

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ

10-11

К заданиям учебника
А.Н. Колмогорова,
А. М. Абрамова и др.

Алгебра
и начала анализа

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

А. Н. РУРУКИН

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ
ИЗ УЧЕБНИКА
ПО АЛГЕБРЕ
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

авторов:

А.Н. Колмогорова и др.

(М.: Просвещение)

10–11
классы

МОСКВА • «БАКО» • 2008

УДК 337:167.1 [512+517]

ББК 22.14я72

Р87

Рурукин А.Н.

Р87 Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа авторов А.Н. Колмогорова и др. для 10–11 классов. – М.: ВАКО, 2008. – 288 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-745-7

Пособие содержит профессиональный подробный разбор заданий из учебника по Алгебре и началам анализа авторов А.Н. Колмогорова и др. для 10–11 классов. Приводятся также алгоритмы решения типовых задач. Ответы и решения разбиты по тематическим разделам в соответствии с логикой учебника.

Автор пособия кандидат физико-математических наук, преподаватель с 25-летним стажем педагогической деятельности.

УДК 337:167.1 [512+517]

ББК 22.14я72

Учебно-методическое издание

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР*

Рурукин Александр Николаевич

**Подробный разбор заданий из учебника
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

авторов: А.Н. Колмогорова и др.

10–11 классы

Налоговая льгота —

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 25.03.2008.

Формат 70×100/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. листов 9. Тираж 10 000 экз. Заказ № 26182.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 978-5-94665-745-7

© ООО «ВАКО», 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции числ. вого аргумента	4
§ 2. Основные свойства функций	12
§ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств	36

Глава II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4. Производная	54
§ 5. Применения непрерывности и производной	69
§ 6. Применения производной к исследованию функций	80

Глава III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 7. Первообразная	98
§ 8. Интеграл	107

Глава IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 9. Обобщение понятия степени	117
§ 10. Показательная и логарифмическая функции	131
§ 11. Производная показательной и логарифмической функции	156

Глава V. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Действительные числа	165
§ 2. Тожественные преобразования	173
§ 3. Функции	184
§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств	198
§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения	221

Глава VI. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. Числа и преобразования выражений	232
§ 2. Элементарные функции и их свойства	241
§ 3. Уравнения, неравенства и системы	253
§ 4. Начала анализа	275

Глава I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента

1а) Для перевода градусной меры углов в радианную надо учесть, что 1° составляет $\frac{\pi}{180}$ радиан. Тогда получаем: $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$, $36^\circ = 36 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$, $180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; π .

2а) Для перевода радианной меры углов в градусную учтем, что 1 радиан составляет $\frac{180}{\pi}$ градусов. Тогда получаем: $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 90^\circ$, $\frac{5\pi}{36} = \frac{5\pi}{36} \cdot \frac{180}{\pi} = 25^\circ$. Ответ: 60° ; 90° ; 25° .

3а) Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдем: $\sin 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{2\pi}{4} = 0 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

4а) Функции $\sin \alpha$ и $\cos \beta$ ограничены, т.е. $|\sin \alpha| \leq 1$ и $|\cos \beta| \leq 1$. Поэтому число α , для которого $\sin \alpha = -0,5$ существует. Число β , для которого $\cos \beta = \sqrt{3}$ не существует, т.к. $\sqrt{3} \approx 1,7 > 1$. Функция $\lg \gamma$ не ограничена. Следовательно, число γ , для которого $\lg \gamma = -2,5$, существует. Ответ: α, γ — существуют, β — не существует.

5) Тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ связаны основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Проверим выполнение этого равенства для данных значений синуса и косинуса.

а) Если $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ и $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, то $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1$. Поэтому такое число α существует.

Ответ: могут.

в) Если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, то $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} + \frac{5}{9} = \frac{11}{9} \neq 1$. Поэтому такое число α не существует.

Ответ: не могут.

6) Функции тангенс и котангенс угла α связаны соотношением $\lg \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$. Проверим выполнение этого равенства для данных значений тангенса и котангенса.

а) Если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{3}$, то $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 1$.
Поэтому такое число α существует. **Ответ:** могут.

в) Если $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$ и $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$, то $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 2,4 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{-12}{12} = -1 \neq 1$. Поэтому такое число α не существует. **Ответ:** не могут.

7а) Сначала найдем $\cos \alpha$, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Подставив данное значение $\sin \alpha = -0,8$, получаем: $(-0,8)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ или $0,64 + \cos^2 \alpha = 1$, откуда $\cos^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36$. Учтем, что $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ (третья четверть) и значение $\cos \alpha$ отрицательно. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{0,36} = -0,6$. Теперь найдем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\cos \alpha = -0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$.

8а) Для преобразования выражения $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$ используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество. Получаем: $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha + (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$. **Ответ:** $\sin^2 \alpha$.

8б) Для преобразования данного выражения используем основное тригонометрическое тождество, учтем, что $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ и приведем дроби к общему знаменателю. Получаем: $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + \operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t - (\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos^4 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-\cos^2 t}{\cos^4 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-1}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-\cos^2 t}{\cos^2 t} = -1$. **Ответ:** -1 .

9а) В числителе дроби используем формулу для косинуса суммы двух углов, в знаменателе — для синуса суммы двух углов. Тогда

$$\begin{aligned} \text{получаем: } & \frac{\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} - \sin \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15}}{\cos 0,3\pi \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cos 0,2\pi} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right)}{\sin(0,2\pi + 0,3\pi)} = \frac{\cos \frac{5\pi}{15}}{\sin 0,5\pi} = \\ & = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

9в) Используем формулу для тангенса суммы двух углов. Имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{20} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{20} + \frac{3\pi}{20} \right) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{20} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

10а) Для угла α найдем $\cos \alpha$, используя основное тригонометрическое тождество. При этом учтем, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (вторая четверть)

и значение $\cos \alpha$ отрицательно: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$. Для угла β найдем $\sin \beta$. Учтем, что

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ (вторая четверть) и значение $\sin \beta$ положительно: $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$. Итак, имеем:

$\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$. Теперь легко вычислить, используя формулы двойного аргумента и формулу для синуса разности углов и формулу для косинуса суммы углов. Тогда получаем:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25};$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{12}{13} = -\frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{16}{65};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{33}{65}.$$

Ответ: $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\beta = -\frac{119}{169}$; $\sin(\alpha - \beta) = \frac{16}{65}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{33}{65}$.

11а) Используем формулы для синуса и косинуса разности двух углов. Получаем:

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta - (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta). \quad \text{Ответ: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

11в) Используем формулы для косинуса и синуса суммы двух углов и значения синуса и косинуса угла $\frac{\pi}{4}$. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right)}{2\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha$.

12а) Для нахождения значений тригонометрических функций используем формулы приведения и понятие четности и нечетности функций. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{8} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8}; \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}; \\ \operatorname{tg}(0,6\pi) &= \operatorname{tg}(0,5\pi + 0,1\pi) = -\operatorname{ctg}(0,1\pi); \quad \operatorname{ctg}(-1,2\pi) = \operatorname{ctg}(-\pi - 0,2\pi) = \\ &= \operatorname{ctg}(-0,2\pi) = -\operatorname{ctg}(0,2\pi). \end{aligned}$$

Ответ: $\sin \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{\pi}{3}$; $-\operatorname{ctg}(0,1\pi)$; $-\operatorname{ctg}(0,2\pi)$.

13а) Для вычисления данного выражения используем формулы приведения и таблицу значений тригонометрических функций. Получаем:

$$\begin{aligned} 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} &= 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \times \\ &\times \operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} \times \\ &\times \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

14а) Преобразуем левую часть данного равенства, используя формулу для разности синусов углов: $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \times$
 $\times \cos \frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, равенство верно. **Ответ:** верно.

15а) Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то разделив на 2 все части этого неравенства, получим неравенство того же знака $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ (т.е. угол $\frac{\alpha}{2}$ находится во второй четверти). Поэтому $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0$. Используем формулы половинного аргумента. Получаем:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{25}{26} & \text{ и } & \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26} & \text{ и } & \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}. \quad \text{Тогда } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{26}} : \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = -5. & \text{ Ответ: } & \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{26}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -5. \end{aligned}$$

186) Длина дуги l в α радиан окружности радиуса r равна $l = \alpha r$. Подставим данные величины $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ и $r = 6$ см и получим $l = \frac{3\pi}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4}\pi = 4,5\pi$ (см). Ответ: 4,5 π (см).

196) Площадь S сектора круга r , дуга которого содержит α радиан равна $S = \frac{\alpha r^2}{2}$. Подставим данные величины $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ и $r = 3$ м и получим $S = \frac{5\pi}{3} \cdot 3^2 = \frac{5\pi \cdot 9}{2} = \frac{15\pi}{2} = 7,5\pi$ (м²). Ответ: 7,5 π (м²).

21в) Для нахождения значения выражения, подставим в него величину $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Получаем: $4 \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) =$
 $= 4 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$

Ответ: 3.

22б) Для вычисления значения выражения $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ разделим его числитель и знаменатель почленно на $\cos \alpha$. Имеем:

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}. \quad \text{Теперь подставим данное значение } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}.$$

Получаем: $\frac{5/4 + 1}{5/4 - 1} = \frac{9/4}{1/4} = 9.$ Ответ: 9.

22г) Так как известно, что $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = 0,5$, то в данном выражении $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta$ выделим эту величину, используя основное тригонометрическое тождество. Получаем: $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = (1 - \cos^2 \alpha) - (1 - \sin^2 \beta) = 1 - \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \beta = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) = -0,5$. Ответ: $-0,5$.

23б) Используем формулу половинного аргумента $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$. Тогда получаем: $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right|} - \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 2 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$.

Было учтено, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$. Поэтому $\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Также была учтена формула для тангенса двойного аргумента. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. Ответ: доказано.

23г) Для доказательства данного равенства преобразуем его левую и правую части, используя основное тригонометрическое тождество. Для левой части получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} &= \sqrt{\sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} = |\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Для правой части имеем: $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha})}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} =$
 $= |\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$. Учтено, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Поэтому $|\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$.

Так как левая часть равна правой, то равенство доказано.

Ответ: доказано.

24б) Используем формулы для тангенса суммы и разности углов и преобразуем левую часть тождества. Получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} =$$

$= 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 2$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

25а) Преобразуем левую часть тождества, используя формулы для синуса и косинуса двойного аргумента. Получаем: $(\sin^2 t + 2 \sin t \cos t - \cos^2 t)^2 = ((2 \sin t \cos t) - (\cos^2 t - \sin^2 t))^2 = (\sin 2t - \cos 2t)^2 = \sin^2 2t - 2 \sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t = (\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 2 \sin 2t \cos 2t = 1 - \sin 4t$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

25б) Преобразуем левую часть тождества. Для этого в числителе и знаменателе дроби сгруппируем члены и преобразуем разность тригонометрических функций в произведение. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2 \cos 3\alpha - \sin \alpha} &= \frac{(\cos \alpha - \cos 5\alpha) - 2 \sin 3\alpha}{(\sin 5\alpha - \sin \alpha) - 2 \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{5\alpha - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + 5\alpha}{2} - 2 \sin 3\alpha}{2 \sin \frac{5\alpha - \alpha}{2} \cos \frac{5\alpha + \alpha}{2} - 2 \cos 3\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \sin 3\alpha - 2 \sin 3\alpha}{2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2 \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin 3\alpha (\sin 2\alpha - 1)}{2 \cos 3\alpha (\sin 2\alpha - 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha. \end{aligned}$$

Так как левая часть равна правой, то тождество доказано.

Ответ: доказано.

26а) Для доказательства тождества $\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$ преобразуем левую часть, используя формулы половинного аргумента и основное тригонометрическое тождество: $\cos t = \frac{\cos t}{1} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}$.

Разделим почленно числитель и знаменатель этой дроби на $\cos^2 \frac{t}{2}$:

$$\frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}. \text{ Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.}$$

Ответ: доказано.

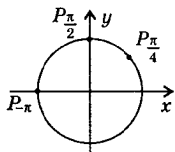
27а) Используем формулу для синуса двойного аргумента и получим: $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

276) Преобразуем разность синусов двух углов в произведение и получим: $\left(\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{18}\right) : \cos \frac{2\pi}{9} = 2 \sin \frac{7\pi - \pi}{2} \cos \frac{7\pi + \pi}{2} : \cos \frac{2\pi}{9} =$
 $= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{9} : \cos \frac{2\pi}{9} = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$ **Ответ:** 1.

29а) Изобразим данные точки P_α единичной окружности и определим их координаты: $P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$, $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $P_{-\pi}(-1; 0)$, учитывая, что $x = \cos \alpha$ и $y = \sin \alpha$.

Ответ: $P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$, $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_{-\pi}(-1; 0)$.



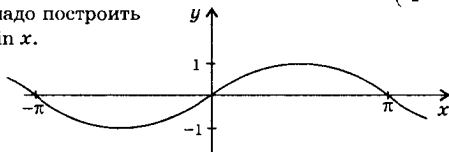
31а) Используя формулы приведения, преобразуем данное выражение:

$\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{9\pi}{8} \operatorname{tg} 2,3\pi = \sin \frac{3\pi}{7} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) \operatorname{tg} (2\pi + 0,3\pi) = \sin \frac{3\pi}{7} \left(-\cos \frac{\pi}{8}\right) \times$
 $\times \operatorname{tg} (0,3\pi) = -\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} (0,3\pi).$ Очевидно, что все углы $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{\pi}{8}$ и $0,3\pi$ находятся в первой четверти, в которой все тригонометрические функции положительны. Поэтому произведение трех тригонометрических функций положительно. Перед этим произведением стоит знак минус. Следовательно, данное число имеет знак минус.

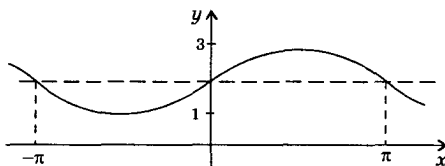
Ответ: минус.

33а) Используем формулу приведения и получим $y = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$. Поэтому надо построить график функции $y = \sin x$.

Ответ: см. график.



36а) Функция $\sin x$ определена при всех значениях x . Следовательно, область определения функции $y = 2 + \sin x$ $D(y) = R$. Для нахождения области значений данной функции учтем ограниченность функции синус, т.е. $-1 \leq \sin x \leq 1$. Ко всем частям этого двойного неравенства прибавим число 2 и получим: $-1 + 2 \leq \sin x + 2 \leq 1 + 2$ или $1 \leq y \leq 3$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = [1; 3]$. Чтобы построить график функции $y(x)$, надо график функции $\sin x$ сдвинуть вверх на две единицы.



Ответ: $D(y) = R$, $E(y) = [1; 3]$.

386) Для функции $y = 1 + \cos x$ сначала найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнение функции подставим значение $x = 0$ и получим $y = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$. Поэтому такая точка имеет координаты $(0; 2)$. Для нахождения точек пересечения графика данной функции с осью абсцисс подставим в уравнение функции $y = 0$ и решим полученное уравнение: $0 = 1 + \cos x$ или $\cos x = -1$. Решения этого уравнения $x = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, координаты таких точек пересечения $(\pi + 2\pi n; 0)$.

Ответ: $(0; 2)$, $(\pi + 2\pi n; 0)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

§ 2. Основные свойства функций

40) Чтобы найти значение функции $f(x)$ в данной точке $x = x_0$, надо поставить значение x_0 вместо x в уравнение функции и вычислить число $f(x_0)$.

а) Для функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ получаем: в точке $x = -1$: $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$; в точке $x = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = 2,5$; в точке $x = 10$: $f(10) = 10 + \frac{1}{10} = 10,1$. **Ответ:** $-2; 2,5; 10,1$.

б) Для функции $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ получаем: в точке $x = -\frac{\pi}{4}$: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0$; в точке $x = 0$: $f(0) = 3\cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; в точке $x = \pi$: $f(\pi) = 3\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -3\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Ответ:** $0; \frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

41а) Чтобы записать значение функции $f(x) = x^2 + 2x$ в данной точке x , надо подставить значение x в уравнение функции. Поэтому получаем: в точке x_0 : $f(x_0) = x_0^2 + 2x_0$, в точке $t + 1$: $f(t + 1) = (t + 1)^2 + 2(t + 1) = t^2 + 2t + 1 + 2t + 2 = t^2 + 4t + 3$.

Ответ: $f(x_0) = x_0^2 + 2x_0$, $f(t + 1) = t^2 + 4t + 3$.

42) На рисунках 26а, г изображены графики функций, т.к. каждому значению x соответствует только одно значение y . На рисунках 26б, в изображены множества точек, которые не являются графиками функций, т.к. существуют такие значения x , которым соответствует более одного значения y . Ответ: см. решение.

43а) Для функции $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ область определения задается условием $x^2-4x+3 \neq 0$ (т.к. делить на нуль нельзя), откуда получаем $x \neq 1$ и $x \neq 3$. Следовательно $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$.

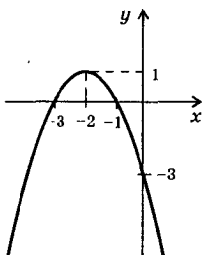
Ответ: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$.

43г) Для функции $f(x) = \sqrt{36-x^2}$ область определения задается условием $36-x^2 \geq 0$ (т.к. квадратный корень можно извлечь только из неотрицательных чисел). Решая это неравенство, получаем: $-6 \leq x \leq 6$. Следовательно, $D(f) = [-6; 6]$. Ответ: $D(f) = [-6; 6]$.

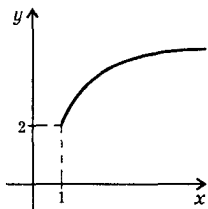
45г) Так как функция синус определена при всех значениях x , то область определения функции $y = 3 + 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ — все действительные значения x , т.е. $D(y) = R$. Для нахождения области значений данной функции учтем ограниченность функции синус, т.е. $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$. Умножим все части этого двойного неравенства на положительное число 0,5. При этом знак неравенства сохраняется: $-0,5 \leq 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0,5$. Ко всем частям неравенства прибавим число 3. Получаем: $-0,5 + 3 \leq 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \leq 0,5 + 3$ или $2,5 \leq y \leq 3,5$, т.е. область значений данной функции $E(y) = [2,5; 3,5]$. Ответ: $D(y) = R$, $E(y) = [2,5; 3,5]$.

46в) Из рисунка 27в видно, что функция $y(x)$ разрывна в точках $x_1 = -1,5$ и $x_2 = 1,5$. При этом в точке $x = 1,5$ функция не определена. Поэтому область определения данной функции $D(y) = [-6; 1,5) \cup (1,5; 6]$. Видно, что значение функции $y = 3$ не достигается. Следовательно, область значений функции $E(y) = [-3; 3)$.

Ответ: $D(y) = [-6; 1,5) \cup (1,5; 6]$, $E(y) = [-3; 3)$.



49в) Для построения графика функции $y = 1 - (x + 2)^2$ используем приемы преобразования графиков. График данной функции получается из графика функции $y = -x^2$ его параллельным переносом на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат. Ответ: см. график.

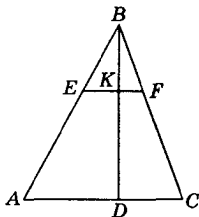


50г) Для построения графика функции $y = 2 + \sqrt{x - 1}$ используем методы преобразования графиков. График данной функции получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ его параллельным переносом вправо на 1 единицу вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат. Ответ: см. график.

51б) Найдем значения функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ в заданных точках. Так как точка $-2 < -1$, то для нахождения значения функции в этой точке пользуемся второй строчкой определения: $f(-2) = 1 - (-2) = 3$. Точки -1 ; 0 ; 4 удовлетворяют условию $x \geq -1$. Поэтому для нахождения значений функции в этих точках пользуемся первой строчкой определения. Тогда получаем: $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$, $f(0) = 0^2 - 1 = -1$ и $f(4) = 4^2 - 1 = 15$.

Ответ: $f(-2) = 3$, $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$, $f(4) = 15$.

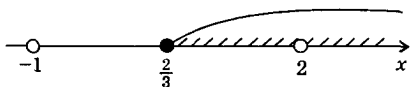
52а) Так как $EF \parallel AC$, то $\triangle EBF \sim \triangle ABC$. Поэтому: $\frac{EF}{AC} = \frac{BK}{BD}$



или $\frac{EF}{b} = \frac{x}{h}$, откуда $EF = x \frac{b}{h}$. Выразим площадь S_1 треугольника EBF : $S_1 = \frac{1}{2} EF \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{b}{h} \cdot x = \frac{bx^2}{2h}$. Тогда площадь S_2 трапеции $AEFC$ равна: $S_2 = S_{\triangle ABC} - S_1 = \frac{bh}{2} - \frac{bx^2}{2h} = \frac{bh^2 - bx^2}{2h} = \frac{b(h^2 - x^2)}{2h}$.

Ответ: $S_1 = \frac{bx^2}{2h}$, $S_2 = \frac{b(h^2 - x^2)}{2h}$.

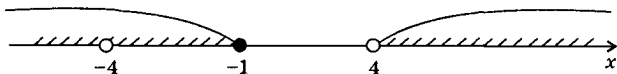
53а) Область определения функции $y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$ задается условиями: $3x-2 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) и $x^2-x-2 \neq 0$ (делить на нуль нельзя). Решение линейного неравенства $x \geq \frac{2}{3}$. Решение неравенства $x^2-x-2 \neq 0$ все x , кроме $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Изобразим полученные решения на диаграмме.



Видно, что оба неравенства выполняются при $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$, что и является областью определения данной функции.

Ответ: $D(y) = \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$.

53б) Область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$ задается условиями: $x^2-3x-4 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) и $16-x^2 \neq 0$ (делить на нуль нельзя). Решение первого неравенства $x \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$. Решение неравенства $16-x^2 \neq 0$ все x , кроме $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$. Изобразим полученные решения на диаграмме. Видно, что оба неравенства выполняются при

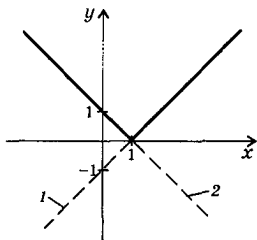


$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; \infty)$, что и является областью определения данной функции.

