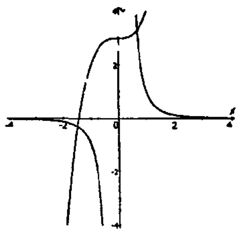
2 решения.

в) $\begin{cases} y = x^{-4} \\ y = 4 - x^4 \end{cases}$



4 решения.

г) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^3} \\ y = x^3 + 3 \end{cases}$



2 решения.

13.19.

$y = (x+2)^{-3} - 1$

а) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

б) Убывает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$

на $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$ $f(x) < 0$

на $(-2; -1)$ $f(x) > 0$

в) $y = -1$ — горизонтальная асимптота.

$x = -2$ — вертикальная асимптота.

г) $(-2; -1)$ — центр симметрии.

13.20.

$y = (x-1)^{-2} - 2$

а) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $E(f) = (-2; +\infty)$

б) Возрастает на $(-\infty; 1)$;

Убывает на $(1; +\infty)$.

на $\left(-\infty; 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ $f(x) < 0$

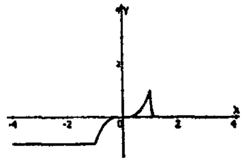
на $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)\cup\left(1;1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $f(x)>0$

в) $y=-2$ — горизонтальная асимптота. $x=1$ — вертикальная асимптота

г) $x=1$ — ось симметрии.

13.21.

а) f(x)= $\begin{cases} -1, \text{ если } x\le -1 \\ x^3, \text{ если } -1<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^{28}}, \text{ если } x>1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на [–1; 1]. Убывает на [1;+∞). На (–∞; –1] постоянна.

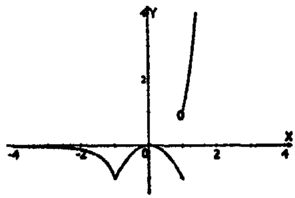
4) Ограничена. 5) $y_{наим}=-1$, $y_{наиб}=1$.

6) Непрерывна на D(f). 7) E(f)=[–1; 1].

8) Выпукла: вверх на [–1; 0], вниз на [0; 1] и на [1; +∞).

На (–∞; –1) можно считать выпуклой как вверх, так и вниз

б) f(x)= $\begin{cases} x^{-3}, \text{ если } x\le -1 \\ -x^2, \text{ если } -1<x\le 1 \\ x^4, \text{ если } x>1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на [1; +∞) и на [–1; 0]. Убывает на (–∞; –1] и на [0; 1].

4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

5) $y_{наим}=-1$, $y_{наиб}$ – не существует.

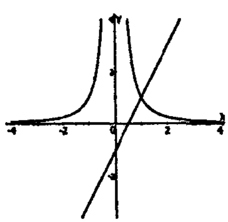
6) Непрерывна на (–∞; 1) и на (1; +∞).

7) E(f)=[–1; 0]∪[1; +∞).

8) Выпукла: вверх на (–∞; –1] и на [–1; 1], вниз на (1; +∞).

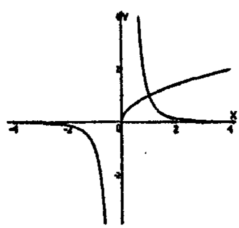
13.22.

а)



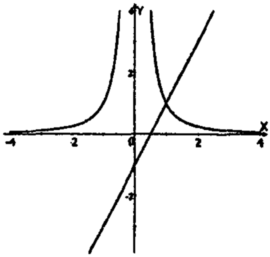
x<0, 0<x<1;

б)



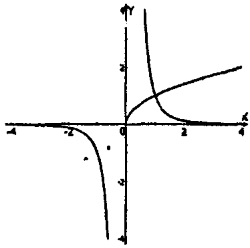
x≥1;

в)



$x \ge 1$;

г)



$0<x<1$.

13.23.

$y=f(x)$, $f(x)=x^5$; $y=g(x)$, $g(x)=x^{-10}$; $\frac{(f(2x))^2}{32}=\frac{((2x)^5)^2}{32}=32 \cdot x^{10}=32 \cdot (g(x))^{-1}$

13.24.

$y=f(x)$, $f(x)=x^{-3}$; $y=g(x)$, $g(x)=x^4$; $(f(x^2))^2=((x^2)^{-3})^2=(x^{-6})^2=x^{-12}=(x^4)^{-3}=g(x)^{-3}$

13.25.

$y=f(x)$, $f(x)=x^2$; $y=g(x)$, $g(x)=x^{-4}$

$$\frac{16}{f(x^2)}=\frac{16}{(x^2)^2}=\frac{16}{x^4}=(\frac{2}{x})^4=\left((\frac{2}{x})^{-4}\right)^{-1}=(g(\frac{2}{x}))^{-1}$$

§ 14. Функция $y=\sqrt[3]{x}$, ее свойства и график

14.1.

а) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{8 \cdot 8}=\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3}=\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3}=4$,

б) $\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{-5 \cdot 25}=\sqrt[3]{-5^3}=-5$;

в) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2 \cdot 108}=\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 54}=\sqrt[3]{2^3 \cdot 27}=\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}=6$

г) $\sqrt[3]{-343}=\sqrt[3]{-7 \cdot 49}=\sqrt[3]{-7 \cdot 7^2}=-7$.

14.2.

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 3}=2 \cdot \sqrt[3]{3}$

б) $\sqrt[3]{125 \cdot 2}=5 \cdot \sqrt[3]{2}$

в) $\sqrt[3]{27 \cdot 5}=3 \cdot \sqrt[3]{5}$

г) $\sqrt[3]{-64 \cdot 7}=-4 \cdot \sqrt[3]{7}$

14.3.

а) $\sqrt[3]{54}=3 \cdot \sqrt[3]{2}$

б) $\sqrt[3]{-432}=-6 \cdot \sqrt[3]{2}$

в) $\sqrt[3]{56}=2 \cdot \sqrt[3]{7}$

г) $\sqrt[3]{-375}=-5 \cdot \sqrt[3]{3}$

14.4.

а) $\sqrt[3]{27 \cdot x}=3 \cdot \sqrt[3]{x}$

б) $\sqrt[3]{-16a}=-2 \cdot \sqrt[3]{2a}$

в) $\sqrt[3]{250y}=5 \cdot \sqrt[3]{2y}$

г) $\sqrt[3]{-343b}=-7 \cdot \sqrt[3]{b}$

14.5.

а) $\sqrt[3]{125x^4}=5x \cdot \sqrt[3]{x}$

б) $\sqrt[3]{-128x^7}=-4x^2\sqrt[3]{2x}$

в) $\sqrt[3]{81a^5}=3a \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

г) $\sqrt[3]{-512a^8}=-8a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$

14.6.

а) $2\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}$

б) $-3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{-54}$

в) $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{250}$

г) $-4\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{-192}$

14.7.

а) $a\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a^3x}$

б) $a^2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^7}$

в) $2x\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{8x^3a^2}$

г) $x^3\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^{11}}$

14.8.

а) $\sqrt[3]{a^6}=\sqrt[3]{\left(a^2\right)^3}=a^2$;

б) $\sqrt[3]{-27b^3}=\sqrt[3]{-(3b)^3}=-\sqrt[3]{(3b)^3}=-3b$;

в) $\sqrt[3]{8s^9b^{12}}=\sqrt[3]{\left(2a^3b^4\right)^3}=2a^3b^4$;

г) $\sqrt[3]{-64a^6b^3c^9}=-\sqrt[3]{\left(4a^2bc^3\right)^3}=-4a^2bc^3$

14.9.

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}=\dfrac{\sqrt[3]{49}}{7}$

б) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}$

в) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{25}$

г) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}=2\cdot\sqrt[3]{3}$

14.10.

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

б) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[3]{a}$

в) $-\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}=-\sqrt[3]{x^2}$

г) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}}=x\cdot\sqrt[3]{x}$

14.11.

а) $2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{a}$

б) $8\sqrt[3]{b}+5\sqrt[3]{b}=13\cdot\sqrt[3]{b}$

в) $\sqrt[3]{81x}+\sqrt[3]{24x}=5\cdot\sqrt[3]{3x}$

г) $\sqrt[3]{250y^2}-\sqrt[3]{54y^2}=2\cdot\sqrt[3]{2y^2}$

14.12.

а) $\sqrt[3]{54\cdot5}\cdot\sqrt[3]{100}=\sqrt[3]{27\cdot1000}=30$

б) $\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{216}-\sqrt[3]{24}=6\cdot2\cdot\sqrt[3]{3}$

в) $\sqrt[3]{\dfrac{192}{49}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{9}{7}}=\dfrac{\sqrt[3]{12^3}}{\sqrt[3]{7^3}}=\dfrac{12}{7}$

г) $\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{15}\right)\cdot\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{125\cdot3}=5+5\cdot\sqrt[3]{3}$

14.13.

а) $\sqrt[3]{x}=5$, $x=5^3$, $x=125$;

б) $\sqrt[3]{2x-1}=1$; $\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=1^3$; $2x-1=1$; $x=1$, в) $\sqrt[3]{x}=-10$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=(-10)^3$; $x=-1000$;

г) $\sqrt[3]{4-2x}=4$; $\left(\sqrt[3]{(4-2x)}\right)^3=4^3$; $4-2x=64$; $x=-30$

14.14.

$y=\sqrt[3]{x}$

а) $A(8;\ 2)$. Подставим: $2=\sqrt[3]{8}$ – верно, значит точка A принадлежит графику функции $y=\sqrt[3]{x}$.

б) $B(-27;\ 3)$. Подставим: $3=\sqrt[3]{-27}$; $3=-3$ – не верно.
b – не принадлежит.

в) $C\left(-\frac{8}{27};-\frac{2}{3}\right)$. Подставим: $-\frac{2}{3}=\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$;

$-\frac{2}{3}=\sqrt[3]{-\frac{2^3}{3^3}}$; $-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$ – верно. С – принадлежит.

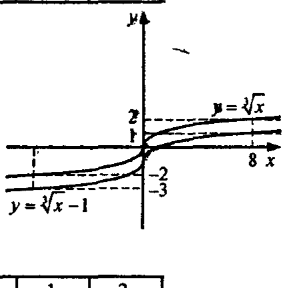
г) $D\left(\frac{1}{125};\frac{1}{5}\right)$. Подставим: $\frac{1}{5}=\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$; $\frac{1}{5}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}$;

$\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$, верно. D – принадлежит.

14.15.

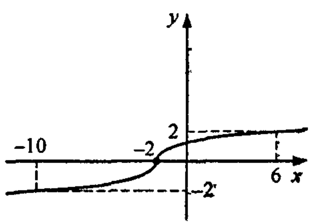
а) $y=\sqrt[3]{x}-1$. Строим: $y=\sqrt[3]{x}$.

x	0	1	8	– 1	– 8
y	0	1	2	– 1	– 2

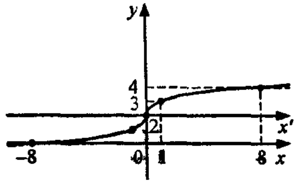


б) $y=\sqrt[3]{x+2}$

x	–2	6	–10	–1	–3
y	0	2	–2	1	–1

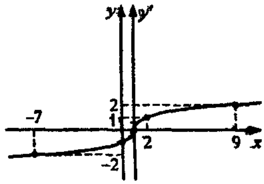


в) $y=\sqrt[3]{x}+2$ – параллельный перенос на 2 вверх вдоль оси Oy графика $y=\sqrt[3]{x}$ (см. задачу № 14.15 (а)).



г) $y=\sqrt[3]{x-1}$

x	1	0	–7	2	9
y	0	–1	–2	1	2



Или параллельный перенос вдоль оси Ox на 1 вправо графика функции $y=\sqrt[3]{x}$.

14.16.

а) Функция $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает на $(-\infty;+\infty)$, поэтому $y_{\min}=1$, $y_{\max}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ на отрезке [1; 8].

б) (–8; 0], $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает на $(-\infty;+\infty)$.

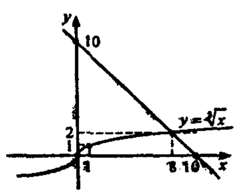
(–8; 0] – полуинтервал, значение (–8) не принадлежит ему, но подходит сколь угодно близко, поэтому min значения не существует. $y_{\max}=\sqrt[3]{0}=0$.

в) Функция $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает на всей области определения, т.е. числовой прямой, поэтому $y_{\min}=\sqrt[3]{-27}=-3$; $y_{\max}=\sqrt[3]{64}=4$ на отрезке [– 27; 64].

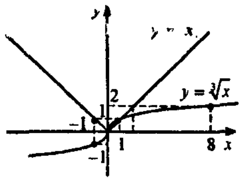
г) $y=\sqrt[3]{x}$ – возрастает на числовой прямой и не ограничена, поэтому на $+\infty$ не имеет max значения. $y_{\min}=\sqrt[3]{0{,}125}=\sqrt[3]{(0{,}5)^3}=0{,}5$ на промежутке $[0{,}125;+\infty)$.

14.17.

а) $\sqrt[3]{x}=10-x$



Из графика видно, что точка (8, 2) – решение уравнения.
Т.е. $x = 8$ – решение.
б) $\sqrt[3]{x} = 1 \cdot |x|$



Из графика: $x = 0$, $x = 1$ – решения.

14.18.

а) $y = x^2\sqrt[3]{x}$; $f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{(-x)} = -(x)^2\sqrt[3]{x} = -f(x)$, значит функция $y = x^2\sqrt[3]{x}$ – нечетная.

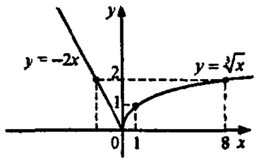
б) $y = x\sqrt[3]{x} + x^{-4} + 2$

$f(-x) = (-x)\cdot\sqrt[3]{-x} + (-x)^{-4} + 2 = x\cdot\sqrt[3]{x} + (x)^{-4} + 2 = f(x)$

функция четная.

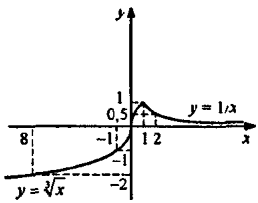
14.19.

а) $y = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x > 0 \end{cases}$



На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает по прямой $y = -2x$, при $x > 0$ график функции имеет вид графика $y = \sqrt[3]{x}$

б) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

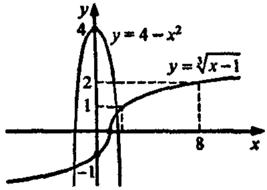


На промежутке $(-\infty; 1]$ функция возрастает вдоль графика функции кубического корня, далее на $(1; +\infty)$ убывает как гипербола $y = \dfrac{1}{x}$.

14.20.

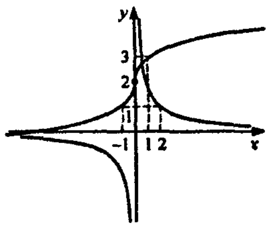
а) $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ y = \sqrt[3]{x-1} \end{cases}$

Построим схематически графики функций $y = 4 - x^2$, $y = \sqrt[3]{x-1}$ и определим число решений системы.



Из графика: 2 решения.

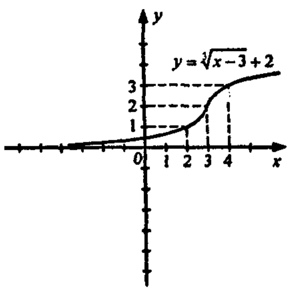
б) $\begin{cases} xy = 2 \\ y = \sqrt[3]{x} + 2 \end{cases}$



Из графика: 2 решения.

14.21.

а) $y = \sqrt[3]{x-3} + 2$



1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) Ни четная, ни нечетная;

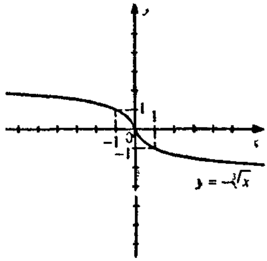
3) Возрастающая;

4) Неограниченная;

5) Непрерывная;

6) Выпукла вниз на $(-\infty; 3]$, вверх на $[3; +\infty)$

б) $y = -\sqrt[3]{x}$



1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$. $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) Нечетная;

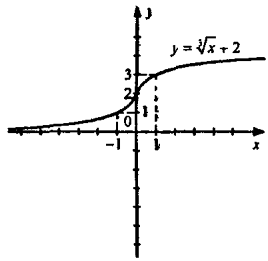
3) Убывающая;

4) Неограниченная,

5) Непрерывна;

6) Выпукла вниз на $[0; +\infty)$. вверх на $(-\infty; 0]$

в) $y = \sqrt[3]{x} + 2$



1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; +\infty)$,

2) Ни четная, ни нечетная;

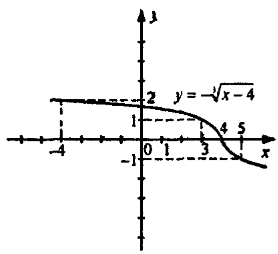
3) Возрастающая;

4) Неограниченная;

5) Непрерывна;

6) Выпукла вниз на $(-\infty; 0]$, вверх на $[0; +\infty)$

г) $y = -\sqrt[3]{x - 4}$



1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) Ни четная, ни нечетная;

3) Убывающая;

4) Неограниченная;

5) Непрерывна;

6) Выпукла вниз на $[4; +\infty)$, вверх на $(-\infty; 4]$.

14.22.

а) $\sqrt[3]{x-1} = 2$

$x - 1 = 8$

$x = 9$

б) $-\sqrt[3]{x+2} = 3$

$x + 2 = -27$

$x = -29$

14.23.

а) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$.

Обозначим $\sqrt[3]{x} = t$. Тогда имеем: $t^2 + t - 6 = 0$; $D = 25$; $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$;

$t_1 = -3$, $t_2 = 2$. Т.е. $\sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow x_1 = 8$; $\sqrt[3]{x} = -3 \Rightarrow x_2 = -27$

Ответ: $x_1 = 8$; $x_2 = -27$.

б) $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

Обозначим $\sqrt[3]{x} = t$. Тогда, $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $D = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$, $t_1 = 2$; $t_2 = 0{,}5$.

Отсюда $\sqrt[3]{x} = 2$, $\sqrt[3]{x} = 0{,}5$, $x_1 = 8$, $x_2 = 0{,}125$.

14.24.

а) $\sqrt[3]{x} > 1$ возведем обе части в 3 степень. Это действие не требует дополнительных проверок на сохранение знака неравенства, поэтому получаем: $x > 1$.

б) $\sqrt[3]{x} > 2 - x$, $y_1 = \sqrt[3]{x}$ – возрастает; $y_2 = 2 - x$ – убывает

при $x = 1$ графики пересекаются, поэтому при $x > 1$, $y_1 > y_2$.

в) $\sqrt[3]{x} \le -2$, $x \le -8$;

г) $\sqrt[3]{x} \le -x - 2$, $y_1 = \sqrt[3]{x}$ – возрастает; $y_2 = -x - 2$ – убывает

Точка пересечения $(-1; -1)$, поэтому при $x \le -1$, $y_1 \le y_2$.

14.25.

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \le -1; \\ x^5, & -1 < x < 1; \\ \sqrt[3]{x}, & x \ge 1. \end{cases}$$

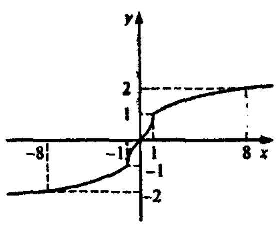
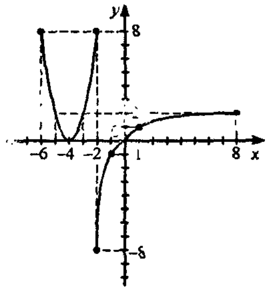


График функции возрастает как функция $y=\sqrt[3]{x}$ на $(-\infty;-1]$ возрастает как x^5 на $(-1;\ 1)$, и снова возрастает как $y=\sqrt[3]{x}$ до $+\infty$

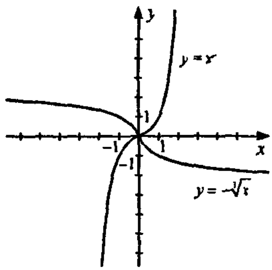
14.26.

а) $p=0,\ 2<p\le 8$. б) $0<p\le 2$.

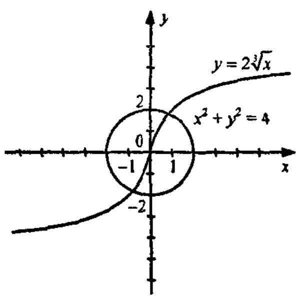
в) не при каких p. г) $p<-8,\ p>8$;



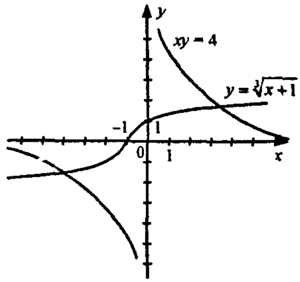
а) $(\sqrt[3]{x}+y)(x^3-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^3 \\ y=-\sqrt[3]{x} \end{array}\right.$



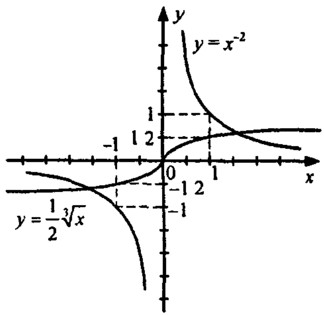
б) $(2\sqrt[3]{x}-y)(x^2+y^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\sqrt[3]{x} \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right.$



в) $\left(\sqrt[3]{x+1}-y\right)(xy-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt[3]{x+1} \\ xy=4 \end{array}\right.$

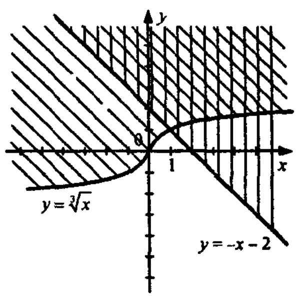


г) $\left(x^{-2}+y\right)\left(2y+\sqrt[3]{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^{-2} \\ y=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x} \end{array}\right.$



14.28.

а) $\begin{cases} x+y>2 \\ y-\sqrt[3]{x}>0 \end{cases}$



Построим графики $y=-x+2$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

Заштрихуем соответствующие подобласти.

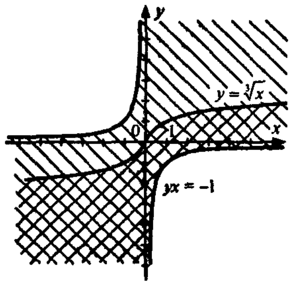
Решение: это множество (x, y) таких, что $y>-x+2$, при $x \in (-\infty; 1]$ и $y>\sqrt[3]{x}$, при $x \in [1; +\infty)$.

б) $\begin{cases} xy+1\geq 0 \\ y-\sqrt[3]{x}\leq 0 \end{cases}$

Построим графики $xy=-1$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

Заштрихуем соответствующие подобласти.

Решение: это множество $(x,\ y)$ таких, что $y\leq\sqrt[3]{x}$, при $x\in(-\infty;0]$ и $-\frac{1}{x}\leq y\leq\sqrt[3]{x}$, при $x\in(0;+\infty)$.



Домашняя контрольная работа № 3

ВАРИАНТ 1

1. $f(x)=y=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4x-12}}$; $x^2+4x-12>0$; $\dfrac{D}{4}=4+12=16$;

$\left[\begin{array}{l} x_1=-2+4=2 \\ x_2=-6 \end{array}\right.$;

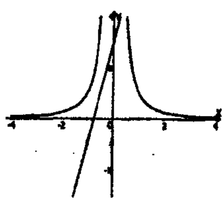
$(x+6)(x-2)>0$; $x>2$, $x<-6$. $D(f)=(-\infty;\ -6)\cup(2;\ +\infty)$.

2. $y=f(x)$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(5-x)(x-7)}}$

3. $E(f)=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

4. $f(x)=y=3x^3+4x+5$, $x\in[0;\ +\infty)$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $[0;\ +\infty)$, такие, что $x_1<x_2$. Тогда $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow 3x_1^3<3x_2^3\Leftrightarrow 3x_1^3+4x_1<3x_2^3+4x_2\Leftrightarrow 3x_1^3+$
$+4x_1+5<3x_2^3+4x_2+5$. $f(x_1)<f(x_2)$.



Функция возрастает.

5. $h(x)=-2x-1$.

6. $x^{-2}=4x+3$. Один корень.

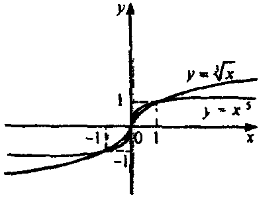
7. $f(x)=y=(x+2)^4-2$ на $[-1;\ 4]$

$y_{наим}=f(-1)=-1$;

$y_{наиб}=f(4)=6^4-2=1294$.

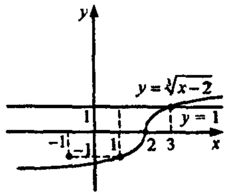
8.

а) $x^{-5} = \sqrt[3]{x}$



Из графика: $x = -1$, $x = 1$

б) $\sqrt[3]{x-2} > 1$

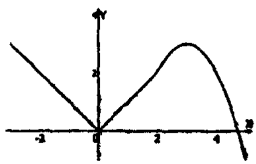


Из графика: $x > 3$.

9. $f(x)=x^{-2}$, $g(x)=x^4$

$$\frac{f(4x)}{f(x^2)}=\frac{(4x)^{-2}}{(x^2)^{-2}}=\frac{x^{-2}}{16x^{-4}}=\frac{x^2}{16}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^4}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(\frac{x^2}{2})^4}=\frac{1}{4}\sqrt{g(\frac{x}{2})}$$

10. $f(x)=\begin{cases}|x|, \text{ если } x<2\\ -(x-3)^2, \text{ если } x\geq 2\end{cases}$



При p>3 – одно решение. При p=3 и p=0 – 2 решения. При 0<p<3 – 3 решения. При p<0 – одно решение.

ВАРИАНТ 2.

1. $f(x)=\frac{6}{\sqrt{-x^2+5x+24}}$;

$-x^2+5x+24>0$

$x^2-5x-24<0$

$(x-8)(x+3)<0 \Rightarrow D(f)=(-3; 8)$

2. $y=f(x)$, $f(x)=\sqrt{(1-x)(x-3)}$

3. E(f)={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

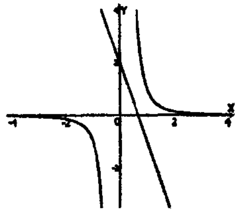
4. $f(x)=y=-x^4-x^2+8$, $x\in[0; +\infty)$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2 из [0: +∞), такие, что $x_1<x_2$. Тогда $x_1^4<x_2^4 \Leftrightarrow -x_1^4>-x_2^4$; $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2$

Складывая два последних неравенства, получим: $-x_1^4-x_1^2>-x_2^4-x_2^2$; $-x_1^4-x_1^2+8>-x_2^4-x_2^2+8$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

5. $h(x)=-(x+1)^2+1$

6. $x^{-3}=2-3x$.



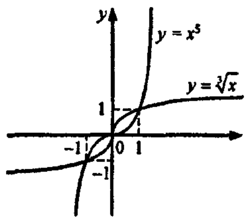
Корней нет.