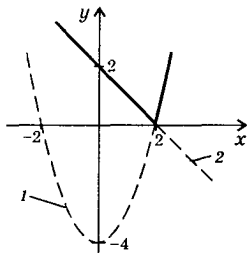
Ответ: $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; \infty)$.

54в) Область определения функции $y = \sqrt{x^2+4}$ задается неравенством $x^2+4 \geq 0$, которое выполняется при всех значениях x . Поэтому $D(y) = R$. Найдем теперь область значений функции. Очевидно, что $x^2 \geq 0$. Прибавим ко всем частям этого неравенства число 4 и получим: $x^2+4 \geq 4$. Извлечем квадратный корень из обеих положительных частей неравенства. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем $\sqrt{x^2+4} \geq \sqrt{4}$ или $\sqrt{x^2+4} \geq 2$ или $y \geq 2$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = [2; \infty)$.

Ответ: $D(y) = R, E(y) = [2; \infty)$.



линейной функции $y = 1 - x$ (прямая 2) и выберем ту его часть, для которой $x < 1$. Объединение двух этих частей и дает график данной функции (сплошная линия). **Ответ:** см. график.



состоит из части прямой и части параболы. **Ответ:** см. график.

57а) Область определения функции $f(x) = 3x^2 + x^4$ вся числовая прямая, т.е. симметричное множество. Найдём значение $f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - (-x)^4 = 3x^2 + x^4 = f(x)$. Видно, что значения функции в симметричных точках x и $-x$ одинаковы, т.е. $f(-x) = f(x)$. Поэтому данная функция чётная (по определению). **Ответ:** доказано.

58б) Область определения функции $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$ задается условием $x^2 - 1 \neq 0$ (т.к. делить на нуль нельзя), т.е. $x \neq \pm 1$. Поэтому область определения $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ — симметричное

множество. Найдём значение $f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{(-\sin x)^2}{x^2 - 1} = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1} = f(x)$. Было учтено, что функция $\sin x$ является нечётной, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$. Видно, что значения функции в симметричных точках x и $-x$ одинаковы, т.е. $f(-x) = f(x)$. Поэтому данная функция чётная (по определению). **Ответ:** доказано.

55а) Для построения графика функции $y = |x - 1|$ учтём определение модуля. Тогда получим:

$$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & \text{если } x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{если } x < 1 \end{cases}.$$

Построим график линейной функции $y = x - 1$ (прямая 1) и выберем ту его часть, для которой $x \geq 1$. Также построим график

55б) Для построения графика функ-

ции $y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x \geq 2 \\ 2 - x, & \text{если } x < 2 \end{cases}$ строим гра-

фик $y = x^2 - 4$ (парабола 1) и выбираем из него ту часть, для которой $x \geq 2$ (сплошная линия). Также построим график линейной функции $y = 2 - x$ (прямая 2) и выберем из него ту часть, для которой $x < 2$ (сплошная линия). Таким образом, график данной функции $y(x)$

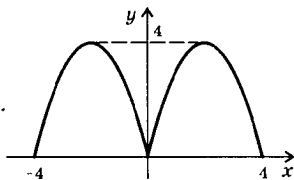
Ответ: см. график.

596) Область определения функции $f(x) = x^2(2x - x^3)$ — вся числовая ось, т.е. симметричное множество. Найдем значение функции $f(-x) = (-x)^2 \cdot (2(-x) - (-x)^3) = x^2(-2x + x^3) = -x^2(2x - x^3) = -f(x)$. Видно, что значения функции в симметричных точках x и $-x$ отличаются знаком, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, данная функция нечетная (по определению). **Ответ:** доказано.

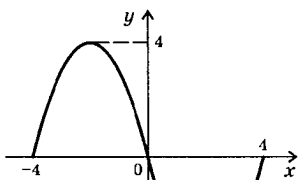
606) Область определения функции $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$ задается условием $x(25 - x^2) \neq 0$ (т.к. делить на ноль нельзя), т.е. $x \neq 0, \pm 5$. Поэтому $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 5) \cup (5; \infty)$ — симметричное

множество. Найдем значение функции $f(-x) = \frac{\cos(-x^3)}{(-x) \cdot (25 - (-x^2))} = \frac{\cos(-x^3)}{-x(25 - x^2)} = \frac{\cos x^3}{-x(25 - x^2)} = -\frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)} = -f(x)$. Была учтена четность функции косинус, т.е. $\cos(-x^3) = \cos x^3$. Видно, что значения функции в симметричных точках x и $-x$ отличаются знаком, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, данная функция нечетная (по определению). **Ответ:** доказано.

61а) На рисунке 37а приведен график функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ четная, то ее график симметричен относительно оси ординат (рис. а). Если функция $f(x)$ нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат (рис. б). Эти соображения позволяют легко построить графики функций.



а)



б)

Ответ: см. график.

62в) Область определения функции $f(x) = 3\cos 4x$ — вся числовая ось. Поэтому точки $x, x \pm T$ принадлежат области определения $D(f)$. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T , то должно выполняться равенство $f(x + T) = f(x)$. Для $T = \frac{\pi}{2}$ проверим это ра-

венство: $3\cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos(4x + 2\pi) = 4\cos 4x$, т.к. период функции косинус 2π . Таким образом, равенство выполняется. Следовательно, число $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом функции $f(x) = 3\cos 4x$.

Ответ: доказано.

63в) Докажем, что периодом функции $f(x) = \sin x + \cos x$ является число $T = 2\pi$. Область определения данной функции — вся числовая ось. Поэтому точки $x, x \pm T$ принадлежат области определения $D(f)$. Проверим выполнение равенства $f(x+T)=f(x)$. Получаем: $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$, т.к. функции синус и косинус периодичны с периодом 2π . Таким образом, равенство выполняется. Следовательно, функция $f(x) = \sin x + \cos x$ периодическая с периодом $T = 2\pi$. Ответ: доказано.

63г) Запишем данную функцию $f(x) = 3 + \sin^2 x$ в виде: $f(x) = 3 + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 3,5 - 0,5\cos 2x$. Область определения этой функции — вся числовая ось. Поэтому точки $x, x \pm T$ принадлежат области определения $D(f)$. Докажем, что периодом функции $f(x)$ является число $T = \pi$. Найдём значение функции $f(x + T) = f(x + \pi) = 3,5 - 0,5\cos 2(x + \pi) = 3,5 - 0,5\cos(2x + 2\pi) = 3,5 - 0,5\cos 2x = f(x)$. Было учтено, что функция косинус периодическая с периодом 2π . Таким образом, выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Следовательно, данная функция периодическая. Ответ: доказано.

64а) Так как функция синус периодичная с периодом $T = 2\pi$, то функция $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$ также периодичная с периодом $\frac{T}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$.

Ответ: 8π .

674б) Так как функция тангенс периодичная с периодом $T = \pi$, то функция $y = 3\operatorname{tg} 1,5x$ также периодичная с периодом $\frac{T}{\left|1,5\right|} = \frac{\pi}{3/2} = \frac{2}{3}\pi$.

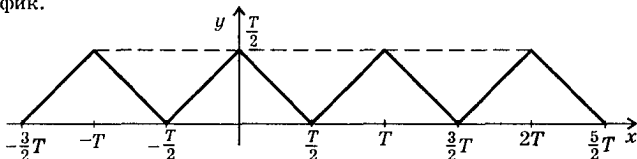
Ответ: $\frac{2}{3}\pi$.

65а) Используя формулу двойного аргумента, функцию $y = \sin x \cos x$ запишем в виде $y = \frac{1}{2} \sin 2x$. Так как функция синус периодичная с периодом $T = 2\pi$, то функция $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ также периодичная с периодом $\frac{T}{\left|2\right|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Ответ: π .

65г) Используя формулу для синуса суммы двух углов, функцию $y = \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x$ запишем в виде: $y = \sin(3x + x) = \sin 4x$. Так как функция синус периодичная с периодом $T = 2\pi$, то функция $y = \sin 4x$ также периодичная с периодом $\left| \frac{T}{4} \right| = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

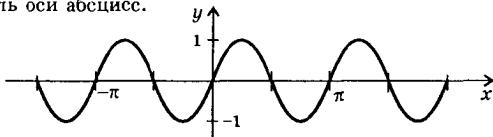
Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

66г) На рисунке 38г приведена часть графика периодической функции $y(x)$ с периодом T при $x \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$. Так как значения функции повторяются через T , то чтобы построить ее график на промежутке $[-1,5T; 2,5T]$, один раз сдвинем приведенный график на T влево вдоль оси абсцисс и два раза сдвинем приведенный график на T вправо вдоль той же оси. В итоге получим требуемый график.



Ответ: см. график.

67а) Период функции $y = \sin 2x$ равен $\left| \frac{2\pi}{2} \right| = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Используя методы преобразования графиков, легко построить график функции $y = \sin 2x$. Он получается из графика функции $y = \sin x$ сжатым в два раза вдоль оси абсцисс.



Ответ: см. график.

68а) Ученик, конечно, не прав. Он проверил, что выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$ только для одного значения $x = \frac{\pi}{6}$, хотя оно должно выполняться при любом значении x . Для функции $f(x) = \sin x$ найдем значение $f(0) = \sin 0 = 0$ и $f(0 + T) = \sin(0 + \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Видно, что при $x = 0$ равенство $f(x + T) = f(x)$ уже не выполняется. Это возможно в двух случаях: или функция

$f(x)$ не периодическая или функция $f(x)$ периодическая, но неправильно найден период T . Функция $f(x) = \sin x$ периодическая и ее период $T = 2\pi$. Таким образом, ученик неверно нашел период T .

Ответ: не прав.

68г) Ученик не прав. Он проверил выполнение равенства $f(x + T) = f(x)$ только для одного значения $x = -4$, хотя оно должно выполняться при любом значении x . Для функции $f(x) = x + |x|$ найдем, например, значение $f(5) = 5 + |5| = 5 + 5 = 10$ и значение $f(5 + T) = f(5 + 3) = f(8) = 8 + |8| = 8 + 8 = 16$. Видно, что при $x = 5$ равенство $f(x + T) = f(x)$ уже не выполняется. Это возможно в двух случаях: или функция $f(x)$ не периодическая, или функция $f(x)$ периодическая, но неправильно найден период T . В нашем случае функция $f(x) = x + |x|$ не периодическая. В этом легко убедиться, построив график данной функции. Ответ: не прав.

69а) Область определения функции $y(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x - x$ задается условием $\sin x \neq 0$ (т.к. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ и делить на нуль нельзя), т.е. $x \neq n\pi$ (где $n \in \mathbb{Z}$). Следовательно, область определения функции $D(f)$ — симметричное множество. Найдем значение функции $y(-x) = \sin(-x) + \operatorname{ctg}(-x) - (-x) = -\sin x - \operatorname{ctg} x + x = -(\sin x + \operatorname{ctg} x - x) = -y(x)$. Была учтена нечетность функций синус и котангенс. Так как в симметричных точках x и $-x$ значения функции противоположны по знаку (т.е. $y(-x) = -y(x)$), то данная функция по определению нечетная. Ответ: нечетная функция.

69в) Область определения функции $y(x) = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x$ задается условием $\cos x \neq 0$ (т.к. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и делить на нуль нельзя), т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (где $n \in \mathbb{Z}$). Следовательно, область определения функции $D(f)$ — симметричное множество. Найдем значение функции $y(-x) = (-x)^4 + \operatorname{tg}^2(-x) + (-x) \cdot \sin(-x) = x^4 + (\operatorname{tg} x)^2 + (-x)(-\sin x) = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x = y(x)$. Была учтена нечетность функций тангенс и синус. Так как в симметричных точках x и $-x$ значения функции одинаковы (т.е. $y(-x) = y(x)$), то данная функция по определению четная. Ответ: четная функция.

70а) Область определения функции $y(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 1}$ задается условием $x^3 - 1 \neq 0$ (т.к. делить на нуль нельзя), т.е. $x \neq 1$. Следовательно, область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ не является симметричным множеством, т.е. точка $x = -1$ принадлежит области $D(f)$, а симметричная точка $x = 1$ не принадлежит $D(f)$. Следовательно, данная функция не имеет определенной четности.

Ответ: не имеет определенной четности.

72в) Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные, то выполняются равенства: $f(-x) = -f(x)$ и $g(-x) = -g(x)$. Для функции $h(x) = f(x) + g(x)$ найдем значение $h(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -h(x)$. Видно, что выполняется равенство $h(-x) = -h(x)$. Следовательно, функция $h(x)$ по определению нечетная.

Ответ: нечетная функция.

72г) Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то выполняются равенства: $f(-x) = -f(x)$ и $g(-x) = -g(x)$. Для функции $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ найдем значение $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \times (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$. Видно, что выполняется равенство $h(-x) = h(x)$. Следовательно, функция $h(x)$ по определению четная.

Ответ: четная функция.

73в) Используя формулу для разности квадратов, запишем функцию $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ в виде $y = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$.

Функция $y = -\cos 2x$ периодичная с периодом $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ответ: π .

73г) Используя формулу для квадрата суммы чисел, основное тригонометрическое тождество и формулу двойного аргумента, запишем функцию $y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$ в виде $y = \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} +$

$+\cos^2 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 + \sin x$. Очевидно, что период функции $y = 1 + \sin x$ равен 2π .

Ответ: 2π .

75) Так как функция $f(x)$ периодическая с периодом T , то выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Рассмотрим значение функции $y(x) = kf(x) + b$ в точке $x+T$. Имеем: $y(x+T) = kf(x+T) + b = kf(x) + b = y(x)$. Так как для любого значения x выполняется равенство $y(x+T) = y(x)$, то функция $y(x)$ периодическая с периодом T .

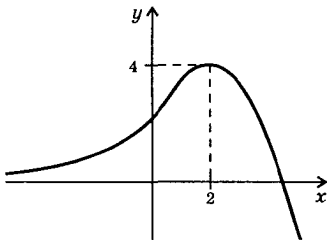
Ответ: доказано.

76а) Если число T является периодом функции $y(x)$, то для любого значения x должно выполняться равенство $y(x+T) = y(x)$. Для функции $y(x) = x^2 - 3$ и числа $T = 2$ проверим выполнение этого равенства. Получаем: $y(x+2) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1$. Приравняем значения функций $y(x+2)$ и $y(x)$. Имеем: $x^2 + 4x + 1 = x^2 - 3$, откуда $x = -1$. Таким образом равенство $y(x+T) = y(x)$ выполняется только при одном единственном значении $x = -1$ (а не при всех x). Следовательно, число 2 не является периодом функции $y(x) = x^2 - 3$. Заметим, что данная функция не является периодической.

Ответ: доказано.

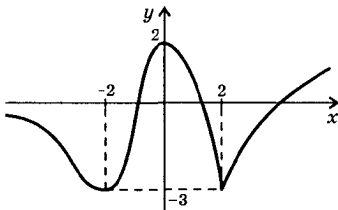
766) Если число T является периодом функции $y(x)$, то для любого значения x должно выполняться равенство $y(x + T) = y(x)$. Для функции $y(x) = \cos x$ и числа $T = 2$ проверим выполнение этого равенства. Найдём $y(x + 2) = \cos(x + 2)$ и приравняем это значение величине $y(x)$. Получаем: $\cos(x + 2) = \cos x$. Очевидно, что при всех x такое равенство не выполняется. Например, при $x = 0$ $\cos(0 + 2) \neq \cos 0$ или $\cos 2 \neq 1$. Следовательно, число 2 не является периодом функции $y(x) = \cos x$. Заметим, что данная функция периодическая, но её период $T = 2\pi$. Ответ: доказано.

77а) Обсудим рис. 48а учебника. Из графика видно, что функция $y(x)$ возрастает на промежутках $[-7; -5]$ и $[1; 5]$ и убывает на промежутках $[-5; 1]$ и $[5; 7]$. Точки максимума $x_{\max} = -5$ и $x_{\max} = 5$, точка минимума $x_{\min} = 1$. Экстремумы функции $y_{\max} = y(-5) = 5$, $y_{\max} = y(5) = 3$ и $y_{\min} = y(1) = -3$. Ответ: см. решение.



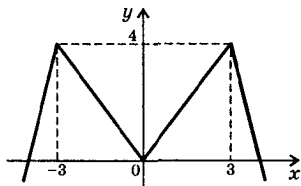
78а) По условию задачи график можно построить неоднозначно. Приведем один из возможных вариантов графика функции.

Ответ: см. график.



796) Условия задачи определяют функцию не однозначно. Поэтому приведем один из возможных вариантов графика функции.

Ответ: см. график.



80а) Так как функция $f(x)$ — четная, то её график симметричен относительно оси ординат. Условия задачи определяют функцию не однозначно. Поэтому приведем один из возможных вариантов графика. Ответ: см. график.

81) Из области определения R функции $y = kx + b$ рассмотрим точки x_1 и x_2 (пусть для определенности $x_2 > x_1$). Найдём разность $y(x_2) - y(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$. Так как $x_2 > x_1$, то величина $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ определяется величиной k . Если $k > 0$, то $y(x_2) - y(x_1) > 0$ или $y(x_2) > y(x_1)$, т.е. большему значению x_2 соответствует большее значение функции $y(x_2)$. Поэтому в этом случае функция $y(x)$ возрастает. Если $k < 0$, то $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$, т.е. большему значению аргумента x_2 соответствует меньшее значение функции $y(x_2)$. Поэтому в этом случае функция $y(x)$ убывает. Ответ: доказано.

82а) Данную функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ запишем в виде $y = 1 - (x - 3)^2$. График этой функции получается смещением графика функции $y = -x^2$ на три единицы вправо вдоль оси абсцисс и на одну единицу вверх вдоль оси ординат. Тогда понятно, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$ и убывает на промежутке $[3; \infty)$. При этом $x = 3$ — точка максимума. Максимум функции $y_{\max} = y(3) = 1 - (3 - 3)^2 = 1$. Докажем, например, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$. Пусть x_1, x_2 принадлежат этому промежутку и $x_2 > x_1$. Найдём разность $y(x_2) - y(x_1) = (-x_2^2 + 6x_2 - 8) - (-x_1^2 + 6x_1 - 8) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_2 - 6x_1 = -(x_2^2 - x_1^2) + 6(x_2 - x_1) = -(x_2 - x_1) \times (x_2 + x_1) + 6(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(6 - x_2 - x_1)$. Определим знак этого произведения. Величина $x_2 - x_1 > 0$, т.к. $x_2 > x_1$. Так как точки x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(-\infty; 3]$, то $x_1 < 3$ и $x_2 < 3$. Поэтому $x_1 + x_2 < 6$ и величина $6 - x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, произведение $(x_2 - x_1)(6 - x_2 - x_1) > 0$ и $y(x_2) > y(x_1)$, т.е. функция возрастает.

Ответ: см. решение.

83а) График функции $y = \frac{3}{x-2}$ получается смещением графика функции $y = \frac{3}{x}$ на две единицы вправо. Тогда понятно, что функция $y = \frac{3}{x-2}$ убывает во всей области определения $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Максимумов и минимумов данная функция не имеет.

Ответ: см. решение.

84а) График функции $y = 3\sin x - 1$ получается из графика функции $y = \sin x$ растяжением в три раза вдоль оси ординат и смещением на одну единицу вниз вдоль той же оси. Поэтому функции $y = 3\sin x - 1$ и $y = \sin x$ имеют одинаковые промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума. Поэтому данная функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right]$ (где

$n \in \mathbb{Z}$) и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ функция имеет максимум $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - 1 = 3\sin\frac{\pi}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$. В точках $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ функция имеет минимум $y = 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) - 1 = 3\sin\frac{3\pi}{2} - 1 = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$.

Ответ: см. решение.

86а) Очевидно, что $0 \leq \frac{3\pi}{7}, \frac{2\pi}{9} \leq \pi$. На промежутке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает. Сравним числа $\frac{3\pi}{7}$ и $\frac{2\pi}{9}$, найдя их разность: $\frac{3\pi}{7} - \frac{2\pi}{9} = \frac{3\pi \cdot 9 - 2\pi \cdot 7}{63} = \frac{27\pi - 14\pi}{63} = \frac{13\pi}{63} > 0$. Получаем $\frac{3\pi}{7} > \frac{2\pi}{9}$, тогда значения функции связаны неравенством противоположного знака $\cos\frac{3\pi}{7} < \cos\frac{2\pi}{9}$. Ответ: $\cos\frac{3\pi}{7} < \cos\frac{2\pi}{9}$.

86в) Учтем, что функция тангенс периодична с периодом π , тогда $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$. Очевидно, что $0 \leq \frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$. На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает. Сравним числа $\frac{2\pi}{7}$ и $\frac{\pi}{5}$, найдя их разность: $\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi \cdot 5 - \pi \cdot 7}{35} = \frac{3\pi}{35} > 0$. Получаем $\frac{2\pi}{7} > \frac{\pi}{5}$, тогда значения функции связаны неравенством того же знака: $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ или $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$.

87а) Для расположения чисел $\sin 3,2$, $\sin 3,8$ и $\sin 1,3$ заметим, что $0 < 1,3 < \pi$. Поэтому величина $\sin 1,3 > 0$. Для чисел $3,2$ и $3,8$ выполнено неравенство $\pi < 3,2 < 3,8 < \frac{3}{2}\pi$. Тогда величины $\sin 3,2$ и $\sin 3,8$ отрицательны. На промежутке $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ функция синус убывает. Поэтому, так как $3,8 > 3,2$, то $\sin 3,8 < \sin 3,2$. Следовательно, расположение чисел следующее: $\sin 3,8 < \sin 3,2 < \sin 1,3$.

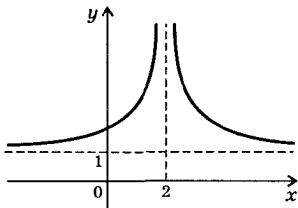
Ответ: $\sin 3,8; \sin 3,2; \sin 1,3$.