7. $f(x)=y=(1-x)^3+3$ на отрезке [2; 3]

$y_{наим}=f(3)=-5$; $y_{наиб}=f(2)=2$.

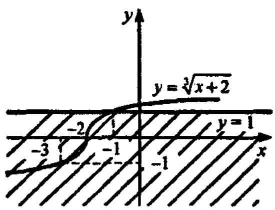
8.

а) $x^5=\sqrt[3]{x}$



Решение: $x=1$, $x=-1$.

б) $\sqrt[3]{x+2}\le 1$

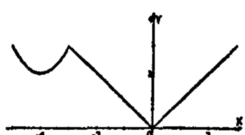


Из графика: $x\le -1$.

9. $f(x)=x^4$, $g(x)=x^{-1}$

При $x<0$, $\sqrt{4\sqrt{f(x)}}+2(g(x))^{-1}=2\sqrt{x^2}+2(x^{-1})^{-1}=2|x|+2x=-2x+2x=0$.

10. $f(x)=\begin{cases}(x+4)^2+2, \text{если } x<-3\\ |x|, \text{если } x\ge -3\end{cases}$



При p<0 корней нет. При p=0 – один корень. При 0<p<2 – 2 корня. При p=2 и p≥3 – 3 корня. При 2<p<3 – 4 корня.

Глава 4. Прогрессии

§ 15. Числовые последовательности

15.1.
а) Нет, не является. б) Нет, не является.
в) Нет, не является. г) Да, является.

15.2.
а) Нет, не является. б) Нет, не является.
в) Нет, не является. г) Да, является.

15.3.
Пусть x – число минут, а y – число капель, упавших на землю Тогда моделью задачи будет функция $y=5x$, $x \in N$.

Эта математическая модель является числовой последовательностью

15.4.
а) Да, $y_n=n^2$; $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=9$, $y_4=16$, $y_5=25$.
б) Да, $y_n=n^3$; $y_1=1$, $y_2=8$, $y_3=27$, $y_4=64$, $y_5=125$
в) Да, $y_n=7$; $y_1=7$, $y_2=7$, $y_3=7$, $y_4=7$, $y_5=7$.
г) Да, $y_n=\frac{1}{n}$; $y_1=1$, $y_2=\frac{1}{2}$, $y_3=\frac{1}{3}$, $y_4=\frac{1}{4}$, $y_5=\frac{1}{5}$.

15.5.
а) $y_n=n^2$. б) Последовательность четных чисел. в) $y_1=0$, $y_n=y_{n-1}+5$

15.6.
Последовательность натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, 25
$y_6=30$, $y_{21}=105$, $y_n=5n$.

15.7.
Последовательность натуральных чисел, кратных семи: 7, 14, 21, 28, 35
$y_8=56$, $y_{10}=70$, $y_{37}=259$, $y_n=7n$.

15.8. $a_1=1$, $a_2=8$, $a_3=27$, $a_4=64$, $a_5=125$, $a_n=n^3$

15.9. $c_1=2$, $c_2=4$, $c_3=8$, $c_4=16$, $c_n=2^n$

15.10.
а) За y_{31} следует y_{32}, за y_n – y_{n-1}, за y_{n+9} – y_{n+10}, за y_{2n} – y_{2n-1},
б) члену y_{91} предшествует y_{90}, y_{639} – y_{638}, y_{n-1} – y_{n-2}, y_{3n} – y_{3n-}

15.11.
а) a_{639}, a_{640}, a_{641}, a_{642}, a_{643}, a_{644}; б) a_{1003}, a_{1004}, a_{1005}, a_{1006}, a_{1007},
в) a_{n+4}, a_{n+5}, a_{n+6}, a_{n+7}, a_{n+8}, a_{n+9}; г) a_{n-1}, a_n, a_{n-1}.

15.12.
а) $a_n=4n+1$; $a_1=5$, $a_2=9$, $a_3=13$, $a_4=17$, $a_5=21$;
б) $c_n=-7n+3$; $c_1=-4$, $c_2=-11$, $c_3=-18$, $c_4=-25$, $c_5=-32$;
в) $b_n=5n+2$; $b_1=7$, $b_2=12$, $b_3=17$, $b_4=22$, $b_5=27$;
г) $a_n=-3n-7$; $a_1=-10$, $a_2=-13$, $a_3=-16$, $a_4=-19$, $a_5=-22$.

15.13.

а) $a_n=\dfrac{1}{n+5}$; $a_1=\dfrac{1}{6}$, $a_2=\dfrac{1}{7}$, $a_3=\dfrac{1}{8}$, $a_4=\dfrac{1}{9}$, $a_5=\dfrac{1}{10}$;

б) $d_n=\dfrac{-2}{3-4n}$; $d_1=2$, $d_2=\dfrac{2}{5}$, $d_3=\dfrac{2}{9}$, $d_4=\dfrac{2}{13}$, $d_5=\dfrac{2}{17}$;

в) $c_n=\dfrac{3}{2n+4}$; $c_1=\dfrac{1}{2}$, $c_2=\dfrac{3}{8}$, $c_3=\dfrac{3}{10}$, $c_4=\dfrac{1}{4}$, $c_5=\dfrac{3}{14}$;

г) $a_n=\dfrac{-3}{4n-1}$; $a_1=-1$, $a_2=-\dfrac{3}{7}$, $a_3=-\dfrac{3}{11}$, $a_4=-\dfrac{1}{5}$, $a_5=-\dfrac{3}{19}$.

15.14.

а) $x_n=n^2+1$; $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=10$, $x_4=17$, $x_5=26$;

б) $y_n=-n^3-10$; $y_1=-11$, $y_2=-18$, $y_3=-37$, $y_4=-74$, $y_5=-135$;

в) $z_n=-n^3+5$; $z_1=4$, $z_2=-3$, $z_3=-22$, $z_4=-59$, $z_5=-120$;

г) $w_n=n^2-15$; $z_1=-14$, $z_2=-11$, $z_3=-6$, $z_4=1$, $z_5=10$.

15.15.

а) $y_n=n$; б) $y_n=n-3$; в) $y_n=n+5$; г) $y_n=-n$.

15.16.

а) $y_n=2n-1$; б) $y_n=3n$; в) $y_n=2n+2$; г) $y_n=4n$.

15.17.

а) $y_n=n^2$; б) $y_n=(n+1)^2$; в) $y_n=n^2+1$; г) $y_n=n^3$.

15.18.

а) $y_n=\dfrac{2n+3}{n+1}$, $A=\dfrac{11}{5}$

$A=\dfrac{11}{5}=\dfrac{2\cdot 4+3}{4+1}=y_4$

б) $y_n=2^{3n-11}$, $A=128$

$A=128=2^7=2^{3\cdot 6-11}=y_6$

в) $y_n=3(n+2)^{-2}$, $A=\dfrac{1}{12}$

$A=\dfrac{1}{12}=\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{3}{(4+2)^2}=y_4$

г) $y_n=(n-2)^3-1$, $A=342$

$A=342=7^3-1=(9-2)^3-1=y_9$

15.19.

а) $y_n=-n^5+3$, $B=-240$

$B=-240=-3^5+3=y_3 \Rightarrow n=3$

б) $y_n=\dfrac{n^2+4n+45}{n^2+25}$, $B=1{,}8$

$B=1{,}8=\dfrac{90}{50}=\dfrac{5^2+4\cdot 5+45}{5^2+25}=y_5 \Rightarrow n=5$

в) $y_n=n^2+15n+16$, $B=-40$

$B=-40<y_1=32 \Rightarrow B$ — не является членом последовательности

г) $y_n=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{7n-6}$, $B=243$

$B=243=3^5=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{7\cdot 3-6}=y_3 \Rightarrow n=3$

15.20.

а) $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=1$, $x_4=4$, $x_5=1$, $x_6=4$;

б) $x_1=-5$, $x_2=5$, $x_3=15$, $x_4=25$, $x_5=35$, $x_6=45$;

в) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $x_5=9$, $x_6=11$;

г) $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$, $x_5=-3$, $x_6=1$.

15.21.

а) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=24$, $x_5=120$, $x_6=720$;

б) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-3$. $x_4=3$, $x_5=-3$, $x_6=3$;

в) $x_1=-512$, $x_2=-256$, $x_3=-128$, $x_4=-64$, $x_5=-32$, $x_6=-16$;

г) $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=100$, $x_4=1000$, $x_5=10000$, $x_6=100000$.

15.22.

а) $y_n=3n+4$; $y_{n+1}=3(n+1)+4=3n+4+3>3n+4=y_n$.
Последовательность возрастающая.

б) $y_n = 5n^2 - 3$; $y_{n+1} = 5(n+1)^2 - 3 = 5n^2 - 3 + 10^{n+5} > y_n$
Последовательность возрастающая.

в) $y_n=7n-2$; $y_{n+1}=7(n+1)-2=7n-2+7>7n-2=y_n$.
Последовательность возрастающая.

г) $y_n = 4n^2 - 1$; $y_{n+1} = 4(n+1)^2 - 1 - 4n^2 - 1 + 8n + 4 > y_n$
Последовательность возрастающая.

15.23.

а) $y_n=-2n-3$; $v_{n+1}=-2(n+1)-3=-2n-3-2<-2n-3=y_n$.
Последовательность убывающая.

б) $y_n = -3n^3 + 4$; $y_{n+1} = -3(n+1)^3 + 4 = -3n^3 + 4 - 9n^2 - 9n - 3 < y_n$
Последовательность убывающая.

в) $y_n=4-5n$; $y_{n+1}=4-5(n+1)=4-5n-5<4-5n=y_n$.
Последовательность убывающая.

г) $y_n = -n^3 + 8$; $y_{n+1} = -(n+1)^3 + 8 = -n^3 + 8 - 3n^2 - 3n - 1 < y_n$
Последовательность убывающая.

15.24.

$x_1=4$, $x_2=9$, $x_3=25$, $x_4=49$, $x_5=121$, $x_6=169$, $x_7=289$.

15.25

а) $x_n=(-2)^n$; $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-8$, $x_4=16$, $x_5=-32$;

б) $c_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n$; $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=-2$, $x_5=2$;

в) $b_n=2(-3)^{n-1}$; $b_1=2$, $b_2=-6$, $b_3=18$, $b_4=-54$, $b_5=162$;

г) $d_n=(-2)^n+(-2)^{n+1}$; $d_1=-1$, $d_2=2$, $d_3=-4$, $d_4=8$, $d_5=-16$.

15.26.

а) $y_n=(-1)^n+(-2)^{n+1}$, $y_2=-7$, $y_4=-31$, $y_6=-127$;

б) $x_n=(-2)^{n+1}-(-2)^{n-1}$, $x_2=-8+2=-6$, $x_4=-32+8=-24$, $x_6=-128+32=-96$;

в) $z_n=(-2)^n-(-2)^{n+1}$, $z_2=4+8=12$, $z_4=16+32=48$,
$z_6=164+128=192$ – ответ в задачнике неверен;

г) $w_n=(-1)^{n+1}-(-2)^n$, $w_2=-1-4=-5$, $w_4=-1-16=-17$,
$w_6=-1-64=-65$ – ответ в задачнике неверен.

15.27.

а) $y_n=(-1)^n+2^n$, $y_1=1$, $y_3=7$, $y_5=31$;

б) $x_n=(-2)^n+16$, $x_1=14$, $x_3=8$, $x_5=-16$;

в) $y_n=(-2)^n+4^n$, $y_1=2$, $y_3=56$; $y_5=-996$;

г) $y_n=(-1)^n-1$, $y_1=-2$, $y_3=-2$, $y_5=-2$.

15.28.

а) $x_n=\dfrac{1}{2n-1}$; б) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$; в) $x_n=\dfrac{1}{n^2}$; г) $x_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

15.29.

а) $x_n=(-1)^n\dfrac{2n}{3n-1}$; б) $x_n=\dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; в) $(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{5n}$; г) $(-1)^n\dfrac{n^2}{\sqrt{n(n+1)}}$.

15.30.

$x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_n=2\,(x_{n-2}+x_{n-1})$; $x_3=-10$, $x_4=-24$, $x_5=-68$, $x_6=-184$.

15.31.

а) $x_{n+1}=x_n$, $x_1=2$; б) $x_n=x_{n-1}+2$, $x_1=2$; в) $x_n=x_{n-1}-2$, $x_1=9$; г) $x_n=-x_{n-1}$, $x_1=5$.

15.32.

а) $x_n=3x_{n-1}$, $x_1=2$; б) $x_n=x_{n-1}+7, x_1=1$; в) $x_n=\dfrac{1}{2}x_{n-1}, x_1=\dfrac{1}{2}$; г) $x_n=-3x_{n-1}, x_1=3$;

15.33.

а) 1; 1,7; 1,73; 1,732; б) 2, 1,8;1, 74; 1,733.

15.34.

a_n – последовательность

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=0{,}1+0{,}11+0{,}111+0{,}1111+0{,}11111+0{,}111111+0{,}1111111=$
$=0{,}7654321$.

15.35.

$x_n=\dfrac{n+1}{3n+2}$;

а) $\dfrac{5}{14}$; $\dfrac{5}{14}=\dfrac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 15n+10=14n+14$; $n=4$;

б) $\dfrac{14}{41}$; $\dfrac{14}{41}=\dfrac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 42n+28=41n+41$; $n=13$;

в) $\dfrac{6}{13}$; $\dfrac{6}{13}=\dfrac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 18n+12=13n+13$;

$5n=1$, т. е. $n=\dfrac{1}{5}$, чего, очевидно, быть не может, так как $n\in N$;

г) $\dfrac{8}{23}$; $\dfrac{n+1}{3n+2}=\dfrac{8}{23}$; $23n+23=24n+16$; $n=7$.

15.36.

$a_n(2n-1)(3n+2)$

а) $0=(2n-1)(3n+2)$

$n=\frac{1}{2}$ или $n=-\frac{2}{3}$, чего, очевидно, быть не может, так как $n\in N$.

Такого n не существует, значит 0 – не член последовательности.

б) $24=(2n-1)(3n+2)$

$6n^2+n-26=0$;

$D=1+624=625$; $n_1=\frac{-1+25}{12}=2$; $n_2=\frac{-1-25}{2}<0$ – не подходит, так как n–натуральное.

Итак, n=2. 24 – второй член последовательности.

в) $153=(2n-1)(3n+2)$; $6n^2+n-155=0$;

$D=1+3720=3721=61^2$; $n_1=\frac{-1+61}{12}=5$; $n_2=\frac{-1-61}{12}<0$, не подходит, так как $n\in N$.

Итак, n=5.

153 – пятый член последовательности.

г) $-2=(2n-1)(3n+2)$

Оба множителя в правой части положительны (так как $n\in N$), а левая часть отрицательна. Такого быть не может.

Таких n нет, (–2) – не член последовательности.

15.37.

а) $x_1=3$, $x_n=x_{n-1}+5$; $x_n=3+5(n-1)=5n-2$;

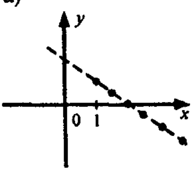
б) $x_1=2$, $x_n=3\cdot x_{n-1}$; $x_n=2\cdot 3^{n-1}$;

в) $x_1=11$, $x_n=x_{n-1}-4$; $x_n=11-4(n-1)=15-4n$;

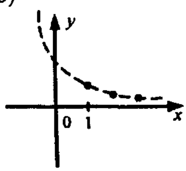
г) $x_1=3$, $x_n=\frac{x_{n-1}}{2}$; $x_n=\frac{3}{2^{(n-1)}}$.

15.38.

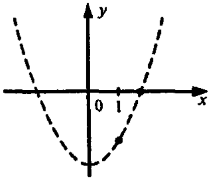
а)



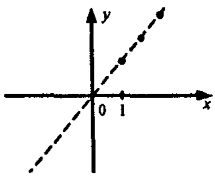
б)



в)



г)



15.39.

а) $x_n=2n-5$, $A=10$; $2n-5>10$; $2n>15$

$n>\frac{15}{2}$; Начиная с n=8;

б) $x_n = 3^{n-1}, A = 30; 3^{n-1} > 30 > 27 = 3^{4-1} \Rightarrow n > 4$
Начиная с $n = 5$.
в) $x_n = n^2 - 27, A = -2; n^2 - 27 > -2 \Rightarrow n^2 > 25 \Rightarrow n > 5$
Начиная с $n = 6$.
г) $x_n=2^{n-5}$, $A=1{,}5$,

$2^{n-5}>1{,}5$, $2^{n-5}>\frac{3}{2}$, $2^{n-4}>3$.

Начиная с n=6.

15.40.

а) $x_n=3-2n$, $A=-9$, $3-2n<-9$, $2n>12$, $n>6$.
Начиная с n=7;
б) $x_n=3^{4-n}$, $A=0{,}5$, $3^{4-n}<0{,}5$. Начиная с n=5.
в) $x_n=2-3n^2$, $A=-25$,

$2-3n^2<-25$, $3n^2<28$, $n^2>\frac{28}{3}$.

Начиная с n=4;
г) $x_n = 2^{5-n}, A = 0{,}75$
$2^{5-n} < 0{,}75 < 1 = 2^{5-5} \Rightarrow n > 5$
Начиная с $n = 6$.

15.41.

а) $b_n=1-\frac{1}{2n}$;

$b_{n+1}=1-\frac{1}{2(n+1)}>1-\frac{1}{2n}=b_n$; $b_{n+1}>b_n$. Последовательность возрастает.

б) $a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$; $a_{n+1}=1-\frac{1}{n+1}>1-\frac{1}{n}=a_n$; $a_{n+1}>a_n$. Последовательност возрастает.

в) $c_n=1-\frac{1}{2^n}$;

$c_{n+1}=1-\frac{1}{2^{n+1}}>1-\frac{1}{2^n}=c_n$; $c_{n+1}>c_n$. Последовательность возрастает.

г) $d_n=\frac{5n}{n+1}=\frac{5n+5-5}{n+1}=5-\frac{5}{n+1}$;

$d_{n+1}=5-\frac{5}{n+2}>5-\frac{5}{n+1}=d_n$; $d_{n+1}>d_n$ Последовательность возрастает.

15.42.

а) $a_n=\frac{1}{2n}$; $a_{n+1}=\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2n}=a_n$; $a_{n+1}<a_n$.

Последовательность убывает.

б) $b_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$; $b_{n+1}=1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}=b_n$; $b_{n+1}<b_n$.

Последовательность убывает.

в) $c_n=1+\frac{1}{3n}$; $a_{n+1}=\frac{1}{3n+3}<\frac{1}{3n}=c_n$; $c_{n+1}<c_n$.

Последовательность убывает.

г) $d_n=\frac{1}{3^n}$; $d_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}<\frac{1}{3^n}=d_n$; $d_{n+1}<d_n$.

Последовательность убывает.

§ 16. Арифметическая прогрессия

16.1.

а) Да, является. б) Да, является.
в) Да, является. г) Нет, не является.

16.2.

а) Да, является. в) Нет, не является.
б) Нет, не является. г) Нет, не является.

16.3.

а) $a_1=3$; $d=-4$; б) $a_1=7$; $d=-3$; в) $a_1=0{,}7$; $d=0{,}2$; г) $a_1=-1$; $d=0{,}1$

16.4.

а) $a_1=3$; $d=7$, $a_1=3$, $a_2=10$, $a_3=17$, $a_4=24$, $a_5=31$, $a_6=38$;
б) $a_1=10$; $d=-2{,}5$, $a_1=10$, $a_2=7{,}5$, $a_3=5$, $a_4=2{,}5$, $a_5=0$, $a_6=-2{,}5$;
в) $a_1=-21$; $d=3$, $a_1=-21$, $a_2=-18$, $a_3=-15$, $a_4=-12$, $a_5=-9$, $a_6=-6$;
г) $a_1=-17{,}5$; $d=-0{,}5$, $a_1=-17{,}5$, $a_2=-18$, $a_3=-18{,}5$, $a_4=-19$, $a_5=-19{,}5$, $a_6=-20$.

16.5.

а) $a_1=-2$; $d=4$, $n=5$; -2; 2; 6; 10; 14;
б) $a_1=1$; $d=-0{,}1$, $n=7$; 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4;
в) $a_1=2$; $d=3$, $n=6$; 2; 5; 8; 11; 14; 17
г) $a_1=-6$; $d=1{,}5$, $n=4$; -6; $-4{,}5$; -3; $-1{,}5$.

16.6.

а) $a_1=\frac{3}{7}$; $d=\frac{1}{7}$, $n=5$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$; 1;

б) $a_1=13$; $d=-\sqrt{5}$, $n=4$; 13; $13-\sqrt{5}$; $13-2\sqrt{5}$; $13-3\sqrt{5}$;
в) $a_1=7{,}5$; $d=0{,}5$, $n=4$; 7,5; 8; 8,5; 9;
г) $a_1=-1{,}7$; $d=0{,}15$, $n=5$; $-1{,}7$; $-1{,}55$; $-1{,}4$; $-1{,}25$; $-1{,}1$.

16.7.

а) $d=a_2-a_1=3-1=2$; $a_{10}=a_1+9d=1+9\cdot2=19$;
б) $d=a_2-a_1=6+\sqrt{5}-\sqrt{5}=6$; $a_{10}=a_1+9d=\sqrt{5}+9\cdot6=54+\sqrt{5}$;
в) $d=a_2-a_1=90-100=-10$; $a_{10}=a_1+9d=100+9\cdot(-10)=10$;
г) $d=a_2-a_1=3-\sqrt{2}-3=-\sqrt{2}$; $a_{10}=a_1+9d=3+9\left(-\sqrt{2}\right)=3-9\sqrt{2}$.

16.8.

Такие натуральные числа, представляются в виде $n=3+5k$, где $k=1, 2, 3$ ... , так что они составляют арифметическую прогрессию: $a_1=3$; $d=5$.

Опечатка в ответе задачника.

16.9

Такие натуральные числа, представляются в виде $n=11k$, где $k=1, 2, 3 \ldots$, так что они составляют арифметическую прогрессию: $a_1=11$; $d=11$.

16.10.

Данные числа не являются арифметической прогрессией, так как $a_2-a_1=3^2-3^1$, а $a_3-a_2=3^3-3^2=18$, и $6\neq18$.

16.11.

а) $x_1=4$; $d=3$; б) не является арифметической прогрессией; в) не является арифметической прогрессией; г) $x_1=1$; $d=4$.

16.12.

а) $a_n = 2n + 1$; $a_n = (n-1)\cdot 2 + 3 = (n-1)\cdot d + a_1$, где $a_1 = 3$ и $d = 2$;

б) $a_n = 0{,}5n - 4$; $a_n = (n-1)\cdot 0{,}5 - 3{,}5 = (n-1)\cdot d + a_1$, где $a_1=-3{,}5$ и $d = 0{,}5$;

в) $a_n = -3n + 1$; $a_n = (n-1)\cdot(-3) - 2=(n-1)\cdot d + a_1$, где $a_1 = -2$ и $d = -3$;

г) $a_n = -\frac{1}{3}n - 1$; $a_n = (n-1)\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3} = (n-1)\cdot d + a_1$, где $a_1 = -\frac{4}{3}$ и $d = -\frac{1}{3}$

16.13.

а) $a_n = 3n-2 \Rightarrow a_1 = 1$ и $d = a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$

б) $a_n = -1 - \frac{n}{3} \Rightarrow a_1 = -1\frac{1}{3}$ и $d = a_{n+1} - a_n = -1 - \frac{n+1}{3} + 1 + \frac{n}{3} = -\frac{1}{3}$

в) $a_n = -0{,}1n + 3 \Rightarrow a_1 = 2{,}9$ и $d = a_{n+1} - a_n = -0{,}1(n+1) + 3 + 0{,}1n - 3 = -0{,}1$

г) $a_n = 5 - 2n \Rightarrow a_1 = 3$ и $d = a_{n+1} - a_n = 5 - 2(n+1) - 5 + 2n = -2$

16.14.

а) $a_n=3n-1$; б) $a_n=n-0{,}5$; в) $a_n=-2n+9$; г) $a_n=-\frac{n}{7}-\frac{6}{7}$.

16.15.

а) $a_n=-6n+10$; б) $a_n=-0{,}2n-0{,}5$; в) $a_n=5n-12$; г) $a_n=\sqrt{5}\,n-3\sqrt{5}$.

16.16.

$a_6=a_1+5d=4+5\cdot3=19$; б) $a_{15}=a_1+14d=-15+14(-5)=-85$;

в) $a_{17}=a_1+16d=-12+16\cdot2=20$; г) $a_9=a_1+8d=101+8\cdot\frac{1}{2}=105$.

16.17.

а) $a_5=a_1+4d$, $d=\frac{a_5-a_1}{4}=\frac{40-12}{4}=7$;

б) $a_{16}=a_6+10d$, $d=\frac{a_{16}-a_6}{10}=\frac{30-(-30)}{10}=6$;

в) $a_{11}=a_1+10d$, $d=\dfrac{a_{11}-a_1}{10}=\dfrac{-28-(-8)}{10}=-2$; опечатка в ответе задачника

г) $a_{36}=a_{11}+25d$, $d=\dfrac{a_{36}-a_{11}}{25}=\dfrac{54,6-4,6}{25}=2$.

16.18.

а) $a_7=a_1+6d$, $a_1=a_7-6d=9-6\cdot 2=-3$;

б) $a_{37}=a_1+36d$, $a_1=a_{37}-36d=-69-36(-2,5)=21$;

в) $a_{26}=a_1+25d$, $a_1=a_{26}-25d=-71-25(-3)=4$;

г) $a_{14}=a_1+13d$, $a_1=a_{14}-13d=-6\sqrt{5}-13(-\sqrt{5})=7\sqrt{5}$.

16.19.

а) У данной прогрессии $a_1=9$ и $d=2$, тогда если $a_n=29$, то $29=9+2(n-1)$, $29=7+2n$, $n=11$.

б) $a_1=3$ $d=4$; $43=3+4(n-1) \Leftrightarrow 43=4n-1 \Leftrightarrow n=11$

Да, является 11–ым членом.

16.20.

а) $a_1=-1,5$; $d=0,5$, так что $4,5=a_1+12d$, то есть 4,5 - 13-й член прогрессии;

б) $a_1=7,5$; $d=3,5$, так что если $43,5=a_1+nd$, то $n=\dfrac{43,5-a_1}{d}=\dfrac{36}{3,5}=\dfrac{72}{7}$, так что 43,5 - не является членом прогрессии.

16.21.

а) $41=-7+12\cdot 4=a_1+12d$, так что 41 - 13-й член данной прогрессии.

б) $-33=-3+5\cdot(-6)=a_1+5d$, так что -33 – 6-ой член

16.22.

а) 23; 19; 15. б) 16; 22; 28.

16.23.

а) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=1+10\cdot 2=21$;

б) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-1\dfrac{1}{2}+20\cdot(-3,75)=-76,5$;

в) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=\dfrac{2}{3}+16\cdot\dfrac{3}{4}=12\dfrac{2}{3}$;

г) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=0,2+12\cdot\dfrac{1}{3}=4,2$.

16.24.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$; $a_1=a_n-(n-1)d$:

а) $a_1=-10-14\cdot 2=-38$; б) $a_1=10\dfrac{1}{2}-6\cdot\dfrac{1}{4}=9$;

в) $a_1=9,5-16\cdot(-0,6)=19,1$; г) $a_1=-2,94-14\cdot(-0,3)=1,26$.