87в) Очевидно, что величины аргументов связаны неравенствами $-\frac{\pi}{2} < -0,3 < 0,5 < 1,4 < \frac{\pi}{2}$. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает. Поэтому тангенсы таких аргументов связаны неравенствами тех же знаков: $\operatorname{tg}(-0,3) < \operatorname{tg} 0,5 < \operatorname{tg} 1,4$.

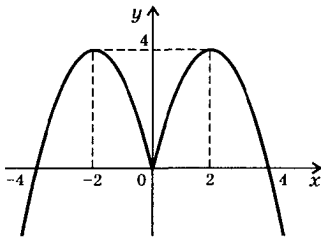
Ответ: $\operatorname{tg}(-0,3)$; $\operatorname{tg} 0,5$; $\operatorname{tg} 1,4$.

88а) График функции $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ получается из графика

функции $y = \frac{1}{x^2}$ сдвигом на две единицы вправо вдоль оси абсцисс и на одну единицу вверх вдоль оси ординат. На рисунке приведен график данной функции. Видно, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; 2)$ и убывает на промежутке $(2; \infty)$. Экстремумов функция не имеет. Ответ: см. решение.

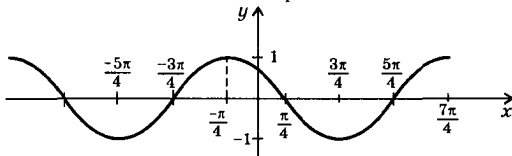


88б) Изобразим график функции $y = 4|x| - x^2$. Легко проверить, что эта функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат. Поэтому сначала построим график этой функции при $x \geq 0$. В этом случае $|x| = x$ и функция имеет вид $y(x) = 4x - x^2$. Видно, что функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$ и убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[2; \infty)$. Точки $x_{\max} = \pm 2$ — точки максимума и $y_{\max} = y(\pm 2) = 4$. Точка $x_{\min} = 0$ — точка минимума и $y_{\min} = y(0) = 0$.



Ответ: см. решение.

89а) График функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ получается из графика функции $y = \cos x$ его смещением на $\frac{\pi}{4}$ влево вдоль оси абсцисс.



Из графика видно, что данная функция возрастает на промежутках

$$\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \text{ Функция убывает на промежутках } \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right].$$

Точки максимума $x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $y_{\max} = 1$, точки минимума $x_{\min} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ и $y_{\min} = -1$.

Ответ: см. решение.

90а) Используя формулы приведения и четность функции косинус, запишем числа в виде:

$$\cos \frac{25\pi}{9} = \cos \left(2\pi + \frac{7\pi}{9} \right) = \cos \frac{7\pi}{9}; \quad \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{10} \right) = \cos \frac{3\pi}{10};$$

$$\cos \left(-\frac{5\pi}{9} \right) = \cos \frac{5\pi}{9}. \text{ Теперь сравниваемые числа } \cos \frac{25\pi}{9}, \sin \frac{4\pi}{5},$$

$$\cos \frac{4\pi}{9}, \cos \left(-\frac{5\pi}{9} \right) \text{ записаны в виде: } \cos \frac{7\pi}{9}, \cos \frac{3\pi}{10}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}.$$

Видно, что аргументы косинусов лежат в диапазоне $0 + \pi$, где функция косинус убывает. Расположим эти аргументы в порядке возрастания

$$0 < \frac{3\pi}{10} < \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9} < \frac{7\pi}{9} < \pi. \text{ Тогда косинусы таких аргументов связаны неравенствами противоположного знака: } \cos \frac{3\pi}{10} >$$

$$> \cos \frac{4\pi}{9} > \cos \frac{5\pi}{9} > \cos \frac{7\pi}{9}, \text{ т.е. } \sin \frac{4\pi}{5} > \cos \frac{4\pi}{9} > \cos \left(-\frac{5\pi}{9} \right) > \cos \frac{25\pi}{9}.$$

$$> \cos \frac{4\pi}{9} > \cos \frac{5\pi}{9} > \cos \frac{7\pi}{9}, \text{ т.е. } \sin \frac{4\pi}{5} > \cos \frac{4\pi}{9} > \cos \left(-\frac{5\pi}{9} \right) > \cos \frac{25\pi}{9}.$$

Ответ: $\cos \frac{25\pi}{9} < \cos \left(-\frac{5\pi}{9} \right) < \cos \frac{4\pi}{9} < \sin \frac{4\pi}{5}.$

90б) Данные числа $\operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{7} \right), \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}, \operatorname{ctg} \frac{15\pi}{8}, \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{16} \right)$ представим в виде тангенсов с аргументами, расположенными в промежутке

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, т.к. на этом промежутке функция тангенс возрастает.

$$\text{Получаем: } \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{7} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{7} + \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}; \quad \operatorname{ctg} \frac{15\pi}{8} = \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{7\pi}{8} \right) =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg} \left(-\frac{3\pi}{8} \right). \quad \text{Тогда надо сравнить}$$

числа: $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}; \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}; \operatorname{tg} \left(-\frac{3\pi}{8} \right); \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{16} \right)$. Расположим аргументы

тангенсов в порядке возрастания: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{7\pi}{16} < -\frac{3\pi}{8} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.

Тогда тангенсы этих аргументов связаны неравенствами того же

знака: $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right) < \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, т.е. $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8} < \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. Ответ: $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8} < \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

91а) Рассмотрим две произвольные точки x_1 и x_2 из промежутка $[0; \infty)$. Пусть для определенности $x_2 > x_1$. Для функции $f(x) = x^4 + 3x$ найдем разность $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^4 + 3x_2) - (x_1^4 + 3x_1) = (x_2^4 - x_1^4) + 3(x_2 - x_1) = (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2) + 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)[(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + 3] > 0$. Это произведение положительно, т.к. $x_2 > x_1$ и величина $x_2 - x_1 > 0$. Второй множитель также положительный, т.к. $x_2 > x_1 \geq 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. $f(x_2) > f(x_1)$. Так как большему значению аргумента x_2 соответствует большее значение функции $f(x_2)$, то функция $f(x)$ возрастает на данном промежутке (по определению). Ответ: доказано.

91б) Рассмотрим две точки x_1 и x_2 из области определения функции R . Пусть для определенности $x_2 > x_1$. Для функции $f(x) = -x^3 - 2x$ рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = (-x_2^3 - 2x_2) - (-x_1^3 - 2x_1) = (x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2) < 0$. Это произведение отрицательно, т.к. $x_2 > x_1$ и величина $x_1 - x_2 < 0$. Второй множитель $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 - 2 > 0$ при всех x_1 и x_2 . Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$. Так как большему значению аргумента x_2 соответствует меньшее значение функции $f(x_2)$, то функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси (по определению).

Ответ: доказано.

92а) Если x_0 — точка максимума, то в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$, т.е. значение функции в точке x_0 самое большое. Так как функция $f(x)$ четная, то справедливо равенство $f(-x_0) = f(x_0)$. Подставим это соотношение в неравенство и получим: $f(-x_0) \geq f(x)$, которое означает, что значение функции в точке $(-x_0)$ самое большое. Следовательно, точка $(-x_0)$ также точка максимума. Ответ: доказано.

92г) Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a, b]$, то для x_1 и x_2 из этого промежутка (т.е. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$) выполняется нера-

венство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Умножим все члены неравенства $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ на отрицательное число (-1) . При этом знаки неравенств меняются на противоположные: $-a \geq -x_1 > -x_2 \geq -b$. Такое неравенство означает, что рассматриваемые точки $(-x_1)$ и $(-x_2)$ из промежутка $[-b; -a]$, причем $-x_1 > -x_2$. Так как функция $f(x)$ четная, то неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ можно записать в виде $f(-x_1) < f(-x_2)$. Тогда видно, что большему значению аргумента $(-x_1)$ соответствует меньшее значение функции $f(-x_1)$. Следовательно, функция $f(x)$ на промежутке $[-b; -a]$ убывает. **Ответ:** доказано.

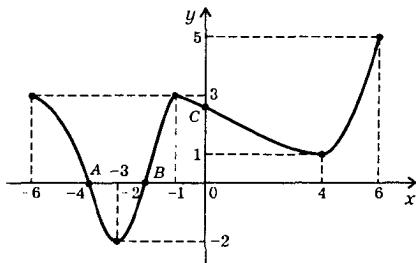
93а) Опишем свойства функции $y(x)$, изображенной на рис. 57а. Область определения функции $D(y) = [-8; 5]$, область значений функции $E(y) = [-2; 5]$. Точки пересечения с осью абсцисс имеют координаты $(1; 0)$, $(5; 0)$, точка пересечения с осью ординат имеет координаты $(0; 2,5)$. Промежутки знакопостоянства: $y(x) > 0$ при $x \in [-8; 1)$ и $y(x) < 0$ при $x \in (1; 5]$. Функция возрастает на промежутках $[-5; -1]$ и $[3; 5]$ и убывает на промежутках $[-8; -5]$ и $[-1; 3]$. Точка максимума функции $x_{\max} = -1$ и $y_{\max} = y(-1) = 3$. Точка минимума функции $x_{\min} = -5$ и $y_{\min} = y(-5) = -2$; $x_{\min} = 3$ и $y_{\min} = y(3) = -2$. Других особенностей данная функция не имеет.

Ответ: см. решение.

93б) Опишем свойства функции $y(x)$, изображенной на рис. 57б. Область определения функции $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$, область значений функции $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Точка пересечения с осью ординат $(0; 0)$, т.е. график проходит через начало координат. Промежутки знакопостоянства: $y(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$ и $y(x) < 0$ при $x \in (-2; 0)$. Функция возрастает на всей области определения. Функция не имеет точек максимума и минимума. Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой этой функции, прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой этой функции.

Ответ: см. решение.

94а) В соответствии со свойствами функции, приведенными в

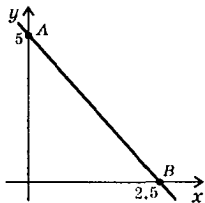


таблице, построим график этой функции.

Разумеется, это только одно из возможных решений.

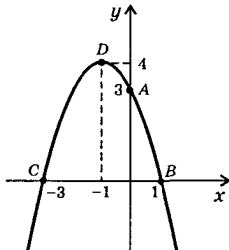
Ответ: см. график.

95а) Область определения функции $f(x) = 5 - 2x$ — вся числовая ось, т.е. $D(f) = R$. Область значений функции $E(f) = R$. Найдем точки пересечения с осями координат. Сначала найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнении функции положим $x = 0$ и найдем $f(0) = 5 - 2 \cdot 0 = 5$. Поэтому координаты точки $A(0; 5)$. Чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, положим $f(x) = 0$. Получаем линейное уравнение $0 = 5 - 2x$, откуда $x = 2,5$. Следовательно, координаты точки $B(2,5; 0)$. Определим промежутки знакопостоянства функции. Если $f(x) > 0$, то получаем неравенство $5 - 2x > 0$, откуда $x < 2,5$, т.е. $x \in (-\infty; 2,5)$. Если $f(x) < 0$, то имеем неравенство $5 - 2x < 0$, откуда $x > 2,5$, т.е. $x \in (2,5; \infty)$. Докажем, что функция убывает во всей области определения. Пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = (5 - 2x_2) - (5 - 2x_1) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) < 0$, т.к. $x_1 < x_2$. Следовательно $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Учтем, что данная функция линейная и ее графиком является прямая. **Ответ:** см. решение.



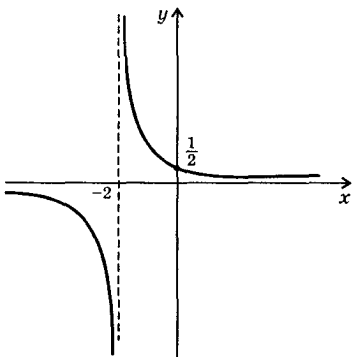
95б) Область определения функции $f(x) = 3 - 2x - x^2$ — вся числовая ось, т.е. $D(f) = R$. Область значений функции пока находить не будем. Найдем точки пересечения с осями координат. Сначала найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнении функции положим $x = 0$ и найдем $f(0) = 3 - 2 \cdot 0 - 0^2 = 3$. Поэтому координаты точки $A(0; 3)$. Чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, положим $f(x) = 0$. Получаем квадратное уравнение: $0 = 3 - 2x - x^2$ или $0 = x^2 + 2x - 3$, корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Следовательно, координаты этих точек $B(1; 0)$ и $C(-3; 0)$. Определим промежутки знакопостоянства функции. Если $f(x) > 0$, то получаем неравенство $3 - 2x - x^2 > 0$ или $x^2 + 2x - 3 < 0$, решение которого $x \in (-3; 1)$. Если $f(x) < 0$, то имеем неравенство $3 - 2x - x^2 < 0$ или $x^2 + 2x - 3 > 0$, решение которого $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

Учтем, что графиком данной функции является парабола. Найдем координаты вершины параболы: $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$ и $y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}}) = 3 - 2 \cdot (-1) - (-1)^2 = 3 + 2 - 1 = 4$. Координаты вершины параболы $D(-1; 4)$. Ветви параболы направлены вниз. Поэтому область значений функции $E(f) = (-\infty; 4]$. Точка максимума $x_{\text{max}} = -1$



и $y_{\min} = y(-1) = 4$. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$ и убывает на промежутке $[-1; \infty)$. График функции симметричен относительно прямой $x = -1$. Ответ: см. решение.

96в) Область определения функции $f(x) = \frac{1}{x+2}$ — все значения x , кроме $x = -2$ (т.к. делить на нуль нельзя), т.е. $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Область значений функции $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Найдем точки пересечения с осями координат. Найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнении функции положим $x = 0$ и найдем $f(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$. Чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, положим $f(x) = 0$. Получаем уравнение $0 = \frac{1}{x+2}$, которое не имеет решений. Следовательно, график функции с осью абсцисс не пересекается.



Найдем промежутки знакопостоянства функции. Если $f(x) > 0$, то получаем неравенство $\frac{1}{x+2} > 0$ или $x+2 > 0$, т.е. $x \in (-2; \infty)$. Если $f(x) < 0$, то имеем неравенство $\frac{1}{x+2} < 0$ или $x+2 < 0$, откуда $x \in (-\infty; -2)$. Легко показать, что во всей области определения функция убывает. Функция не существует при $x = -2$, что является вертикальной асимптотой.

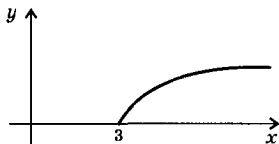
При больших значениях x величина $y \approx 0$. Следовательно, $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Ответ: см. решение.

97а) Область определения функции $f(x) = \sqrt{x-3}$ задается условием $x-3 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным), откуда $x \geq 3$, т.е. $D(f) = [3; \infty)$. Так как $\sqrt{x-3} \geq 0$, то область значений функции $E(f) = [0; \infty)$. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Так как $x \geq 3$, то с осью ординат график не пересекается. С осью абсцисс график имеет общую точку $x = 3$. Очевидно, что в области определения функции $f(x) \geq 0$. Также в области определения функция возрастает: если $x_2 > x_1$, то

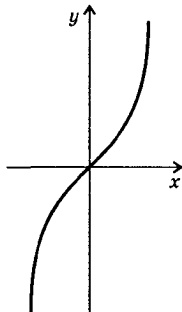
$$x_2 - 3 > x_1 - 3 \text{ и } \sqrt{x_2 - 3} > \sqrt{x_1 - 3},$$

т.е. $f(x_2) > f(x_1)$. Никаких других особенностей функция не имеет.

Ответ: см. решение.

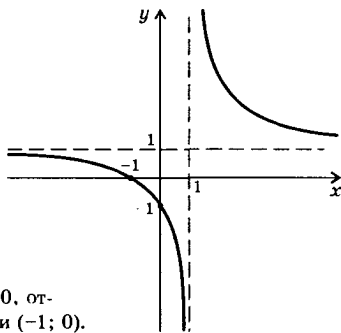


98а) Область определения функции $f(x) = x^3 + x$ — вся числовая ось, т.е. $D(f) = R$. Область значений функции также вся числовая ось, т.е. $E(f) = R$. Точка пересечения с осями координат — начало координат $(0; 0)$. Найдем промежутки знакопостоянства функции. Если $f(x) > 0$, то имеем неравенство $x^3 + x > 0$ или $x(x^2 + 1) > 0$, решение которого $x > 0$, т.е. $x \in (0; \infty)$. Если $f(x) < 0$, то аналогично находим $x \in (-\infty; 0)$. Докажем, что функция возрастает на всей числовой оси. Пусть $x_2 > x_1$, найдем разность $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 + x_2) - (x_1^3 + x_1) = (x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 1) > 0$, т.к. величина $x_2 - x_1 > 0$ и неполный квадрат $x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 > 0$ при всех x_2 и x_1 . Легко убедиться, что данная функция нечетная. Найдем $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$. Следовательно, график этой функции симметричен относительно начала координат.



Ответ: см. решение.

99б) Область определения функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ задается условием $x - 1 \neq 0$ (делить на нуль нельзя), откуда $x \neq 1$, т.е. $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. Область изменения функции $E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. Найдем точки пересечения с осями координат. Сначала найдем точку пересечения с осью ординат. В уравнении функции положим $x = 0$ и найдем $f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$. Координата этой точки $(0; -1)$. Найдем точку пересечения с осью абсцисс. В уравнении функции положим $f(x) = 0$. Получаем уравнение $0 = \frac{x+1}{x-1}$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю: $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$. Координата этой точки $(-1; 0)$.



Найдем промежутки знакопостоянства функции. Если $f(x) > 0$, то получаем неравенство $\frac{x+1}{x-1} > 0$, решение которого $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. Если $f(x) < 0$, то имеем неравенство $\frac{x+1}{x-1} < 0$, решение которого $x \in (-1; 1)$. Можно показать, что функция $f(x)$ убывает во всей области определения. Функция $f(x)$ не определена при $x = 1$. Поэтому $x = 1$ — вертикальная асимптота. При больших значениях x значение функции $y \approx \frac{x}{x} = 1$. Поэтому $y = 1$ — горизонтальная асимптота. Заметим, что графиком дробно-линейной функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ является гипербола. Ответ: см. решение.

100а) Учтем, что период функции тангенс π . Тогда получаем: $\operatorname{tg} \frac{18\pi}{5} = \operatorname{tg} \left(3\pi + \frac{3\pi}{5} \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$. Учтем, что период функции синус 2π , а также формулы приведения. Получаем: $\sin \frac{28\pi}{3} = \sin \left(8\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3}$. Ответ: $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$; $-\sin \frac{\pi}{3}$.

101а) Функция $f(x) = 3\cos 2x - 1$ определена на всей числовой оси, т.е. $D(f) = R$. Найдем область значений этой функции. Учтем ограниченность функции косинус: $-1 \leq \cos 2x \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 3 (при этом знак неравенства сохраняется): $-3 \leq 3\cos 2x \leq 3$. Вычтем из всех частей неравенства число 1: $-3 - 1 \leq 3\cos 2x - 1 \leq 3 - 1$ или $-4 \leq 3\cos 2x - 1 \leq 2$ или $-4 \leq f(x) \leq 2$. Следовательно, область значений этой функции $E(f) = [-4; 2]$. Ответ: $D(f) = R$, $E(f) = [-4; 2]$.

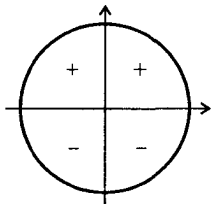
101в) Область определения функции тангенс $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi l; \frac{\pi}{2} + \pi l \right)$.

Поэтому для функции $f(x) = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ получаем: $-\frac{\pi}{2} + \pi l < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi l$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 2 (при этом знаки неравенств сохраняются): $-\pi + 2\pi l < x < \pi + 2\pi l$. Следовательно, область определения данной функции $D(f) = (-\pi + 2\pi l; \pi + 2\pi l)$. Область значений функции $E(f) = R$.

Ответ: $D(f) = (-\pi + 2\pi l; \pi + 2\pi l)$, где $n \in \mathbb{Z}$; $E(f) = R$.

102а) Для функции $f(x) = -\sin 3x$ определим нули и промежутки знакопостоянства функции. Сначала найдем нули функции. Получаем уравнение: $0 = -\sin 3x$ или $0 = \sin 3x$, откуда $3x = \pi l$

(где $n \in \mathbb{Z}$) и $x = \frac{\pi}{3}n$. Теперь найдем промежутки знакопостоянства функции. Если $f(x) > 0$, то получаем неравенство: $-\sin 3x > 0$ или $\sin 3x < 0$. Из тригонометрического круга видно, что значения синуса отрицательны, если аргумент принадлежит третьей или четвертой четверти, т.е. $\pi + 2\pi n < 3x < 2\pi + 2\pi n$, откуда $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{2\pi}{3} +$



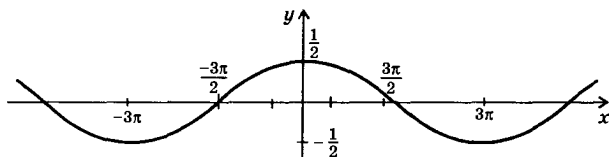
$+\frac{2}{3}\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Если $f(x) < 0$, то имеем неравенство: $-\sin 3x < 0$ или $\sin 3x > 0$. Видно, что значения синуса положительны, если аргумент принадлежит первой или второй четверти, т.е. $2\pi n < 3x < \pi + 2\pi n$, откуда $\frac{2}{3}\pi n < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$.

Ответ: $f(x) = 0$ при $x = \frac{\pi}{3}n$, $f(x) > 0$ при $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, $f(x) < 0$ при $\frac{2}{3}\pi n < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

103а) Учтем свойства функции косинус. Функция $f(x) = 4\cos 3x$ возрастает, если $-\pi + 2\pi n \leq 3x \leq 2\pi n$, откуда $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{2}{3}\pi n\right]$. Функция убывает, если $2\pi n \leq 3x \leq \pi + 2\pi n$, откуда $x \in \left[\frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n\right]$. Точки максимума данной функции определяются условием $3x = -2\pi n$, откуда $x_{\max} = \frac{2}{3}\pi n$. Точки минимума функции определяются условием $3x = \pi + 2\pi n$, откуда $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$.

Ответ: промежутки возрастания $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{2}{3}\pi n\right]$, промежутки убывания $\left[\frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n\right]$, $x_{\max} = \frac{2}{3}\pi n$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

104а) Функция $f(x) = \frac{1}{2}\cos \frac{x}{3}$ может быть исследована аналогично задачам 101—103. График этой функции получается из графика функции $f(x) = \cos x$ при его растяжении в три раза вдоль оси абсцисс и сжатии в два раза вдоль оси ординат. Из графика легко получаются все свойства этой функции.



Ответ: см. решение.

106а) Сравним конкретный колебательный процесс $x(t) = 3,5 \cos 4\pi t$ с общим видом колебания $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Из сравнения сразу определим амплитуду $A = 3,5$ и частоту $\omega = 4\pi$. Зная частоту ω , найдем период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Координату тела $x(t)$ в момент времени $t_1 = \frac{1}{12}$ с найдем, подставив эту величину в уравнение функции: $x(t_1) = 3,5 \cos\left(4\pi \cdot \frac{1}{12}\right) = 3,5 \cos \frac{\pi}{3} = 3,5 \cdot \frac{1}{2} = 1,75$. Ответ: $A = 3,5$; $\omega = 4\pi$; $T = \frac{1}{2}$; $x(t_1) = 1,75$.

109а) Чтобы расположить в порядке возрастания числа $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 9$, $\cos(-12,5)$, запишем их в таком виде, чтобы значения аргументов принадлежали промежутку убывания функции косинус — отрезку $[0; \pi]$. Получаем: $\cos 4 = \cos(-4) = \cos(2\pi - 4)$, $\cos 7 = \cos(7 - 2\pi)$, $\cos 9 = \cos(9 - 2\pi)$, $\cos(-12,5) = \cos(4\pi - 12,5)$. Теперь запишем эти аргументы в порядке возрастания (для оценок можно принять $\pi \approx 3,14$): $0 < 4\pi - 12,5 < 7 - 2\pi < 2\pi - 4 < 9 - 2\pi < \pi$. Тогда косинусы этих аргументов связаны неравенствами противоположных знаков: $\cos(4\pi - 12,5) > \cos(7 - 2\pi) > \cos(2\pi - 4) > \cos(9 - 2\pi)$, т.е. $\cos(-12,5) > \cos 7 > \cos 4 > \cos 9$.

Ответ: $\cos 9 < \cos 4 < \cos 7 < \cos(-12,5)$.

110а) Область определения функции $y = \frac{1}{1 - \sin x}$ задается условием: $1 - \sin x \neq 0$ (делить на нуль нельзя) или $\sin x \neq 1$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $D(y) = \mathbb{R}$ кроме точек $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: \mathbb{R} , кроме точек $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

110б) Запишем данную функцию $y = \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}$ в виде

$$y = \sqrt{-\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)} = \sqrt{-\cos x}. \text{ Область определения задается}$$

условием: $-\cos x \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) или $\cos x \leq 0$. Значения косинуса не положительны, если аргумент находится во второй или третьей четверти, т.е. $\frac{\pi}{2} + 2\pi l \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi l$, где $l \in \mathbb{Z}$. Следовательно, область определения функции $D(f) = \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi l \right]$.

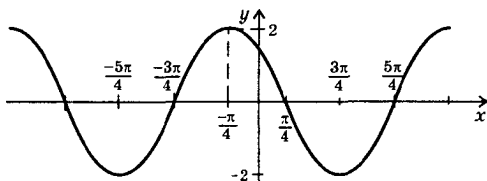
Ответ: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

111а) Чтобы найти область значений функции $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, умножим и разделим ее на 2: $y = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$. Учтем, что $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, тогда $y = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Используя формулу для синуса разности двух углов, получим: $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$. Область значений этой функции $E(y) = [-2; 2]$. **Ответ:** $[-2; 2]$.

111б) При рассмотрении функции $y = \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ учтем, что область значений функции $z = \operatorname{tg} x$ $E(z) = \mathbb{R}$. Тогда функцию y можно записать в виде $y = \frac{3}{1 + z^2}$. Так как $1 \leq 1 + z^2 < \infty$, то легко найти область значений данной функции $E(y) = (0; 3]$. **Ответ:** $(0; 3]$.

111в) Для данной функции $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$ учтем ограниченность функции косинус: $-1 \leq \cos 4x \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на отрицательное число (-1) . При этом знаки неравенств меняются на противоположные $1 \geq -\cos 4x \geq -1$. Ко всем частям неравенства прибавим число 1: $1 + 1 \geq 1 - \cos 4x \geq 1 - 1$ или $2 \geq 1 - \cos 4x \geq 0$. Извлечем квадратный корень из всех неотрицательных частей неравенства (при этом знаки неравенства сохраняются). Получаем: $\sqrt{2} \geq \sqrt{1 - \cos 4x} \geq 0$ или $\sqrt{2} \geq y \geq 0$. Итак, область значений данной функции $E(y) = [0; \sqrt{2}]$. **Ответ:** $[0; \sqrt{2}]$.

112а) График функции $f(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ получается из графика функции $y = \cos x$ смещением на $\frac{\pi}{4}$ влево вдоль оси абсцисс



и растяжением в два раза вдоль оси ординат.

Ответ: см. решение.

114а) Из рис. 64а учебника видно, что амплитуда силы тока $A = 15$, период $T = 0,4$, тогда $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$. Запишем зависимость силы тока от времени: $I = 15\sin(5\pi t)$.

Ответ: $A = 15$; $T = 0,4$; $I = 15\sin(5\pi t)$.

115) Рассмотрим колебательный процесс $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

а) Смещение максимально, если функция косинус имеет максимум, т.е. если ее аргумент равен 2π . Получаем уравнение: $\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3} = 2\pi$. Умножим все члены уравнения на $\frac{12}{\pi}$: $3t + 4 = 24$, откуда $t = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

в) Смещение равно 0, если функция косинус равна нулю, т.е. если ее аргумент равен $\frac{\pi}{2}$. Получаем уравнение: $\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Умножим все члены уравнения на $\frac{12}{\pi}$: $3t + 4 = 6$, откуда $t = \frac{2}{3}$.

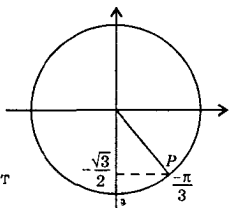
Ответ: а) $6\frac{2}{3}$, в) $\frac{2}{3}$.

§ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

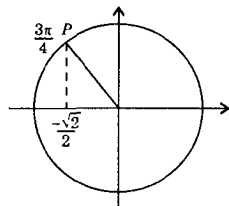
116а) Функция $y = x^7$ на всей числовой оси возрастает. Поэтому уравнение $x^7 = 3$ на промежутке $x \in (-\infty; \infty)$ имеет только одно решение. Ответ: одно.

1176) На промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = 2\sin x$ возрастает. Поэтому уравнение $2\sin x = 1,5$ на этом промежутке имеет только одно решение. Ответ: одно.

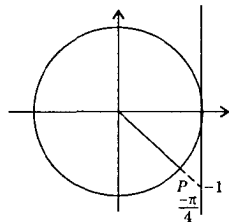
118в) Отложим на оси ординат значение $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и построим угол t , удовлетворяющий условиям: $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Этим условиям удовлетворяет только одно значение $t = -\frac{\pi}{3}$. Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.



119в) На оси абсцисс отложим значение $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и построим угол t , удовлетворяющий условиям: $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Этим условиям удовлетворяет только одно значение $t = \frac{3\pi}{4}$. Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.



120а) На оси тангенсов отложим значение (-1) и построим угол t , удовлетворяющий условиям: $\operatorname{tg} t = -1$ и $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Этим условиям удовлетворяет только одно значение $t = -\frac{\pi}{4}$. Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.



121б) Пусть $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = z$. Величина z удовлетворяет двум условиям: $z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Находим $z = -\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.

122а) Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = z$. Величина z удовлетворяет двум условиям: $z \in [0; \pi]$ и $\cos z = -\frac{1}{2}$. Находим $z = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

123а) Пусть $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = z$. Величина z удовлетворяет двум условиям: $z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Находим $z = \frac{\pi}{6}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

124) Выражения $\arcsin a$ и $\arccos a$ имеют смысл, если $|a| \leq 1$. Поэтому выражения $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ имеют смысл, т.к.

$\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \leq 1$ и $\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}} \leq 1$. Выражения $\arccos\sqrt{5}$ и $\arcsin 1,5$ смысла не имеют, т.к. $\sqrt{5} > 1$ и $|1,5| = 1,5 > 1$.

Ответ: а, г) имеют смысл; б, в) смысла не имеют.

126б) Учитывая определения обратных тригонометрических функций и таблицу значений тригонометрических функций, полу-

чим: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$. Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

129б) Для сравнения данных чисел вычислим их:

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ и $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Очевидно, что $\frac{2\pi}{3} > -\frac{\pi}{4}$, т.е.

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$. Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$.

129в) Сначала вычислим данные числа: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ и $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, т.е. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} < \arcsin 1$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} < \arcsin 1$.

131) Учитывая определения обратных тригонометрических функций и таблицу значений тригонометрических функций, получаем:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} &= 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \\ &= -\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 3 \arcsin\frac{1}{2} + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) &= 3 \cdot \frac{\pi}{6} + 4 \cdot \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{6}\pi = \\ &= \frac{\pi}{2} + 3\pi - \frac{5}{6}\pi = 2\frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

$$в) \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$г) \arcsin(-1) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}\pi.$$

Ответ: а) $-\frac{2\pi}{3}$; б) $2\frac{2}{3}\pi$; в) π ; г) $-\frac{3}{2}\pi$.

132а) Пусть произвольные числа x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[-1; 1]$ и $x_1 < x_2$. Надо доказать, что $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$. Обозначим $t_1 = \arcsin x_1$ и $t_2 = \arcsin x_2$. Тогда $x_1 = \sin t_1$ и $x_2 = \sin t_2$, причем t_1 и t_2 принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Запишем неравенство $x_1 < x_2$ в виде $\sin t_1 < \sin t_2$. Так как на промежутке $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ возрастающая, то из неравенства $\sin t_1 < \sin t_2$ следует, что $t_1 < t_2$ или $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$. Таким образом, утверждение доказано. **Ответ:** доказано.

134а) Учтем, что функция $\arcsin x$ возрастающая (см. предыдущую задачу). Поэтому расположим аргументы арксинусов в порядке возрастания: $-0,3 < \frac{\pi}{6} < 0,9$. Тогда арксинусы этих величин связаны неравенствами того же знака: $\arcsin(-0,3) < \arcsin \frac{\pi}{6} < \arcsin 0,9$. **Ответ:** $\arcsin(-0,3) < \arcsin \frac{\pi}{6} < \arcsin 0,9$.

134в) Учтем, что функция $\arccos x$ убывающая (см. задачу 132б). Поэтому расположим аргументы арккосинусов в порядке убывания: $0,4 > -0,2 > -0,8$. Тогда арккосинусы этих величин связаны неравенствами противоположного знака: $\arccos 0,4 < \arccos(-0,2) < \arccos(-0,8)$. **Ответ:** $\arccos 0,4 < \arccos(-0,2) < \arccos(-0,8)$.

135а) Учтем, что функция $\operatorname{arctg} x$ возрастающая (см. задачу 133а). Поэтому расположим аргументы арктангенсов в порядке возрастания: $-5 < 0,7 < 100$. Тогда арктангенсы этих величин связаны неравенствами того же знака: $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg} 0,7 < \operatorname{arctg} 100$.

Ответ: $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg} 0,7 < \operatorname{arctg} 100$.

135б) Учтем, что функция $\operatorname{arctg} x$ убывающая (см. задачу 133б). Поэтому расположим аргументы арккотангенсов в порядке убывания: $\pi > 1,2 > -5$. Тогда арккотангенсы этих величин связаны неравенствами противоположного знака: $\operatorname{arctg} \pi < \operatorname{arctg} 1,2 < \operatorname{arctg}(-5)$. **Ответ:** $\operatorname{arctg} \pi < \operatorname{arctg} 1,2 < \operatorname{arctg}(-5)$.

1366) Используя известную формулу, запишем решения уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Имеем: $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

1376) Из уравнения $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$ выразим $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя известную формулу, запишем решения этого уравнения: $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

138а) Используя известную формулу, запишем решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$. Получаем: $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} - \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

139б) Из уравнения $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ выразим $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя известную формулу, запишем решения этого уравнения: $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

140а) Используя известную формулу, запишем решения уравнения $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Имеем: $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

141б) Из уравнения $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ выразим $\operatorname{ctg} x = -1$. Используя известную формулу, запишем решения этого уравнения: $x = \arccot(-1) + \pi n = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\frac{3}{4}\pi + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

142б) Для решения уравнения $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ введем новую неизвестную $t = \frac{x}{3}$. Получаем уравнение $\cos t = -\frac{1}{2}$. Выпишем его решения $t = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Вернемся

к старой неизвестной x . Получаем линейное уравнение $\frac{x}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. Умножим обе части этого уравнения на 3 и найдем $x = \pm 2\pi + 6\pi n$. Ответ: $x = \pm 2\pi + 6\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

145а) Для решения уравнения $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{6}\right) = \sqrt{3}$ введем новую неизвестную $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$. Получаем уравнение $2\cos t = \sqrt{3}$, откуда $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Выпишем его решения $t = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем линейное уравнение: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, тогда $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n$. Ответ: $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

146б) Для решения уравнения $2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$ введем новую неизвестную $t = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}$. Получаем уравнение $2\sin t = \sqrt{3}$, откуда $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Выпишем его решения $t = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = (-1)^n \times \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем линейное уравнение: $\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$. Вычтем из обеих частей этого уравнения число $\frac{\pi}{3}$. Получаем: $-\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$. Умножим обе части уравнения на число (-4) и найдем $x = \frac{4\pi}{3} - (-1)^n \cdot \frac{4\pi}{3} + 4\pi n = \frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$.

Ответ: $\frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

147а) Для решения уравнения $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ преобразуем его левую часть, используя формулу для синуса разности двух углов. Получаем: $\sin(3x - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Выпишем решения этого уравнения: $2x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Разделив на 2, найдем $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n$.

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

1476) Для решения уравнения $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = 1$ используем формулу для косинуса двойного аргумента. Получаем: $-\left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}\right) = 1$ или $-\cos \frac{x}{2} = 1$, откуда $\cos \frac{x}{2} = -1$. Запишем решения этого уравнения: $\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Умножим обе части этого равенства на 2 и найдем $x = 2\pi + 4\pi n$.

Ответ: $x = 2\pi + 4\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

148а) Так как абсцисса искомой точки известна $x = 4,5\pi$, то найдем ординату этой точки, подставив это значение в уравнение

функции. Для $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ получаем:

$$\begin{aligned} y(4,5\pi) &= 2\cos\left(2 \cdot 4,5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(9\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(8\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1. \end{aligned}$$

Для $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ имеем:
 $y(4,5\pi) = \sin\left(\frac{4,5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\frac{1}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2,5\pi) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$
 $= \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Итак, искомые точки имеют координаты $(4,5\pi; -1)$ и $(4,5\pi; 1)$. Ответ: $(4,5\pi; -1)$, $(4,5\pi; 1)$.

148б) Так как ордината искомой точки известна $y = -1$, то найдем абсциссу этой точки, подставив это значение в уравнение функции.

Для $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ получаем уравнение: $-1 = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

или $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, откуда $2x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} +$

$+ 2\pi n$. Тогда $2x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. Для $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

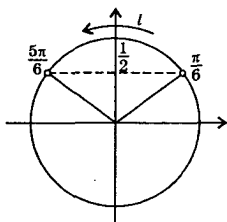
имеем уравнение: $-1 = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, откуда $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Тогда

$\frac{x}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ и $x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n$. Таким образом, координаты иско-

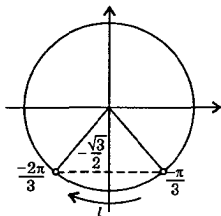
мых точек $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; -1\right)$ и $\left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; -1\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; -1\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; -1\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

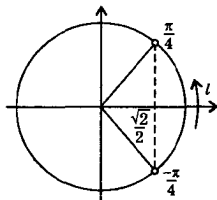
151а) На тригонометрическом круге по оси синусов (вертикальная ось) отложим значение $\frac{1}{2}$. Построим углы t , для которых $\sin t = \frac{1}{2}$. Это угол $t_1 = \frac{\pi}{6}$ и $t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Множество точек окружности, для которых $\sin t > \frac{1}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\sin t > \frac{1}{2}$ на промежутке $t \in [0; \pi]$ удовлетворяют значения $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.



151б) Для решения неравенства $\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на тригонометрическом круге по оси синусов (вертикальная ось) отложим значение $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Построим углы t , для которых $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это угол $t_1 = -\frac{\pi}{3}$ и $t_2 = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3}$. Множество точек окружности, для которых $\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $t \in [-\pi; 0]$ удовлетворяют значения $t \in \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$. Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$.

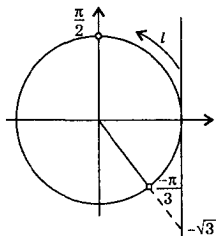


152а) Для решения неравенства $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ на тригонометрическом круге по оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Построим углы t , для которых $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это углы $t_1 = -\frac{\pi}{4}$ и $t_2 = \frac{\pi}{4}$.



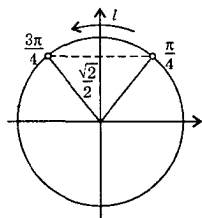
Множество точек окружности, для которых $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ удовлетворяют значения $t \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.



153а) Для решения неравенства $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$ на тригонометрическом круге по оси тангенсов (вспомогательная вертикальная ось) отложим значение $(-\sqrt{3})$. Построим угол t , для которого $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$. Это угол $t = -\frac{\pi}{3}$. Множество точек окружности, для которых $\operatorname{tg} t > -\sqrt{3}$ отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\operatorname{tg} t >$

$> -\sqrt{3}$ на промежутке $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяют значения $t \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.



154а) Сначала решим неравенство $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке $x \in [0; 2\pi]$. На тригонометрическом круге по оси синусов (вертикальная ось) отложим значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Построим углы, для которых $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Эти углы $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Множество точек,

для которых $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке $x \in [0; 2\pi]$ удовлетворяют значения $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Учтем периодичность функции $\sin x$ и по-

лучим $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi l; \frac{3\pi}{4} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi l; \frac{3\pi}{4} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

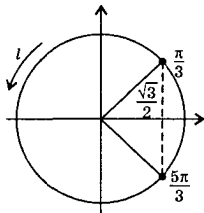
157в) Запишем данное неравенство $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$ в виде $2\cos x \leq \sqrt{3}$. Разделим обе части неравенства на положительное

число 2. При этом знак неравенства сохраняется: $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Снача-

чала решим это неравенство на промежутке $x \in [0; 2\pi]$. На тригонометрическом круге отложим по оси косинусов (горизонтальная ось)

значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Построим углы x , для которых $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Это углы $x_1 = \frac{\pi}{3}$ и $x_2 =$

$= 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Множество точек окружности, для которых $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно,



что неравенству $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$ удовлетворяют значения $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$. Учтем периодичность функции $\cos x$ и по-

лучим $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

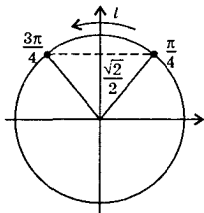
159в) Для решения неравенства $\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \geq 1$ введем но-

вую неизвестную $t = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ и получим нера-

венство $\sqrt{2} \sin t \geq 1$. Разделим обе части на положительное число $\sqrt{2}$. При этом знак

неравенства сохраняется: $\sin t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Снача-

ла решим это неравенство на промежутке $t \in [0; 2\pi]$. На тригонометрическом круге отложим по оси синусов (вертикальная ось)



значение $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Построим углы t , для которых $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это углы $t_1 = \frac{\pi}{4}$ и $t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Множество точек окружности, для которых $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$ удовлетворяют значения

$t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$. Учтем периодичность функции $\sin t$ и получим $t \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$. Теперь вернемся к неизвестной x .

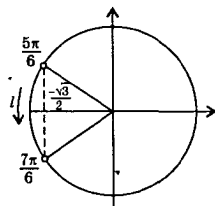
Получаем двойное линейное неравенство $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.

Из всех частей неравенства вычтем число $\frac{\pi}{4}$. Имеем: $2\pi n \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Умножим все члены неравенства на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $4\pi n \leq x \leq \pi + 4\pi n$ или $x \in [4\pi n; \pi + 4\pi n]$.

Ответ: $[4\pi n; \pi + 4\pi n]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

160г) Используя формулу для косинуса суммы двух углов, преобразуем левую часть неравенства $\cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

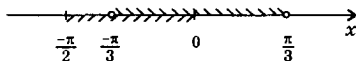
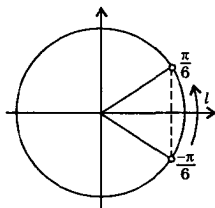
Получаем: $\cos \left(x + \frac{\pi}{8} \right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Введем новую неизвестную $t = x + \frac{\pi}{8}$. Имеем неравенство $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Сначала решим это неравенство на промежутке $t \in [0; 2\pi]$. На тригонометрическом круге по оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение



$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Построим углы t , для которых $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это углы $t_1 = \frac{5\pi}{6}$ и $t_2 = \frac{7\pi}{6}$. Множество точек окружности, для которых $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству

$\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$ удовлетворяют значения $t \in \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$. Учтем периодичность функции $\cos t$ и получим $t \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Теперь вернемся к неизвестной x . Получаем двойное неравенство $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{8} < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. Из всех частей неравенства вычтем число $\frac{\pi}{8}$ и получим $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + 2\pi n$ или $\frac{17\pi}{24} + 2\pi n < x < \frac{25\pi}{24} + 2\pi n$ или $x \in \left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n; \frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right)$. Ответ: $\left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n; \frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

1636) Для решения неравенства $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ введем новую неизвестную $t = \frac{x}{2}$. Получаем неравенство $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и решим его на промежутке $t \in [-\pi; \pi]$. На тригонометрическом круге по оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Построим углы t , для которых $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Это углы $t_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $t_2 = \frac{\pi}{6}$. Множество точек окружности, для которых $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$, отмечено буквой l . Из рисунка видно, что неравенству $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяют значения $t \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. Вернемся к неизвестной x и получим двойное линейное неравенство $-\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6}$. Умножим все члены неравенства



на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Имеем: $-\frac{\pi}{6} \cdot 2 < \frac{x}{2} \cdot 2 < \frac{\pi}{6} \cdot 2$ или $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. Теперь из найденного решения выберем значения x , принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Из диаграммы видно, что такими значениями являются $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 0\right]$. Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right]$.