16.25.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, $d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$:

а) $d=\frac{39-3}{11-1}=3{,}6$;

б) $d=\frac{-18{,}4-(-0{,}2)}{15-1}=-1{,}3$;

в) $d=\frac{1\frac{1}{4}-5\frac{5}{8}}{36-1}=-\frac{1}{8}$;

г) $d=\frac{0-3{,}6}{37-1}=-0{,}1$.

16.26.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, так что $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$;

а) $n=\frac{(67-1)\cdot 3}{2}+1=100$;

б) $n=\frac{5-0}{0{,}5}+1=11$;

в) $n=\frac{10{,}5-(-6)}{0{,}75}+1=23$;

г) $n=\frac{100-(-4{,}5)}{5{,}5}+1=20$.

16.27.

$b=a_1+(n-1)d$, $n=\frac{b-a_1}{d}+1$, если b - является членом прогрессии:

а) $n=\frac{21{,}2-5}{0{,}3}+1=55$;

б) $n=\frac{0{,}65-3}{-0{,}35}+1\approx 7{,}7$ - так b - не является членом прогрессии;

в) $n=\frac{44-(-7)}{5{,}1}+1=11$;

г) $n=\frac{-0{,}01-(-0{,}13)}{0{,}02}+1=7$.

16.28.

а) $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_n=2+(n-1)(-0{,}1)=2{,}1-0{,}1n$, $a_n<0$ при $2{,}1-0{,}1n<0$, $n>21$, $n=22$;

б) $a_n=16{,}3-0{,}4n$, $a_n<0{,}9$, при $16{,}3-0{,}4n<0{,}9$, $n>38{,}5$, $n=39$;

в) $a_n=120-10n$, $a_n<15$, при $120-10n<15$, $n>10{,}5$, $n=11$;

г) $a_n=-0{,}25-0{,}75n$, $a_n<-16{,}3$, при $-0{,}25-0{,}75n<-16{,}3$, $n>21{,}4$, $n=22$.

16.29.

а) $a_n=-12+(n-1)\cdot 3=-15+3n$, $a_n>141$, при $-15+3n>141$, $n>52$, $n=53$;

б) $a_n=1{,}8+2{,}2n$, $a_n>14{,}7$, при $1{,}8+2{,}2n>14{,}7$, $n>\frac{129}{22}$, $n=6$;

в) $a_n=-10+5{,}5n$, $a_n>0$, при $-10+5{,}5n>0$, $n>\frac{20}{11}$, $n=2$;

г) $a_n=13{,}8+0{,}7n$, $a_n>22{,}9$, при $13{,}8+0{,}7n>22{,}9$ $n>13$, $n=14$.

16.30.

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 14 \\ a_2 a_4 = 45 \end{cases}, \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 14 \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 45 \end{cases}, \begin{cases} a_1 + 2d = 7 \\ (7-d)(7+d) = 45 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_1 = 7 - 2d \\ 49 - d^2 = 45 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 7 - 2d \\ d^2 = 4 \end{cases},$$

так как $d>0$ по условию, то $d=2$.

Тогда $a_6=a_1+5d=3+10=13$.

16.31.

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 18 \\ a_2 \cdot a_3 = 21 \end{cases}, \begin{cases} a_2 + a_2 + 3d = 17 \\ a_2(a_2 + d) = 21 \end{cases}, \begin{cases} 2a_2 + 3d = 17 \\ a_2(a_2 + d) = 21 \end{cases},$$

так как a_2 — натуральное число, то $a_2=3$ и $d=4$, тогда $a_1=-1$ и прогрессия: $-1, 3, 7, 11, 15$ ...

16.32.

$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -21 \\ a_2 + a_3 + a_4 = -6 \end{cases}$, и a_1, a_2, a_3, a_4 - арифметическая прогрессия, так что

$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = -21 \\ a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = -6 \end{cases}, \begin{cases} a_1 + d = -7 \\ a_1 + 2d = -2 \end{cases}$, $a_1=-12$, $d=5$,

эти числа: -12, -7, -2, 3. (опечатка в ответе задачника)

16.33.

$S_n=\dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

а) $S_{30}=\dfrac{-1+86}{2} \cdot 30=1275$; б) $S_{20}=\dfrac{41-16}{2} \cdot 20=250$;

в) $S_{10}=\dfrac{-13-5}{2} \cdot 10=-90$; г) $S_{25}=\dfrac{17+31}{2} \cdot 25=600$.

16.34.

а) $S_{50}=\dfrac{2+147}{2} \cdot 50=3725$; б) $S_{50}=\dfrac{0,5-97,5}{2} \cdot 50=-2425$;

в) $S_{50}=\dfrac{-10+137}{2} \cdot 50=3175$; г) $S_{50}=\dfrac{-1,7-8,1}{2} \cdot 50=245$.

16.35.

$S_n=\dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n=\dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, $S_{100}=100a_1+4950d$:

а) $S_{100}=100 \cdot (-12)+4950 \cdot 2=8700$; б) $S_{100}=100 \cdot (1,5)+4950 \cdot 0,5=2625$;

в) $S_{100}=100 \cdot 73+4950(-1)=2350$; г) $S_{100}=100 \cdot (-7,3)+4950 \cdot (1,1)=-6175$.

16.36. $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$:

а) $S_{16}=\frac{-3\cdot 2+15\cdot 1,5}{2}\cdot 16=132$;

б) $S_{25}=\frac{2\cdot 121+24\cdot(-3,1)}{2}\cdot 25=2095$;

в) $S_{40}=\frac{2\cdot(-2,5)+39\cdot(-0,5)}{2}\cdot 40=-490$;

г) $S_{100}=\frac{2\cdot 4,5+99\cdot 0,4}{2}\cdot 100=2430$.

16.37.

$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=15(a_1+a_{30})$:

а) $S_{30}=15(4+3+4\cdot 30+3)=1950$;

б) $S_{30}=15(0,5-3+0,5\cdot 30-3)=142,5$;

в) $S_{30}=15(-2+8-2\cdot 30+8)=-690$;

г) $S_{30}=15(-2,5-6-2,5\cdot 30-6)=1342,5$

16.38.

a_1	d	a_n	n	S_n
7	4	55	13	403
2	2	80	40	1640
56	-3	26	11	451
2	5	87	18	801
9	2	21	7	105

16.39.

$a_4=10$, $a_{10}=19$, $a_{10}-a_4=6d=9$, $d=1,5$, $a_1=a_4-3d=10-3\cdot 1,5=5,5$,

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=\frac{5,5+19}{2}\cdot 10=122,5$.

16.40.

а) $a_{12}=\frac{a_{11}+a_{13}}{2}=\frac{122}{2}=61$;

б) $a_{18}+a_{20}=2\cdot a_{19}=2\cdot 5=10$;

в) $a_{16}=\frac{a_{15}+a_{17}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$;

г) $a_6+a_8=2a_7=2\cdot 4=8$.

16.41.

а) $a_2+a_{19}=a_1+a_{20}=64$;

б) $a_1+a_{19}=a_3+a_{17}=-40$;

в) $a_1+a_{16}=a_2+a_{15}=25$;

г) $a_{10}+a_{16}=a_1+a_{25}=-10$.

16.42.

а) $a_{10}+a_{20}=\frac{a_9+a_{11}}{2}+\frac{a_{19}+a_{21}}{2}=\frac{44}{2}+\frac{104}{2}=74$.

б) $a_{15}=\frac{a_{14}+a_{16}}{2}=-10$ $a_{30}=\frac{a_{29}+a_{31}}{2}=20$; $a_{15}+a_{30}=10$.

16.43.

$a_{15}+a_{30}=\frac{a_{14}+a_{16}}{2}+\frac{a_{29}+a_{31}}{2}=\frac{-20}{2}+\frac{40}{2}=10.$

16.44.

Если x, 2x-1,5x - члены прогрессии, то $\frac{x+5x}{2}=2x-1$, то есть $3x=2x-1$, $x=-1$

16.45.

а) $a_1=7$ $d=7$

Искомое число есть $S_{14}-7$ (т.к. 7 не двузначно) =

$=\frac{14+7\cdot 13}{2}\cdot 14-7=7\cdot(14+7\cdot 13-1)=7\cdot 104=728.$

б) Если 2y+5, y, 3y-8 - члены прогрессии, то

$\frac{2y+5+3y-8}{2}=y$, $5y-3=2y$, $y=1$.

16.46.

а) $a_1=8\cdot 13=104$ $d=8$ $a_n=8\cdot 124=992$ $n-?$

1000:8=125

$n=124-12=112$

Искомое число есть $S_{112}=\frac{208+8\cdot 111}{2}\cdot 112=1096\cdot 66=61376$;

б) $a_i=12q+5$; $a_1=12\cdot 8+5=101$ $d=12$ $a_n=82\cdot 12+5=989$

$n-?$

$n=82-7=75$. Искомое число есть $S_{75}=\frac{202+12\cdot 74}{2}\cdot 75=545\cdot 75=40875$

16.47.

а) $a_n=-\frac{n+1}{4}$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{4}$;

б) $a_n=\frac{2\sqrt{3}-5n}{3}$, $a_1=\frac{2\sqrt{3}-5}{3}$, $d=-\frac{5}{3}$;

в) $a_n=\frac{3n-2}{5}$, $a_1=\frac{1}{5}$, $d=\frac{3}{5}$;

г) $a_n=\frac{\sqrt{7}n-5}{\sqrt{5}}$, $a_1=\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{5}}$, $d=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

16.48.

а) $d_1=\frac{a_{12}-a_5}{7}=\frac{29-15}{7}=2$, $a_1=a_5-4d=15-4\cdot 2=7$,

$a_n=a_1+(n-1)d=7+(n-1)\cdot 2=2n+5$;

б) $d=\frac{a_{19}-a_9}{10}=\frac{-45-(-30)}{10}=-1{,}5$, $a_1=a_9-8d=-30-8(-1{,}5)=-18$.

$a_n=a_1+(n-1)d=-18+(n-1)(-1{,}5)=-1{,}5n-16{,}5$;

в) $d=\frac{a_{15}-a_7}{8}=\frac{40-20}{8}=2{,}5$, $a_1=a_7-6d=20-6\cdot 2{,}5=5$,

$a_n=a_1+(n-1)d=5+(n-1)\cdot 2{,}5=2{,}5n+2{,}5$;

г) d=$\frac{a_{16}-a_5}{11}=\frac{-7,5-0,2}{11}$=-0,7, $a_1=a_5$-4d=-0,2–4(–0,7)=2,6,

$a_n=a_1+(n-1)d=2,6+(n-1)(-0,7)=-0,7n+3,3$.

Опечатка в ответе задачника.

16.49.

а) d=$\frac{a_9-a_7}{2}=\frac{8-(-2)}{2}$=5, $a_8=\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{8+(-2)}{2}$=3;

б) $a_8=\frac{a_9+a_7}{2}=\frac{4+(-4)}{2}$=0, d=$a_9-a_8$=-4;

в) $a_8=\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{-7+(-1)}{2}$=-4, d=$a_9-a_8$=-1-(-4)=3;

г) $a_8=\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{-0,9+(-0,7)}{2}$=-0,8, d=$a_8-a_7$=-0,8-(-0,7)=-0,1.

16.50.

а) a_1=-8, a_4=-35, тогда d=$\frac{a_4+a_1}{3}=\frac{-35-(-8)}{3}$=-9 и

$a_2=a_1+d$=-17, $a_3=a_4-d$=-26. -8, -17, -26, -35, d=-9.

б) $a_1=-6$ $a_4=-15$; $d=\frac{a_4-a_1}{3}=-3$ $a_2=a_1+d=-9$, $a_3=-12$; –6, –9, –12, –15.

16.51

$a_n=a_1+(n-1)d$:

а) $a_7=-\sqrt{2}+6\cdot(1+\sqrt{2})=5\sqrt{2}+6$;

б) $a_{15}=3-\sqrt{5}+14\cdot2\sqrt{5}=27\sqrt{5}+3$;

в) $a_{12}=9\sqrt{3}-2+11\cdot(2-\sqrt{3})=20-2\sqrt{3}$;

г) $a_9=\frac{5\sqrt{3}-7}{3}-8\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{3}=3-\sqrt{3}$.

16.52.

$a_1=a_n-(n-1)d$:

а) $a_1=10\sqrt{3}-4-23\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{15-3\sqrt{3}}{2}$;

б) $a_1=28+27q-27(1+q)=1$;

в) $a_1=2\sqrt{3}+5-20\frac{\sqrt{3}}{2}=5-8\sqrt{3}$;

г) $a_1=l-21(1-3l)=64l-21$.

16.53.

d=$\frac{a_n-a_1}{n-1}$:

а) d=$\frac{-2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}-3}{2\cdot17}=-\frac{2\sqrt{3}}{17}$;

б) d=$\frac{m-5-3+7m}{8}$=m-1,

в) d=$\frac{0-\sqrt{5}+1}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{5}$;

г) d=$\frac{2p+3-13+8p}{10}$=p-1.

16.54.

$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$:

а) $n=\frac{6-\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}+1=7$; б) $n=\frac{13\sqrt{2}-2-5+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}+1=8$;

в) $n=\frac{13-5\sqrt{5}-5+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}+1=5$; г) $n=\frac{1-\frac{5\sqrt{3}-7}{3}}{-\frac{\sqrt{3}-2}{3}}+1=6$.

16.55.

а) 13-0,4n=4,6, n=21;

б) 3n-5,7=69,4, $n=\frac{75{,}1}{3}$, так что b — не член прогрессии;

в) 5n-104=21, n=25;

г) 21,3-1,7n=4,3, n=10.

16.56.

а) $a_n<-41$ при $12-3n<-41$, $n>\frac{53}{3}$, n=18;

б) $a_n<-7$ при $3\sqrt{3}-n\sqrt{3}<-7$, $n>3+\frac{7}{\sqrt{3}}$, n=8;

в) $a_n<10$ при $117-5{,}5n<10$, $n<\frac{107}{5{,}5}$, n=20;

г) $a_n<-1$ при $15\sqrt{2}-n(\sqrt{2}-1)<-1$, $n>\frac{15\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, n=54.

16.57.

а) $a_n>\sqrt{3}$ при $7n-121>\sqrt{3}$, $n>\frac{121+\sqrt{3}}{7}$, n=18;

б) $a_n>21$ при $n\sqrt{2}-4\sqrt{2}>21$, $n>\frac{21+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, n=19;

в) $a_n>2+3\sqrt{5}$ при $5n-17{,}7>2+3\sqrt{5}$, $n>\frac{19{,}7+3\sqrt{5}}{5}$, n=6;

г) $a_n>5$ при $n(\sqrt{5}-1)-3\sqrt{5}>5$, $n>\frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$, n=10.

16.58.

$a_n=6n-306$:

а) $a_n>-12$ при $6n-306>-12$, n>49, n=50;

б) $a_n>0$ при $6n-306>0$, n>51, n=52;

в) $a_n \geq 0$ при $6n-306 \geq 300$, $n \geq 101$, $n=101$;

г) $a_n > -6$ при $6n-306 > -6$, $n > 50$, $n=51$.

16.59.

а) Найдем сумму чисел $\vdots 7$. $a_1=15\cdot 7=105$ $d=7$ $a_n=142\cdot 7=994$ $n-?$

$n=142-14=128$; $A = S_{128} = \dfrac{210+127\cdot 7}{2}\cdot 128 = 1099\cdot 64 = 70336$

Из них делятся на 91 числа: $b_1=2\cdot 91=182$ $d=91$ $b_n=91\cdot 10=910$ $n-?$

$n=10-1=9$; $B = S_9 = \dfrac{2\cdot 182+91\cdot 8}{2}\cdot 9 = 546\cdot 9 = 4914$

Искомое число есть $A-B=65422$;

б) Искомое число есть $S_{999}-S_{99}-B$

$S_{1000} = \dfrac{2+998}{2}\cdot 999 = 999\cdot 500$; $S_{99} = \dfrac{2+98}{2}\cdot 99 = 99\cdot 50$

499500–4950–4914=489636.

16.60.

$$\begin{cases} \dfrac{a_9}{a_2} = 5 \\ \dfrac{a_{13}}{a_6} = 2 + \dfrac{5}{a_6} \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{a_1+8d}{a_1+d} = 5 \\ \dfrac{a_{13}-5}{a_1+d} = 2 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{a_1+8d}{a_1+d} = 5 \\ \dfrac{a_1+12d-5}{a_1+d} = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_1+8d = 5a_1+5d \\ a_1+12d-5 = 2a_1+10d \end{cases}, \begin{cases} 4a_1 = 3d \\ a_1-2d+5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = 3 \end{cases}.$$

16.61.

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4 = 16 \\ a_1-a_3 = 4 \end{cases}, \begin{cases} 4a_1+6d = 16 \\ -2d = 4 \end{cases}, \begin{cases} d = -2 \\ a_1 = 7 \end{cases}.$$

$a_1=7$, $a_2=5$, $a_3=3$, $a_4=1$. Искомое число: 1357.

16.62.

$a_7=-100$, $a_9=-78$. Тогда $d = \dfrac{a_9-a_7}{2} = \dfrac{-78+100}{2} = 11$

и $a_{15}=a_7+8d=-100+8\cdot 11=-12$.

Далее $a_1=a_7-6\cdot d=-100-6\cdot 11=-166$, $a_{20}=a_{15}+5d=-12+5\cdot 11=43$

Так что $S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\dfrac{-166+43}{2}\cdot 20=-1230$.

16.63.

a_k — число штрафных очков за k-й промах; $a_1=1$, $a_2=1{,}5$, $a_3=2$, ...

Известно, что $S_n=7$, тогда $\dfrac{2\cdot a_1+(n-1)}{2}\cdot n=7$,

$n\cdot(2+0{,}5(n-1))=14$; $0{,}5n^2+1{,}5n-14=0$, $n^2+3n-28=0$, $n=4$ (так как $n>0$).

Так что стрелок совершил 4 промаха, а значит попал в цель 21 раз.

16.64.

a_k — число капель, принятых в k-ый день.

$a_1 = 5, a_2 = 10, ..., a_n = 40, a_{n+1} = 40, a_{n+3} = 35, a_{n+4} = 30, .., a_m = 5$

$n = \frac{a_n - a_1}{5} + 1 = 8$. Тогда $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, ..., $a_8 = 40$, $a_9 = 40$, $a_{10} = 40$, $a_{11} = 35$, ..., $a_m = 5$.

$m = 10 + \frac{a_m - a_{10}}{-5} = 17$

Тогда общее число капель

$S = a_1 + a_2 + ... + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + ... + a_{18} = 2(a_1 + ... + a_7) + 3 \cdot 40 =$
$= (a_1 + a_7)^7 + 3 \cdot 40 = 7 \cdot 40 + 3 \cdot 40 = 400$

Больному нужно купить 2 пузырька с каплями.

16.65.

a_k — количество сантиметров, пройденное за k-ю минуту.

a_1=30, a_2=35, a_3=40, ...; S_n=525, тогда $\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 525$,

$(60+5(n-1)) \cdot n=1050$, $5n^2+55n-1050=0$, $n^2+11n-210=0$, $n=10$ (так как $n>0$).

Так что за 10 минут улитка достигнет вершины дерева.

16.66.

a_k - количество метров, пройденных за k-й день.

a_1=1400, a_2=1300, a_3=1200, ...; S_n=5000, тогда $\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 5000$,

$n(2800+(n-1)(-100))=10000$, $100n^2-2900n+10000=0$,

$n^2-29n+100=0$, $n=4$ (так как $4<25$).

Так что за 4 дня альпинисты покорили высоту.

16.67.

$x_1 = a_1, x_2 = a_1 + d, x_3 = a_1 + 2d$

$3(x_1 + x_2 + x_3) = 234 \Rightarrow 3(a_1 + d) = 78$

$\Rightarrow x_2 = a_1 + d = 26$

Ответ: $x_2 = 26$.

16.68.

а) –473

б) Если $4x + 6$, $\sqrt{5-4x}$, $-x - 1$ образуют арифметическую прогрессию, то $\frac{4x+6-x-1}{2} = \sqrt{5-4x}$, $3x+5 = 2\sqrt{5-4x}$,

$9x^2 + 30x + 25 = 20 - 16x$, $9x^2 + 46x + 5 = 0$, $x = -\frac{1}{9}$ и $x = -5$, но $3x + 5 > 0$, так что $x = -\frac{1}{9}$.

16.69.

Если $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ образуют прогрессию, то

а) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{1}{b}$, $\frac{a+c}{2ac}=\frac{1}{b}$, ab+bc=2ac, ab+bc+ac=3ac;

б) ab+bc=2ac, $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}=2$. Что и требовалось доказать.

16.70.

Если $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{c+b}$ - образуют арифметическую прогрессию,

то $\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}}{2}=\frac{1}{a+c}$, $\frac{c+b+a+b}{2(a+b)(c+b)}=\frac{1}{a+c}$,

(2b+a+c)(a+c)=2(a+b)(b+c), $2ab+a^2+ac+2bc+ac+c^2=2ab+2ac+2b^2+2bc$, то есть $\frac{a^2+c^2}{2}=b^2$, так что a^2, b^2, c^2 - также образуют прогрессию, что и требовалось доказать.

§ 17. Геометрическая прогрессия

17.1.

а) $b_1=-1$, $b_2=-3$, $b_3=-9$, $b_4=-27$, $b_5=-81$, $b_6=-243$;

б) $b_1=-2$, $b_2=1$, $b_3=-\frac{1}{2}$, $b_4=\frac{1}{4}$, $b_5=-\frac{1}{8}$, $b_6=\frac{1}{16}$;

в) $b_1=-1$, $b_2=3$, $b_3=-9$, $b_4=27$, $b_5=-81$, $b_6=243$;

г) $b_1=20$, $b_2=20\sqrt{5}$, $b_3=100$, $b_4=100\sqrt{5}$, $b_5=500$, $b_6=500\sqrt{5}$

17.2.

$b_1=3$, $b_2=3^2=9$, $b_3=3^3=27$, ...

Это геометрическая прогрессия со знаменателем q=3.

17.3.

$b_1=\frac{1}{10}$, $b_2=\frac{1}{100}$, $b_3=\frac{1}{1000}$, ...

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{10}$

17.4. а), в) и г).

17.5. а), в) и г).

17.6. а) и г) - возрастающие, в) - убывающая.

17.7. а) - возрастающая, б) - возрастоющая.

17.8.

а) $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $q=\frac{3}{4}$; в) $q=\frac{1}{3}$; г) $q=\frac{7}{2}$.

17.9.

а) $b_5=b_1\cdot q^4$; б) $b_{41}=b_1\cdot q^{40}$; в) $b_k=b_1\cdot q^{k-1}$; г) $b_{2n}=b_1\cdot q^{2n-1}$.

17.10.

а) $b_4=b_1\cdot q^3=128\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-16$; б) $b_5=b_1\cdot q^4=270\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{10}{3}$;

в) $b_8=b_1\cdot q^7=\frac{1}{5}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^7=25\sqrt{5}$; г) $b_6=b_1\cdot q^5=625\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^5=-\frac{1}{5}$

17.11.

а) $b_4=b_1\cdot q^3=-2\cdot(-\frac{3}{2})^3=\frac{27}{4}$; б) $b_5=b_1\cdot q^4=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2})^4=4\sqrt{6}$;

в) $b_4=b_1\cdot q^3=3\cdot(-\frac{3}{4})^3=-\frac{81}{64}$; г) $b_6=b_1\cdot q^5=5\sqrt{5}\cdot(5^{-\frac{1}{2}})^5=5^{-1}=\frac{1}{5}$.

17.12.

а) $q=b_3:b_2=(-32):8=-4$; $b_1=b_2:q=-2$;

б) $q=b_5:b_4=(-\frac{1}{2}):1=-\frac{1}{2}$; $b_1=b_4:q^3=1:(-\frac{1}{2})^3=-8$;

в) $q=b_3:b_2=\frac{3}{4}:\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$; $b_1=b_2:q=3$;

г) $q=b_6:b_5=3:6=\frac{1}{2}$; $b_1=b_5:q^4=6:(\frac{1}{2})^4=96$.

17.13.

а) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$; б) $b_n=-2{,}5\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$;

в) $b_n=2{,}5\cdot(-0{,}2)^{n-1}$; г) $b_n=3\sqrt{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$.

17.14.

а) $b_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; б) $b_n=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$;

в) $b_n=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; г) $b_n=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}=\left(\sqrt{2}\right)^n$.

17.15.

а) $b_n=5^{n-1}$, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, $b_1=1$, $q=5$;

б) $b_n=\frac{3}{5}\cdot 2^n$, $b_n=\frac{6}{5}\cdot 2^{n-1}$, $b_1=\frac{6}{5}$, $q=2$;

в) $b_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$, $b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{1}{4}$;

г) $b_n=\frac{5}{2^{n+1}}$, $b_n=\frac{5}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}$, $b_1=\frac{5}{4}$, $q=\frac{1}{2}$.

17.16.

а) $b_1=18$, $b_3=2$, тогда $b_2^2=b_1\cdot b_3=36$ и так как $b_2>0$ (по условию), то $b_2=6$. То есть 18, 6, 2.

б) $b_1=16$, $b_3=64$, тогда $b_2^2=b_1\cdot b_3=1024$ и т. к. $b_2<0$, то $b_2=-32$

17.17.

а) $b_n=\frac{1}{6}\cdot 0,1^{2n+1}$, $B=\frac{1}{600}$

$\frac{1}{6}\cdot 0,1^{2n+1}=\frac{1}{600}\Leftrightarrow 0,1^{2n+1}=0,1^2\Leftrightarrow 2n+1=2\Leftrightarrow n=0,5$, чего не может быть. B не является членом геометрической прогрессии (b_n).

б) $b_n=0,002\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{n-4}$, $B=0,25$

$0,002\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{n-4}=0,25\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}\right)^{n-4}=\left(\sqrt{5}\right)^6\Leftrightarrow n=10$

$B=b_{10}$

в) $b_n=\frac{7}{9}\cdot 3^{n-8}$, $B=63$

$\frac{7}{9}\cdot 3^{n-8}=63\Leftrightarrow 3^{n-8}=3^4\Leftrightarrow n=12$,

$B=b_{12}$

г) $b_n=\frac{6}{7}\cdot 0,5^{3n+5}$, $B=\frac{3}{14}$

$\frac{6}{7}\cdot 0,5^{3n+5}=\frac{3}{14}\Leftrightarrow 0,5^{3n+5}=0,5^2\Leftrightarrow 3n+5=2\Leftrightarrow n=-1$, чего не может быть. B не является членом геометрической прогрессии.

17.18.

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$:

а) $b_{10}=b_1\cdot q^9=1\cdot 3^9=3^9$;

б) $b_6=b_1\cdot q^5=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^5=-\frac{1}{486}$;

в) $b_5=b_1\cdot q^4=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2}$;

г) $b_5=b_1\cdot q^4=2,5\cdot(1,5)^4=\frac{405}{32}$.

17.19.