164б) Для решения уравнения $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$ введем новую неизвестную $t = \sin x$. Получаем квадратное уравнение $3t^2 - 5t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = -\frac{1}{3}$ и $t_2 = 2$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\sin x = -\frac{1}{3}$ (его решения $x = (-1)^n \times \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\sin x = 2$ (решений не имеет, т.к. функция $\sin x$ ограничена, т.е. $|\sin x| \leq 1$).

Ответ: $(-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

166а) При решении уравнения $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ найдем связь между величинами $\cos x$ и $\sin x$, используя основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Получаем уравнение: $2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0$ или $0 = 2\sin^2 x - \sin x - 1$. Введем новую неизвестную $t = \sin x$. Имеем квадратное уравнение $0 = 2t^2 - t - 1$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x .

Получаем уравнения: $\sin x = 1$ (его решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$)

и $\sin x = -\frac{1}{2}$ (его решения $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

167а) Для решения уравнения $3\tg^2 x + 2\tg x - 1 = 0$ введем новую неизвестную $t = \tg x$ и получим квадратное уравнение $3t^2 + 2t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\tg x = -1$ (его решения $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\tg x = \frac{1}{3}$ (его решения $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$). Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

1676) Для решения уравнения $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ учтем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Получаем уравнение: $\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$ или $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = -2$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\operatorname{tg} x = 1$ (его решения $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\operatorname{tg} x = -2$ (его решения $x = \operatorname{arctg} (-2) + \pi k = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

168а) При решении уравнения $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$ разложим его левую часть на множители $\cos x (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Имеем уравнения: $\cos x = 0$ (его решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$ (т.е. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) и его решения $x = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

169а) Для решения однородного уравнения $3 \sin^2 x + \sin x \times \cos x = 2 \cos^2 x$ учтем, что $\cos x \neq 0$. Проверим это. Если $\cos x = 0$, то подставим эту величину в данное уравнение: $3 \sin^2 x + \sin x \cdot 0 = 2 \cdot 0^2$ или $3 \sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$. Очевидно, что не существует такого значения x , для которого и $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$. Так как $\cos x \neq 0$, то разделим все члены данного уравнения на $\cos^2 x$. Получаем уравнение: $3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = 2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$ или $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 2$. Введем новую неизвестную t и получим квадратное уравнение $3t^2 + t - 2 = 0$ или $3t^2 + t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Вернемся к неизвестной x . Имеем уравнения: $\operatorname{tg} x = -1$ (его решения $x = \operatorname{arctg} (-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$ (его решения $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

170а) При решении уравнения $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$ используем формулу для синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество. Имеем уравнение: $4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$ или $4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$ или $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$. Проверим, что значение $\cos x = 0$ не является решением этого уравнения. При подстановке в данное уравнение получаем: $\sin^2 x - 2\sin x \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0$ или $\sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$. Очевидно, что не существует величины x , для которой одновременно и $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$. Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$ или $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\operatorname{tg} x = -1$ (его решения $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\operatorname{tg} x = 3$ (решения $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

170б) Для решения уравнения $\cos 2x = 2\cos x - 1$ запишем его в виде $(1 + \cos 2x) - 2\cos x = 0$ и используем формулу половинного аргумента: $2\cos^2 x - 2\cos x = 0$. Разделим все члены уравнения на число 2 и разложим его левую часть на множители: $\cos x(\cos x - 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения: $\cos x = 0$ (его решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\cos x - 1 = 0$ (т.е. $\cos x = 1$ и его решения $x = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

171а) Для решения уравнения $2\sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x$ используем формулу для синуса двойного аргумента: $2\sin^2 x = \sqrt{3} \cdot 2\sin x \cos x$. Перенесем все члены в левую часть уравнения и разложим ее на множители: $2\sin x(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а) $\sin x = 0$, его решения $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$. Разделим все члены этого однородного уравнения на $\cos x$ (легко проверить, что $\cos x \neq 0$): $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$ или $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, его решения $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: πn ; $\frac{\pi}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

172а) При решении уравнения $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$ используем формулы для синуса и косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Получаем: $2\sin x \cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ или $0 = 3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x$. Разделим все члены этого однородного уравнения на $\cos^2 x$ (проверьте, что $\cos x \neq 0$): $0 = 3\tg^2 x - 2\tg x - 1$. Введем новую неизвестную $t = \tg x$ и получим квадратное уравнение: $0 = 3t^2 - 2t - 1$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\tg x = 1$ (его решения $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$)

и $\tg x = -\frac{1}{3}$ (решения $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

172б) Для решения уравнения $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ разложим его левую часть на множители и используем формулу для косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Получаем:

ем: $\left(\sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4}\right)\left(\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}$ или $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$

или $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$. Решения этого уравнения $\frac{x}{2} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) +$

$+ 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$), тогда $x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$.

Ответ: $x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

173а) При решении уравнения $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$ используем формулу для синуса двойного аргумента и разложим левую часть на множители: $2\sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 0$ или $\sin 2x (2\cos 2x + \sin 2x) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а) $\sin 2x = 0$, его решения $2x = \pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$), откуда $x = \frac{\pi}{2} n$.

б) $2\cos 2x + \sin 2x = 0$. Разделим все члены этого однородного уравнения на $\cos 2x$ (проверьте, что $\cos 2x \neq 0$) и получим: $2 + \tg 2x = 0$ или $\tg 2x = -2$. Решения этого уравнения $2x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$ (где $k \in \mathbb{Z}$), откуда $x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} n$; $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

1736) Для решения уравнения $\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$ умножим обе его части на знаменатель дроби. Получаем: $3 = 5\operatorname{tg} x + 8$ или $-5 = 5\operatorname{tg} x$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$. Решения этого уравнения $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

174а) При решении уравнения $\cos 5x - \cos 3x = 0$ преобразуем его левую часть в произведение: $-2\sin \frac{5x - 3x}{2} \sin \frac{5x + 3x}{2} = 0$ или $\sin x \sin 4x = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения: $\sin x = 0$ (его решения $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\sin 4x = 0$ (решения $4x = \pi k$ (где $k \in \mathbb{Z}$), откуда $x = \frac{\pi}{4} k$). Легко видеть, что решения $x = \frac{\pi}{4} k$ включают в себя решения $x = \pi n$ (при k кратных 4, т.е. $k = 4n$).

Ответ: $\frac{\pi}{4} k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

174б) Для решения уравнения $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$ преобразуем его левую часть в произведение: $2\sin \frac{7x - x}{2} \cos \frac{7x + x}{2} = \cos 4x$ или $2\sin 3x \cos 4x = \cos 4x$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и вновь разложим ее на множители: $2\sin 3x \cos 4x - \cos 4x = 0$ или $\cos 4x (2\sin 3x - 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения: $\cos 4x = 0$ (его решения $4x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$), откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$) и $2\sin 3x - 1 = 0$ (т.е. $\sin 3x = \frac{1}{2}$, его решения $3x = (-1)^k \times \arcsin \frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$ (где $k \in \mathbb{Z}$), откуда $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k$).

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

175а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$ из первого уравнения выразим $y = \pi - x$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $\cos x - \cos(\pi - x) = 1$ или $\cos x - (-\cos x) = 1$ или $2\cos x = 1$, откуда $\cos x = \frac{1}{2}$. Решения этого уравнения $x = \pm \arccos \frac{1}{2} +$

$$+ 2\pi n = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \text{ Теперь найдем } y = \pi - \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) = \\ = \pi \mp \frac{\pi}{3} - 2\pi n = \mp \frac{\pi}{3} - \pi(2n - 1).$$

Ответ: $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \mp \frac{\pi}{3} - \pi(2n - 1) \right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

175б) При решении системы уравнений $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2 \end{cases}$ из

первого уравнения выразим $x = \frac{\pi}{2} + y$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \sin^2 y = 2$ или $\sin^2 y + \sin^2 y = 2$ или $\sin^2 y = 1$, откуда $\sin y = \pm 1$. Решения этих уравнений $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Найдем $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n = \pi + \pi n$.

Ответ: $(\pi + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

176а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases}$ введем

новые неизвестные $a = \sin x$ и $b = \cos y$. Получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases} a - b = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $b = a$ и подставим во второе уравнение: $a^2 + a^2 = 2$ или $a^2 = 1$, откуда $a = \pm 1$. Тогда и $b = \pm 1$. Получаем две системы уравнений.

а) $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y = 2\pi k \end{cases}$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos y = -1 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k \right), \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi k \right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

176б) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6} \end{cases}$ из первого

уравнения выразим $y = \frac{\pi}{4} - x$ и подставим во второе уравнение:

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{6}$. Используем формулу для тангенса разности двух углов: $\operatorname{tg} x \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6}$ или $\operatorname{tg} x \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6}$. Умножим обе части уравнения на $6(1 + \operatorname{tg} x)$. Получаем: $6\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x) = 1 \cdot (1 + \operatorname{tg} x)$ или $6\operatorname{tg} x - 6\operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$ или $0 = 6\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1$. Введем новую неизвестную $t = \operatorname{tg} x$. Имеем квадратное уравнение $0 = 6t^2 - 5t + 1$, корни которого $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ (его решения $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ (решения $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$). Теперь найдем $y = \frac{\pi}{4} - x$. Тогда имеем: $y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n$ и $y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi k$.

Ответ: $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n \right)$,
 $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi k \right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

Глава II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4. Производная

1786) Найдем приращение Δf функции $f(x) = 2x^2 - 3$ в точке x_0 . По определению приращения $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2(x_0 + \Delta x)^2 - 3) - (2x_0^2 - 3) = (2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3) - (2x_0^2 - 3) = 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2$. Теперь найдем эту величину для $x_0 = 3$ и $\Delta x = -0,2$: $\Delta f = 4 \cdot 3 \cdot (-0,2) + 2 \cdot (-0,2)^2 = -2,4 + 0,08 = -2,32$. **Ответ:** $-2,32$.

1796) Найдем приращения Δx и Δf для функции $f(x) = 4x - x^2$. Приращение $\Delta x = x - x_0 = 2,6 - 2,5 = 0,1$. Приращение $\Delta f = f(x) - f(x_0) = (4x - x^2) - (4x_0 - x_0^2) = (4x - 4x_0) - (x^2 - x_0^2) = 4(x - x_0) - (x - x_0)(x + x_0) = (x - x_0)(4 - x - x_0)$. Найдем эту величину для $x = 2,6$ и $x_0 = 2,5$. Получаем $\Delta f = (2,6 - 2,5)(4 - 2,6 - 2,5) = 0,1 \times (-1,1) = -0,11$. **Ответ:** $\Delta x = 0,1$; $\Delta f = -0,11$.

180а) Выразим приращение функции $f(x) = 1 - 3x^2$ в точке x_0 через x_0 и Δx . По определению приращения функции имеем: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - 3(x_0 + \Delta x)^2 - (1 - 3x_0^2) = 1 - 3x_0^2 - 6x_0\Delta x - 3(\Delta x)^2 - 1 + 3x_0^2 = -6x_0\Delta x - 3(\Delta x)^2 = -3\Delta x(2x_0 + \Delta x)$.

Ответ: $-3\Delta x(2x_0 + \Delta x)$.

181б) Средняя скорость автобуса — отношение приращения пройденного пути к приращению времени, за которое оно произошло. За время от $t_1 = 3$ ч до $t_2 = 5$ ч (приращение времени $\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 3 = 2$ ч) пройденный путь изменился от $S_1 = 150$ км до $S_2 = 280$ км (приращение пути $\Delta S = S_2 - S_1 = 280 - 150 = 130$ км). Тогда средняя скорость $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 65$ км/ч. Ответ: 65 км/ч.

182а) Координата x точки меняется со временем по закону $x(t) = 3 + 12t - t^2$. В момент времени $t_1 = 2$ координата точки $x(2) = 3 + 12 \cdot 2 - 2^2 = 23$, в момент времени $t_2 = 2,5$ координата $x(2,5) = 3 + 12 \cdot 2,5 - 2,5^2 = 26,75$. Следовательно, за время $t_2 - t_1 = 0,5$ координата точки изменилась на величину $x(2,5) - x(2) = 26,75 - 23 = 3,75$. Так как приращение координаты положительно, то точка удаляется от начала координат. Средняя скорость тела за этот промежуток времени $v = \frac{x(2,5) - x(2)}{t_2 - t_1} = \frac{3,75}{0,5} = 7,5$.

Ответ: см. решение.

184а) Для функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ найдем приращение функции при изменении x от величины x_1 до x_2 . Получаем: $\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$. Приращение аргумента при этом $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 0 = 1$. Тогда угловым коэффициентом секущей $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$. Так как $k > 0$, то секущая образует острый угол с осью OX . Ответ: $k = \frac{1}{2}$, острый угол.

185) Куб имеет шесть граней, площадь каждой из них равна x^2 . Тогда площадь полной поверхности куба $S(x) = 6x^2$. Пусть ребро куба x получило приращение Δx . Найдем приращение полной поверхности куба: $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = 6(x + \Delta x)^2 - 6x^2 = 6((x + \Delta x)^2 - x^2) = 6(x + \Delta x + x)(x + \Delta x - x) = 6(2x + \Delta x)\Delta x$.

Ответ: $6(2x + \Delta x)\Delta x$.

186а) Для функции $f(x) = -x^3 + 3x$ найдем ее приращение: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = -(x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x) - (-x^3 + 3x) = (x^3 - (x + \Delta x)^3) + 3(x + \Delta x - x) = (x - x - \Delta x)(x^2 + x(x + \Delta x) + (x + \Delta x)^2) + 3\Delta x = -\Delta x \cdot (x^2 + x^2 + x \cdot \Delta x + x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) + 3\Delta x = -\Delta x \cdot (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) + 3\Delta x = -\Delta x(3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$. Также легко найти отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x (3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = -3x^2 + 3 - 3x\Delta x - (\Delta x)^2.$$

Ответ: $\Delta f = -\Delta x (3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -3x^2 + 3 - 3x\Delta x - (\Delta x)^2.$$

186б) Для функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ найдем ее приращение

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{(x + \Delta x)^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - ((x + \Delta x)^2 - 1)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \frac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \\ &= \frac{(x + x + \Delta x)(x - x - \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Теперь найдем отношение приращения функции к приращению

$$\text{аргумента } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}.$$

$$\text{Ответ: } \Delta f = \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}.$$

187а) Для нахождения средней скорости точки определим для координаты $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ приращение координаты за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$: $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = v_0(t_0 + \Delta t) -$

$$\begin{aligned} &- \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \left(v_0 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} \right) = (v_0(t_0 + \Delta t) - v_0 t_0) + \left(\frac{gt_0^2}{2} - \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} \right) = \\ &= v_0(t_0 + \Delta t - t_0) + \frac{g}{2}(t_0 + t_0 + \Delta t)(t_0 - t_0 - \Delta t) = v_0 \Delta t + \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t)(-\Delta t) = \\ &= \Delta t \left(v_0 - \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t) \right). \end{aligned}$$

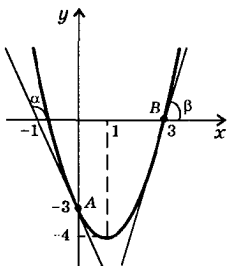
Теперь легко найти среднюю скорость точки

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 - gt_0 - \frac{g}{2} \Delta t. \quad \text{Ответ: } v_0 - gt_0 - \frac{g}{2} \Delta t.$$

188а) Схематично изобразим график функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Это парабола, направленная ветвями вверх, пересекающая ось абсцисс в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ и ось ординат — в точке $y = -3$. Вершина параболы имеет координаты $x_v = 1$ и $y_v = -4$. Если провести касательную к параболе в точке A с абсциссой $x_0 = 0$, то касатель-

ная образует тупой угол α с осью абсцисс и угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha < 0$. Если провести касательную к параболе в точке B с абсциссой $x_0 = 3$, то касательная образует острый угол β с осью абсцисс и угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \beta > 0$.

Ответ: см. решение.



189а) Рассмотрим рис. 85,а учебника. В точке x_1 касательная образует тупой угол с осью абсцисс и угловой коэффициент ее отрицательный. В точке x_4 касательная образует острый угол с осью абсцисс и ее угловой коэффициент положительный. В точках x_2 и x_3 касательных к графику функции не существует. В окрестностях точек x_1 и x_4 график функции является “гладкой” кривой. **Ответ:** см. решение.

191а) Сначала для функции $f(x) = 2x^2$ найдем приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2((x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2) = 2(x_0 + \Delta x - x_0)(x_0 + \Delta x + x_0) = 2\Delta x(2x_0 + \Delta x)$. Вычислим величину $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x) = 4x_0 + 2\Delta x$. Для точки $x_0 = 1$ получим $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 4 \cdot 1 + 2\Delta x = 4 + 2\Delta x$. Подставляя соответственно значения $\Delta x = 0,5; 0,1; 0,01$, найдем $\frac{\Delta f}{\Delta x}: 4 + 2 \cdot 0,5 = 5; 4 + 2 \cdot 0,1 = 4,2; 4 + 2 \cdot 0,01 = 4,02$. **Ответ:** 5; 4,2; 4,02.

192б) Чтобы найти отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ при $\Delta x \rightarrow 0$, подставим значение $\Delta x = 0$ в это отношение. Получим $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot 0 + 0^2 = 3x_0^2$. При $x_0 = 1$ эта величина равна $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3 \cdot 1^2 = 3$, при $x_0 = -21$ имеем $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3 \cdot (-21)^2 = 3 \cdot 441 = 1323$.

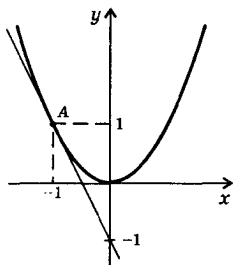
Ответ: 3; 1323.

193а) Учтем, что производная функции $f(x) = x^3$ равна $f'(x) = 3x^2$. Найдем значение этой производной в точке x_0 : $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ и $f'(-1,5) = 3 \cdot (-1,5)^2 = 3 \cdot 2,25 = 6,75$. **Ответ:** 12; 6,75.

193б) Учтем, что производная линейной функции $f(x) = 4 - 2x$ равна $f'(x) = -2$. Эта производная величина постоянная и не зависит от величины x_0 . Поэтому $f'(0,5) = -2$ и $f'(-3) = -2$.

Ответ: -2; -2.

194а) Для функции $f(x) = x^2 - 3x$ найдем производную $f'(x)$, пользуясь определением производной. Сначала найдем приращение функции: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x) = ((x + \Delta x)^2 - x^2) - 3(x + \Delta x - x) = (x + \Delta x + x)(x + \Delta x - x) - 3\Delta x = (2x + \Delta x)\Delta x - 3\Delta x = \Delta x(2x + \Delta x - 3)$. Найдем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x - 3 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x - 3 + \Delta x$. Теперь найдем величину $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Для этого подставим значение $\Delta x = 0$ в выражение для $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Получаем $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 2x - 3 + 0 = 2x - 3$. Это и есть производная данной функции $f(x)$, т.е. $f'(x) = 2x - 3$. Теперь найдем значения производной $f'(x)$ в точках -1 ; 2 . Имеем: $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$ и $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. **Ответ:** -5 ; 1 .



195а) Угловый коэффициент касательной к функции $f(x) = x^2$ равен значению производной этой функции $k = f'(x) = 2x$ в точке касания $x_0 = -1$, т.е. $k = 2x_0 = 2 \cdot (-1) = -2$. Поэтому уравнение касательной $y = -2x + b$. Касательная проходит через точку A , лежащую на параболе $f(x) = x^2$. Координата $y = (-1)^2 = 1$, поэтому координаты точки A $(-1; 1)$. Подставим координаты точки A в уравнение касательной: $1 = -2 \cdot (-1) + b$ или $1 = 2 + b$, откуда $b = -1$.

Подставив эту величину, получаем уравнение касательной $y = -2x - 1$. **Ответ:** $y = -2x - 1$.

196а) Сначала найдем приращение координаты $x(t) = -t^2 + 8t$. Получаем $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = -(t_0 + \Delta t)^2 + 8(t_0 + \Delta t) - (-t_0^2 + 8t_0) = (t_0^2 - (t_0 + \Delta t)^2) + 8((t_0 + \Delta t) - t_0) = (t_0 + t_0 + \Delta t)(t_0 - t_0 - \Delta t) + 8\Delta t = (2t_0 + \Delta t) \cdot (-\Delta t) + 8\Delta t = \Delta t(8 - 2t_0 - \Delta t)$. Найдем среднюю скорость

тела $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 8 - 2t_0 - \Delta t$. Теперь найдем мгновенную скорость \bar{v} . Для этого в выражении для средней скорости v величину Δt устремим к нулю. Тогда получаем $v = 8 - 2t_0$. Теперь найдем значение мгновенной скорости при $t_0 = 6$. Имеем: $v = 8 - 2 \cdot 6 = -4$.

Ответ: -4 .

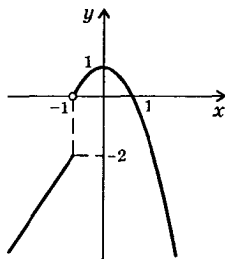
197б) На рис. 87,б учебника приведен график функции $y(x)$. Видно, что функция в точках x_1 и x_3 непрерывна. В точке x_2 функция не является непрерывной.

Ответ: в точках x_1 и x_3 непрерывна, в точке x_2 функция не является непрерывной.

198а) Построим график функции $f(x) =$
 $= \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{при } x > -1 \end{cases}$. График этой функ-

ции состоит из луча и части параболы. Данная функция определена при всех значениях x , т.е. $D(f) = (-\infty; \infty)$. Видно, что при $x = -1$ функция $f(x)$ не является непрерывной.

Ответ: -1.



199а) Функция $f(x) = x^3 - 4x$ является непрерывной в каждой точке области определения $(-\infty; \infty)$, т.к. является суммой двух непрерывных функций x^3 и $(-4x)$. Ответ: является.

200а) Функция $f(x) = x^2 - 3x + 4$ непрерывна во всей области определения. Тогда, если $x \rightarrow x_0$, то $f(x) \rightarrow f(x_0)$. Поэтому когда $x \rightarrow 0$ $f(x) \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$, когда $x \rightarrow 2$ $f(x) \rightarrow 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$.

Ответ: 4; 2.

2016) Так как $f(x) \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow -2$ при $x \rightarrow 3$, то функция

$$\frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} \rightarrow \frac{1 - (-2)}{1 + (-2)} = \frac{3}{-1} = -3 \text{ при } x \rightarrow 3. \quad \text{Ответ: } -3.$$

203а) Функция $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3}$ определена и непрерывна при $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$. При $x = 4$ эта функция определена и непрерывна. Следовательно, при $x \rightarrow 4$ $f(x) \rightarrow f(4) = \frac{4^2 + 3 \cdot 4 + 2}{4 - 3} = 30$.

Ответ: 30.

208а) Так как функция $f(x) = x^2 + x^3$ равна сумме функций, то ее производная равна сумме производных этих функций. Получаем: $f'(x) = (x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2$. Ответ: $2x + 3x^2$.

209а) Так как функция $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$ равна произведению функций x^3 и $4 + 2x - x^2$, то для нахождения ее производной используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем $f'(x) = (x^3)'(4 + 2x - x^2) + x^3(4 + 2x - x^2)' = 3x^2(4 + 2x - x^2) + x^3(2 - 2x) = 12x^2 + 6x^3 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^4 = -5x^4 + 8x^3 + 12x^2$. Ответ: $-5x^4 + 8x^3 + 12x^2$.

209б) Так как функция $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x) = x^{\frac{1}{2}}(2x^2 - x)$ равна произведению функций $x^{\frac{1}{2}}$ и $2x^2 - x$, то используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем:

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})'(2x^2 - x) + x^{\frac{1}{2}}(2x^2 - x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(2x^2 - x) + x^{\frac{1}{2}}(2 \cdot 2x - 1) =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = -5x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(-5x - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{x}\left(-5x - \frac{3}{2}\right).$$

Ответ: $\sqrt{x}\left(-5x - \frac{3}{2}\right)$.

210в) Так как функция $y = \frac{3x-2}{5x+8}$ представляет собой частное функций $3x-2$ и $5x+8$, то используем правило нахождения производной от частного функций. Получаем:

$$y' = \frac{(3x-2)'(5x+8) - (3x-2)(5x+8)'}{(5x+8)^2} = \frac{3(5x+8) - (3x-2) \cdot 5}{(5x+8)^2} =$$

$$= \frac{15x+24-15x+10}{(5x+8)^2} = \frac{34}{(5x+8)^2}.$$

Ответ: $\frac{34}{(5x+8)^2}$.

211б) Функцию $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$ запишем в виде $y = \frac{1}{3}x - 4x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}$. Используем правило нахождения производной от суммы функций. Получаем

$$y' = \left(\frac{1}{3}x - 4x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{3}x\right)' - (4x^{-2})' + (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{3} - 4 \cdot (-2)x^{-3} +$$

$$+ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + 8x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $\frac{1}{3} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

212б) Найдем сначала производную функции $f(x) = x - 4\sqrt{x} = x - 4x^{\frac{1}{2}}$. Получаем $f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Вычислим значения производной в данных точках: $f'(0,01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{0,01}} = 1 - \frac{2}{0,1} = 1 - 20 = -19$ и $f'(4) = 1 - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$.

Ответ: $-19; 0$.

2136) Найдем производную от функции $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$.

Получаем $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 2x = -2x^2 + 2x$. Приравняем производную нулю и получим неполное квадратное уравнение: $-2x^2 + 2x = 0$. Разложим его левую часть на множители: $-2x(x-1) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем: $x = 0$ или $x - 1 = 0$ (откуда $x = 1$).

Ответ: 0; 1.

2146) Найдем производную от функции $f(x) = x^3 + 1,5x^2$ и получим $f'(x) = 3x^2 + 1,5 \cdot 2x = 3x^2 + 3x$. Решим неравенство $f'(x) < 0$. Имеем: $3x^2 + 3x < 0$ или $3x(x+1) < 0$. Решение этого неравенства $-1 < x < 0$ или $x \in (-1; 0)$. Ответ: $(-1; 0)$.

215а) Для нахождения производной функции $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$ используем правило нахождения производной от частного функций.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } f'(x) &= \frac{(x^3 - 3x)'(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x)(1 + 4x^5)'}{(1 + 4x^5)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - 3)(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x) \cdot 4 \cdot 5x^4}{(1 + 4x^5)^2} = \frac{3x^2 + 12x^7 - 3 - 12x^5 - 20x^7 + 60x^5}{(1 + 4x^5)^2} = \\ &= \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2 - 3}{(1 + 4x^5)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2 - 3}{(1 + 4x^5)^2}. \end{aligned}$$

215б) Данную функцию $f(x) = \left(\frac{3}{x} + x^2\right)(2 - \sqrt{x})$ запишем в виде $f(x) = (3x^{-1} + x^2)(2 - x^{\frac{1}{2}})$. Используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем: $f'(x) = (3x^{-1} + x^2)' \times (2 - x^{\frac{1}{2}}) + (3x^{-1} + x^2)(2 - x^{\frac{1}{2}})' = (3 \cdot (-1)x^{-2} + 2x)(2 - x^{\frac{1}{2}}) + (3x^{-1} + x^2) \times (-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) = (-3x^{-2} + 2x)(2 - x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x^{-1} + x^2) = -6x^{-2} + 3x^{-\frac{3}{2}} + 4x - 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} = -6x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 4x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $-6x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 4x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

2166) Найдем производную функции $f(x) = 2x^4 - x^8$. Получаем: $f'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 8x^7 = 8x^3(1 - x^4) = 8x^3(1 - x^2)(1 + x^2) = 8x^3(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)$. Приравняем производную нулю. Имеем уравнение

$8x^3(1-x)(1+x)(1+x^2) = 0$. Так как при всех значениях x выражение $1+x^2 \neq 0$, то разделим обе части этого уравнения на $8(1+x^2)$. Получаем уравнение $x^3(1-x)(1+x) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Имеем уравнения: $x^3 = 0$ (корень $x = 0$); $1-x = 0$ (корень $x = 1$) и $1+x = 0$ (корень $x = -1$). Ответ: 0; 1; -1.

217а) Найдем производную функции $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$. Получаем: $f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x - 63 = 3(x^2 - 4x - 21)$. Решим неравенство $f'(x) < 0$ или $3(x^2 - 4x - 21) < 0$. Корни этого квадратного трехчлена $x_1 = -3$ и $x_2 = 7$. Поэтому решение неравенства $x \in (-3; 7)$.

Ответ: $(-3; 7)$.

218а) Например, такой функцией будет $f(x) = x^2 + 3x + 7$, т.к. $f'(x) = 2x + 3$ — данная функция. Ответ: $x^2 + 3x + 7$.

220а) Представим сложную функцию $h(x) = \cos 3x$ в виде $h(x) = g(f(x))$. Чтобы найти значение данной функции $h(x)$ сначала вычисляют ее аргумент $f(x) = 3x$, а затем находят косинус такого аргумента, т.е. $h(f) = \cos f$ или $h(x) = \cos x$ (т.к. безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции).

Ответ: $h(x) = \cos x$, $f(x) = 3x$.

221а) Представим сложную функцию $h(x) = (3 - 5x)^5$ в виде $h(x) = g(f(x))$. Чтобы найти значение данной функции $h(x)$ сначала вычисляют значение линейной функции $f(x) = 3 - 5x$, а затем находят пятую степень этой величины, т.е. $h(f) = f^5$ или $h(x) = x^5$ (т.к. безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции).

Ответ: $h(x) = x^5$, $f(x) = 3 - 5x$.

222а) Область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ задается условием $9 - x^2 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решая это квадратное неравенство, получим $x \in [-3; 3]$.

Ответ: $[-3; 3]$.

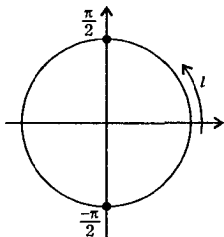
222б) Область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$ задается условием $x^2 - 7x + 12 > 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным и делить на нуль нельзя). Решая это квадратное неравенство, получим $x \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (4; \infty)$.

223а) Область определения функции $y = \sqrt{\cos x}$ задается условием $\cos x \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Из тригонометрического круга видно, что неравенство $\cos x \geq 0$ выполнено в I и IV четвертях, т.е. при $x \in$

$$\in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$



224а) Функция $f(x) = (2x - 7)^8$ является сложной и ее можно записать в виде $f(x) = h(g(x))$, где $h(g) = g^8$ и $g(x) = 2x - 7$. По правилу нахождения производной сложной функции получаем: $f' = h'_g \cdot g'_x = (g^8)'_g \cdot (2x - 7)'_x = 8g^7 \cdot 2 = 16g^7 = 16(2x - 7)^7$. Индекс внизу указывает, по какой переменной берется производная.

Ответ: $16(2x - 7)^7$.

224б) Функцию $f(x) = \frac{1}{(5x + 1)^3}$ запишем в виде $f(x) = (5x + 1)^{-3}$.

Эта функция является сложной и ее можно представить в виде $f(x) = h(g(x))$, где $h(g) = g^{-3}$ и $g(x) = 5x + 1$. По правилу нахождения производной сложной функции получаем: $f' = h'_g \cdot g'_x = (g^{-3})'_g \cdot (5x + 1)'_x = -3g^{-4} \cdot 5 = -15g^{-4} = -15(5x + 1)^{-4} = -\frac{15}{(5x + 1)^4}$. Индекс внизу указывает, по какой переменной берется производная.

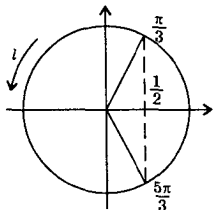
Ответ: $-\frac{15}{(5x + 1)^4}$.

225б) Функция $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1 - 2x)^4$ является разностью двух сложных функций $\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8$ и $(1 - 2x)^4$. Находя производные этих функций (аналогично примерам 224а, б), получим:

$$f' = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 \cdot \frac{1}{4} - 4(1 - 2x)^3 \cdot (-2) = 2\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 + 8(1 - 2x)^3.$$

Ответ: $2\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 + 8(1 - 2x)^3$.

226а) Область определения функции $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$ задается



условием $1 - 2\cos x \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Запишем это неравенство в виде $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

По оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение $\frac{1}{2}$. Построим углы, удовлетворяющие условию $\cos x = \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$. Это углы $x_1 = \frac{\pi}{3}$ и $x_2 = 2\pi -$

$\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Множество точек окружности, удовлетворяющих неравенству, отмечено буквой l . Видно, что решением неравенства

$\cos x \leq \frac{1}{2}$ являются значения $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$. Учтем периодичность

функции косинус и получим $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l \right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

226г) Область определения функции $y = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$ задается усло-

вием $\frac{1}{x} + 1 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрица-

тельным). Запишем это неравенство в виде $\frac{1+x}{x} \geq 0$ и решим его методом интервалов. Отметим точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль. Построим диаграм-

му знаков дроби $\frac{1+x}{x}$. Учтем, что $x \neq 0$ (делить на нуль нельзя).

Тогда решение неравенства $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$.



Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; \infty)$.

227а) Даны функции $f(x) = 3 - 2x$ и $g(x) = x^2$. Зададим формулой сложную функцию $h(x) = f(g(x))$. Так как $g(x) = x^2$, то функция $h(x) = f(x^2)$. Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен x^2 , т.е. $h(x) = 3 - 2 \cdot x^2$. Ответ: $h(x) = 3 - 2 \cdot x^2$.

227в) Даны функции $f(x) = 3 - 2x$ и $g(x) = x^2$. Зададим формулой сложную функцию $h(x) = g(f(x))$. Так как $f(x) = 3 - 2x$, то функция $h(x) = g(3 - 2x)$. Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен $(3 - 2x)$, т.е. $h(x) = (3 - 2x)^2$. Ответ: $h(x) = (3 - 2x)^2$.

228а) Даны функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$ и $g(x) = \cos x$. Зададим формулой сложную функцию $h(x) = f(g(x))$. Так как $g(x) = \cos x$, то функция $h(x) = f(\cos x)$. Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен $\cos x$, т.е. $h(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$. Найдем область определения этой функции. Она задается условием $\cos x - 1 \neq 0$ (делить на нуль нельзя). Решая это неравенство, получаем $x \neq 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, область определения функции $h(x)$ — все значения x , кроме $x = 2\pi n$.

Ответ: $h(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$; все x , кроме $x = 2\pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$).

228в) Даны функции $p(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = \cos x$. Зададим формулой сложную функцию $h(x) = p(g(x))$. Так как $g(x) = \cos x$, то функция $h(x) = p(\cos x)$. Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен $\cos x$, т.е. $h(x) = \sqrt{\cos x}$. Найдем область определения этой функции. Она задается условием $\cos x \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решая это неравенство, получим: $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbb{Z}$ (см. задачу 223,а).

Ответ: $h(x) = \sqrt{\cos x}$, $D(h) = \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

229а) Такой функцией является функция $f(x) = \frac{x}{2}$. Проверим это. Для функции $g(x) = 2x$ найдем $f(g(x))$. Так как $g(x) = 2x$, то $f(g(x)) = f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Таким образом, требуемое равенство выполнено. Ответ: $f(x) = \frac{x}{2}$.

229в) Такой функцией является функция $f(x) = \frac{x-2}{3}$. Проверим это. Для функции $g(x) = 3x + 2$ найдем $f(g(x))$. Так как $g(x) = 3x + 2$, то $f(g(x)) = f(3x + 2) = \frac{(3x + 2) - 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$. Таким образом, требуемое равенство выполнено. Ответ: $f(x) = \frac{x-2}{3}$.

230а) Функция $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$ является сложной. Ее можно записать в виде $f(x) = h(g(x))$, где $h(g) = g^{17}$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

Используем правило нахождения производной сложной функции: $f'_x = h'_g \cdot g'_x = (g^{17})'_g \cdot (x^3 - 2x^2 + 3)'_x = 17g^{16} \cdot (3x^2 - 2 \cdot 2x) = 17(x^3 - 2x^2 + 3)^{16} \cdot (3x^2 - 4x)$. Индекс внизу указывает переменную, по которой берется производная. **Ответ:** $17(x^3 - 2x^2 + 3)^{16} \cdot (3x^2 - 4x)$.

230б) Функцию $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \frac{1}{x^2 + 3}$ запишем в виде $f(x) = (1 - x^4)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + 3)^{-1}$. Эта функция равна сумме двух сложных функций $(1 - x^4)^{\frac{1}{2}}$ и $(x^2 + 3)^{-1}$. Используя правило нахождения производной сложной функции (аналогично примеру 230,а), получим:

$$f' = \frac{1}{2}(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(-4x^3) + (-1)(x^2 + 3)^{-2} \cdot (2x) = -\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}} - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

Ответ: $-\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}} - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$.

231б) Учитывая, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций, получаем: $y' = \left(1 - \frac{1}{2} \sin x\right)' = (1)' - \left(\frac{1}{2} \sin x\right)' = 0 - \frac{1}{2}(\sin x)' = -\frac{1}{2} \cos x$. **Ответ:** $-\frac{1}{2} \cos x$.

232г) Учтем, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций. Для функции $y = 2\sin x + 1,5 \cos x$ получаем $y' = (2\sin x + 1,5\cos x)' = (2\sin x)' + (1,5\cos x)' = 2(\sin x)' + 1,5(\cos x)' = 2\cos x - 1,5\sin x$. **Ответ:** $2\cos x - 1,5\sin x$.

233б) Производная суммы функций равна сумме производных этих функций. Поэтому для функции $y = \cos x - \operatorname{tg} x$ получаем: $y' = (\cos x - \operatorname{tg} x)' = (\cos x)' - (\operatorname{tg} x)' = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ответ: $-\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$.

234а) Используя четность функции косинус и формулу приведения, запишем функцию $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x - \pi)$ в виде: $f(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Используя правило нахождения производной сложной функции, получим: $f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \times 2 = \sin 2x$. Вычислим значения производной в данных точках: $f'(0) = \sin(2 \cdot 0) = \sin 0 = 0$ и $f'(\pi) = \sin 2\pi = 0$. **Ответ:** 0; 0.

234б) Учтем, что производная от суммы двух функций равна сумме производных этих функций. Также используем правило нахождения производной сложной функции. Запишем функцию $f(x) = x - \operatorname{tg}(-2x)$ в виде $f(x) = x + \operatorname{tg} 2x$. Тогда производная $f'(x) = (x + \operatorname{tg} 2x)' = (x)' + (\operatorname{tg} 2x)' = 1 + \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = 1 + \frac{2}{\cos^2 2x}$. Теперь найдем значения производной в заданных точках: $f'(0) = 1 + \frac{2}{\cos^2(2 \cdot 0)} = 1 + \frac{2}{\cos^2 0} = 1 + \frac{2}{1} = 3$, $f'(\pi) = 1 + \frac{2}{\cos^2(2\pi)} = 1 + \frac{2}{1} = 3$.

Ответ: 3; 3.

235а) Сначала найдем производную функции $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$.

Получаем: $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x + \cos x\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' + (\cos x)' = \frac{1}{2} - \sin x$. Приравняем производную нулю и получим уравнение: $\frac{1}{2} - \sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Решения этого уравнения $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \times \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. **Ответ:** $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

235б) Найдем производную функции $f(x) = x - \cos x$. Получаем: $f'(x) = (x - \cos x)' = (x)' - (\cos x)' = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$. Приравняем производную нулю и получим уравнение: $1 + \sin x = 0$ или $\sin x = -1$.

Решения этого уравнения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

236а) Функция $f(x) = x^3 \sin 2x$ является произведением двух функций x^3 и $\sin 2x$. Поэтому используем формулу для нахождения производной от произведения двух функций. Получаем $f'(x) = (x^3 \sin 2x)' = (x^3)' \cdot \sin 2x + x^3 \cdot (\sin 2x)' = 3x^2 \sin 2x + x^3 \cos 2x \cdot 2 = 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x$. **Ответ:** $3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x$.

236б) Функция $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$ является частным функций $\cos 3x$ и x . Поэтому используем формулу для нахождения производной

от частного функций. Получаем: $f'(x) = \left(\frac{\cos 3x}{x}\right)' = \frac{(\cos 3x)' \cdot x - \cos 3x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(-\sin 3x \cdot 3)x - \cos 3x \cdot 1}{x^2} = -\frac{3x \sin 3x + \cos 3x}{x^2}$.

Ответ: $-\frac{3x \sin 3x + \cos 3x}{x^2}$.

237а) Учтем формулу для нахождения производной сложной функции. Для функции $f(x) = \sin^2 x$ получаем производную: $f'(x) = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. **Ответ:** $\sin 2x$.

237б) Функция $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ является суммой двух функций. Учтем, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций. Получаем: $f'(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg} x)' + (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$.

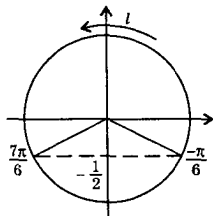
Ответ: $\frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$.

238а) Функцию $f(x) = \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x$, используя формулу для синуса суммы двух углов, запишем в виде: $f(x) = \sin(x + 2x) = \sin 3x$. Найдем производную этой функции. Получаем: $f'(x) = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$. **Ответ:** $3 \cos 3x$.

238г) Используя формулу для синуса двойного аргумента, функцию $f(x) = \sin 3x \cos 3x$ запишем в виде $f(x) = \frac{1}{2} \sin 6x$. Учтем формулу для нахождения производной сложной функции. Тогда получим: $f'(x) = \left(\frac{1}{2} \sin 6x\right)' = \frac{1}{2} \cos 6x \cdot 6 = 3 \cos 6x$. **Ответ:** $3 \cos 6x$.

239б) Функцию $f(x) = 2x + \cos(4x - \pi)$, используя четность функции косинус и формулу приведения, запишем в виде: $f(x) = 2x + \cos(\pi - 4x) = 2x - \cos 4x$. Найдем производную этой функции: $f'(x) = (2x - \cos 4x)' = (2x)' - (\cos 4x)' = 2 - (-\sin 4x \cdot 4) = 2 + 4 \sin 4x$. Приравняем производную нулю. Получаем уравнение: $2 + 4 \sin 4x = 0$

или $\sin 4x = -\frac{1}{2}$. Решения этого уравнения $4x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Теперь найдем $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n$.



Теперь решим неравенство $f'(x) > 0$. Подставив в это неравенство производную $f'(x)$, получим: $2 + 4 \sin 4x > 0$ или $\sin 4x > -\frac{1}{2}$. Для решения неравенства введем новую неизвестную $t = 4x$. Имеем неравенство $\sin t > -\frac{1}{2}$. Решения этого неравенства $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Вернемся

к старой неизвестной x . Получаем двойное линейное неравенство $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. Разделим все члены этого неравенства на положительное число 4. При этом знак неравенства сохраняется: $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n$.

Ответ: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}n$; $\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

240а) Такой функцией является, например, функция $f(x) = x + \cos x - 3$. Проверим это. Найдем производную этой функции: $f'(x) = (x + \cos x - 3)' = 1 - \sin x$. Видно, что производная $f'(x)$ совпадает с данной функцией. **Ответ:** $f(x) = x + \cos x - 3$.