а) $b_1=7$, $b_4=448$

$b_4=b_1q^3\Rightarrow q=\sqrt[3]{\frac{b_4}{b_1}}=\sqrt[3]{64}=4$

б) $b_1=-\sqrt{2}$, $b_8=16$

$b_8=b_1q^7\Rightarrow q=\sqrt[7]{\frac{b_8}{b_1}}=\sqrt[7]{-\frac{16}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$

в) $b_1 = 35,\ b_4 = \frac{5}{49}$

$b_4 = b_1q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{b_4}{b_1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{343}} = \frac{1}{7}$

г) $b_1 = \frac{9}{5},\ b_6 = -\frac{1}{135}$

$b_6 = b_1q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{b_6}{b_1}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{243}} = -\frac{1}{3}$

17.20.

а) $b_1 = 5, b_9 = 1280$

$b_9 = b_1 \cdot q^8 \Rightarrow q = \sqrt[8]{\frac{b_9}{b_1}} = \sqrt[8]{256} = 2$

б) $b_1 = 100,\ b_5 = \frac{4}{25}$

$b_5 = b_1 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{5}$

в) $b_1 = 2, b_7 = 1458$

$b_7 = b_1 \cdot q^6 \Rightarrow q = \sqrt[6]{\frac{b_7}{b_1}} = \sqrt[6]{729} = 3$

г) $b_1 = 72, b_3 = 2$

$b_3 = b_1q^2 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{b_3}{b_1}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$

17.21.

а) $\frac{1}{729} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}, n = 6;$

б) $2 = 256\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{128}, n = 8;$

в) $4\cdot 10^{-3} = 2{,}5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, n = 5,\ \frac{1}{625} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, n=5;

г) $-2401 = \frac{1}{343}\cdot(-7)^{n-1}$, $(-7)^{n-1} = -823543$, n=8.

17.22.

а) $q^2 = \frac{b_7}{b_5} = \frac{192}{48} = 4$, $q>0$, так что $q=2$ и $b_1=b_5:q^4=48:16=3$;

б) $q^3=b_5:b_2=\frac{81}{24}=\frac{27}{8}$, $q=\frac{3}{2}$ и $b_1=b_2:q=24:\frac{3}{2}=16$;

в) $q^3=b_6:b_3=-\frac{13}{32}:\frac{13}{4}=-\frac{1}{8}$, $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=b_3:q^2=\frac{13}{4}:\frac{1}{4}=13$;

г) $q^2=b_5:b_3=48:12=4$, $q<0$, так что $q=-2$ и $b_1=b_3:q^2=12:4=3$.

17.23.

$b_1=1$, $b_4=\frac{1}{8}$, тогда $q=\sqrt[3]{b_4:b_1}=\frac{1}{2}$ и $b_2=\frac{1}{2}$, $b_3=\frac{1}{4}$. То есть $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

17.24.

P_k - периметр k-го вписанного треугольника

$P_1=3\cdot 32=96$, $P_2=3\cdot\frac{32}{2}=48$, $P_3=24$, ...

Так что P_1, P_2, P_3 ... - геометрическая прогрессия. $P_n=96\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$.

17.25.

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

а) $S_4=\frac{1(2^4-1)}{2-1}=15$; б) $S_4=\frac{3(4^4-1)}{4-1}=255$,

в) $S_4=\frac{1\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{80}{81}=\frac{40}{27}$; г) $S_4=\frac{4\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^4-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{4\cdot2\cdot15}{3\cdot16}=\frac{5}{2}$

17.26.

а) $S_6=\frac{18\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{18\cdot3\cdot728}{2\cdot729}=\frac{728}{27}$

б) $S_6=\frac{15\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6-1\right)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{15\cdot3\cdot665}{729}=\frac{3325}{81}$

в) $S_6=\frac{-12\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^6-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{12\cdot2\cdot63}{3\cdot64}=-\frac{63}{8}$;

г) $S_6=\frac{-9\cdot\left(\left(\sqrt{3}\right)^6-1\right)}{\sqrt{3}-1}=-\frac{234}{\sqrt{3}-1}$

17.27.

а) $S_6=\frac{5(2^6-1)}{2-1}=315$; б) $S_8=\frac{-1\left((-1{,}5)^8-1\right)}{-1{,}5-1}=\frac{1261}{128}$;

в) $S_{13}=\frac{-4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{13}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{8191}{1024}$; г) $S_8=\frac{4{,}5\left(\left(\frac{1}{3}\right)^8-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1640}{243}$.

17.28.

а) $b_1=3$, $q=2$, $S_5=\frac{3(2^5-1)}{2-1}=93$; б) $b_1=-1$, $q=-2$, $S_5=\frac{-1((-2)^5-1)}{-2-1}=-11$;

в) $b_1=-3$, $q=\frac{1}{2}$, $S_5=\frac{-3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{93}{16}$, г) $b_1=\sqrt{2}$, $q=3$, $S_5=\dfrac{\sqrt{2}(3^5-1)}{3-1}=121\sqrt{2}$.

17.29.

а) $q=b_5:b_4=320:160=2$, $b_1=b_4:q^3=160:8=20$, $S_5=\dfrac{20(2^5-1)}{2-1}=620$;

б) $q=\sqrt{b_9:b_7}=\sqrt{16:8}=\sqrt{2}$, $b_1=b_7:q^6=8:2^3=1$,

$$S_5=\frac{1\left(\left(\sqrt{2}\right)^5-1\right)}{\sqrt{2}-1}=(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=7+3\sqrt{2};$$

опечатка в ответе задачника.

в) $q=\sqrt{b_5:b_3}=\sqrt{\dfrac{1}{9}:1}=\dfrac{1}{3}$, $b_1=b_3:q^2=1:\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=9$,

$$S_5=\frac{9\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{9\cdot3\cdot242}{2\cdot243}=\frac{121}{9};$$

г) $q=\sqrt[3]{b_7:b_4}=\sqrt[3]{\dfrac{9\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, $b_1=b_4:q^3=3\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1$,

$$S_5=\frac{1\left(\left(\sqrt{3}\right)^5-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(9\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=13+4\sqrt{3}.$$

17.30.

b_1	q	n	b_n	S_n
15	$\frac{1}{3}$	3	$1\frac{2}{3}$	$21\frac{2}{3}$
$16-3\sqrt{23}$	$\frac{9+3\sqrt{23}}{7}$	3	18	25
$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	6	$2\frac{17}{32}$	$6\frac{89}{96}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4	9	$4(3+\sqrt{3})$
15	$\frac{1}{3}$	6	$\frac{5}{81}$	$22\frac{38}{81}$
$\frac{15}{169}$	$\frac{13}{5}$	4	$\frac{39}{25}$	$\frac{10476}{4225}$
$2\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{7(\sqrt{6}+1)}{3}$

17.31.

а) $b_3=\sqrt{b_4\cdot b_2}=\sqrt{16\cdot 4}=8$; $q=b_3:b_2=8:4=2$;

б) $b_6=-\sqrt{b_5\cdot b_7}=-\sqrt{3\cdot 12}=-6$; $q=b_6:b_5=-6:12=-\dfrac{1}{2}$;

в) $b_{26}=-\sqrt{b_{25}\cdot b_{27}}=-\sqrt{7\cdot 21}=-7\sqrt{3}$; $q=b_{26}:b_{25}=-\sqrt{3}$;

г) $b_7=\sqrt{b_6\cdot b_8}=\sqrt{15\cdot 5}=5\sqrt{3}$; $q=b_8:b_7=5:5\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

опечатка в ответе задачника

17.32.

Если t, 4t, 8 — члены прогрессии, то $t\cdot 8=(4t)^2$, так что $t=\dfrac{1}{2}$

17.33.

Если -81, 3y, -1 – члены прогрессии, то $(-81)\cdot(-1)=(3y)^2$, откуда $y=\pm 3$

17.34.

Если x-1, $\sqrt{3x}$, 6x - члены прогрессии, то $(x-1)6x=(\sqrt{3x})^2$, $(x-1)\cdot 6=3$, $x=\dfrac{3}{2}$.

17.35.

а) Величина процентов, которую клиент ежегодно в течение 5 лет выплачивает банку, составляет 50000 · 0,2 = 10000 руб. Поэтому сумма, которую он должен вернуть через 5 лет, составит 50 000 руб + + 5 · 10 000 руб. = 100 000 руб.

б) — 510

17.36.

а) $b_1=\dfrac{6}{5}$, $q=3$; б) $b_1=0{,}3$, $q=(-\dfrac{1}{5})$; в) $b_1=\dfrac{5}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$; г) $b_1=-\dfrac{4}{7}$, $q=2$

17.37.

а) $b_n=4\cdot 3^{n-1}$, $b_n>324$ при $4\cdot 3^{n-1}>324$, $3^{n-1}>81$, $n>5$, $n=6$;

б) $b_n=3{,}5\cdot(\sqrt{2})^{n-2}$, $b_n>14$ при $3{,}5\cdot(\sqrt{2})^{n-2}>14$, $(\sqrt{2})^{n-2}>4$, $n>6$, $n=7$.

в) $b_n=2\cdot 5^{n-1}$, $A=1250$, $b_n>1250$ при $2\cdot 5^{n-1}>1250$, $5^{n-1}>5^4$, $n>5\Rightarrow n=6$

г) $b_n=\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{3}\right)^{n+3}$, $A=32{,}4$, $b_n>32{,}4$ при $\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{3}\right)^{n+3}>32{,}4$.

$\left(\sqrt{3}\right)^{n+3}>\left(\sqrt{3}\right)^{8}$, $n>5\Rightarrow n=6$

17.38.

а) $b_n=3^{n-1}$, $A=729$

$3^{n-1}<729\Leftrightarrow n<7\Rightarrow n\le 6$

б) $b_n=3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $A=\dfrac{3}{32}$

$$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{3}{32}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\Leftrightarrow n>6\Rightarrow n\geq 7$$

в) $b_n=243\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $A=\frac{1}{81}$

$$243\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{81}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\Leftrightarrow n>10\Rightarrow n\geq 11$$

г) $b_n=16\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$, $A=1$

$$16\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}<1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}\Leftrightarrow n-1>8\Rightarrow n\geq 10$$

17.39.

$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q^n=\frac{S_n(q-1)}{b_1}+1$.

а) $3^n=\frac{200(3-1)}{5}+1$, $3^n=81$, $n=4$;

б) $(\frac{1}{2})^n=\frac{-127\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{64\cdot(-1)}+1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{128}$, $n=7$;

в) $2^n=\frac{189\cdot(2-1)}{3}+1$, $2^n=64$, $n=6$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{121\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{27\cdot 3}+1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{243}$, $n=5$.

17.40.

а) $b_1=\sqrt{3},\ \ b_9=81\sqrt{3},\ \ q>1$

$b_9=b_1q^8\Rightarrow q=\sqrt[8]{\frac{b_9}{b_1}}=\sqrt[8]{81}=\sqrt{3}$

$b_2=b_1q=3$

$b_3=b_1\cdot q^2=3\sqrt{3}$

б) $b_1=375,\ b_3=15,\ 0<q<1$

$b_3=b_1q^2\Rightarrow q=\sqrt{\frac{b_3}{b_1}}=\frac{1}{5}$

$b_2=b_1q=75$

17.41.

а) $b_1=5,\ b_3=80,\ q<0$

$b_3=b_1q^2\Rightarrow q=-\sqrt{\frac{b_3}{b_1}}=-4$

$S_5=b_1\frac{1-q^5}{1-q}=1025$

б) $b_1=1,\ b_3=8,\ q<0$

$b_3=b_1q^2\Rightarrow q=-\sqrt{\frac{b_3}{b_1}}=-2\sqrt{2}$

$S_7=b_1\frac{1-q^7}{1-q}=\frac{1+2^{10}\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$

17.42.

$b_1=4$, $b_3+b_5=80$, $q>1$, тогда $b_3+b_5=b_1(q^2+q^4)=80$,

то есть $q^2+q^4=20$, так что $q=2$ и $b_{10}=b_1\cdot q^9=4\cdot 2^9=2^{11}=2048$

17.43.

$b_1=1$, $b_5=81$, тогда $q^4=\dfrac{b_5}{b_1}=81$, $q=\pm 3$, так что $b_2=\pm 3$, $b_3=9$, $b_4=\pm 27$

То есть 1, 3, 9, 27, 81 или 1, -3, 9, -27, 81

17.44.

$\begin{cases} b_2-b_3=18 \\ b_2+b_3=54 \end{cases}$, тогда $b_2=36$, $b_3=18$, $q=b_3:b_2=\dfrac{1}{2}$ и $b_1=b_2:q=72$

17.45.

$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=14 \\ b_4+b_5+b_6=112 \end{cases}$, $\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=14 \\ b_1q^3(1+q+q^2)=112 \end{cases}$. $q^3=8$, $q=2$, $b_1=2$

Так что прогрессия: 2, 4, 8, 16, 32, 64.

17.46.

$a\cdot b\cdot c=216$ м^3, $4(a\cdot b\cdot c)=104$ м, $b=a\quad q$, $c=a\quad q^2$

$abc=a^3\cdot q^3=216\Rightarrow a\cdot q=6\Rightarrow q=\dfrac{b}{6}$

$a+b+c=a(1+q+q^2)=26$

$(q^2+q+1)\cdot\dfrac{6}{q}=26$

$3q^2-10q+3=0 \qquad q=3$ и $q=\dfrac{1}{3}$

т.к. $b=c\cdot\dfrac{1}{q}$, $a=c\cdot\left(\dfrac{1}{q}\right)^2$, то можно считать, что $q=3$.

Тогда $a=2$, $b=6$, $c=18$ м.

17.47.

$S_6^*=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_6^2=b_1^2\,(1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^{10})=\dfrac{b_1^2(q^{12}-1)}{q^2-1}$

а) $S_6^*=\dfrac{9(64-1)}{1}=567$; б) $S_6^*=\dfrac{5(46656-1)}{5}=46655$,

в $S_6^*=\dfrac{243\left(\dfrac{1}{729}-1\right)}{\dfrac{1}{3}-1}=\dfrac{729\cdot 728}{2\cdot 729}=364$;

г) $S_6^*=\dfrac{12\left(\dfrac{1}{64}-1\right)}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{24\cdot 63}{64}=\dfrac{189}{8}$.

17.48.

а) $1+2+2^2+\ldots+2^8=S_9=\frac{b_1(q^9-1)}{q-1}=\frac{1\cdot((2^9-1)}{2-1}=511$;

б) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}=S_{11}=\frac{b_1(q^{11}-1)}{q-1}=\frac{1\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{2049\cdot 2}{3\cdot 2048}=\frac{683}{1024}$,

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^6}=S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{1\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{3(\frac{1}{3}-1)}=\frac{728\cdot 3}{3\cdot 729\cdot 2}=\frac{364}{729}$;

г) $1-3+3^2-3^3+\ldots-3^9=S_{10}=\frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{1\cdot((-3)^{10}-1)}{-3-1}=\frac{3^{10}-1}{-4}=-14762$.

17.49.

а) $1+x+x^2+\ldots+x^{100}=S_{101}=\frac{b_1(q^{101}-1)}{q-1}=\frac{1(x^{101}-1)}{x-1}=\frac{x^{101}-1}{x-1}$;

б) $x+x^3+x^5+\ldots+x^{35}=S_{18}=\frac{b_1(q^{18}-1)}{q-1}=\frac{x(x^{36}-1)}{x^2-1}$;

в) $x^2-x^4+x^6-\ldots-x^{20}=S_{10}=\frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{x^2(x^{20}-1)}{-x^2-1}=\frac{x^2(1-x^{20})}{1+x^2}$;

г) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{40}}=S_{40}=\frac{b_1(q^{40}-1)}{q-1}=\frac{1\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{40}-1\right)}{x\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{1-x^{40}}{x^{40}(1-x)}$.

17.50.

Дана прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$.

Тогда $\frac{b_2+b_4+\ldots+b_{2n}}{b_1+b_3+\ldots+b_{2n-1}}=\frac{q(b_1+\ldots+b_{2n-1})}{b_1+\ldots+b_{2n-1}}=q$, ч.т.д.,

17.51.

b_k — число бактерий после $20\cdot k$-минут

$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=4,\ldots,\ b_k=2^{k-1}$

Тогда в сутках $20\cdot 3\cdot 24$ - минут, то есть $20\cdot k$,

где $k=72$ и $S_k=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^{72}-1)}{2-1}=2^{72}-1$

17.52.

b_k — количество денег, отданных богачом в k-й день (копеек).

Тогда $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=4$,... $b_{30}=2^{29}$

Тогда богач отдал $S_{30}=\dfrac{b_1(q^{30}-1)}{q-1}=\dfrac{1\cdot(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$ копеек ≈ 1070000000 коп. ≈ 10 млн. руб.

А получил богач $S=30\cdot 100000=3000000=3$ млн. руб.

Так что богач проиграл.

17.53.

b_1, b_2, b_3 - геометрическая прогрессия.

$b_1=9$, b_1, b_2, b_3-16 - арифметическая прогрессия.

Тогда $b_1\cdot b_3=b_2^2$, то есть $9b_3=b_2^2$ и $\dfrac{b_1+b_9-16}{2}=b_2$, то есть $b_2=\dfrac{b_3-7}{2}$

Так что $9b_3=(\dfrac{b_3-7}{2})^2$, $36b_3=b_3^2-14b_3+49$.

$b_3^2-50b_3+49=0$, $b_3=1$ или $b_3=49$. Тогда $b_2=-3$ или $b_2=21$

17.54.

$a_1+a_2+a_3=24$, a_1, a_2, a_3 - арифметическая прогрессия

a_1, a_2+1, a_3+14 - геометрическая прогрессия.

Тогда поскольку $a_1+a_3=2a_2$, то $3a_2=24$, $a_2=8$.

Далее, $a_1+a_3=16$ и $a_1(a_3+14)=(a_2+1)^2=81$.

$$\begin{cases}a_1+a_3=16\\ a_1(a_3+14)=81\end{cases},\ \begin{cases}a_1=16-a_3\\ (16-a_3)(a_3+14)=81\end{cases},\ \begin{cases}a_1=16-a_3\\ a_3^2-2a_3-143=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1=16-a_3\\ a_3=13 \text{ или } a_3=-11\end{cases},\ \begin{cases}a_3=13\\ a_1=3\end{cases},\ \begin{cases}a_3=-11\\ a_1=27\end{cases}$$

Так что 27, 8, -11 или 3, 8, 13.

17.55.

b_1, b_2, b_3, ... - геометрическая прогрессия.

$b_1+b_2+b_3=91$, b_1+25, b_2+27, b_3+1 - арифметическая прогрессия.

Тогда $b_1+25+b_3+1=2(b_2+27)$, причем $b_1+25>b_2+27>b_3+1$.

Тогда $3b_2+28=91$, $b_2=21$.

Так что $b_1+b_3=70$ и $b_1b_3=b_2^2=441$, так что $b_1=7$, $b_3=63$ или $b_2=7$, $b_1=63$

Так как $b_1+25>b_3+1$, то $b_1=63$, а $b_3=7$.

Тогда $q=b_2:b_1=\dfrac{1}{3}$. и $b_7=b_1\cdot q^6=63\cdot\dfrac{1}{3^6}=\dfrac{7}{81}$

17.56.

b_1, b_2, b_3 - геометрическая прогрессия.

$b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_7$, где a_1, a_2, ... , a_7 - арифметическая прогрессия.

$b_1+b_2+b_3=31$. Тогда $b_1(1+q+q^2)=31$.

$d=a_2-a_1=b_2-b_1$, $a_7=a_1+6d$, то есть

$b_3=b_1+6(b_2-b_1)$, $b_3=6b_2-5b_1$, $b_1(5-6q+q^2)=0$.

Тогда $5-6q+q^2=0$, $q=1$ или $q=5$.

Тогда $b_1=\dfrac{31}{1+q+q^2}$, $b_1=\dfrac{31}{3}$ или $b_1=1$. Тогда $b_2=b_3=\dfrac{31}{3}$ или $b_2=5$, $b_3=25$.

Ответ: 1, 5, 25 или $\dfrac{31}{3}$, $\dfrac{31}{3}$, $\dfrac{31}{3}$

17.57.

$b_2 = b_1\cdot(1 + q)$, $b_3 = b_2(1 - q)$, $b_3= 0{,}99b_1$

$$b_3 = b_2(1-q) = b_1(1+q)(1-q) = 0{,}88b_1 \Rightarrow 1-q^2 = 0{,}99 \Rightarrow q = 0{,}1$$

Ответ: на 10%.

17.58.

$b_4 = b_1(1 + q)^3$, $b_4 = (1 + 0{,}728)b_1$

$b_4 = b_1(1 + q)^3 = b_1(1 + 0{,}728) \Rightarrow (1 + q)^3 = 1{,}728 \Rightarrow 1 + q= 1{,}2 \Rightarrow q = 0{,}2$

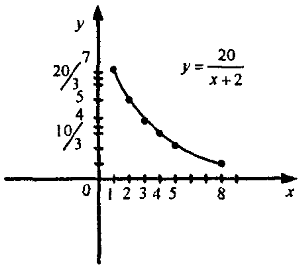
Ответ: на 20%.

Домашняя контрольная работа

ВАРИАНТ 1.

1. а) 2; 2,2; 2,23; 2,236; б) 3; 2,3; 2,24; 2,237.

2.



3. Да. $a_1=1$, $d=5$.

4. $d=\dfrac{a_{10}-a_3}{7}=\dfrac{22-64}{7}=-6$

$a_3=a_1+2d \Rightarrow 64=a_1-12 \Rightarrow a_1=78$; $a_n=78-6(n-1)=84-6n$.

5. $a_{14}=0$, так что необходимо $S_{13}=\dfrac{a_1+12d}{2}\cdot 13=\dfrac{78-72}{2}\cdot 13=39$

6. $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия $\Leftrightarrow b_{n-1}b_{n+1}=b_n{}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ b_{n-1}^4 b_{n+1}^4=\left(b_n^4\right)^2 \Leftrightarrow \left\{b_n^4\right\}$ – геометрическая прогрессия по признаку геометрической прогрессии.

7. $b_6=b_1q^5\quad -\dfrac{1}{\sqrt{3}}=b_1\cdot\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5} \Rightarrow b_1=-\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-9$

8. $b_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad q=\dfrac{1}{2}$; $S_5=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \dfrac{1-\dfrac{1}{2^5}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \dfrac{32-1}{32-16}=\dfrac{31}{16\sqrt{2}}$

9. $b_5=b_4+168$ $b_3+b_4=-28$

$$\begin{cases} b_1q^4=b_1q^3+168 \\ b_1q^2(1+q)=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q^3(q-1)=168 \\ b_1q^2(1+q)=-28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1q^2=-\dfrac{28}{1+q} \\ \dfrac{q(q-1)\cdot 28}{1+q}=-168 \end{cases} \Rightarrow 28q^2-28q=-168-168q$$

$28q^2+140q+168=0$; $7q^2+35q+42=0$

$D=1225-1176=49=7^2$; $q_1=\dfrac{-35+7}{14}=-2$ $q_2=\dfrac{-35-7}{14}=-3$

Т.к. $b_1=\dfrac{-28}{q^2(1+q)}$, то $b_1=\dfrac{-28}{4\cdot(-1)}=7$ или $b_1=\dfrac{-28}{9\cdot(-2)}=\dfrac{14}{9}$.

10. a, b, c

$$\begin{cases} b^2=ac \\ 100a+10b+c-792=100c+10b+a \Leftrightarrow \\ \dfrac{a+c-4}{2}=b \end{cases}$$

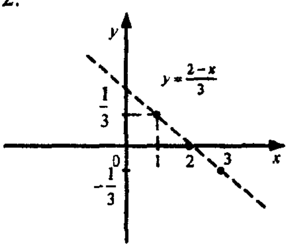
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2=ac \\ 99(a-c)=792 \\ a+c=2b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=ac \\ a-c=8 \\ 8+2c=2b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=b-2 \\ a=b+6 \\ b^2=b^2+4b-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=1 \\ a=7 \end{cases}$$

Ответ: 731.

ВАРИАНТ 2.

1. а) 2; 2,6; 2,64; 2,645; б) 3; 2,7; 2,65; 2,646.

2.



$$y_n=\frac{2-n}{3}$$

3. Да. $a_1=7$, $d=7$.

4. $d=\dfrac{a_{18}-a_{12}}{6}=\dfrac{40-22}{6}=3$

$a_{12}=a_1+11d \Rightarrow -40=a_1+33 \Rightarrow a_1=-73$; $a_n=a_1+d(n-1)=-73+3(n-1)=-76+3n$.

5. a_{25}=–1, но a_{26}=2, значит, ищем S_{25}. $S_{25}=\dfrac{-146+24\cdot 3}{2}\cdot 25=-925$.

6. $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия $\Leftrightarrow$ $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\left(b_n^3\right)^2=b_{n-1}^3b_{n+1}^3 \Leftrightarrow \left\{b_n^3\right\}$ – геометрическая прогрессия (по признаку геометрической прогрессии).

7. $b_9=b_1q^8$ $\dfrac{4}{81}=b_1\cdot\dfrac{1}{(-3)^8}\Rightarrow\dfrac{4}{81}=\dfrac{b_1}{6561}\Rightarrow b_1=324$.

8. $b_1=\sqrt{3}$ $q=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $S_5=\sqrt{3}\ \dfrac{1+\dfrac{1}{3^2\sqrt{3}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\dfrac{9\sqrt{3}+1}{9\sqrt{3}+9}=\dfrac{27+\sqrt{3}}{9\left(1+\sqrt{3}\right)}$.

9. $\begin{cases}b_1q^2+24=b_1q^4\\ b_1q+b_1q^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1q^2(q^2-1)=24\\ b_1q(q+1)=6\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b_1q(q+1)=6\\ 6q(q-1)=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=\dfrac{6}{q(q+1)}\\ q^2-q-4=0\end{cases}$

D=1+16=17; $q=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$; $b_1=\dfrac{12}{\left(1\pm\sqrt{17}\right)\left(2\pm\sqrt{17}\right)}$.

10. a, b, c; $\begin{cases}26=a+c\\ 100a+10b+c-792=100c+10b+a\Leftrightarrow\\ (b-2)^2=ac\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2b=a+c\\ 99(a-c)=792\\ (b-2)^2=ac\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=8\\ 2b=8+2c\\ (b-2)^2=ac\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=b-4\\ a=b+4\\ b^2-4b+4=b^2-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\ c=1\\ a=9\end{cases}$

Ответ: 951.

Глава 5. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

§ 18. Комбинаторные задачи

18.1.

а) $\left|\left\{\overline{ab}\mid a\in\{1,\ldots,9\},\, b\in\{0,\ldots,9\}\right\}\right|=9\cdot 10=90$

б) $\left|\left\{\overline{ab}\mid a\neq b,\, a\in\{1,\ldots,9\},\, b\in\{0,\ldots,9\}\right\}\right|=\left|\{1,\ldots,9\}\right|\cdot$

$\cdot\left|\left\{\overline{ab}\mid b\neq a \text{ и } b\in\{0,1,\ldots,9\}\right\}\right|=9\cdot 9=81$

в) $\left|\left\{\overline{ab} \mid a+b>16,\ a\in\{1,\dots,9\},\ b\in\{0,\dots,9\}\right\}\right| = \left|\{89,98,99\}\right| = 3$

г) $\left|\left\{\overline{ab} \mid a\cdot b<2,\ a\in\{1,\dots,9\},\ b\in\{0,\dots,9\}\right\}\right| = \left|\{10,11,12,20,21\}\right| = 5.$

18.2.