§ 5. Применения непрерывности и производной

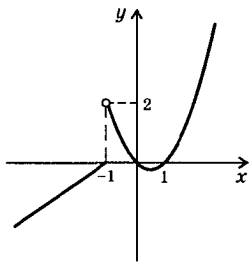
241а) Функция $f(x) = x^4 - x + 1$ непрерывна в любой точке области определения $D(f) = \mathbb{R}$, т.к. является суммой непрерывных функций. Поэтому функция $f(x)$ является непрерывной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. **Ответ:** является.

241б) Для наглядности изобразим график функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \leq -1 \\ x^2 - x & \text{при } x > -1 \end{cases} \quad \text{Из графика}$$

видно, что в точке $x_1 = 0$ функция является непрерывной, а в точке $x_2 = -1$ функция не является непрерывной. Рассмотрим поведение функции $f(x)$ вблизи точки $x_2 = -1$. Пусть $x = -1 + \Delta x$. Если $\Delta x < 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$, то значение функции $f(x) \rightarrow 0$. Если $\Delta x > 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$, то значение функции $f(x) \rightarrow 2$. Таким образом, при $x \rightarrow -1$ значение функции $f(x)$ стремится к двум различным величинам. Следовательно, функция $f(x)$ в точке $x_2 = -1$ не является непрерывной.

Ответ: является, не является.



242а) Так как функция $f(x) = x^3 - 2x^2$ является суммой двух непрерывных функций, то функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси. Поэтому промежуток непрерывности функции \mathbb{R} .

Ответ: \mathbb{R} .

242б) Функция $f(x) = \frac{x^3 + 27}{3x + x^2}$ определена при тех значениях x , для которых $3x + x^2 \neq 0$ или $x(3 + x) \neq 0$, т.е. при $x \neq 0$ и $x \neq -3$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если при $x \rightarrow x_0$ значение $f(x) \rightarrow f(x_0)$. Но функция $f(x)$ в точках $x=0$ и $x=-3$ не существует. Поэтому в этих точках функция не является непрерывной. Следовательно, промежутки непрерывности данной функции $(-\infty; -3)$, $(-3; 0)$, $(0; \infty)$. **Ответ:** $(-\infty; -3)$, $(-3; 0)$, $(0; \infty)$.

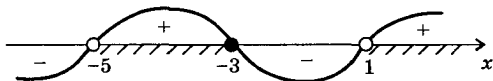
244а) Решим квадратное неравенство $x^2 - 5x + 4 > 0$ методом интервалов. Найдем значения x , при которых выражение $x^2 - 5x + 4$ равно нулю. Эти значения $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили координатную ось на три интервала. Определим знак выражения $x^2 - 5x + 4$ в последнем третьем промежутке. Например, для точки $x = 10$ из этого интервала получаем: $10^2 - 5 \cdot 10 + 4 > 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный.



Получаем диаграмму знаков этого выражения. Учтем что данное неравенство строгое, и границы интервалов в решение не входят. На основании диаграммы знаков запишем решение $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$.

244б) Рациональное неравенство $\frac{x+3}{x^2+4x-5} \geq 0$ решим методом интервалов. Найдем значения x , при которых обращаются в нуль числитель $x+3=0$ (корень $x=-3$) и знаменатель $x^2+4x-5=0$ (корни $x=1$ и $x=-5$) дроби $\frac{x+3}{x^2+4x-5}$. Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на четыре интервала. Определим



знак дроби $\frac{x+3}{x^2+4x-5}$, например, в последнем четвертом промежутке. Для точки $x=2$ из этого интервала получаем $\frac{2+3}{2^2+4 \cdot 2-5} > 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения $\frac{x+3}{x^2+4x-5}$ меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков этой дроби. Учтем, что $x \neq -5$ и $x \neq 1$, т.к. делить на нуль нельзя. На основании диаграммы знаков получаем решение данного неравенства $x \in (-5; -3] \cup (1; \infty)$. **Ответ:** $(-5; -3] \cup (1; \infty)$.

2456) В рациональном неравенстве $\frac{8}{x^2 - 6x + 8} < 1$ перенесем число 1 в левую часть и приведем выражения к общему знаменателю. Получаем: $\frac{8}{x^2 - 6x + 8} - 1 < 0$ или $\frac{8 - x^2 + 6x - 8}{x^2 - 6x + 8} < 0$ или $\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8} < 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Найдем значения x , при которых обращаются в нуль числитель $-x^2 + 6x = 0$ (корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$) и знаменатель $x^2 - 6x + 8 = 0$ (корни $x_3 = 2$ и $x_4 = 4$) дроби $\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8}$. Отметим эти точки на координатной оси. Они разбивают ось на пять интервалов. Определим знак дроби $\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8}$, например, в последнем пятом промежутке.

Для точки $x = 10$ из этого интервала получаем $\frac{-10^2 + 6 \cdot 10}{10^2 - 6 \cdot 10 + 8} < 0$. При переходе к каждому следующему интервалу знак дроби меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков выражения



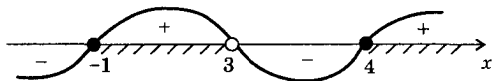
$\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8}$. Учтем, что данное неравенство строгое и границы промежутков в решение не входят. На основании диаграммы знаков получаем решение неравенства $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; \infty)$.

246а) Область определения функции $f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x-3}}$ задается

условием $x - \frac{4}{x-3} \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим это неравенство методом интервалов.

Приведем выражения к общему знаменателю: $\frac{x^2 - 3x - 4}{x-3} \geq 0$. Найдем значения x , при которых обращаются в нуль числитель $x^2 - 3x - 4 = 0$ (корни $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$) и знаменатель $x - 3 = 0$ (корень $x_3 = 3$) дроби $\frac{x^2 - 3x - 4}{x-3}$. Отметим эти точки на координатной оси.



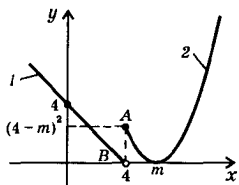
Они разбили ось на четыре интервала. Определим знак дроби, например, в последнем четвертом промежутке. Для точки $x = 5$ из этого интервала получаем $\frac{5^2 - 3 \cdot 5 - 4}{5 - 3} > 0$. При переходе к каждо-

му следующему промежутку знак выражения $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 3}$ меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков этой дроби. Учтем, что $x \neq 3$, т.к. делить на нуль нельзя. На основании диаграммы знаков получаем решение неравенства $x \in [-1; 3) \cup [4; \infty)$, что и является областью определения данной функции.

Ответ: $[-1; 3) \cup [4; \infty)$.

247а) Функция $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{при } x < 4 \\ (x - m)^2 & \text{при } x \geq 4 \end{cases}$ непрерывна во всех

точках координатной оси, кроме, может быть, точки $x = 4$. Рассмотрим поведение функции вблизи этой точки. Пусть $x = 4 + \Delta x$ и $\Delta x \rightarrow 0$. Если $\Delta x > 0$, то значение $f(x) \rightarrow (4 - m)^2$. Если $\Delta x < 0$, то значение $f(x) \rightarrow 4 - 4 = 0$. Необходимо, чтобы величины $(4 - m)^2$ и 0 совпадали. Тогда функция $f(x)$ в точке $x = 4$ будет непрерывной. Получаем условие $(4 - m)^2 = 0$, откуда $m = 4$. Следовательно, при $m = 4$ функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.



Для наглядности изобразим поведение функции $f(x)$. Участок 1 от параметра m не зависит. Участок 2 зависит от параметра m . При $m \rightarrow 4$ величина $(4 - m)^2 \rightarrow 0$ и точка A стремится к точке B . При $m = 4$ точки A и B совпадают и функция $f(x)$ становится непрерывной на всей числовой оси.

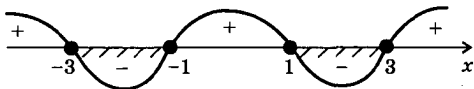
Ответ: $m = 4$.

247б) Чтобы функция $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - m}$ была непрерывной на всей числовой оси, прежде всего необходимо, чтобы функция была определена на всей оси. Для этого надо, чтобы при любых значениях x знаменатель дроби $x^2 - m \neq 0$. Это возможно только при $m < 0$. Тогда при таких значениях m данная функция непрерывна на всей числовой оси, как частное двух непрерывных функций (при этом значении функции, стоящей в знаменателе, не равно нулю).

Ответ: $m < 0$.

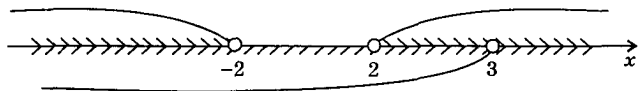
248а) Биквадратное неравенство $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$ решим методом интервалов. Сначала решим биквадратное уравнение. Введем новую неизвестную $t = x^2$ и получим квадратное уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = 9$. Вернемся к ста-

рой неизвестной x . Получаем уравнения: $x^2 = 1$ (его корни $x_{1,2} = \pm 1$) и $x^2 = 9$ (корни $x_{3,4} = \pm 3$). Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на пять интервалов. Определим знак выражения $x^4 - 10x^2 + 9$, например, в последнем пятом промежутке. Для точки $x = 10$ из этого интервала получаем $10^4 - 10 \cdot 10^2 + 9 > 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков выражения



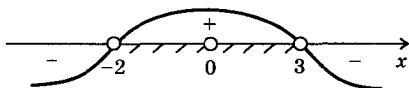
$x^4 - 10x^2 + 9$. На основании диаграммы запишем решение данного неравенства $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$. **Ответ:** $[-3; -1] \cup [1; 3]$.

2496) Область определения неравенства $\sqrt{x^2 - 4} (x - 3) < 0$ задается условием $x^2 - 4 \geq 0$, т.е. $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. Легко проверить, что значения $x = \pm 2$ не удовлетворяют данному строгому неравенству. В остальных точках области определения значение $\sqrt{x^2 - 4} > 0$.



Разделим обе части данного неравенства на положительную величину $\sqrt{x^2 - 4}$. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем линейное неравенство $x - 3 < 0$, решение которого $x < 3$. Учитывая также область определения, получим окончательное решение данного неравенства $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3)$. **Ответ:** $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$.

249в) При решении неравенства $x^2(3 - x)(x + 2) > 0$ учтем, что $x = 0$ не является решением его. При $x \neq 0$ величина $x^2 > 0$. Разделим обе части данного неравенства на эту величину. Получаем квадратное неравенство $(3 - x)(x + 2) > 0$ того же знака. Решая его методом

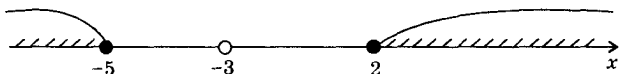


интервалов, получим $-2 < x < 3$. Учтем, что в этом промежутке $x \neq 0$. Тогда имеем решение данного неравенства $x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$.

Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 3)$.

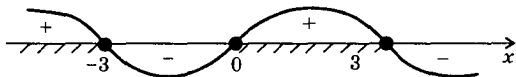
249г) При решении рационального неравенства $\frac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2} \geq 0$

учтем, что $x = -3$ не является решением неравенства (т.к. делить на нуль нельзя). При $x \neq -3$ выражение $(x+3)^2 > 0$. Умножим обе части данного неравенства на положительную величину $(x+3)^2$ (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем $(x-2)^3 \times (x+5) \geq 0$. Учтем, что при $x \neq 2$ выражение $(x-2)^2 > 0$. Поэтому разделим обе части неравенства на эту положительную величину (знак неравенства при этом сохраняется). Получаем квадратное неравенство $(x-2)(x+5) \geq 0$. Его решение $x \in (-\infty; -5] \cup [2; \infty)$.



Ответ: $(-\infty; -5] \cup [2; \infty)$.

250а) Область определения $f(x) = \sqrt{9x - x^3}$ задается условием $9x - x^3 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим неравенство $x(9 - x^2) \geq 0$ методом интервалов. Это выражение обращается в нуль в трех точках $x = 0$ и $x = \pm 3$. Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на четыре интервала. Определим знак выражения $9x - x^3$ в последнем четвертом промежутке. Для точки $x = 10$, например, из этого интервала получаем $9 \cdot 10 - 10^3 < 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков выражения $9x - x^3$. На основании этой диаграммы запишем решение неравенства $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3]$, что и является областью определения данной функции.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup [0; 3]$.

251а) Обсудим график функции $f(x)$ на рис. 97,а. Касательная к графику функции горизонтальна в точках B и D . Касательная образует с осью абсцисс острый угол в точках A и E и тупой угол с осью абсцисс в точке C . **Ответ:** см. решение.

252а) Обсудим график функции $f(x)$ на рис. 98,а. Учтем геометрический смысл производной: значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона между касательной (проведенной к графику в точке x_0) и осью абсцисс. Поэтому в точках b и d произ-

водная равна нулю (касательная параллельна оси абсцисс). В точке c производная положительна (касательная образует острый угол с осью абсцисс). В точках a и e производная отрицательна (касательная имеет тупой угол с осью абсцисс). **Ответ:** см. решение.

253б) Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку $M \left(2; \frac{2}{3} \right)$ графика функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ равен значению производной в этой точке. Найдем производную $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1 = x^2 - 1$ и ее значение в точке M , т.е. при $x = 2$. Получаем: $f'(2) = 2^2 - 1 = 3$ — тангенс угла наклона касательной.

Ответ: 3.

254а) Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку $M \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right)$ графика функции $f(x) = 2\cos x$ равен значению производной в этой точке. Найдем производную $f'(x) = 2(-\sin x) = -2\sin x$ и ее значение в точке M , т.е. при $x = \frac{\pi}{2}$. Получаем: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin \frac{\pi}{2} = -2 \cdot 1 = -2$ — тангенс угла наклона касательной. **Ответ:** -2.

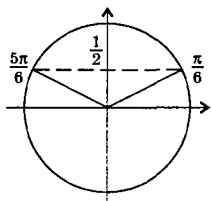
255а) Найдем производную функции $f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$. Получаем $f'(x) = (3x^{-1})' = 3 \cdot (-x^{-2}) = -\frac{3}{x^2}$. Найдем значения функции и ее производной в точке x_0 : $f(x_0) = \frac{3}{x_0}$ и $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2}$. Подставим эти величины в уравнение касательной: $y = -\frac{3}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{3}{x_0} = -\frac{3}{x_0^2}x + \frac{3}{x_0} + \frac{3}{x_0} = -\frac{3}{x_0^2}x + \frac{6}{x_0}$. Для данных точек $x_0 = -1$ и $x_0 = 1$ получаем уравнения касательных: $y = -3x - 6$ и $y = -3x + 6$.

Ответ: $y = -3x - 6$, $y = -3x + 6$.

256а) Найдем производную функции $f(x) = 3\sin x$. Получаем $f'(x) = 3\cos x$. Найдем значения функции и ее производной в точке x_0 : $f(x_0) = 3\sin x_0$ и $f'(x_0) = 3\cos x_0$. Подставим эти величины в уравнение касательной: $y = 3\cos x_0 \cdot (x - x_0) + 3\sin x_0 = 3\cos x_0 \cdot x - 3x_0 \cos x_0 + 3\sin x_0 = 3\cos x_0 \cdot x + (3\sin x_0 - 3x_0 \cos x_0)$. Для данных точек $x_0 = \frac{\pi}{2}$ и $x_0 = \pi$ получаем уравнения касательных: $y = 3\cos \frac{\pi}{2} \cdot x + \left(3\sin \frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) = 3 \cdot 0 \cdot x + \left(3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) = 3$ и

$y = 3\cos \pi \cdot x + (3\sin \pi - 3 \cdot \pi \cdot \cos \pi) = 3 \cdot (-1)x + (3 \cdot 0 - 3\pi \cdot (-1)) = -3x + 3\pi$. Таким образом уравнения этих касательных $y = 3$ и $y = -3x + 3\pi$. **Ответ:** $y = 3$, $y = -3x + 3\pi$.

257а) Касательная к графику функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент (т.е. производная) равен нулю. Найдем $f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$. Приравняем производную нулю $3(x - 1)^2 = 0$ и найдем абсциссу точки касания $x = 1$. Теперь легко найти и ординату этой точки $y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1$. Итак, в точке $(1; 1)$ касательная к графику данной функции параллельна оси абсцисс. **Ответ:** $(1; 1)$.



258а) Касательная к графику функции $f(x) = 2\cos x + x$ параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент (т.е. производная) равен нулю. Найдем $f'(x) = -2\sin x + 1$. Приравняем производную нулю $-2\sin x + 1 = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$. Решим это уравнение, используя тригонометрический круг.

Находим абсциссы точек касания $x = \frac{\pi}{6} +$

$+ 2\pi l$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, где $l \in \mathbb{Z}$. Теперь найдем ординаты этих точек:

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi l\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi l\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi l = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi l = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi l$$

$$\text{и } f\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi l = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi l = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi l. \text{ Итак, координаты точек касания } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi l; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi l; -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi l; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi l; -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right),$$

где $l \in \mathbb{Z}$.

259а) Найдем точки пересечения графика функции $f(x) = 3x - x^3$ с осью абсцисс. Для этого положим $f(x) = 0$. Получаем кубическое уравнение: $0 = 3x - x^3$ или $0 = x(3 - x^2)$, корни которого $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha$ равен значению производной в точке касания. Найдем производную $f'(x) = 3 - 3x^2$ и определим угловые коэффициенты в найденных точках: $k_1 = f'(0) = 3$ (угол $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 3$), $k_2 = f'(\sqrt{3}) = 3 - 3 \cdot (\sqrt{3})^2 = 3 -$

$-9 = -6$ (угол $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(-6) = -\operatorname{arctg} 6$), $k_3 = f'(-\sqrt{3}) = -6$ (угол $\alpha_3 = -\operatorname{arctg} 6$). Ответ: $\operatorname{arctg} 3$; $-\operatorname{arctg} 6$; $-\operatorname{arctg} 6$.

260а) Если график функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$ пересекает ось ординат, то координата x этой точки равна нулю. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной в этой точке. Вычислим производную

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}. \text{ Ее значение при } x=0$$

равно $f'(0) = -\frac{1}{(0-1)^2} = -\frac{1}{1} = -1$. Сле-

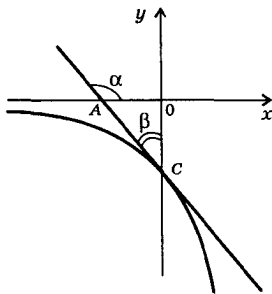
довательно, $\operatorname{tg} \alpha = -1$ и $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Тогда

$$\angle OAC = \pi - \alpha = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \text{ Треуголь-}$$

ник AOC прямоугольный и $\angle \beta = \frac{\pi}{2} -$

$-\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

касательная образует с осью ординат угол $\frac{\pi}{4}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.



261а) Получим формулу для вычисления приближенного значения функции $f(x) = x^4 + 2x$. Найдем производную этой функции $f'(x) = 4x^3 + 2$. Тогда $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. В нашем случае получаем: $f(x) \approx (x_0^4 + 2x_0) + (4x_0^3 + 2) \cdot \Delta x$. Точку $x_1 = 2,016$ запишем в виде $x_1 = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0,016$. Тогда $f(2,016) \approx (2^4 + 2 \cdot 2) + (4 \cdot 2^3 + 2) \cdot 0,016 = 20 + 34 \cdot 0,016 = 20 + 0,544 = 20,544$. Точку $x_2 = 0,97$ запишем в виде $x_2 = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 1$ и $\Delta x = -0,03$. Тогда $f(0,97) \approx (1^4 + 2 \cdot 1) + (4 \cdot 1^3 + 2) \cdot (-0,03) = 3 + 6 \cdot (-0,03) = 3 - 0,18 = 2,82$. Ответ: 20, 544; 2, 82.

262а) Известно, что $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$. Применим эту формулу для вычисления $1,002^{100}$. В этом случае $\Delta x = 0,002$ и $n = 100$. Тогда получаем: $(1 + 0,002)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,002 = 1 + 0,2 = 1,2$. Ответ: 1,2.

263б) Надо вычислить $\sqrt{25,012} = \sqrt{25 \cdot \frac{25,012}{25}} = \sqrt{25 \cdot 1,00048} = 5\sqrt{1,00048}$. Известно, что $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$. В нашем случае $\Delta x = 0,00048$. Поэтому $\sqrt{1,00048} \approx \sqrt{1 + 0,00048} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,00048 = 1,00024$. Тогда $\sqrt{25,012} = 5\sqrt{1,00048} = 5 \cdot 1,00024 = 5,0012$.

Ответ: 5,0012.

264а) Получим формулу для вычисления приближенного значения функции $f(x) = \operatorname{tg} x$. Производная этой функции $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Тогда $f'(x) \approx f'(x_0) + f''(x_0) \cdot \Delta x$. В нашем случае получаем: $f(x) \approx \operatorname{tg} x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0} \cdot \Delta x$. Значение $x = 44^\circ$ запишем в виде $x = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ и $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \approx -0,017$. Тогда $f(44^\circ) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 - \frac{\pi}{90} \approx 1 - 2 \times 0,017 = 1 - 0,034 = 0,966$. **Ответ:** 0,966.

265а) Получим формулу для вычисления приближенного значения функции $f(x) = \cos x$. Производная этой функции $f'(x) = -\sin x$. Тогда $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. В нашем случае получаем $f(x) \approx \cos x_0 - \sin x_0 \cdot \Delta x$. При вычислении $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right)$ соответственно $x_0 = \frac{\pi}{6}$ и $\Delta x = 0,04$. Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right) \approx \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot 0,04 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,04 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,02 = \frac{1,73}{2} - 0,02 = 0,86 - 0,02 = 0,84$.

Ответ: 0,84.

266а) Запишем данное число в виде: $\frac{1}{1,003^{20}} = 1,003^{-20} = (1 + 0,003)^{-20}$. Используем формулу $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$. В нашем случае $\Delta x = 0,003$ и $n = -20$. Тогда получаем: $(1 + 0,003)^{-20} \approx 1 + (-20) \times 0,003 = 1 - 0,06 = 0,94$. **Ответ:** 0,94.