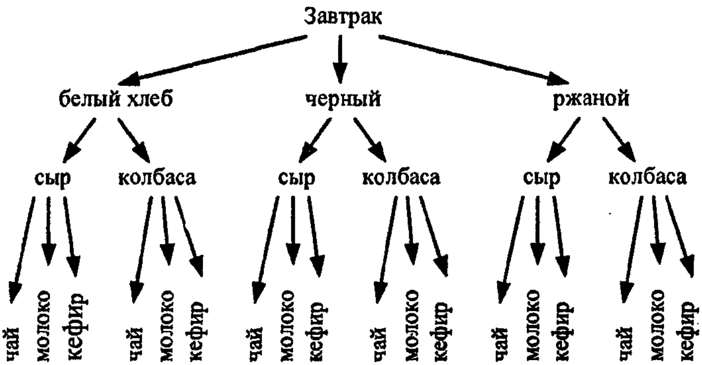
а) 764 б) 476 в) 2 г) 6

18.3.

а) 99 б) 18 в) $\left|\left\{\overline{ab} \mid a\in\{1,4,8,5\},\ b\in\{0,4,8\}\right\}\right| = 12$ г) 40, 48, 80, 88

18.4.

а)



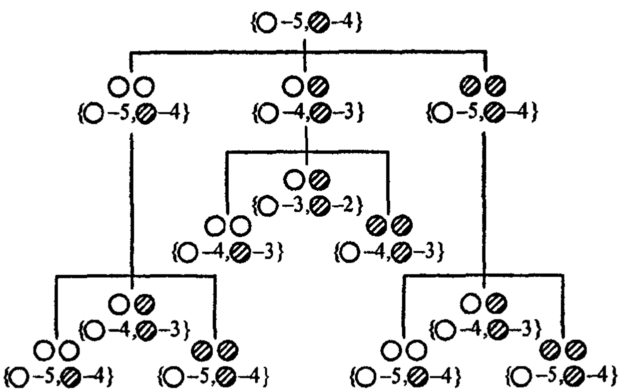
б) 12

в) Вероятность того, что хлеб будет ржаным — 6 случаев, а того, что бутерброд будет с сыром — 9 случаев. Поэтому второй случай более вероятен.

г) Надо убрать 6 ветвей.

18.5.

а)



б) 4

в) 1

г) Дерево строится по аналогии с пунктом а) (надо к последнему ярусу добавить новый ярус, разобрав для каждой компоненты 3 случая).

18.6.

а) У каждой лампочки 2 состояния, тогда для 3-х лампочек $2^3 = 8$ способов освещения.

б) Если лампочки № 1 и № 2 горят, то лампочка № 3 либо горит, либо не горит, аналогично, если лампочки № 1 и № 2 не горят. Поэтому, $2 + 2 = 4$ способа освещения.

в) Если лампочка № 3 горит, то лампочка № 2 не горит, а № 1 либо горит, либо не горит. Если лампочка № 3 не горит, то остается $2^2 = 4$ способа освещения. Поэтому, 2 + 4 способа освещения.

г) Если горит большинство лампочек, то либо горит две из них, а одна не горит ($C_3^2 = 3$ способа), либо все три горят ($C_3^3 = 1$ способ). Поэтому, $3 + 1 = 4$ способа освещения.

18.7.

а) $4! = 24$

б) Т.к. один цвет уже занят, то остается $3! = 6$ стран.

в) Третью полосу можно покрасить в 3 цвета. Допустим, мы покрасили ее в какой-либо цвет, отличный от зеленого, тогда оставшиеся три полосы мы можем раскрасить в три цвета 3! способами. Поэтому всего $3\cdot 3' = 18$ стран.

г) Будем считать, что синий и красный цвета упорядочены. Тогда возможны три случая размещения этой пары: 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 полосы. Для каждого случая — 2 способа раскрашивания оставшихся полос. Поэтому всего 6 способов. Т.к. синий и красный цвета могут находиться в обратном порядке, то всего $2 \cdot 6 = 12$ стран.

18.8.

а) Т.к. цветов 7, а фигур 3, то $7\cdot 6\cdot 5 = 210$ способов раскрашивания.

б) Т.к. один цвет и одна фигура заняты, то остается $6\cdot 5 = 30$ способов.

в) Треугольник может быть раскрашен в один из 6 цветов. При фиксированном цвете треугольника остается $6\cdot 5 = 30$ способов раскрашивания оставшихся фигур. Поэтому $6\cdot 30 = 180$ способов.

г) Т.к. 4 холодного цвета, и 3 фигуры, то $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ способа.

18.9.

а) При фиксированной абсциссе — 5 случаев для ординаты точки. Т к. 5 вариантов для абсциссы: то $5\cdot 5 = 25$ точек.

б) Отбирая точки с отрицательной абсциссой, получаем $2\cdot 5 = 10$ точек.

в) Отбирая точки с положительной ординатой, получаем $3\cdot 5 = 15$ точек.

г) Из всех точек отбираем те, для которых длина радиус-вектора не превосходит 5. Их в точности 16.

18.10.

а) 1 и $27000 = 2^3 3^3 5^3$.

б) Для каждого из 3-х неизвестных a, b, c возможны 4 значения 0, 1, 2, 3. Поэтому можно составить $4^3 = 64$ числа.

в) Четыре — это в точности те числа, для которых $a \neq 0$, поэтому их $3 \cdot 4^2 = 48$.

г) Числа, кратные 10 — это те числа, для которых $a \neq 0$ и $c \neq 0$, поэтому их $3^2 \cdot 4 = 36$.

18.11.

а) 5040 б) 40320

в) $6! - 5! = 5 \cdot 5! = 600$ г) $\frac{5!}{5} = 4! = 24$

18.12.

а) $\frac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$

б) $\frac{11!}{5! \cdot 6!} = C_{11}^5 = 462$

в) $\frac{51!}{49!} = 51 \cdot 50 = 2550$

г) $\frac{14!}{7! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{6 \cdot 24} = 120120$

18.13.

а) да б) да в) да г) нет.

18.14.

а) $\frac{n!}{(n-1)!} = n$

б) $\frac{(2k+1)!}{(2k-1)!} = 2k \cdot (2k+1)$

в) $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}$

г) $\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!} = (4m-2)(4m-1)$

18.15.

а) $n! = 7(n-1)!$

$n = 7$

б) $(m+17)! = 420(m+15)!$

$(m+16)(m+17) = 420$

$n^2 + 33m - 148 = 0$

$\left[\begin{array}{l} n_1 = 4 \\ n_2 = -37 \end{array}\right. \Rightarrow n = 4$

в) $(k-10)! = 77(k-11)!$
$k-10 = 77$
$k = 87$
г) $(3x)! = 504(3x-3)!$
$(3x-2)(3x-1)3x = 504$
$9x^3 - 9x^2 + 2x - 168 = 0$
$(x-3)(9x^2 + 18x + 56) = 0$
$x = 3$

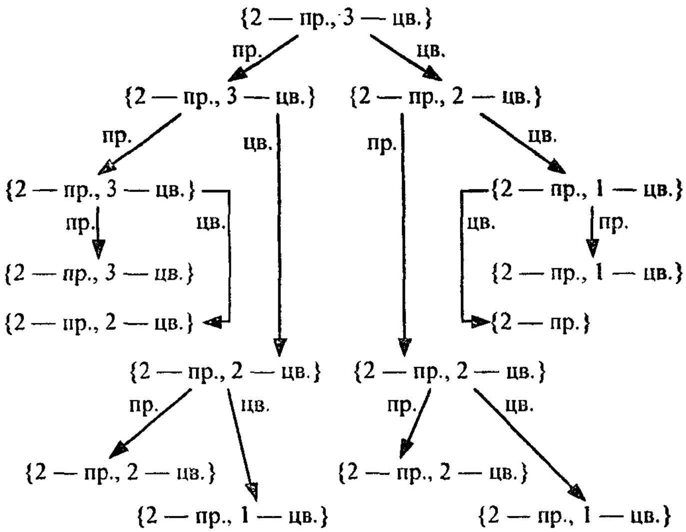
18.16.
а) $5! = 120$
б) $4! = 24$

в) Гость C может сидеть как справа, так и слева от гостя A. Для каждого из этих случаев возможно 5 способов посадить гостей A и C, а для каждого из них $3! = 6$ способов посадить остальных. Поэтому всего $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$ способов посадки.

г) Если D посадили (5 способов), то рядом с ним можно посадить любого, кроме гостя A ($3 \cdot 2 = 6$ способов), а на оставшиеся 2 места рассматриваем остальных, куда входит часть A (2 способа). Поэтому всего $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$ способов.

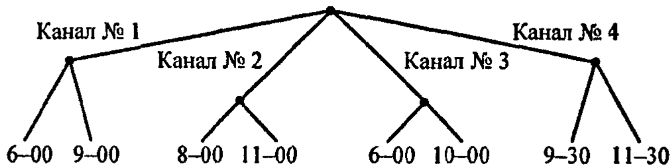
18.17.
а) 200;
б) 200, 202, 208, 209, 220, 222, 228, 229;
в) 909, 929, 989, 999;
г) 200, 280, 800, 880, 920

18.18.
а)

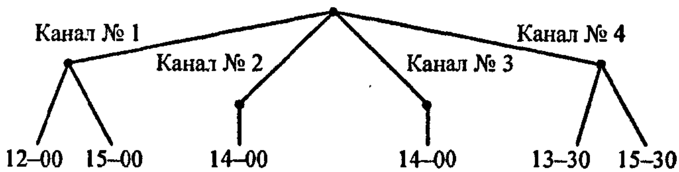


б) 1
в) 1
в) 4

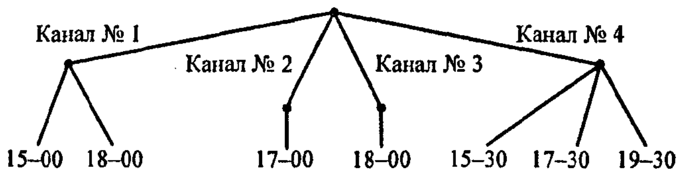
18.19.
а)



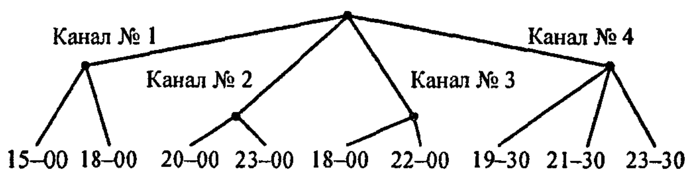
б)



в)



г)



18.20.
а) $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$
б) $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$
в) $5 \cdot 5 \cdot 4 = 80$
г) Если текстовая задача не на работу, то $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ вариантов, а если на работу, то $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$. Всего 96.

18.21.
а) $10^5 = 100000$ б) $8^5 = 32768$
в) $2^5 = 32$ г) $2 \cdot 8^4 = 8192$

18.22.

а) $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$ и $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2250$
б) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
в) $3 \cdot 2 = 6$
г) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

18.23.
а) $3! = 6$
б) $4! = 24$
в) $5! = 120$
г) 10 способами мы можем выбрать точки P и R так, чтобы PR была одной стороной. При фиксированных P и R, остальные точки выбираются $3! = 6$ способами. Всего $10 \cdot 6 = 60$.

18.24.
а) $6! = 720$
б) $5! = 120$
в) $5! \cdot 5! = 600$
г) $5! + 5! = 240$

18.25.

а) $\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!} = \dfrac{(n-3)(n+3)}{(n+3)(n+3)} = \dfrac{n-3}{n+4}$;

б) $\dfrac{1}{(n-2)!} - \dfrac{n^3-n}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)n(n+1)-n^3+n}{(n+1)!} = 0$;

в) $\dfrac{25m^5-m^3}{(5m+1)!}\left(\dfrac{1}{5\cdot(5m-2)!}\right)^{-1} = \dfrac{(25m^2-1)m^3\cdot 5\cdot(5m-2)!}{(5m+1)!} =$

$= \dfrac{5(25m^2-1)m^3}{(5m-1)5m\cdot(5m+1)} = m^2$;

г) $\dfrac{(3k+3)!k!}{(3k)!} : \dfrac{(k+3)!(3k+1)}{3!(k^2+5k+6)} = \dfrac{(3k+3)!k!3!(k+2)(k+3)}{(3k)!(k+3)!(3k+1)} =$

$= \dfrac{(3k+2)(3k+3)3!}{(k+1)} = 18(3k+2)$. .

§ 19. Статистика — дизайн информации

19.1.
а) 10, 11, ..., 199, 200;
б) 1, 2, ..., 99, 100;
в) 1, 2, ..., 19, 20;
г) 0, 1, 2, ..., 99, 100.

19.2.
а) 5, 10, ..., 85, 90, 95, 100;
б) 1, 2, ..., 19, 20;

в) 20, 21, ..., 39, 40;
г) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

19.3.
а) 60;
б) от 4 до 25 кг с шагом 0,5;
в) 5 и 12;
г) варианты 5–2
варианты 8–14
варианты 12–3
д) 5,5.

19.4.
а) от 140 до 210 см;
б) 157 и 190;
в) варианты 168–4, варианты 179–4,
г) 161.

19.5.
а) 200
б) 0.19
в) 6,5%
г)

цена, р.	0–20	20–50	50–100	100–150	150–200	≥ 200
Кол-во ценников	31	52	47	38	19	13
Частота	0,155	0,26	0,235	0,19	0,095	0,065
Частота, %	15,5	26	23,5	19	9,5	6,5

19.6.
а) 7 б) 0,04
в) 22% г) 38%

19.7.

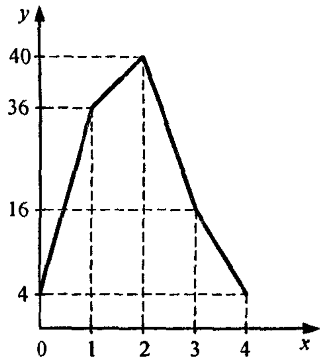
	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	9	5	2	4	20
Частота	0,45	0,25	0,1	0,2	1
Частота, %	45	25	10	20	100

19.8.
а) 7 б) 50
в) 5 г) 8%

19.9.
а) 4
б) 2

в) $1\cdot 0{,}36 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}16 + 4\cdot 0{,}04 = 1{,}8$

г)



19.10.

а) 2, 4, 6, 8

б) 4, 8, 2, 8, 6, 4, 8

в) 6, 2, 8, 2, 4, 6, 2

г) 4

19.11.

а) от 12 до 20 баллов;

б) 19, 13, 17, 14, 20, 19, 20, 13, 14, 17, 14, 17, 17, 17, 17

в) варианты 13–2

варианты 14–3

варианты 15– 0

г) 13, 13, 14, 14, 14, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 19, 19, 20, 20

19.12.

см. ответ

19.13.

см. ответ

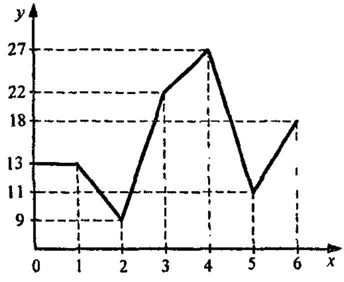
19.14.

а) 200

б) 4; 0,27

в)

	Варианта					
	1	2	3	4	5	6
Частота	0,13	0,09	0,22	0,27	0,11	0,18



г)

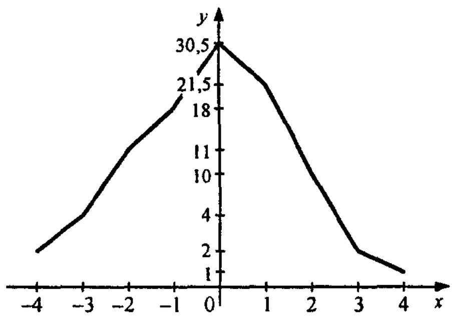
19.15.

а) 431

б) $\dfrac{220+360+610+430+200}{2000}=0{,}91 \Rightarrow 91\%$

в)

Вес, г	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Частота, %	2	4	11	18	30,5	21,5	10	2	1



г)

19.16.

а) $5\ \dfrac{3}{16}+4\ \dfrac{8}{16}+3\dfrac{5}{16}=3{,}875$

б) $5\ \dfrac{2}{16}+4\cdot\dfrac{8}{16}+3\dfrac{6}{16}=3{,}75$

в) $5\cdot\dfrac{5}{16}+4\cdot\dfrac{6}{16}+3\cdot\dfrac{5}{16}=4$

г) $5\cdot\dfrac{3+n}{16}+4\dfrac{(8-n+m)}{16}+\dfrac{3(5-m)}{16}=\dfrac{62+n+m}{16}>4 \Rightarrow n+m>2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m+n=3$

19.17.

а) 22

б) размах — 18, мода — 4

в) нет, т.к. $4\cdot\frac{1}{2}+7\cdot\frac{1}{5}+n\cdot\frac{3}{10}=3,4+\frac{3}{10}n\neq 15,\quad \forall n\in\mathbb{Z}$

г) $\frac{10x-34}{3}$..

19.18.

а) 36

б) размах — 7, мода — 11;

в) нет, т.к. $4\cdot\frac{5}{n+7}+7\frac{2}{n+7}+11\frac{n}{n+7}=\frac{11n+34}{n+7}\neq 5,\quad \forall n\in\mathbb{N}$

г) $\frac{48}{5}$.

19.19.

а) $1\cdot\frac{2}{7x+16}+3\frac{3x-1}{7x+16}+5\frac{5}{7x+16}+6\frac{4x-9}{7x+16}=\frac{33x-30}{7x+16}$;

б) это гипербола $y=\frac{33x-30}{7x+16}$;

в) $\begin{cases}3x-1<19\\4x-9<19\\\frac{33x-30}{7x+16}\geq 0\\3x-1>0\\4x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow 2,25<x<\frac{20}{3}\Rightarrow 3,4,5,6$

г) да, при $x=7$.

19.20.

а) $1\cdot\frac{2x}{6x+19}+3\frac{3x-1}{6x+19}+5\frac{5}{6x+19}+6\frac{x+5}{6x+19}=\frac{17x+52}{6x+19}$;

б) это гипербола $y=\frac{17x+52}{6x+19}$;

в) $\begin{cases}0<2x<10\\0<3x-1<10\\0<x+5<10\\\frac{17x+52}{6x+19}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{3}<x<\frac{11}{3}\Rightarrow 1,2,3;$

г) нет, т.к. $\begin{cases}2x>3x-1\\2x>x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x>5\end{cases}\Rightarrow\varnothing.$

§ 20. Простейшие вероятностные задачи

20.1.

а) Всего таких чисел $6 \Rightarrow \frac{1}{6}$;

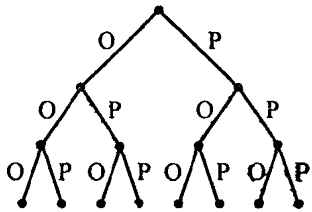
б) Чисел, у которых вторая цифра 7, два $\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

в) Чисел, оканчивающихся на 6, два $\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

г) 0.

20.2.

Нарисуем дерево вариантов:



а) 0,5 б) 0,125 в) 0,375 г) 0,5

20.3.

а) Всего двузначных чисел 90; чисел, оканчивающихся нулем, — $9 \Rightarrow 0,1$;

б) Чисел, состоящих из одинаковых цифр, — $9 \Rightarrow \frac{9}{90} = 0,1$;

в) Чисел, больших 27 и меньших 46, — $18 \Rightarrow \frac{18}{90} = 0,2$;

г) Чисел, не являющихся кубом другого целого числа, — $88 \Rightarrow \frac{88}{90} = \frac{44}{45}$.

20.4.

а) Всего пар — 6, а пар, в которых выбран Владимир Венедиктович, — $3 \Rightarrow \frac{3}{6} = 0,5$.

б) Пар, в которых отца одного из кандидатов зовут так же, как и самого кандидата, — $3 \Rightarrow \frac{3}{6} = 0,5$.

в) Пар, в которых кандидаты с одинаковыми менами, — $1 \Rightarrow \frac{1}{6}$.

г) Пар, в которых кандидаты с разными отчествами, — $5 \Rightarrow \frac{5}{6}$.

20.5.

а) Всего двузначных чисел — 90. Двузначных чисел, цифры которых отличаются больше чем на 8, — 1 $\Rightarrow \frac{1}{90}$.

б) Двузначных чисел, цифры которых отличаются больше чем на 7, — 4 $\Rightarrow \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$.

в) Двузначных чисел, при перестановке цифр которых получается двузначное число, меньшее исходного, — 36 $\Rightarrow \frac{36}{90} = 0,4$.

г) Двузначных чисел, которые ближе к 27, чем к 72, — 40 $\Rightarrow \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$.

20.6.

а) Число всех функций — 5. Число функций, которые не пересекают ось ординат, — 0 $\Rightarrow 0$

б) Число функций, которые не пересекают ось абсцисс, — 1 $\Rightarrow \frac{1}{5} = 0,2$.

в) Число функций, которые пересекают ось абсцисс левее точки (–50; 0), — 2 $\Rightarrow \frac{2}{5} = 0,4$.

г) Число функций, не пересекающих 4-ю координатную ось, — 3 $\Rightarrow \frac{3}{5} = 0,6$.

20.7.

а) Всего случаев — $2^4 = 16$. Случаев, в которых поставлен 1 крестик, — 4 $\Rightarrow \frac{4}{16} = 0,25$.

б) Случаев, в которых поставлено ровно два нолика, — $C_4^2 = 6 \Rightarrow \frac{6}{16} = 0,375$.

в) Случаев, в которых в левой нижней клетке стоит крестик, — $2^3 = 8 \Rightarrow \frac{8}{16} = 0,5$.

г) Случаев, в которых в верхней левой и нижней правой клетках стоят разные значки, — 8 $\Rightarrow \frac{8}{16} = 0,5$.

20.8.

а) 0,23

б) $\frac{100-37}{100} = 0,63$

в) $\frac{37+23}{100}=0,6$

г) $\frac{100-37-23}{100}=0,4$

20.9.

а) $\frac{1}{6}$

б) $\frac{3}{6}=0,5$

в) $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

г) $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

20.10.

а) Всего доминошек — 28. Доминошек, не являющихся дуплем — 21 $\Rightarrow \frac{21}{28}=0,75$.

б) Доминошек, на которых не выпала тройка, — 21 $\Rightarrow \frac{21}{28}=0,75$.

в) Доминошек, на которых произведение очков меньше 29, — 26 $\Rightarrow \frac{26}{28}=\frac{13}{14}$.

г) Доминошек, на которых выпавшие точки различаются более чем на 1, — 15 $\Rightarrow \frac{15}{28}$.

20.11.

а) $\frac{\text{длина } [-7;1]}{\text{длина } [-7;3]}=0,8;$

б) $\frac{\text{длина } [-3;3]}{\text{длина } [-7;3]}=0,6;$

в) $\frac{\text{длина } [-5;2]}{\text{длина } [-7;3]}=0,7;$

г) $\frac{\text{длина } \left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]}{\text{длина } [-7;3]}=\frac{\sqrt{6}}{5}.$

20.12.

а) $\frac{S_{\Delta KCN}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}b\right)}{ab}=\frac{1}{6};$

б) $\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}b\right)}{ab}=\frac{1}{8};$

в) $\dfrac{S_{ABCD}-S_{\Delta AMC}}{S_{ABCD}}=\dfrac{S_{\Delta BCM}+S_{\Delta ACD}}{S_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)\cdot b+\frac{1}{2}ab}{ab}=\dfrac{7}{8}$;

г) $\dfrac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}}=1-\dfrac{S_{\Delta MBN}+S_{\Delta NCK}+S_{\Delta KDL}+S_{\Delta MAL}}{S_{ABCD}}=$

$$=1-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)\left(\frac{1}{3}b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{4}a\right)}{ab}=$$

$$=1-\frac{23}{48}=\frac{25}{48}$$

20.13.

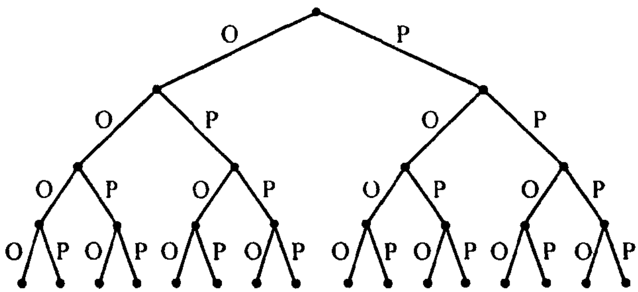
а) Всего таких чисел — 20 $\Rightarrow \dfrac{1}{20}=0,05$

б) Четных чисел — 12 $\Rightarrow \dfrac{12}{20}=0,6$.

в) Чисел, кратных 9, — 4 $\Rightarrow \dfrac{4}{20}=0,2$.

г) Чисел, удаленных от 50 менее чем на 20, — 5 $\Rightarrow \dfrac{5}{20}=0,25$.

20.14.



а) 0,185 б) 0,125 в) 0,5 г) 0,375.

20.15.

а) Всего таких уравнений — 10. Уравнений, имеющих 2 различных корня, — 4 $\Rightarrow \dfrac{4}{10}=0,4$.

б) Уравнений, не имеющих корней, — 6 $\Rightarrow \dfrac{6}{10}=0,6$.

в) Уравнений, имеющих хотя бы один отрицательный корень, — $4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0,4$.

г) Таких уравнений нет $\Rightarrow$ 0.

20.16.

а) Всего окружностей — 20 $\Rightarrow \frac{1}{20} = 0,05$.

б) Эта точка всегда принадлежит $\Rightarrow$ 1.

в) Точка (1; 3) не принадлежит круг, ограниченному этой окружностью $\Rightarrow$ $R = 1,2,3 \Rightarrow \frac{3}{10} = 0,15$.

г) $R \in \{1,...,11\} \Rightarrow \frac{11}{20} = 0,55$.

20.17.

а) Ни одна из гипербол не пройдет через начало координат $\Rightarrow$ 0.

б) Всего гипербол — 5. Гипербол, которые пересекут прямую $y = x$, — 3 $\Rightarrow \frac{3}{5} = 0,6$

в) Гипербол, проходящих через точку (–5; 0,4), — 1 $\Rightarrow \frac{1}{5} = 0,2$.

г) Гипербол, не пересекающих окружность $x^2 + y^2 = 1$, 5 $\Rightarrow \frac{5}{5} = 1$.

20.18.

а) Всего пар — 12 пар, в которых обе карты — тузы черной масти, — $2 \Rightarrow \frac{1}{6}$.

б) Пар, в которых 2-я карта — пиковый туз, — 3 $\Rightarrow \frac{3}{12} = 0,25$.

в) Пар, в которых 1-я карта — туз красной масти, — 6 $\Rightarrow \frac{6}{12} = 0,5$.

г) Пар, содержащих бубновый туз, — 6 $\Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

20.19.

а) Всего случаев — 36 случаев, когда среди выпавших чисел есть хотя бы одна единица, — 11 $\Rightarrow \frac{11}{36}$.

б) Случаев, в которых сумма выпавших чисел не больше 3. — $3 \Rightarrow \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

в) Случаев, в которых сумма выпавших чисел меньше 11, — $33 \Rightarrow \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

г) Случаев, в которых произведение выпавших чисел меньше 27, — $33 \Rightarrow \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

20.20.

а) Всего таких чисел — 100. Чисел, не оканчивающихся нулем, — $90 \Rightarrow \frac{90}{100} = 0,9$.

б) Чисел с этим условием — $91 \Rightarrow \frac{91}{100} = 0,91$

в) Чисел, не являющихся квадратом целого числа, — $95 \Rightarrow \frac{95}{100} = 0,95$

г) Чисел, сумма цифр которого меньше 17, — $94 \Rightarrow \frac{94}{100} = 0,94$.

20.21.

а) $\frac{\text{длина } [-1;\, 1]}{\text{длина } [-1;\, 9]} = 0,2;$

б) $\frac{\text{длина } [2;\, 9]}{\text{длина } [-1;\, 9]} = 0,7;$

в) $\frac{\text{длина } [4;\, 5]}{\text{длина } [-1;\, 9]} = 0,1;$

г) $\frac{\text{длина } [-1;\, 1]}{\text{длина } [-1;\, 9]} = 0,2$

20.22.

а) $\frac{S_{\Delta ACM}}{S_{\Delta ABC}} = 0,5$, т.к. CM — медиана;

б) $\frac{S_{\Delta ACH}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} CH \cdot AH}{\frac{1}{2} AC \cdot BC} = \frac{\frac{24}{5} \cdot \frac{18}{5}}{6 \cdot 8} = \frac{9}{25} = 0,36;$

в) $\frac{S_{\Delta CHM}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - \frac{S_{\Delta ACH} + S_{\Delta ACM}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - \frac{9}{25} - \frac{1}{2} = 0,14;$

г) $\frac{S_{окр}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\pi \cdot r^2}{\frac{1}{2} AC \cdot BC} = \frac{\pi \cdot 4}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6} = \frac{\pi}{6}.$

§ 21. Экспериментальные данные и вероятности событий

21.1.

а) 4 в) см. ответ

б) $\frac{4}{17}$ г) $k \cdot 0,25$, т.к. числа, кратные 4, имеют вид $4 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$.

21.2.

а) 16 б) 30 в) 45 г) 1.

21.3.

а) $0,015 \cdot 405 = 6,075 \Rightarrow 6$;

б) $0,015 \cdot 467 = 7,005 \Rightarrow 7$;

в) $0,015 \cdot 534 = 8,01 \Rightarrow 8$;

г) $\frac{5}{0,015} = 333\frac{1}{3} \Rightarrow 333$.

21.4.

а) $0,11 \cdot 1247 = 137,17 \Rightarrow 137$;

б) $(1 - 0,09) \cdot 2357 = 0,91 \cdot 2357 = 2144,87 \Rightarrow 2145$;

в) от 880 до 1076;

г) от 35520 до 44630.

21.5.

а) $\frac{12153}{0,38} \approx 31981$;

б) $0,17 \cdot 31981 \approx 5436$;

в) $\frac{0,38 \cdot 6057}{0,17} \approx 13539$;

г) $31981 + \frac{6057}{0,17} \approx 67610$.

21.6.

а) 2 б) $\frac{2}{17}$ в) см. ответ.

г) $k\,0,1$, т.к. числа, оканчивающиеся на 4, находятся по одному в каждом десятке.

21.7.

а) 1 б) $\frac{1}{17}$ в) см. ответ.

г) Статистическая устойчивость не наблюдается. Частота меняется от $\frac{1}{36}$ до $\frac{2}{9}$.

21.8.

а) 189000 б) 448000
в) 74966 г) 120826.

21.9.

а), б), в) проведите самостоятельно. г) $k\dfrac{100}{6}\%$

21.10.

а), б), в) — проведите самостоятельно. г) $k\dfrac{100}{6}\%$

Домашняя контрольная работа № 5

ВАРИАНТ 1

1. (1 р; 1 р; 1 р), (1 р; 1 р; 2 р), (1 р; 1 р; 3 р), (1 р; 2 р; 1 р), (1 р; 2 р; 2 р), (1 р; 3 р; 1 р), (2 р; 1 р; 1 р), (2 р; 1 р; 2 р), (2 р; 2 р; 1 р), (3 р; 1 р; 1 р).

2. Всего сочетаний 30. Два способа не сочетаются, поэтому 28 способов.

3. В 16-и случаях

4. Всех двузначных чисел — 90. Чисел кратных 13, — 7 $\Rightarrow$ вероятность $= \dfrac{7}{90}$.

5. Всего долек — 18. Крайних, но не угловых долек — 10 $\Rightarrow$ вероятность $= \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$.

6. 0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 9, 10, 10, 10
мода — 5
процент результатов, отличающихся от моды более чем на 4, — $\dfrac{2+3}{10} = 0{,}25 \Rightarrow 25\%$.

7.

$$\left.\begin{aligned} & a_n = a_1 - 3(n-1) \\ & \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\right) = 26{,}5 \\ & n = 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2a_1-27}{2}\cdot 5 = 26{,}5$$

$5(2a_1 - 27) = 63$

$a_1 = 18{,}8 \Rightarrow a_{10} = -8{,}2$

ВАРИАНТ 2

1. (5 р; 5 р; 5 р), (5 р; 5 р; 2 р), (5 р; 5 р; 1 р), (5 р; 2 р; 5 р), (5 р; 2 р; 2 р), (5 р; 1 р; 5 р), (2 р; 5 р; 5 р), (2 р; 5 р; 2 р), (2 р; 2 р; 5 р), (1 р; 5 р; 5 р)

2. Два разных пирожка можно выбрать $6 \cdot 5 = 30$ способами, а два разных напитка $5 \cdot 4 = 20$ способами.

$\Rightarrow$ их вместе можно выбрать $30 \cdot 20 = 600$ способами.

3. В 6-и случаях.

4. Всех двузначных чисел — 90. Чисел, у которых сумма цифр больше 15, — 6.

$\Rightarrow$ вероятность $= \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$.

5. Всего долек — 20. Не крайних долек — 6.

$\Rightarrow$ вероятность $= \dfrac{6}{20} = 0{,}3$.

6. 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 8, 9, 9, 10, 10
мода — 4
процент результатов, отличающихся от моды менее чем на 2, $\dfrac{(3+4+1)}{19} \cdot 100\% \approx 42\%$.

7. $a_n = a_1 + 2(n-1)$

$\dfrac{1}{2}S_{10} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10\right) = 5(a_1 + 9) = -2 \Rightarrow a_1 = -9{,}4$

$a_8 = a_1 + 14 = 4{,}6$.

Итоговое повторение

Числовые выражения

1. $213 \cdot 65 = 355 \cdot 39 \Rightarrow 4)$

2. $23^2 + 23 \cdot 26 = 23 \cdot 49 \Rightarrow 3)$

3. $108^2 - 87^2 = 21 \cdot 195 = 45 \cdot 91 \Rightarrow 2)$

4. $1\dfrac{5}{6} + 2\dfrac{1}{12}(1{,}15 - 1{,}29 : 0{,}6) = \dfrac{11}{6} + \dfrac{25}{12}(1{,}15 - 2{,}05) = \dfrac{11}{6} - \dfrac{45}{24} = -\dfrac{1}{24} \Rightarrow 3)$

5. $(1{,}68 : 1{,}6 - 2{,}1) \cdot \left(-1\dfrac{2}{3}\right) - 2\dfrac{1}{6} = (1{,}05 - 2{,}1)\left(-\dfrac{5}{3}\right) - \dfrac{13}{6} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{13}{6} = -\dfrac{5}{12} \Rightarrow 1)$

6. $\dfrac{4}{9} \cdot \left(-1\dfrac{1}{2}\right)^3 + 6{,}3 : 6 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{21}{20} = -\dfrac{9}{20} = -0{,}45 \Rightarrow 4)$

7. $0,5\cdot 0,6-2\frac{2}{9}:\left(-1\frac{1}{3}\right)^2=0,3-\frac{20}{9}:\frac{16}{9}=0,3-\frac{5}{4}=-0,95\Rightarrow 3)$

8. $\frac{0,3\cdot 2,4+0,7\cdot 2,4}{1,5^2-0,9^2}=\frac{2,4}{0,6\cdot 2,4}=1\frac{2}{3}\Rightarrow 2)$

9. $\frac{1,7^2-0,8^2}{0,18-1,5\cdot 0,18}=\frac{0,9\cdot 2,5}{-0,5\cdot 0,18}=-25\Rightarrow 2)$

10. $\left(\sqrt{16}\right)^3-51^0-3^2\cdot 3^{-4}-2\cdot 2^{-3}=2^6-1-3^{-2}-2^4=46\frac{8}{9}\Rightarrow 1)$

11. $3^2:3^{-1}-\left(\sqrt[3]{125}\right)^2-5\cdot 5^{-3}+\left(\sqrt{13}\right)^0=3^3-5^2-5^{-2}+1=2\frac{24}{25}\Rightarrow 4)$

12. $2^7\cdot(2^2)^{-5}:(2^{-3})^3=2^7\cdot 2^{-10}\cdot 2^9=2^6=64\Rightarrow 3)$

13. $(5^{-3})^2:5^3\cdot(5^2)^4=5^{-6}\cdot 5^{-3}\cdot 5^8=5^{-1}=\frac{1}{5}\Rightarrow 1)$

14. $\frac{3^5\cdot 9^{-2}}{27^2}=3^5\cdot 5^{-4}\cdot 3^{-6}=3^{-5}=\frac{1}{243}\Rightarrow 2)$

15. $\frac{2^7\cdot 8^{-3}}{4^{-5}}=2^7\cdot 2^{-9}\cdot 2^{10}=2^8=256\Rightarrow 3)$

16. $\frac{4^2\cdot 5^3}{10^5}=2^4\cdot 2^{-5}\cdot 5^3\cdot 5^{-5}=2^{-1}\cdot 5^{-2}=\frac{1}{50}=0,02\Rightarrow 2)$

17. $\frac{15^6}{9^3\cdot 5^7}=3^6\cdot 3^{-6}\cdot 5^6\cdot 5^{-7}=\frac{1}{5}=0,2\Rightarrow 4)$

18. – 1)

19. – 4)

20. – 3)

21. – 2)

22. $\frac{\left(-11\sqrt{7}\right)^2}{77}-\frac{\sqrt{512}}{\sqrt{8}}=11-8=3\Rightarrow 4)$

23. $\frac{\left(-17\sqrt{5}\right)^2}{85}+\sqrt{6\cdot 15}\cdot\sqrt{40}=17+60=77\Rightarrow 3)$

24. $169<183<196\Rightarrow 13<\sqrt{183}<196\Rightarrow 3)$

25. $289<300<324\Rightarrow 17<20\sqrt{3}<18\Rightarrow 1)$

26. $A(12)$, $B(13)$, $D(14)$, $C\left(4\sqrt{11}\right)$, $169<176<196\Rightarrow 13<4\sqrt{11}<14\Rightarrow 3)$

27. $K(10)$, $m(11)$, $N(12)$, $P\left(3\sqrt{15}\right)$, $121<135<144\Rightarrow 11<3\sqrt{15}<12\Rightarrow 3)$

28. $\left(4\sqrt{5}\right)^2=80$, $\left(3\sqrt{7}\right)^2=63$, $\left(5\sqrt{3}\right)^2=75$, $\left(2\sqrt{11}\right)^2=44$

$44<63<75<80\Rightarrow 2\sqrt{11}<3\sqrt{7}<5\sqrt{3}<4\sqrt{5}\Rightarrow 2)$

29. $\left(7\sqrt{3}\right)^2=147,\ \left(8\sqrt{2}\right)^2=128,\ \left(4\sqrt{7}\right)^2=112,\ \left(5\sqrt{6}\right)^2=150$

$112<128<147<150 \Rightarrow 4\sqrt{7}+8\sqrt{2}<7\sqrt{3}<5\sqrt{6} \Rightarrow 3)$

30. $\left(-5\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\frac{21}{25}}=75+\frac{11}{5}=77\frac{1}{5}=77{,}2$

31. $\sqrt{5\frac{1}{16}}-\left(0{,}2\sqrt{10}\right)^2=\frac{9}{4}-\frac{2}{5}=1{,}85$

32. $\sqrt{113^2-112^2}+\left(\sqrt{7}+6\right)\left(\sqrt{7}-6\right)=\sqrt{225}+7-36=-14$

33. $\dfrac{\sqrt{244^2-240^2}}{\left(\sqrt{5}-4\right)\left(\sqrt{5}+4\right)}=\dfrac{\sqrt{4\cdot 484}}{5-16}=-\dfrac{44}{11}=-4$

34. $3\sqrt[3]{64}-\left(-0{,}2\sqrt[3]{10}\right)^3=12+0{,}08=12{,}08$

35. $\left(-3\sqrt[3]{0{,}2}\right)^3+0{,}5\sqrt[3]{216}=-27\cdot 0{,}2+0{,}5\cdot 6=-2{,}4$

36. $\left(5\sqrt{2}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^4=50+16\cdot 9=194$

37. $\left(2\sqrt{5}\right)^4-\left(7\sqrt{2}\right)^2=16\cdot 25-98=302$

38. $\sqrt{7-\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{49-24}=5$

39. $\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{36-20}=4$

40. $\sqrt{\left(5-\sqrt{23}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{23}\right)^2}=5-\sqrt{23}+\sqrt{23}-4=1$

41. $\sqrt{\left(6-\sqrt{41}\right)^2}+\sqrt{\left(7-\sqrt{41}\right)^2}=\sqrt{41}-6+7-\sqrt{41}=1$

42. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}=2$

43. $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}-\sqrt{7}=-1$

Алгебраические выражения

1. — 2) **2.** — 3)

3. $\dfrac{a^4\cdot a^{-9}}{(a^3)^2a^{-7}}=a^{4-9-6+7}=a^{-4}\Rightarrow 4)$

4. $\dfrac{(a^4)^3a^{-12}}{(a^2)^{-5}a^7}=a^{12-12+10-7}=a^3\Rightarrow 2)$

5. $\dfrac{(2a)^3\cdot 4a^{-2}}{(4a^3)^2}=2^{3+2-4}\cdot a^{3-2-6}=2a^{-5}\Rightarrow 1)$

6. $\dfrac{3b^{-1}\cdot(9b^2)^3}{(3b^{-2})^4}=3^{1+6-4}\cdot b^{-1+6+8}=27b^{13}\Rightarrow 2)$

7. $(3xy)^3\cdot(3x^{-1}y)^{-2}:(9x^3y^4)=3^{3-2-2}\cdot x^{3+2-3}\cdot y^{3-2-4}=\dfrac{x^2}{3y^3}\Rightarrow$ условие неверно

8. $(7m^{-3}n^3):(7m^5n^4)^{-2}\cdot(49m^{-1}n^{15})^{-1}=7^{1+2-2}\cdot m^{-3+10+1}\cdot n^{3+8-15}=\dfrac{7m^8}{n^4}\Rightarrow 4)$

9. $\dfrac{(6ab^3)^3\cdot 3a^{-9}}{(2a^{-2}b)^3}=2^{3-3}\cdot 3^{3+1}\cdot a^{3-9+6}\cdot b^{9-3}=81b^6\Rightarrow 1)$

10. $\dfrac{(10x^4y^{-3})^4}{16x^8\cdot(25x^2y^{-2})^3}=2^{4-4}\cdot 5^{4-6}\cdot x^{16-8-6}\cdot y^{-12+6}=\dfrac{x^2}{25y^6}\Rightarrow 2)$

11. $\dfrac{x^{-8}}{x^{-4}x^{-2}}=x^{-8+4+2}=x^{-2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9\Rightarrow 2)$

12. $\dfrac{y^{-7}y^{-8}}{(y^{-3})^4}=y^{-7-8+12}=y^{-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=\dfrac{8}{27}\Rightarrow 3)$

13. Опечатка в условии. Надо писать $\dfrac{4a^2-25}{15-6a}$ вместо $\dfrac{4a-25}{15-6a}$

Тогда $\dfrac{4a^2-25}{15-6a}=-\dfrac{(2a-5)(2a+5)}{3(2a-5)}=-\dfrac{0{,}1+5}{3}=-1{,}7\Rightarrow 1)$

14. $\dfrac{-15x-40}{64-9x^2}=-\dfrac{5(3x+8)}{(8-3x)(8+3x)}=\dfrac{-5}{8+2}=-0{,}5\Rightarrow 2)$

15. $\dfrac{a^2-16a+64}{64-8a}=-\dfrac{(a-8)^2}{8(a-8)}=\dfrac{0{,}4+8}{8}=1{,}05\Rightarrow 4)$

16. $\dfrac{36-y^2}{y^2-12y+36}=\dfrac{(6-y)(6+y)}{(6-y)^2}=\dfrac{6+0{,}75}{6-0{,}75}=\dfrac{9}{7}\Rightarrow 4)$

17. $\dfrac{c^2-2c}{c-4}-\dfrac{16-c}{4-c}=\dfrac{c^2-2c+16-6c}{c-4}=\dfrac{(c-4)^2}{c-4}=c-4=-7{,}5\Rightarrow 1)$

18. $\dfrac{n^2+n}{n^3-8}-\dfrac{n+4}{8-n^3}=\dfrac{n^2+2n+4}{n^3-8}=\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{0{,}25-2}=-\dfrac{4}{7}\Rightarrow$ условие неверно

19. $x^2-4x-45=(x-9)(x+5)\Rightarrow 2)$

20. $-x^2+2x+24=(6-x)(x+4)\Rightarrow 4)$

21. $3x^2+13x-10=(3x-2)(x+5)\Rightarrow 3)$

$D=169+120=289=17^2\Rightarrow x_1=\dfrac{-13+17}{6}=\dfrac{2}{3}$ и $x_2=\dfrac{-13-17}{6}=-5$

22. $-4x^2+5x+6=(2-x)(4x+3)\Rightarrow 4)$

$D=25+96=121=11^2\Rightarrow x_1=\dfrac{-5+11}{-8}=-\dfrac{3}{4}$ и $x_2=\dfrac{-5-11}{-8}=2$

23. $\sqrt{12a}+\sqrt{48a}-\sqrt{147a}=(2+4-7)\sqrt{3a}=-\sqrt{3a}\Rightarrow 2)$

24. $\sqrt{80x}-\sqrt{180x}+\sqrt{245x}=(4-6+7)\sqrt{5x}=5\sqrt{5x}\Rightarrow 3)$

25. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}\right)^3\sqrt{6}}{12}=-3$

26. $\frac{250}{x^5\sqrt{10}}=\frac{250}{\left(\sqrt{10}\right)^5\sqrt{10}}=0,25$

27. $\frac{12x+5y}{4x^2y}-\frac{5y-4x}{5xy^2}=\frac{60xy+25y^2-20xy+16x^2}{20x^2y^2}=$

$=\frac{16x^2+40xy+25y^2}{20x^2y^2}=\frac{1}{5}\left(\frac{4x+5y}{2xy}\right)^2=45$

28. $\frac{2n+3m}{6mn^2}-\frac{9m-2n}{9m^2n}=\frac{6nm+9m^2-18nm+4n^2}{18n^2m^2}=$

$=\frac{4n^2-12nm+9m^2}{18n^2m^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2n-3m}{2nm}\right)^2=\frac{1}{2}$

29. $x_{\min}=-\frac{b}{2a}=2\Rightarrow y_{\min}=2x_{\min}^2-8x_{\min}-7=-15$

30. $x_{\max}=-\frac{b}{2a}=-1\Rightarrow y_{\max}=-3x_{\max}^2-6x_{\max}+5=8$

31. $\frac{2x-3}{5x-20}-\frac{x-2}{2x-8}=\frac{4x-6-5x+10}{10(x-4)}=\frac{4-x}{10(x-4)}=-\frac{1}{10}$

32. $\frac{c-6}{8+12c}-\frac{2c-7}{15c+10}=\frac{5c-30-8c+28}{20(3c+2)}=\frac{-(3c+2)}{20(3c+2)}=-\frac{1}{20}$

33. $\frac{10x}{16-x^2}+\frac{5}{x-4}=\frac{10x-5x-20}{16-x^2}=\frac{5(x-4)}{(4-x)(4+x)}=-\frac{5}{x+4}=-1$

34. $\frac{6}{7-a}+\frac{12a}{a^2-49}=\frac{12a-6a-42}{a^2-49}=\frac{6(a-7)}{a^2-49}=\frac{6}{a+7}=3$

35. $\frac{x^2-y^2}{3xy}\cdot\frac{3y}{x-y}=\frac{x+y}{x}=-0,5$

36. $\frac{c^2-49}{10cd}:\frac{2c+14}{5d}=\frac{c-7}{4c}=-3,25$

37. $\frac{x+y}{x}=1+\frac{1}{\frac{x}{y}}=6$

38. $\frac{x-y}{y}=\frac{1}{\frac{y}{x}}-1=1,5$

39. $\dfrac{x-3y}{y}=\dfrac{x}{y}-3=6\Rightarrow\dfrac{x}{y}=9$

40. $\dfrac{2x+y}{x}=2+\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}}=-2\Rightarrow\dfrac{x}{y}=-0,25$

41. $\dfrac{15-4n}{n}=\dfrac{15}{n}-4\Rightarrow n=1,3,5,15\Rightarrow 4$

42. $\dfrac{18-n}{n}=\dfrac{18}{n}-1\Rightarrow n=1,2,3,6,9,18\Rightarrow 6$

43. $\dfrac{12-5n}{n}=\dfrac{12}{n}-5>0\Rightarrow n=1,2\Rightarrow 2$

44. $\dfrac{30-7n}{n}=\dfrac{30}{n}-7>0\Rightarrow n=1,2,3\Rightarrow 6$

45. $\left(\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}\right):\dfrac{2m}{5m-5}=\dfrac{4m}{m^2-1}\cdot\dfrac{5(m-1)}{2m}=\dfrac{10}{m+1}=9$

46. $\left(\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right)\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2b^2}=\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{2b^2}=\dfrac{a+b}{a-b}=-0,2$

47. $\left(3+\dfrac{3\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\right)\left(x-6\sqrt{x}+9\right)=\dfrac{9\cdot(\sqrt{x}-3)^2}{3-\sqrt{x}}=9(3-\sqrt{x})=25$

48. $\left(2-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{8}{x-4}=\dfrac{-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{x-4}{8}=-\dfrac{\sqrt{x}+2}{2}=-1,8$

Функции и графики

1. — 3)	**2.** — 3)	**3.** — 2)	**4.** — 3)	**5.** — 4)
6. — 1)	**7.** — 3)	**8.** — 1)	**9.** — 2)	**10.** — 1)
11. — 4)	**12.** — 3)	**13.** — 1)	**14.** — 2)	**15.** — 2)
16. — 1)	**17.** — 4)	**18.** — 3)	**19.** — 4)	**20.** — 3)
21. — 4)	**22.** — 4)	**23.** — в)	**24.** — а)	**25.** — 4)
26. — г)	**27.** — 3)	**28.** — 3)	**29.** — 2)	**30.** — 3)
31. некорректное условие		**32.** — 4)	**33.** — 2)	**34.** — 3)
35. — 1)	**36.** — 2)	**37.** — 4)	**38.** — 4)	**39.** — 3)
40. — 1)	**41.** $(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$		**42.** — 3)	**43.** — 1)
44. — 2)	**45.** — 2)	**46.** — 1)	**47.** — 3)	**48.** — 4)
49. — 1)	**50.** — 3)	**51.** — 4)	**52.** — 3)	**53.** — 1)
54. — 4)	**55.** — 1)	**56.** — 1)	**57.** — A, C	**58.** — 3)
59. — 4)	**60.** — 2)	**61.** — 1)	**62.** — 2)	**63.** — 4)
64. — 2)	**65.** — 2)	**66.** — 1)	**67.** — 4)	**68.** — 2)
69. — 4)	**70.** — 1)	**71.** — 2)	**72.** — 2)	**73.** — 3)
74. — 1)	**75.** — 2)	**76.** — 4)	**77.** — 4)	**78.** — 3)

79. — 3) 80. — 4) 81. — 3) 82. — 2) 83. — 4)
84. — 2) 85. — 4) 86. 1) — г), 2) — а, 3) — б) 4) — в)
87. 1) — г), 2) — б), 3) — в), 4) — а) 88. — 2) 89. — 3)
90. — 1) 91. — 4) 92. — 3) 93. — 4) 94. — 4)
95. — 1) 96. — 1) 97. — 2) 98. — 2) 99. — 4)
100. — 3) 101. — 3) 102. — 3) 103. — 1) 104. — 4)
105. — 3) 106. — 1) 107. — 1) 108. — 3) 109. — 4)
110. — 4) 111. — 3) 112. — 4) 113. — 2) 114. — 4)
115. — 1) 116. — 3) 117. — 3) 118. — 2) 119. — 4)
120. — 1) 121. — 4) 122. — 1) 123. — 1) 124. — 2)
125. — 3) 126. — 4) 127. — 2) 128. — 1)

129. $\begin{cases} y = 7x \\ y = -5x + 21 \end{cases} \Rightarrow 7x = -5x + 21 \Rightarrow x = 1\frac{9}{12} = 1{,}75$

130. $\begin{cases} y = 9x - 4 \\ y = 4x + 9 \end{cases} \Rightarrow 9x - 4 = 4x + 9 \Rightarrow x = 2{,}6$

131. $\begin{cases} y = -8x + 11 \\ y = -2x - 7 \end{cases} \Rightarrow -8x + 11 = -2x - 7 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -13$

132. $\begin{cases} y = 21x \\ y = x - 6 \end{cases} \Rightarrow 21x = x - 6 \Rightarrow x = -\frac{3}{10} \Rightarrow y = -6{,}3$

133. $\begin{cases} y = 15x + 4 \\ y = 11x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 4 = 11x - 8 \\ y = 11x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -41 \end{cases} \Rightarrow x + y = -44$

134. $\begin{cases} y = 8x - 11 \\ y = -6x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 11 = -6x + 7 \\ y = 8x - 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow x \cdot y = -\frac{45}{49}$

135. $ax + 6y = 4$; $2a + 6 = 4 \Rightarrow a = -1$

136. $-4x + by = -2$; $-12 + 8b = -2 \Rightarrow b = 1{,}25$

137. $2x - 5y + c = 0$; $4 + 5 + c = 0 \Rightarrow c = -9$

138. $ax + by = 12$

$\begin{cases} 2a + 4b = 12 \\ -3a = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$

139. $ax + by = -18$

$\begin{cases} -6y = -18 \\ -20a + 4b = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = 4{,}5$

140. $ax + by + c = 0$

$\begin{cases} c = 0 \\ 2a - 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = 3$

141. $ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} a = 0 \\ 3a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{b} = -4$$

142. $ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -5a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{5}$$

143. $ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} -4a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Если $c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} -4\left(\dfrac{a}{c}\right) + \left(\dfrac{b}{c}\right) + 1 = 0 \\ 3\left(\dfrac{a}{c}\right) + 2\left(\dfrac{b}{c}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a}{c}\right) = \dfrac{1}{11} \\ \left(\dfrac{b}{c}\right) = -\dfrac{7}{11} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1, b = -7, c = 11 \Rightarrow a + b + c = 5$

Если $c = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4a + b = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$ противоречие.

144. $y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4 \Rightarrow y_{min} = -4$

145. $y = 8x^2 - 24x + 19 = 8\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow y_{min} = 1$

146. $y = x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5 \Rightarrow y_{min} = -5$

147. $y = 6x^2 + 30x + 25 = 6\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - 12{,}5 \Rightarrow y_{min} = -12{,}5$

148. $y = -10x^2 + 30x - 23 = -10\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - 0{,}5 \Rightarrow y_{max} = -0{,}5$

149. $y = -5x^2 - 16x + 11 = -5(x + 1{,}6)^2 + 23{,}8 \Rightarrow y_{max} = 23{,}8$

150. $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y_{max} = 4$

151. $y = \sqrt{0{,}25 - 3x^2} \Rightarrow y_{max} = 0{,}5$

152. $y = 5 + 3\sqrt{x} \Rightarrow y_{min} = 5$

153. $y = \sqrt{x^2 + 49} \Rightarrow y_{min} = 7$

154. $y = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y_{max} = 1$

155. $y = \sqrt{2x^2 + 1{,}44} \Rightarrow y_{min} = 1{,}2$

156. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10} = \sqrt{(x - 3)^2 + 1} \Rightarrow y_{min} = 1$

157 $y = \sqrt{2x^2 + 4x + 6} = \sqrt{2(x + 1)^2 + 4} \Rightarrow y_{min} = 2$

158. $y=\sqrt{-x^2+6x-5}=\sqrt{4-(x-3)^2} \Rightarrow y_{max}=2$

159. $y=\sqrt{-x^2-4x+5}=\sqrt{9-(x+2)^2} \Rightarrow y_{max}=3$

160. $y=11-\sqrt{x^2-4x+3} \Rightarrow y_{max}=11$

161. $y=17+\sqrt{x^2+5x+6} \Rightarrow y_{min}=17$

162. $y=3x^2+bx+7,\ -\dfrac{b}{6}=2 \Rightarrow b=-12$

163. $y=-5x^2+bx+3,\ -\dfrac{b}{10}=-2 \Rightarrow b=-20$

164. $y=ax^2+12x-5,\ -\dfrac{12}{2a}=-4 \Rightarrow a=1{,}5$

165. $y=ax^2+18x-4,\ -\dfrac{18}{2a}=3 \Rightarrow a=-3$

166. $y=ax^2+4x+c,\ -\dfrac{4}{2a}=-1 \Rightarrow a=2$

$8=a-4+c=-2+c \Rightarrow c=10$

167. $y=ax^2+6x+c,\ -\dfrac{6}{2a}=1 \Rightarrow a=-3$

$6=a+6+c=3+c \Rightarrow c=3$

168. $y=-2x^2+bx+c,\ -\dfrac{b}{-4}=3 \Rightarrow b=12$

$6=-18+3b+c=18+c \Rightarrow c=-12$

169. $y=4x^2+bx+c,\ -\dfrac{b}{8}=-1 \Rightarrow b=8$

$-16=4-b+c=-4+c \Rightarrow c=-12$

170. $y=2x^2+16x+c,\ x_{min}=-\dfrac{16}{2\cdot 2}=-4$

$y_{min}=2x_{min}^2+16\cdot x_{min}+c \Rightarrow -23=32-64+c \Rightarrow c=9$

171. $y=-3x^2+30x+c=-3(x-5)^2+75+c$

$y_{min}=27 \Rightarrow$ нет таких c. $\qquad y_{max}=27 \Rightarrow c=-48$

172. $y=23-|x-9| \Rightarrow y_{max}=23$

173. $y=|x-11|-78 \Rightarrow y_{min}=-78$

174. $f(-7)=f(7)=7$

175. $f(-5)=-f(5)=0$

176. $f(3)=f(-3)=1{,}5$

177. $f(6)=-f(-6)=4$

178. $y=-\dfrac{12}{x^2+2} \Rightarrow y_{min}=-\dfrac{12}{2}=-6$

179. $y=1-\frac{10}{x^2+2}\Rightarrow y_{min}=1-\frac{10}{2}=-4$

180. $y=-\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}\Rightarrow y_{min}=-\frac{1}{\sqrt{16}}=-0,25$

181. $y=-3-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow y_{min}=-3-\frac{1}{\sqrt{4}}=-3,5$

182. $y=\frac{18}{x^2+6}\Rightarrow y_{max}=\frac{18}{6}=3$

183. $y=2+\frac{9}{x^2+3}\Rightarrow y_{max}=2+\frac{9}{3}=5$

184. $y=\frac{14}{\sqrt{x^2+49}}\Rightarrow y_{max}=\frac{14}{\sqrt{49}}=2$

185. $y=3+\frac{12}{\sqrt{x^2+36}}\Rightarrow y_{max}=3+\frac{12}{\sqrt{36}}=5$

Уравнения и системы уравнений

1. $3(4x-1)-7(2x+4)=x-0,5$

$(12-14-1)x=3+28-0,5\quad x=-10\frac{1}{6}\Rightarrow 1)$

2. $5(2x-3)-(8x-7)=11-2x$, $(10-8+2)x=15-7+11$, $x=4\frac{3}{4}\Rightarrow 3)$

3. $\frac{2x+15}{8}=\frac{x-3}{12}+2$, $(6-2)x=48-45-6$, $x=-\frac{3}{4}\Rightarrow 4)$

4. $\frac{3x+1}{9}=\frac{2-x}{6}-1$, $(6+3)x=6-18-2$, $x=-1\frac{5}{9}\Rightarrow 3)$

5. — 3) 6. — 1) 7. — 2)

8. $12x^2+17x-14=0\Rightarrow D=17^2+4\cdot12\cdot14=961\Rightarrow x=\frac{7}{12}$ и $x=-2\Rightarrow 2)$

9. $-42x^2+71x-30=0\Rightarrow D=71^2-4\cdot42\cdot30=1\Rightarrow x=\frac{35}{42}$ и $x=\frac{6}{7}\Rightarrow 4)$

10. $20x^2+31x+12=0\Rightarrow D=31^2-4\cdot20\cdot12=1\Rightarrow x=-\frac{3}{4}$ и $x=-\frac{4}{5}\Rightarrow 1)$

11. $-24x^2+38x-15=0\Rightarrow D=38^2-4\cdot24\cdot15=4\Rightarrow x=\frac{3}{4}$ и $x=\frac{5}{6}\Rightarrow 2)$

12. $6x^2+13x+6=0\Rightarrow D=13^2-4\cdot36=25\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$ и $x=-\frac{3}{2}\Rightarrow 4)$

13. $-25x^2+5x+2=0 \Rightarrow\ D=5^2+4\cdot 2\cdot 25=225 \Rightarrow x=-0,2$ и $x=0,4 \Rightarrow$ 4)

14. — 2)

15. — 3)

16. — 1)

17. — 4)

18. $\sqrt{x^2-2x-20}=2 \Rightarrow x^2-2x-24=0 \Rightarrow x=-4$ и $x=6 \Rightarrow$ 2)

19. $\sqrt{x^2+8x+24}=3 \Rightarrow x^2+8x+15=0 \Rightarrow x=-3$ и $x=-5 \Rightarrow$ 2)

20. $\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x}=2 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0,\ x\neq 0 \Rightarrow D=3^2+2\cdot 2\cdot 5=29 \Rightarrow$ $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{4} \Rightarrow$ 2)

21. $\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x}=5 \Rightarrow 5x^2+x-6=0,\ x\neq 0 \Rightarrow D=1+2\cdot 5\cdot 6=61 \Rightarrow$ $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{61}}{10} \Rightarrow$ 4)

22. $(x-3)^2=16 \Rightarrow x_1=7$ и $x_2=-1 \Rightarrow |x_1-x_2|=8$

23. $9x^2+12x=5 \Rightarrow D=12^2+4\cdot 9\cdot 5=324 \Rightarrow x_1=\dfrac{1}{3}$ и $x_2=-\dfrac{5}{3} \Rightarrow$ $|x_1-x_2|=2$

24. $\dfrac{y^2-25}{6y-30}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=25 \\ y\neq 5 \end{cases} \Rightarrow y=-5$

25. $\dfrac{y^2-16}{-3y-12}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=16 \\ y\neq -4 \end{cases} \Rightarrow y=4$

26. $\dfrac{x^2-7x+12}{2x-8}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-4)=0 \\ x\neq 4 \end{cases} \Rightarrow x=3$

27. $\dfrac{x^2+6x+8}{5x+10}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+4)=0 \\ x\neq -2 \end{cases} \Rightarrow x=-4$

28. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2)=0 \\ x^2\neq 4 \end{cases} \Rightarrow y=-3$

29. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+4)=0 \\ x^2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow y=-4$

30. $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-1)=0 \\ (x+3)(x-1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-6$

31. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)=0 \\ (x-1)(x-3)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x=2$

32. $\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{24}{x^2-9}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)(x-1)=0\\ x^2\neq 9\end{cases} \Rightarrow x=1$$

33. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)(x+2)=0\\ x^2\neq 4\end{cases} \Rightarrow x=4$$

34. $\dfrac{3x+2}{2x}+\dfrac{2x}{3x+2}=-2 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{3x+2}\left(\dfrac{3x+2}{2x}+1\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x+2)^2}{2x(3x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(5x+2)^2=0\\ x\neq 0\\ x\neq -\dfrac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow x=-0,4$$

35. $\dfrac{4x-3}{6x}+\dfrac{6x}{4x-3}=2 \Leftrightarrow \dfrac{6x}{4x-3}\left(\dfrac{4x-3}{6x}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)^2}{6x(4x-3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3=0\\ x\neq 0\\ x\neq \dfrac{3}{4}\end{cases} \Rightarrow x=-1,5$$

36. $(2x+3)\sqrt{3x-12}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,5\\ x=4\end{array}\right.\\ x\geq 4\end{cases} \Rightarrow x=4$

37. $\sqrt{8-4x}(3x-7)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{3}\\ x=2\end{array}\right.\\ x\leq 2\end{cases} \Rightarrow x=2$

38. $(2x-6)\sqrt{-x^2+2x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-4,5\\ x_2=-5\\ x_3=-4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -5\\ x\geq -4\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow x_2+x_3=-9$

39. $(2x-6)\sqrt{-x^2+2x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=0 \\ x_3=2 \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow x_2+x_3=2$

40. $(x^2+x-12)\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=3 \\ x_3=-2 \end{array}\right. \\ x \ge -2 \end{cases} \Rightarrow x_2+x_3=1$

41. $(x^2-36)\sqrt{4-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=6 \\ x_2=-6 \\ x_3=4 \end{array}\right. \\ x \le 4 \end{cases} \Rightarrow x_2+x_3=-2$

42. $(x^2-2x-15)\sqrt{3-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=-3 \\ x_3=3 \end{array}\right. \\ x \le 3 \end{cases} \Rightarrow x_2-x_3=-9$

43. $(x^2-9)\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-3 \\ x_3=-1 \end{array}\right. \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_3=-3$

44. $(2x^2-7x+3)\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=0,5 \\ x_3=0 \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 3 \end{cases} \Rightarrow x=0$ и $x=0,5 \Rightarrow 2$

45. $(2x^2+5x+2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-0,5 \\ x_2=-2 \\ x_3=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x \ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=-0,5$ и $x=-1 \Rightarrow$

$x_1+x_2=-1,5$

46. $\dfrac{5x-28}{\sqrt{-x^2+5x+6}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5,6 \\ -x^2+5x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5,6 \\ -1<x<6 \end{cases} \Rightarrow x=5,6$

47. $\dfrac{6x+45}{\sqrt{x^2+5x+6}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7{,}5 \\ x^2+5x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=7{,}5$

48. $\dfrac{4x^2-25x+6}{\sqrt{1-x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=0{,}25 \end{array}\right. \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow x=0{,}25$

49. $\dfrac{4x^2-17x+4}{\sqrt{3x-4}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0{,}25 \end{array}\right. \\ x>1\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x=4$

50. $\sqrt{23-x}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 23-x=(x-3)^2 \\ x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-14=0 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x\ge 3 \end{cases} \Rightarrow x=7$

51. $\sqrt{10-x}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 10-x=(x-4)^2 \\ x\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x+6=0 \\ x\ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \\ x\ge 4 \end{cases} \Rightarrow x=6$

52. $\sqrt{21-10x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 21-10x=(x-1)^2 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x-20=0 \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-10 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x=-10$

53. $\sqrt{28-3x}=6-x \Leftrightarrow \begin{cases} 28-3x=(x-6)^2 \\ x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+8=0 \\ x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=8 \end{array}\right. \\ x\le 6 \end{cases} \Rightarrow x=1$

54. $\sqrt{4x^2+5x+5}=4x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+5x+5=(4x+3)^2 \\ x \ge -0,75 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+19x+4=0 \\ x \ge -0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-0,25 \\ x=-1\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ x \ge -0,75 \end{cases} \Rightarrow x=-0,25$$

55. $\sqrt{-8x^2-5x+7}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} -8x^2-5x+7=(1-2x)^2 \\ x \le 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+x-6=0 \\ x \le 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-0,75 \end{array}\right. \\ x \le 0,5 \end{cases} \Rightarrow x=-0,75$$

56. $\sqrt{20x^2-17x+26}=5x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 20x^2-17x+26=(5x-4)^2 \\ x \ge 0,8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-23x-10=0 \\ x \ge 0,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-0,4 \end{array}\right. \\ x \ge 0,8 \end{cases} \Rightarrow x=5$$

57. $\sqrt{-x^2-23x+21}=1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-23x+21=(1-3x)^2 \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2+17x-20=0 \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0,8 \\ x=-2,5 \end{array}\right. \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x=-2,5$$

58. $x-5\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0 \Rightarrow x=4$ и $x=9$

59. $x-6\sqrt{x}-7=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-7\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0 \Rightarrow x=49$

60. $4x^{-1}+x+4=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0,\ x \ne 0 \Rightarrow x=-2$

61. $9x^{-1}+x-6=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0,\ x \ne 0 \Rightarrow x=3$

62. $x-5+6x^{-1}=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0,\ x \ne 0 \Rightarrow x=2$ и $x=3 \Rightarrow x=3$

63. $x+7+10x^{-1}=0 \Leftrightarrow x^2+7x+10=0,\ x \ne 0 \Rightarrow x=-2$ и $x=-5 \Rightarrow x=-5$

64. $4x^4+3x^2-1=0$

$D=3^2+4\cdot 4=25 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{4}$ и $x^2=-1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow |x_1-x_2|=1$

65. $4x^4-35x^2-9=0$

$$D=35^2+4\cdot4\cdot9=1369\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\ \text{и}\ x^2=-9\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ |x_1-x_2|=1$$

66. $$\begin{cases}xy=63\\x+y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-16x+63=0\\y=16-x\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=7\\y_1=9\end{cases}\\\begin{cases}x_2=9\\y_2=7\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow|x_1-y_1|+\frac{1}{|x_2-y_2|}=2{,}5$$

67. $$\begin{cases}xy=-91\\x+y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x-91=0\\y=-6-x\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=7\\y_1=-13\end{cases}\\\begin{cases}x_2=-13\\y_2=7\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow|x_1-x_2|+\frac{2}{|y_1-y_2|}=20{,}1$$

68. $$\begin{cases}xy=-80\\x-y=-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-21y+80=0\\x=y-21\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-5\\y_1=16\end{cases}\\\begin{cases}x_2=-16\\y_2=5\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=-\frac{5}{16}-\frac{16}{5}=-3{,}5125$$

69. $$\begin{cases}xy=60\\x-y=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+11x-60=0\\y=x+11\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-15\\y_1=-4\end{cases}\\\begin{cases}x_2=4\\y_2=15\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=\frac{15}{4}+\frac{4}{15}=4\frac{1}{60}$$

70. $$\begin{cases}x^2+xy=6\\7x-xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+7x-8=0\\y=\dfrac{7x-2}{x}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-8\\y_1=7{,}25\end{cases}\\\begin{cases}x_2=1\\y_2=5\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow x_1y_1+x_2y_2=-53$$

71. $$\begin{cases}xy-y^2=7\\xy+5y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+5y-6=0\\y=\dfrac{13-5y}{y}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-7\dfrac{1}{6}\\y_1=-6\end{cases}\\\begin{cases}x_2=8\\y_2=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow x_1y_1+x_2y_2=51$$

72. $\begin{cases} x^2 + 4x = y - 2 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$ 2 решения

73. $\begin{cases} x^2 + y = 2x + 2 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$ 1 решение

74. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 4 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 решения

75. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ xy + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 8 \\ xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2\sqrt{2} \\ xy = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -2\sqrt{2} \\ xy = -4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}x - 4 = 0 \\ y = 2\sqrt{2} - x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{2}x - 4 = 0 \\ y = -2\sqrt{2} - x \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}, \sqrt{2} - \sqrt{6}\right) \\ \left(\sqrt{2} - \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \\ \left(-\sqrt{2} + \sqrt{6}, -\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) \\ \left(-\sqrt{2} - \sqrt{6}, -\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \end{array} \right. \Rightarrow$ 4 решения

76. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 + y - 30 = 0 \\ x^2 = y - 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow$ 1 решение

77. $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ x^2 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y - 20 = 0 \\ x^2 - 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3 - \sqrt{89}}{2} \\ x^2 = \dfrac{5 + \sqrt{89}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ 2 решения

78. $\begin{cases} x^2y^2 - 6xy = -5 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^2 - 6(xy) + 5 = 0 \\ 3(x + y) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 5 \\ x + y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ y = \dfrac{10}{3} - x \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 - 10x + 15 = 0 \\ y = \dfrac{10}{3} - x \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{3}; 3\right) \\ \left(3; \dfrac{1}{3}\right) \end{array} \right.$

79. $\begin{cases}2x^2y^2-5xy=-2\\x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(xy)^2-5(xy)+2=0\\x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=\dfrac{1}{2}\\x-y=-1\end{cases}\\\begin{cases}xy=2\\x-y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+2x-1=0\\y=x+1\end{cases}\\\begin{cases}x^2+x-2=0\\y=x+1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)\\(-2;-1)\\(1;0)\end{array}\right.$$

80. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{4y}{x}=3\\x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}\right)-4=0\\x-3y=1\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=4\\x-3y=1\end{cases}\\\begin{cases}\dfrac{x}{y}=-1\\x-3y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4y\\x=3y+1\\y\neq 0\end{cases}\\\begin{cases}x=-y\\x=3y+1\\y\neq 0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(4;1)\\\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{4}\right)\end{array}\right.$$

81. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{5y}{x}=-6\\2x+7y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+6\left(\dfrac{x}{y}\right)+5=0\\2x+7y=6\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=-1\\2x+7y=6\end{cases}\\\begin{cases}\dfrac{x}{y}=-5\\2x+7y=6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y\\2x+7y=6\\y\neq 0\end{cases}\\\begin{cases}x=-5y\\2x+7y=6\\y\neq 0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(-1{,}2;1{,}2)\\(10;-2)\end{array}\right.$$

82. $\begin{cases}\dfrac{8}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=5\\\dfrac{15}{x-y}-\dfrac{6}{x+y}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}=1\\\dfrac{1}{x+y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=1\\x+y=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

83. $\begin{cases}\dfrac{9}{2x+y}-\dfrac{4}{x-y}=2\\ \dfrac{3}{2x+y}+\dfrac{5}{x-y}=26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x-y}=4\\ \dfrac{1}{2x+y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=\dfrac{1}{4}\\ 2x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\ y=0\end{cases}$

84. $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+2x=-1\\ \sqrt{x+3y}-3x=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ \sqrt{3y-2}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=3\dfrac{2}{3}\end{cases}$

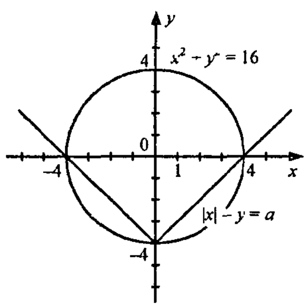
85. $\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{x-y}}-6y=-13\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}+5y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2,5\\ \sqrt{x-y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6,5\\ y=2,5\end{cases}$

86. $\begin{cases}x^2+y^2=41\\ x+2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y^2-12y-32=0\\ x=3-2y\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-5\\ y_1=4\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=6,2\\ y_2=-1,6\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=4\\ a=\dfrac{40}{31}\end{array}\right. \Rightarrow a=4$

87. $\begin{cases}x^2-y^2=32\\ 2x-y=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x^2+44x-153=0\\ y=2x-11\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{17}{3}\\ y_1=\dfrac{1}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=9\\ y_2=7\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-\dfrac{1}{9}\end{array}\right. \Rightarrow a=1$

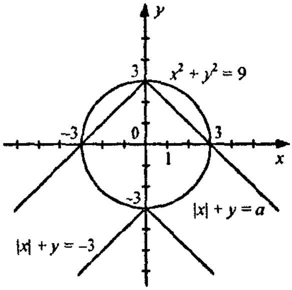
88. $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ |x|-y=a\end{cases}$

Нарисуем на координатной плоскости уравнения двух кривых. Система имеет три решения при $a=4$.



89. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ |x|+y=a\end{cases}$

Нарисуем на координатной плоскости уравнения двух кривых. Система имеет одно решение при $a = -3$.



Неравенства и системы неравенств

1. — 3)
2. — 2)
3. условие неверно
4. условие неверно
5. условие неверно
6. условие неверно
7. — 3)
8. — 3)

9. $|2x-4| \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2,5 \\ x \leq 1,5 \end{array}\right. \Rightarrow 1)$

10. $|5-x| > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 9 \end{array}\right. \Rightarrow$ условие неверно

11. $x^2 - 7x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \Rightarrow 1)$

12. $-x^2 + 11x - 30 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-6) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 6 \\ x < 5 \end{array}\right. \Rightarrow$ условие неверно

13. $7x^2 - 9x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(7x-2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{7} \leq x \leq 1 \Rightarrow 2)$

$D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{2}{7}$

14. $-2x^2 + 9x - 7 < 0 \Leftrightarrow (2x-7)(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3,5 \\ x < 1 \end{array}\right. \Rightarrow 4)$

$D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2}$ и $x_2 = 1$

15. $-x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow 2)$

16. $4x^2 + 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3)$

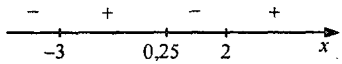
17. $4x^2 \geq 9x \Leftrightarrow x(4x-9) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2,25 \\ x \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow 1)$

18. $4x < 5x^2 \Leftrightarrow x(5x-4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0,8 \\ x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow 4)$

19. — 2)

20. — 4)

21. $(x-2)(x+3)(8x-2) < 0$

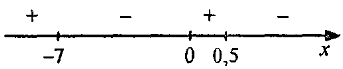


$\Rightarrow 2)$

22. $(3x-1)(x+4)(x-6) \geq 0$

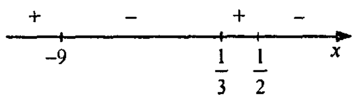
$\Rightarrow 1)$

23. $x(x+7)(3-6x) \geq 0$



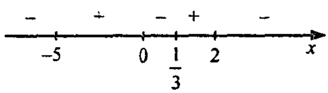
$\Rightarrow 2)$

24. $(2x-1)(4-12x)(x+9) < 0$



$\Rightarrow 4)$

25. $x(x+5)(2-6x)(2x-4) \leq 0$



$\Rightarrow 1)$

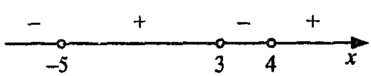
26. $-\dfrac{54}{x^2-49} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-49 > 0 \Leftrightarrow |x| > 7 \Rightarrow 3)$

27. $\dfrac{x^2+9}{4x^2-1} < 0 \Leftrightarrow 4x^2-1 < 0 \Leftrightarrow |x| < 0,5 \Rightarrow 1)$

28. $\dfrac{10}{1-100x^2} < 0 \Leftrightarrow 1-100x^2 < 0 \Leftrightarrow |x| > 0,1 \Rightarrow 4)$

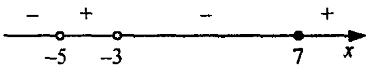
29. $\dfrac{16-x^2}{x^2+4} \geq 0 \Leftrightarrow 16-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow 3)$

30. $\dfrac{x^2-7x+12}{3x+15} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x-4)}{x+5} > 0$



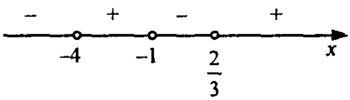
$\Rightarrow 2)$

31. $\dfrac{2x-14}{x^2+8x+15}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{(x+3)(x+5)}\le 0$



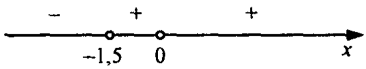
$\Rightarrow$ 1)

32. $\dfrac{x+4}{2-x-3x^2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{(x+1)(3x-2)}>0$



$\Rightarrow$ условие неверно

33. $x^2(2x+3)>0$

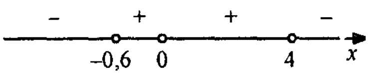


$\Rightarrow$ 4)

34. $(x+3)^2(x-2)<0$

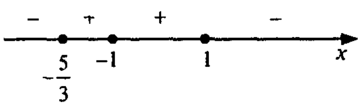
$\Rightarrow$ 3)

35. $(5x+3)(4-x)x^2<0$



$\Rightarrow$ 4)

36. $(3x+5)(1-x)(x+1)^2\le 0$



$\Rightarrow$ 2)

37. $\dfrac{x^2}{x-2}\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x>2 \end{array}\right. \Rightarrow 1)$

38. $\dfrac{x+2}{(x-4)^2}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x<4 \\ x>4 \end{array}\right. \Rightarrow 1)$

39. $\dfrac{x^2-2x+1}{x}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x<0 \end{array}\right. \Rightarrow 3)$

40. $\dfrac{x-3}{x^2+6x+9}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{(x+3)^2}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 3 \\ x\ne -3 \end{array}\right. \Rightarrow 1)$

41. $\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x-6)}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 6 \\ x\ne 1 \end{array}\right. \Rightarrow 2)$

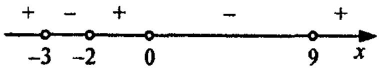
42. $\dfrac{x^2-5x-6}{6-x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-6)(x+1)}{x-6} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -1 \\ x \ne 6 \end{array}\right. \Rightarrow$

43. $\dfrac{x-2}{x^2+2x-8} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{(x-2)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow x > -4 \Rightarrow 3)$

44. $-\dfrac{x+4}{x^2+6x+8} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{(x+2)(x+4)} < 0 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow$

45. $\dfrac{x^2-4}{x^2+7x+15} \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Rightarrow 1)$

46. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9x} > 0 \quad \dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x-9)} > 0$



$\Rightarrow$ условие неверно

47. $\dfrac{x^2+2x+5}{5x-x^2} < 0 \Leftrightarrow x(x-5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow 3)$

48. $\dfrac{x^2-1}{-x^2+4x-5} > 0 \Leftrightarrow x^2-1 < 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow 1)$

49. $56x+7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{8} \Rightarrow 4)$

50. — 1

51. условие неверно

52. — 3)

53. — 1)

54. — 3)

55. — 4)

56. — 1)

57. — 4)

58. — 1)

59. — 3)

60. — 1)

61. — 4)

62. — 1)

63. — 3)

64. — 4)

65. $\begin{cases} 16x-96 \le 0 \\ 10-5x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow 1)$

66. $\begin{cases} 14x-70 \ge 0 \\ 9-3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 5 \Rightarrow 3)$

67. $\begin{cases}15x+60<0\\-42-6x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-4\\x\le -7\end{cases}\Leftrightarrow x\le -7\Rightarrow 4)$

68. $\begin{cases}-28-4x\le 0\\5x+35\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -7\\x\le -7\end{cases}\Leftrightarrow x=-7\Rightarrow 3)$

69. $\begin{cases}-2\le 3x+1\le 7\\x+23>5x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 2\\x<6\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 2\Rightarrow 2)$

70. $\begin{cases}-3<2x-7<3\\6x-13<x+17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<5\\x<6\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<5\Rightarrow 1)$

71. $\begin{cases}1\le 5x-4\le 26\\x+21>7x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 6\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x<3\Rightarrow 3)$

72. $\begin{cases}-4<7x+3<31\\x-13\le 2x-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x<4\Rightarrow 2)$

73. $\begin{cases}x^2-x-56<0\\x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-8)(x+7)<0\\x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7<x<8\\x\ge -4\end{cases}\Leftrightarrow -4\le x<8\Rightarrow 1)$

74. $\begin{cases}x-10<0\\x^2-2x-63\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<10\\(x-9)(x+7)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<10\\\left[\begin{array}{l}x\ge 9\\x\le -7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9\le x<10\\x\le -7\end{cases}\Rightarrow 1)$

75. $\begin{cases}x^2+3x-40>0\\1-3x>-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+8)(x-5)>0\\x<\dfrac{10}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>5\\x<-8\end{array}\right.\\x<3\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x<-8\Rightarrow 2)$

76. $\begin{cases}x^2+4x-45\le 0\\3-2x\le 25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+9)(x-5)\le 0\\x\ge -11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9\le x\le 5\\x\ge -11\end{cases}\Leftrightarrow -9\le x\le 5\Rightarrow 3)$

77. — 4)
78. — 2)
79. — 1)
80. — 4)
81. — 1)
82. — 2)
83. — 4)
84. — 1)
85. правильный ответ $[-5;-2]\cup(-2;5]$
86. — 3)
87. — 2)

88. $\dfrac{\sqrt{4x+6}}{x-2}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}4x+6\ge 0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1,5\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2\Rightarrow 1)$

89. $\dfrac{2x+4}{\sqrt{9-6x}} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \ge 0 \\ 9-6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow 3)$

90. $\dfrac{x+9}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x > -9 \Rightarrow -8$

91. $\dfrac{17}{2x-4} < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow 1$

92. $\dfrac{3x-11}{x^2+3} \le 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{11}{3} \Rightarrow 3$

93. $\dfrac{-25}{x+8} \le 0 \Leftrightarrow x > -8 \Rightarrow -7$

94. $-5 \le 2x+11 \le 1 \Leftrightarrow -8 \le x \le -5 \Rightarrow 3$

95. $-3 \le 4x-9 \le 3 \Leftrightarrow 1{,}5 \le x \le 3 \Rightarrow 1{,}5$

96. $-2 < 7-3x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 1$

97. $-4 < 6-5x < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow 0$

98. $|x+3| < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \Rightarrow 3$

99. $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow 5$

100. $|3-5x| \le 7 \Leftrightarrow -0{,}8 \le x \le 2 \Rightarrow 0{,}6$

101. $|5-2x| \le 9 \Leftrightarrow 2 \le x \le 7 \Rightarrow 4{,}5$

102. $x^2 - x - 30 < 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+5) < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 6 \Rightarrow 10$

103. $x^2 - 11x - 12 > 0 \Leftrightarrow (x-12)(x+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 12 \\ x < -1 \end{array}\right. \Rightarrow 12$

104. $9x^2 - 5x - 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(9x+4) \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{9} \le x \le 1 \Rightarrow 2$

$D = 5^2 + 4 \cdot 9 \cdot 4 = 169 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = -\dfrac{4}{9}$

105. $-4x^2 + 5x + 9 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x-9) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{9}{4} \\ x < -1 \end{array}\right. \Rightarrow 3$

106. $\dfrac{x-8}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow -1 < x \le 8 \Rightarrow 9$

107. $\dfrac{5x+15}{4-x} \ge 0 \dfrac{x+3}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x < 4 \Rightarrow 7$

108. $\dfrac{3-9x}{x+5} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x+5} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ x > \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow 0$

109. $\dfrac{x-6}{6-2x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-6}{x-3} \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x \ge 6 \end{array}\right. \Rightarrow 3$

110. $\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+3}>0\\ 2x+6<11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>5\\ x<-3\end{array}\right. \Leftrightarrow x<-3 \Rightarrow -4\\ x<2{,}5\end{cases}$

111. $\begin{cases}\dfrac{-6-x}{3x-12}\le 0\\ 9x+6>4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+6}{x-4}\ge 0\\ x>-\dfrac{2}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>4\\ x\le -6\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{2}{9}\end{cases} \Leftrightarrow x>4 \Rightarrow 5$

112. $\dfrac{x-6}{\sqrt{5x-8}}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 6\\ 5x-8>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 6\\ x>1{,}6\end{cases} \Rightarrow 5$

113. $\dfrac{\sqrt{3x+18}}{1-x}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}3x+18\ge 0\\ 1-x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -6\\ x>1\end{cases} \Rightarrow x>1 \Rightarrow$ бесконечно много

114. $x^2+(n-2)x-(n-5)=0$

$D=(n-2)^2+4(n-5)=n^2-16>0 \Rightarrow (-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$

115. $x^2-(n+1)x-(n-2)=0$

$D=(n+1)^2+4(n-2)=n^2+6n-7<0 \Rightarrow (-7;1)$

Задачи на составление уравнений или систем уравнений

1. — 3)
2. — 4)
3. — 2)
5. — 3)
6. — 3)

7. $p_1=0{,}8p,\ p_2=\left(1+\dfrac{x}{100}\right)p_1,\ p_2=p_0$

$p_0=\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\cdot 0{,}8p_0 \Rightarrow 1{,}25=1+\dfrac{x}{100} \Rightarrow x=25\%$

8. $S=0{,}3S+1{,}2\cdot 0{,}3S+34$ км, S — ?

$0{,}34S=34$ км $\Rightarrow S=100$ км

9. $0{,}72\cdot 360$ т $=259{,}2$ т

10. $p_1=0{,}2p_2,\ p_2=2p_3 \Rightarrow p_1=0{,}4p_3 \Rightarrow 60\%$

11. $x_с=0{,}2x_м,\ x_{см}=0{,}25x_с \Rightarrow x_{см}=0{,}05x_м$

$x_{см}=180$ г $\Rightarrow x_м=3{,}6$ кг $=3{,}6$ л

12. $x_в=180$ г, $x_с=20$ г $\Rightarrow \dfrac{x_с}{x_в+x_с}\cdot 100^\circ=10\%$

13. $\dfrac{0{,}3x}{x+60}=0{,}1 \Rightarrow 0{,}2x=6 \Rightarrow x=30$ г

14. $\dfrac{0{,}36\cdot 3}{3+x}=0{,}24 \Rightarrow x=1{,}5$ л

15. $0,55x + 0,7(750 - x) = 0,6 \cdot 750$, $0,15x = 75$, $x = 500$ г

16. $0,15(480 - x) + 0,07x = 0,1 \cdot 480$, $0,08x = 24$, $x = 300$ г

17. $30000(1 + 0,09)^2 = 35643$ р.

18. $25000(1 + 0,04)^3 = 28121$ р. 60 к.

19. $x_3 = x_2 - 220$, $x_1 = 2x_2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 2600$, x_1 — ?

$2600 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 - 220 = 2x_1 - 220 \Rightarrow x_1 = 1410$

20. $x_1 = 2x_2$, $x_3 = x_1 - 1200$, $x_1 + x_2 + x_3 = 6780$, x_1 — ?

$6780 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 0,5x_1 + x_1 - 1200 = 2,5x_1 - 1200 \Rightarrow x_1 = 3192$

21. $v_1 = 12$ км/ч, $v_2 = 14$ км/ч, $v_1(t + 4) = S = v_2 t$, S — ?

$$v_1(t+4) = v_2 t \Rightarrow t = \frac{4v_1}{v_2 - v_1} = 24 \Rightarrow S = v_2 t = 336 \text{ км}$$

22. $v_p = 2,4$ км/ч, $\dfrac{S}{v + v_p} = 4$ ч 30 мин, $\dfrac{S}{v - v_p} = 6$ ч 18 мин, S — ?

$4,5(v + 2,4) = S = 6,3(v - 2,4) \Rightarrow v = 14,4$ км/ч $\Rightarrow S = 75,6$ км

23. $a = 3b$, $a(b + 2) = ab + 126$, $P = 2(a + b)$ — ?

$a(b + 2) = ab + 126 \Rightarrow a = 63 \Rightarrow b = 21 \Rightarrow P = 168$ см

24. $a = b - 17$, $a^2 + b^2 = 25^2$, $S = \dfrac{1}{2}ab$ — ?

$a^2 + (a + 17)^2 = 625$

$2a^2 + 34a - 336 = 0$

$D = 34^2 + 4 \cdot 2 \cdot 336 = 3844 = 62^2 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = 24 \Rightarrow S = 84$ см^2

25. $V = 4v_1 = 6v_2$, $\dfrac{V}{v_1 + v_2}$ — ?

$$v_1 = 1,5v_2,\ v_2 = \frac{1}{6}V \Rightarrow \frac{V}{v_1 + v_2} = \frac{V}{2,5v_2} = 2,4 \text{ ч}$$

26. $Q = (v_1 + v_2) \cdot 3,6 = 6 \cdot v_1$, $\dfrac{Q}{v_2}$ — ?

$$v_2 = \frac{2}{3}v_1,\ v_1 = \frac{1}{6}Q \Rightarrow v_2 = \frac{1}{9}Q \Rightarrow \frac{Q}{v_2} = 9$$

27. $2,5p_1 + 4p_2 = 2120$

$2,5(p_1 - 0,2p_1) + 4(p_2 + 0,1p_2) = 1882$, $p_1 p_2$ — ?

$$\begin{cases} 2,5p_1 + 4p_2 = 2120 \\ 2p_1 + 4,4p_2 = 1882 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 941 - 2,2p_2 \\ 2,5(941 - 2,2p_2) + 4p_2 = 2120 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 941 - 2,2p_2 \\ p_2 = 155 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 600 \\ p_2 = 155 \end{cases}$$

28. $8p_1 + 10p_2 = 4560$, $8(p_1 - 0{,}25p_1) + 10(p_2 - 0{,}1p_2) = 3780$, $p_1 p_2$ — ?

$$\begin{cases} 8p_1 + 10p_2 = 4560 \\ 6p_1 + 9p_2 = 3780 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 630 - 1{,}5p_2 \\ 8(630 - 1{,}5p_2) + 10p_2 = 4560 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 630 - 1{,}5p_2 \\ p_2 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p_1 = 270 \\ p_2 = 240 \end{array}\right.$$

29. $4(v_1 + v_2) = 500$, $3{,}6v_1 + \left(3{,}6 + \dfrac{5}{6}\right)v_2 = 500$, v_1, v_2 — ?

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 125 \\ 3{,}6(v_1 + v_2) + \dfrac{5}{6}v_2 = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 125 - v_2 \\ v_2 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 65 \\ v_2 = 60 \end{cases}$$

30. $\dfrac{80}{v + v_p} + \dfrac{40}{v - v_p} = 6{,}5;\quad \dfrac{40}{v + v_p} + \dfrac{80}{v - v_p} = 7;\ v, v_p$ — ?

$$6{,}5 = 2\left(\frac{40}{v + v_p}\right) + \frac{40}{v - v_p} = 2\left(7 - \frac{80}{v - v_p}\right) + \frac{40}{v - v_p} =$$

$$= 14 - \frac{120}{v - v_p} \Rightarrow v - v_p = 16$$

$$v + v_p = \frac{40}{7 - \dfrac{80}{v - v_p}} = 20 \Rightarrow\ v = 18 \text{ и } v_p = 2$$

31. $ab + 632 = (a + 8)(b + 6)$; $ab + 164 = (a - 6)(b + 8)$;
$P = 2(a + b)$ — ?

$$\begin{cases} 6a + 8b = 584 \\ 8a - 6b = 212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 73 - 0{,}75a \\ 25a = 1300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 52 \\ b = 34 \end{cases} \Rightarrow P = 2(a + b) = 172$$

32. $v_1 = v_2 + 20$ км/ч, $\dfrac{700}{v_1} = \dfrac{700}{v_2} - 4$ ч, v_2 — ?

$$\begin{cases} 700(v_1 - v_2) = 4v_1v_2 \\ v_1 - v_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \cdot v_2 = 3500 \\ v_1 = v_2 + 20 \end{cases} \Rightarrow v_2(v_2 + 20) = 3500$$

$$v_2^2 + 20v_2 - 3500 = 0$$

$$\left.\left[\begin{array}{l} v_2 = 50 \\ v_2 = -70 \end{array}\right.\right| \Rightarrow v_2 = 50 \text{ км/ч}$$

33. $\dfrac{36}{v_1} = \dfrac{36}{v_2} - 0{,}5;\ v_1 = v_2 + 1;\ v_1, v_2$ — ?

$$\begin{cases} 36(v_1 - v_2) = 0{,}5v_1v_2 \\ v_1 - v_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1v_2 = 72 \\ v_1 - v_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow v_1(v_1 - 1) = 72 \quad \text{и} \quad v_2(v_2 + 1) = 72 \quad \Rightarrow$$

$$v_1^2 - v_1 - 72 = 0 \text{ и } v_2^2 + v_2 - 72 = 0 \ \Rightarrow\ v_1 = 9 \text{ км/ч и } v_2 = 8 \text{ км/ч}$$

34. $\dfrac{105}{v+v_p}=\dfrac{105}{v-v_p}-2,\ v=18$ км/ч, v_p — ?

$105(18-v_p)=105(18+v_p)-2\left(18^2-v_p^2\right)$

$2v_p^2+210v_p-648=0$; $2v_p^2+105v_p-324=0$; $v_p=3$ км/ч

35. $Q=6(v_1+v_2)$; $\dfrac{Q}{v_1}=\dfrac{Q}{v_2}-5$; $\dfrac{Q}{v_2}$ — ?

$5=\dfrac{Q}{v_2}-\dfrac{Q}{v_1}=Q\dfrac{v_1-v_2}{v_1v_2}=6\dfrac{v_1^2-v_2^2}{v_1\cdot v_2}\Rightarrow\ 6v_1^2-5v_1v_2-6v_2^2=0\ \Rightarrow v_1=1{,}5v_2$

$Q=6(v_1+v_2)=15v_2\Rightarrow\dfrac{Q}{v_2}=15$

36. $Q=12(v_1+v_2)$; $\dfrac{Q}{v_1}=\dfrac{Q}{v_2}-10$; $\dfrac{Q}{v_2}$ — ?

$10=\dfrac{Q}{v_2}-\dfrac{Q}{v_1}=Q\dfrac{v_1-v_2}{v_1v_2}=12\dfrac{v_1^2-v_2^2}{v_1\cdot v_2}\Rightarrow\ 6v_1^2-5v_1v_2-6v_2^2=0\ \Rightarrow v_1=1{,}5v_2$

$Q=12(v_1+v_2)=30v_2\ \Rightarrow\ \dfrac{Q}{v_2}=30$

37. $\dfrac{Q}{v_1}=\dfrac{Q}{v_2}-15$; $10v_1+30v_2=Q$; $\dfrac{Q}{v_1+v_2}$ — ?

$Q(v_1-v_2)=15v_1\cdot v_2=10v_1^2+20v_1v_2-30v_2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 2v_1^2+v_1v_2-6v_2^2=0\Rightarrow v_1=1{,}5v_2$

$\dfrac{Q}{v_1+v_2}=\dfrac{10v_1+30v_2}{v_1+v_2}=\dfrac{45v_2}{2{,}5v_2}=18$

38. $\dfrac{Q}{v_1}=\dfrac{Q}{v_2}-10$; $10v_1+15v_2=Q$; $\dfrac{Q}{v_1+v_2}$ — ?

$Q(v_1-v_2)=10v_1\cdot v_2=10v_1^2+5v_1v_2-15v_2^2\Rightarrow\ 2v_1^2+v_1v_2-3v_2^2=0\Rightarrow v_1=1{,}5v_2$

$\dfrac{Q}{v_1+v_2}=\dfrac{10v_1+15v_2}{v_1+v_2}=\dfrac{30v_2}{2{,}5v_2}=12$

Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. — 2)	**2.** — 3)	**3.** — 4)	**4.** — 3)	**5.** — 1)	**6.** — 1)
7. — 2)	**8.** — 3)	**9.** — 4)	**10.** — 2)	**11.** — 1)	**12.** — 2)
13. — 1)	**14.** –640	**15.** — 1)	**16.** — 2)	**17.** — 4)	**18.** — 1)
19. — 4)	**20.** — 2)	**21.** — 3)	**22.** — 2)	**23.** — 1)	**24.** — 4)
25. - - 1)	**26.** — 2)	**27.** — 3)	**28.** — 2)	**29.** — 3)	**30.** — 3)
31. — 3)	**32.** — 4)	**33.** — 3)	**34.** –16,5	**35.** — 3)	**36.** — 2)

37. $a_3=-2$, $a_9=19$; $21=a_9-a_3=6d\ \Rightarrow\ d=3{,}5$

38. $a_5 = 9,\ a_{16} = -24,\ -33 = a_{16} - a_5 = 11d \Rightarrow d = -3$

39. $a_5 = 43;\ a_9 = -21;\ -64 = a_9 - a_5 = 4d \Rightarrow d = -1{,}6;\ \ 22 = a_5 + a_9 = 2a_1 + 12d \Rightarrow a_1 = 107$

40. $a_7 = 36,\ a_{15} = 64;\ 28 = a_{15} - a_7 = 8d \Rightarrow d = 3{,}5;\ 100 = a_7 + a_{15} = 2a_1 + 20d \Rightarrow a_1 = 15$

41. $b_6 = \frac{1}{25},\ b_{10} = 400,\ q > 0,\ 10000 = \frac{b_{10}}{b_6} = q^4 \Rightarrow q = 10$

42. $b_5 = 3,\ b_7 = \frac{3}{25};\ 0 < q < 1,\ \frac{1}{25} = \frac{b_7}{b_5} = q^2 \Rightarrow q = +\frac{1}{5}$

43. $b_3 = 5,\ b_7 = 405,\ 81 = \frac{b_7}{b_3} = q^4 \Rightarrow q = -3$

44. $d = 0{,}5\ a_n = 15,\ q_1 = -1 \Rightarrow a_n = -1 + (n-1)0{,}5 = 15 \Rightarrow n = 33$

45. $d = -\frac{2}{3},\ a_1 = 2,\ a_n = -4 \Rightarrow a_n = 2 - \frac{2}{3}(n-1) = -4 \Rightarrow n = 10$

46. $q = 3,\ b_1 = 4,\ b_n = 972 \Rightarrow b_n = 4\cdot 3^{(n-1)} = -4 \Rightarrow n = 10$

47. $q = \frac{1}{5},\ b_1 = 20,\ b_n = \frac{4}{625} \Rightarrow b_n = 20\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{4}{625} \Rightarrow n = 6$

48. $a_1 = -14,\ d = 2{,}5,\ a_n > 0,\ a_n = -16{,}5 + 2{,}5n > 0 \Rightarrow n > 6{,}6 \Rightarrow n = 7$

49. $a_1 = 28,\ d = -1{,}5,\ a_n = 29{,}5 - 1{,}5n < 0 \Rightarrow n > 19\frac{2}{3} \Rightarrow n = 20$

50. $a_n = -38{,}4 + 6{,}5n \geq 0 \Rightarrow n \geq 6 \Rightarrow n = 6$

51. $a_n = 17{,}5 - 2{,}5n \leq 0 \Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow n = 7$

52. $a_n = -9 + 4n \geq 27 \Rightarrow n \geq 9 \Rightarrow n = 9$

53. $a_n = -1 + 4n > 55 \Rightarrow n > 14 \Rightarrow n = 15$

54. $a_n = 2{,}5 - 1{,}5n \leq -13 \Rightarrow n \geq 11 \Rightarrow n = 11$

55. $a_n = 19 - 3n < -8 \Rightarrow n > 9 \Rightarrow n = 10$

56. $b_1 = 6,\ q = 3,\ S_n = 726,\ S_n = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = 3(3^n - 1) = 726 \Rightarrow n = 5$

57. $b_1 = 128,\ q = \frac{1}{2},\ b_n = \frac{1}{4},\ b_n = b_1 q^{n-1} = 128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 10$

58. $\begin{cases} a_4 + a_{10} = 36 \\ a_8 - a_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 12d = 36 \\ 5d = 2 \end{cases} \Rightarrow d = 0{,}4$

59. $\begin{cases} a_5 + a_8 = 16 \\ a_7 - a_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 11d = 16 \\ 5d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3{,}6 \\ d = 0{,}8 \end{cases}$

60. $\begin{cases} a_6 + a_5 = -4 \\ a_8 + a_{10} = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9d = -4 \\ 2a_1 + 16d = -18 \end{cases} \Rightarrow 7d = -14 \Rightarrow d = -2$

61. $\begin{cases} a_6 + a_8 = 15 \\ a_2 \cdot a_{12} = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 12d = 15 \\ (a_1 + d)(a_1 + 11d) = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7,5 - 6d \\ (7,5 - 5d)(7,5 + 5d) = 56 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 56,25 - 25d^2 = 56 \qquad d^2 = 0,01,\ d > 0 \Rightarrow d = 0,1$

62. $\begin{cases} a_7 + a_2 = 15 \\ a_5 \cdot a_4 = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7d = 15 \\ (a_1 + 4d)(a_1 + 3d) = -36 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7,5 - 3,5d \\ (7,5 + 0,5d)(7,5 - 0,5d) = -36 \end{cases} \Rightarrow 56,25 - 0,25d^2 = -36$

$d^2 = 369,\ d < 0 \Rightarrow d = -3\sqrt{41}$

63. $\dfrac{3t + 2 + 15t + 1}{2} = 2t + 5$, $9t + 1,5 = 2t + 5$, $t = 0,5$

64. $\dfrac{3t - 4 + 4t + 10}{2} = 5t$, $3,5t + 3 = 5t$, $t = 2$

65. $a_3 = 10,\ a_{12} = 37,\ n = 21,\ 27 = a_{12} - a_3 = 9d \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = a_3 - 2d = 4,$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = 714$

66. $a_8 = 8,\ a_{15} = -27,\ n = 10,\ -35 = a_{15} - a_8 = 7d \Rightarrow d = -5 \Rightarrow a_1 = a_8 - 7d = 43,$

$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = 205$

67. $a_n = 12n < 100 \Rightarrow n < 8\frac{1}{3} \Rightarrow n = 8$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{12 + 12n}{2} \cdot n = 6n(n+1) = 432$

68. $a_n = 8 + 8n < 100 \Rightarrow n < 11,5 \Rightarrow n = 11$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{16 + 8 + 8n}{2} \cdot n = 4n(n+3) = 616$

69. $a_n = 3 + 8n < 100 \Rightarrow n < 12\frac{1}{8} \Rightarrow n = 12$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{11 + 3 + 8n}{2} \cdot n = n(4n + 7) = 660$

70. $a_n = 4 + 6n < 100 \Rightarrow n < 16 \Rightarrow n = 15$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{10 + 4 + 6n}{2} \cdot n = n(3n + 7) = 780$

71. $S_{25} = 525,\ a_1 = -51,\ S_{25} = \dfrac{2a_1 + 24d}{2} \cdot 25 = 25(15d - 51) = 525 \Rightarrow d = 6$

72. $S_{16} = 432,\ d = -2,\ S_{16} = \dfrac{2a_1 + 15d}{2} 16 = 16(a_1 - 15) = 432 \Rightarrow a_1 = 42$

73. $\sqrt{7 \cdot 448} = 56 \Rightarrow 56$

74. $\sqrt{\dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{192}} = \dfrac{1}{48} \Rightarrow -\dfrac{1}{48}$

75. $\sqrt{(p-3)(p+2)}=\sqrt{4p} \Rightarrow p \ge 3$, $p^2-p-6=4p$

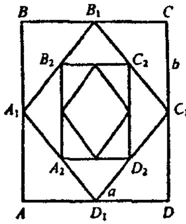
$$p^2-5p-6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=6 \\ p=-1 \end{array}\right. \Rightarrow p=6$$

76. $\sqrt{(p-5)(p+4)}=\sqrt{7p} \Rightarrow p \ge 5$, $p^2-p-20=7p$

$$p^2-8p-20=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=10 \\ p=-2 \end{array}\right. \Rightarrow p=10$$

77. $a=16$, $b=18$. Площадь прямоугольника $ABCD$: $S_1=ab=288$.

Площадь вписанного ромба $A_1B_1C_1D_1$: $S_2=S_1-4S_{\Delta A_1AD_1}=S_1-\dfrac{ab}{2}=\dfrac{ab}{2}$.



Т.к. вершины прямоугольника $A_2B_2C_2D_2$ лежат на серединах сторон ромба $A_1B_1C_1D_1$, а стороны ромба $A_1B_1C_1D_1$ лежат на серединах сторон прямоугольника $ABCD$, то $A_2B_2=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{b}{2}$ и $B_2C_2=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{2} \Rightarrow$

Площадь очередного прямоугольника, вписанного в ромб $A_1B_1C_1D_1$: $S_3=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}=\dfrac{ab}{4}=ab\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Проводя аналогичные рассуждения с прямоугольником $A_2B_2C_2D_2$ и т.д., получаем: $S_1=ab$, $S_2=ab\cdot\dfrac{1}{2}$, $S_3=ab\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, ..., $S_n=ab\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Эта геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}$.

78. $b_1=30000$, $q=1{,}03 \Rightarrow S=b_1q^6=35821{,}57$

79. $\sqrt{b_1\cdot b_3}=b_2$, $\dfrac{(b_1+25)+\dfrac{b_3}{3}}{2}=b_2$, $b_2=60$

$$\begin{cases} b_1\cdot b_3=3600 \\ 3b_1+b_3=285 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_3=285-3b_1 \\ b_1^2-95b_1+1200=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} b_1=80 \Rightarrow b_3=45 \\ b_1=15 \Rightarrow b_3=240 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ $b_1=80$, $b_2=60$, $b_3=45$ и $b_1=15$, $b_2=60$, $b_3=240$

80. $\dfrac{a_1+a_3}{2}=a_2$, $\sqrt{2a_1(a_3+6)}=a_2$, $a_2=4a_1>0$.

$$\begin{cases} a_3=7a_1 \\ a_1(a_3+6)=8a_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3=7a_1 \\ a_1^2-6a_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=6 \\ a_3=42 \end{cases} \Rightarrow a_2=24$$

$\Rightarrow$ $a_1=6$, $a_2=24$, $a_3=42$

Учебно-методическое издание

Филиппов Александр Николаевич

Домашняя работа по алгебре за 9 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *Д.А. Ярош*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебна

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться
по тел.: 641-00-30 (многоканальный).