267) Учтем, что скорость тела $v(t)$ есть производная от перемещения $x(t)$ по времени, т.е. $v(t) = x'(t)$. Для величины $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$ найдем $v(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^2 + 2 \cdot 2t + 5 = -t^2 + 4t + 5$. Найдем скорость тела в момент $t = 2$ с: $v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$ м/с. Если тело останавливается, то его скорость равна нулю. Получаем уравнение: $0 = -t^2 + 4t + 5$ или $0 = t^2 - 4t - 5$. Корни этого квадратного уравнения $t = 5$ и $t = -1$ (смысла не имеет).

Ответ: $v(t) = -t^2 + 4t + 5$ (м/с), $v(2) = 9$ (м/с), $t = 5$ (с).

269) Угловая скорость тела $\omega(t)$ есть производная от угла поворота $\varphi(t)$ по времени. Для величины $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ находим $\omega(t) = \varphi'(t) = 3 \cdot 2t - 4 = 6t - 4$. При $t = 4$ получаем угловую скорость $\omega(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 20$. **Ответ:** $\omega(t) = 6t - 4$ (рад/с), $\omega(4) = 20$ (рад/с).

271) Учтем, что скорость — производная от перемещения по времени, т.е. $v = x'(t) = (2t^3 + t - 1)' = 6t^2 + 1$. Ускорение — производная от скорости по времени, т.е. $a = v'(t) = (6t^2 + 1)' = 12t$ (см/с²). Найдем, в какой момент времени ускорение равно данным величинам.

Если $a = 1$ см²/с, то получаем уравнение $1 = 12t$, откуда $t = \frac{1}{12}$ (с).

Если $a = 2$ см²/с, то имеем уравнение $2 = 12t$, откуда $t = \frac{1}{6}$ (с).

Ответ: $12t$; $\frac{1}{12}$ (с); $\frac{1}{6}$ (с).

273) Известно, что перемещение тела меняется по закону $x(t) = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Сначала найдем скорость тела (скорость — производная от перемещения по времени) $v(t) = x'(t) = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. Теперь найдем ускорение тела (ускорение — производная от скорости по времени) $a(t) = v'(t) = \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$. Вычислим куб скорости тела: $v^3 = \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{1}{8}t^{-\frac{3}{2}}$. Представим теперь v^3

в виде: $v^3 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}a$. Таким образом, $v^3 = -\frac{1}{2}a$, т.е. ускорение пропорционально кубу скорости. Ответ: доказано.

275) Перемещение меняется по закону $x(t) = t^2 + t + 1$. Найдем скорость тела (скорость — производная от перемещения по времени) $v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1$. Также вычислим ускорение (ускорение — производная скорости по времени) $a = v'(t) = (2t + 1)' = 2$ (см/с²).

а) Определим действующую на тело силу $F = ma = 2 \text{ кг} \cdot 2 \text{ см/с}^2 = 2 \text{ кг} \cdot 0,02 \text{ м/с}^2 = 0,04 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 0,04 \text{ Н}$.

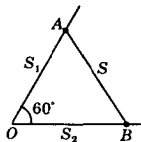
б) Найдем кинетическую энергию тела E через 2 с после начала движения $E = \frac{mv^2}{2}$. Для этого вычислим скорость тела в этот момент времени $v(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ см/с} = 0,05 \text{ м/с}$. Тогда энергия тела $E = \frac{2 \cdot 0,05^2}{2} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 0,0025 \text{ Дж}$.

Ответ: а) 0,04 Н; б) 0,0025 Дж.

277) Перемещения тел меняются по законам $x_1(t) = 4t^2 - 3$ и $x_2(t) = t^3$. Найдем скорости тел (скорость — производная от перемещения по времени): $v_1 = x_1'(t) = (4t^2 - 3)' = 8t$ и $v_2 = x_2'(t) = (t^3)' = 3t^2$. Известно, что $v_1 > v_2$. Поэтому получаем неравенство $8t > 3t^2$. Так как $3t > 0$, то разделим обе части неравенства на эту величину.

При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $\frac{8t}{3t} > t$ или $\frac{8}{3} > t$, т.е. $0 < t < 2\frac{2}{3}$ (с). **Ответ:** $0 < t < 2\frac{2}{3}$ (с).

278) Так как первое тело движется с постоянной скоростью 5 км/ч, то его перемещение $S_1(t) = 5t$ (км) = OA . Перемещение второго тела $S_2(t) = 2t^2 + t$ (км) = OB . Найдем расстояние между телами $S = AB$. Рассмотрим $\triangle AOB$ и запишем теорему косинусов: $AB^2 = OA^2 + OB^2 -$



$$- 2OA \cdot OB \cos \angle AOB = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= (5t)^2 + (2t^2 + t)^2 - 5t \cdot (2t^2 + t) = 25t^2 + 4t^4 + 4t^3 +$$

$$+ t^2 - 10t^3 - 5t^2 = 4t^4 - 6t^3 + 21t^2, \text{ откуда } AB =$$

$$= \sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2} = S(t). \text{ Теперь найдем скорость}$$

удаления тел (скорость — производная от перемещения по времени) $v = S'(t) =$

$$\left(\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2} \right)' = \frac{(4t^4 - 6t^3 + 21t^2)'}{2\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 4t^3 - 6 \cdot 3t^2 + 21 \cdot 2t}{2\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}} = \frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}} \text{ (км/ч) при } t > 0.$$

Ответ: $\frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}}$ при $t > 0$.

§ 6. Применения производной к исследованию функций

279а) Найдем производную функции $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$. Получаем $f'(x) = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)' = -\frac{1}{2}$. Эта производная отрицательна при всех значениях x . Следовательно, функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси. **Ответ:** $(-\infty; \infty)$ — промежуток убывания.

279б) Найдем производную функции $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. Получаем $f'(x) = (-x^2 + 2x - 3)' = -2x + 2 = 2(1 - x)$. Видно, что при $x < 1$ производная положительна и функция $f(x)$ возрастает. Поэтому $(-\infty; 1)$ — промежуток возрастания. При $x > 1$ производная $f'(x)$ отрицательна и функция $f(x)$ убывает. Следовательно $[1; \infty)$ — промежуток убывания.

Ответ: $(-\infty; 1)$ — промежуток возрастания, $[1; \infty)$ — промежуток убывания.

280а) Найдем производную функции $f(x) = -\frac{2}{x} + 1 = -2x^{-1} + 1$. Получаем $f'(x) = (-2x^{-1} + 1)' = -2 \cdot (-1)x^{-2} = \frac{2}{x^2}$. Видно, что произ-

водная положительна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Заметим, что при $x = 0$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ не определены. Следовательно, функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$ — промежутки возрастания.

2806) Найдем производную функции $f(x) = x^2(x-3) = x^3 - 3x^2$. Получаем $f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x(x-2)$. Изобразим на диаграмме знаки этого выражения. Видно, что производная $f'(x)$ положительна при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Поэтому промежутки возраста-



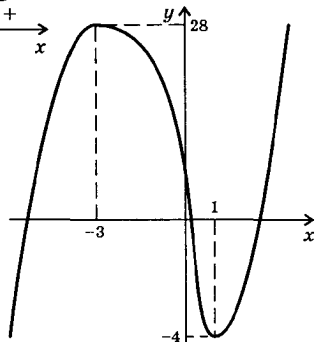
ния $(-\infty; 0]$, $[2; \infty)$. Производная $f'(x)$ отрицательна при $x \in (0; 2)$. Следовательно промежуток убывания функции $[0; 2]$. **Ответ:** промежутки возрастания $(-\infty; 0]$, $[2; \infty)$, промежуток убывания $[0; 2]$.

2816) Найдем производную функции $f(x) = 4 - x^4$. Получаем $f'(x) = (4 - x^4)' = -4x^3$. Производная $f'(x)$ положительна при $x < 0$. Поэтому промежуток возрастания $(-\infty; 0]$. Производная $f'(x)$ отрицательна при $x > 0$. Следовательно промежуток убывания функции $[0; \infty)$. **Ответ:** промежуток возрастания $(-\infty; 0]$, промежуток убывания $[0; \infty)$.

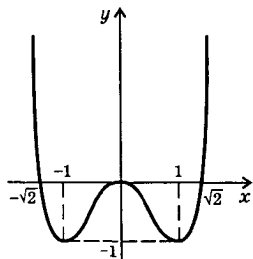
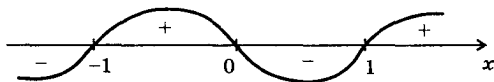
283а) Найдем производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Получаем $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$. Разложим это выражение на множители $f'(x) = 3(x-1)(x+3)$ и изобразим диаграмму знаков. Видно, что производная положительна при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.



Поэтому промежутки возрастания функции $(-\infty; -3]$ и $[1; \infty)$. Производная отрицательна при $-3 < x < 1$. Следовательно, промежуток убывания функции $[-3; 1]$. Найдем значения функции $f(x)$ в точках $x = -3$ и $x = 1$. Получаем: $f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 1 = 28$ и $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 1 = -4$. Отметим на координатной плоскости точки $(-3; 28)$ и $(1; -4)$. Схематично изобразим график. **Ответ:** $(-\infty; -3]$, $[1; \infty)$ — промежутки возрастания, $[-3; 1]$ — промежуток убывания.



283г) Найдем производную функции $f(x) = x^4 - 2x^2$. Получаем $f'(x) = 4x^3 - 2 \cdot 2x = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$. Изобразим диаграмму знаков производной. Производная положительна при $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$. Поэтому промежутки возрастания $[-1; 0]$, $[1; \infty)$. Производная отрицательна при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$. Следовательно про-



межутки убывания функции $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$. Учтем, что функция $f(x) = x^4 - 2x^2$ является четной. Находим значения: $f(-1) = f(1) = -1$ и $f(0) = 0$. Отметим точки $(-1; -1)$, $(1; -1)$ и $(0; 0)$ на координатной плоскости. Также найдем точки пересечения функции с осью абсцисс. Получаем уравнение: $0 = x^4 - 2x^2$ или $0 = x^2(x^2 - 2)$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$. Схематично изобразим график.

Ответ: $[-1; 0]$, $[1; \infty)$ — промежутки возрастания, $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$ — промежутки убывания.

284б) Для функции $f(x) = |x - 3| - 2$ раскроем знак модуля.

Получаем:
$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) - 2, & \text{если } x-3 \leq 0 \\ x-3-2, & \text{если } x-3 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x \leq 3 \\ x-5, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найдем производную этой функции

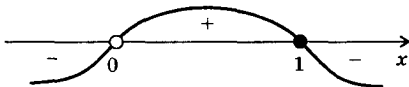
$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$
 . В точке $x = 3$ производная функции не существует. Видно, что

функция возрастает на промежутке $[3; \infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 3]$. В точке $x = 3$ функция достигает наименьшего значения $f(3) = -2$. Теперь легко построить график этой функции.

Ответ: $[3; \infty)$ — промежуток возрастания, $(-\infty; 3]$ — промежуток убывания.

284г) Для функции $f(x) = \left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1-x}{x} \right|$ раскроем знак модуля, учитывая знаки выражения $\frac{1-x}{x}$ (см. рис.)

Получаем:



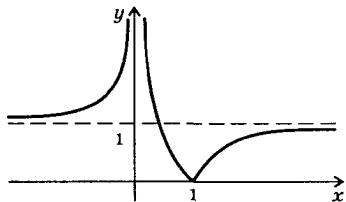
$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{x} - 1\right), & \text{если } x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty) \\ \frac{1}{x} - 1, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & \text{если } x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty) \\ \frac{1}{x} - 1, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases}$$

Найдем производную $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases}$. Заметим,

что производная в точках $x = 0$ и $x = 1$ не существует. Учтем, что

$\frac{1}{x^2} > 0$ при $x \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $[1; \infty)$, убывает на промежутке $(0; 1)$. В точке $x = 1$ функция принимает наименьшее значение $f(1) = 0$. Отметим, что при $x \rightarrow \infty$ величина



$\frac{1}{x} \rightarrow 0$ и функция $f(x) \rightarrow |-1| = 1$. Учитывая перечисленное, построим график данной функции.

Ответ: $(-\infty; 0)$, $[1; \infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежутки убывания.

285а) Функция $f(x) = 3x + \cos 2x$ определена на R . Найдем производную функции $f'(x) = 3 - \sin 2x \cdot 2 = 3 - 2\sin 2x$. Определим знак производной. Очевидно $-1 \leq \sin 2x \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на отрицательное число (-2) . Знаки неравенств меняются на противоположные: $2 \geq -2\sin 2x \geq -2$. Прибавим ко всем частям неравенства число 3: $5 \geq 3 - 2\sin 2x \geq 1$ или $1 \leq f'(x) \leq 5$. Видно, что производная $f'(x)$ положительна при всех x . Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на R . **Ответ:** доказано.

285б) Функция $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$ определена на R . Найдем производную $g'(x) = -\frac{3x^2}{3} - 1 = -(x^2 + 1)$. Видно, что производная $g'(x)$ отрицательна при всех x . Следовательно, функция $g(x)$ убывает на R .

Ответ: доказано.

286а) Для исследования уравнения $x^3 - 27x + 2 = 0$ рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 27x + 2$ и найдем ее производную $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$. На диаграмме изображены знаки этой производной. Тогда на промежутке $P_1 = [-1; 1]$ производная $f'(x) < 0$ и функция $f(x)$ убывает. Определим знаки функции $f(x)$ на концах этого промежутка: $f(-1) = (-1)^3 - 27 \cdot (-1) + 2 > 0$ и $f(1) = 1^3 - 27 \cdot 1 + 2 < 0$. Видно, что функция убывает и меняет свой знак. Следовательно, на промежутке P_1 уравнение имеет единственный корень.



На промежутке $P_2 = [4; 6]$, как видно из диаграммы, производная $f'(x) > 0$ и функция $f(x)$ возрастает. Определим знаки функции $f(x)$ на концах этого промежутка: $f(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 + 2 < 0$ и $f(6) = 6^3 - 27 \cdot 6 + 2 > 0$. Видно, что функция возрастает и меняет свой знак. Следовательно, на промежутке P_2 данное уравнение имеет единственный корень. Ответ: доказано.

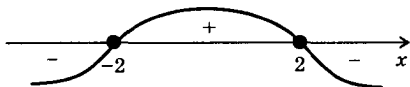
288а) Функция $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$ определена на R . Найдем производную $f'(x) = -2 + 14x$. Функция $f'(x)$ также определена на R (т.е. существует при всех x). Тогда критическая точка задается условием $f'(x) = 0$ или $-2 + 14x = 0$, откуда $x = \frac{1}{7}$. Ответ: $x = \frac{1}{7}$.

288б) Функция $f(x) = 1 + \cos 2x$ определена на R . Найдем производную $f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$. Функция $f'(x)$ также определена на R (т.е. существует при всех x). Тогда критические точки задаются условием $f'(x) = 0$ или $-2\sin 2x = 0$ или $\sin 2x = 0$, откуда $2x = \pi l$ и $x = \frac{\pi}{2} n$, где $n \in z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} n$, где $n \in z$.

289б) Обсудим график, изображенный на рис. 110,б учебника. Точка x_1 — точка максимума (производная в этой точке не существует). Точка x_2 — точка минимума (производная равна нулю). Точка x_3 — точка максимума (производная равна нулю). Точка x_4 — точка минимума (производная в этой точке не существует).

Ответ: см. решение.

290а) Найдем производную функции $f(x) = 5 + 12x - x^3$. Получаем $f'(x) = 12 - 3x^2 = 3(4 - x^2)$. Построим диаграмму знаков этого выражения (учтем, что критические точки $x = \pm 2$). В точке $x = -2$



знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому $x = -2$ — точка минимума. В точке $x = 2$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому $x = 2$ — точка максимума.

Ответ: $x = -2$ — точка минимума, $x = 2$ — точка максимума.

291а) Функция $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ определена при $x \geq 0$. Найдем производную $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эта функция не равна нулю при всех x . Производная не существует при $x = 0$. Но эта точка не является критической, т.к. не является внутренней точкой области определения функции $f(x)$ ($x = 0$ — граничная точка области определения). Таким образом, функция не имеет критических точек.

Ответ: доказано.

291г) Функция $f(x) = 3x^5 + 2x$ определена на R . Найдем производную $f'(x) = 15x^4 + 2$. Эта функция также определена на R . Производная $f'(x)$ не обращается в нуль при всех значениях x . Следовательно, данная функция критических точек не имеет.

Ответ: доказано.

292а) Функция $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ определена на R . Найдем производную $f'(x) = 2\sin x \cos x + \sin x$. Эта функция также определена на R . Приравняем эту производную нулю и получим уравнение для нахождения критических точек: $2\sin x \cos x + \sin x = 0$ или $\sin x (2\cos x + 1) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $\sin x = 0$ (тогда $x = n\pi$, где $n \in Z$) и $2\cos x + 1 = 0$ (или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x =$

$$= \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \text{ где } k \in Z.$$

Ответ: $x = n\pi$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $n, k \in Z$.

292б) Функция $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$ определена при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Найдем производную $f'(x) = 2 - 8 \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^3}$. Эта функция также определена при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Приравняем производную нулю и получим уравнение для нахождения критической точки $\frac{2(x^3 - 8)}{x^3} = 0$, откуда $x = 2$. Заметим, что точка $x = 0$ критической не является. Ответ: $x = 2$.

293а) Функция $f(x) = (x-2)^3$ определена на R . Найдем производную $f'(x) = 3(x-2)^2$. Эта функция также определена на R . При-

равняем производную нулю $3(x-2)^2=0$ и найдем критическую точку $x=2$. Ответ: $x=2$.

2936) Функция $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{при } x \leq -1 \\ x & \text{при } -1 < x < 1 \\ 2-x & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$ определена на R .

Найдем производную $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < -1 \\ 1 & \text{при } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$. В точках $x=-1$ и

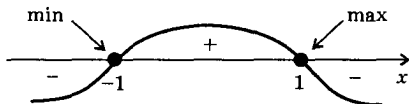
$x=1$ производная не существует. Следовательно, эти точки — критические точки функции $f(x)$. Ответ: $x=-1, x=1$.

2956) Функция $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ определена на R . Найдем производную

$$f'(x) = 3 \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = 3 \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 3 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Эта функция также определена на R . Приравняем производную

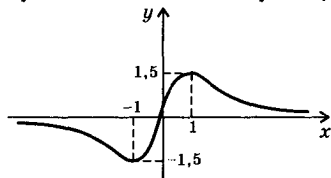
нулю $3 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ и найдем критические точки $x = \pm 1$. Знаменатель производной при всех x положительный. Поэтому знак производной определяется числителем $1-x^2$ (знаки этого выражения приведены на диаграмме). Из диаграммы видно, что $(-\infty; -1], [1; \infty)$ —



промежутки убывания функции $f(x)$, $[-1; 1]$ — промежутком возрастания. В точке $x=-1$ знак производной меняется с минуса на

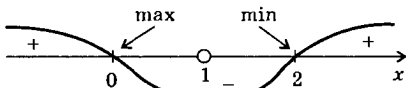
плюс. Поэтому $x=-1$ — точка минимума и $f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)}{1+(-1)^2} = -\frac{3}{2}$.

В точке $x=1$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому $x=1$ — точка максимума и $f(1) = \frac{3 \cdot 1}{1+1^2} = \frac{3}{2}$. Учтем, что график



функции проходит через начало координат. Также учтем, что функция $f(x)$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Теперь легко построить график данной функции. Ответ: см. решение.

295г) Функция $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ определена при всех x , кроме $x = 1$. Поэтому $x = 1$ — вертикальная асимптота. Найдем производную $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. Производная $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$ (критические точки). Знаменатель дроби $\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$ положительный в области определения $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ определяется числителем $x^2 - 2x$ (знаки этого выражения приведены на диаграмме). В точке $x = 0$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому $x = 0$ — точка максимума и $f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0 - 1} = -2$. В точке $x = 2$ знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому $x = 2$ — точка минимума и $f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 2$.

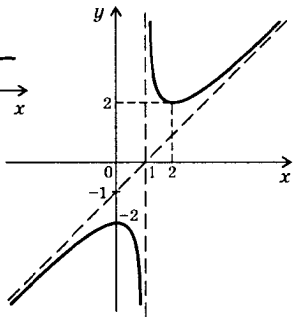


Функция $f(x)$ не пересекает ось абсцисс, т.к. уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$ не имеет корней. График функции пересекает ось ординат в точке $y = f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0 - 1} = -2$.

Запишем функцию в виде $f(x) =$

$= \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$. При $x \rightarrow \infty$ величина $\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0$ и $f(x) \approx x - 1$. Поэтому $y = x - 1$ — наклонная асимптота. Учитывая перечисленные свойства функции $f(x)$, построим ее график.

Ответ: см. решение.



2966) Функция $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$ определена на R , т.е. $D(f) = R$.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью ординат: положим $x = 0$ и найдем $f(0) = -\frac{2 \cdot 0^2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

С осью абсцисс: положим $f(x) = 0$ и получим квадратное уравнение: $-\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3} = 0$ или $2x^2 - 3x - 2 = 0$, корни которого $x_1 = -\frac{1}{2}$

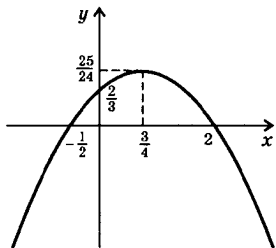
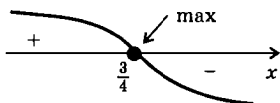
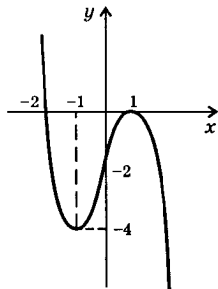
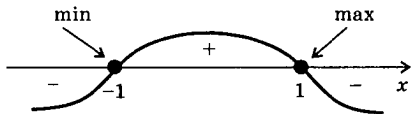


график этой функции (парабола).

Ответ: см. решение.

297а) Функция $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ определена на R , т.е. $D(f) = R$. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. С осью ординат: положим $x = 0$ и найдем $y = f(0) = -2$. С осью абсцисс: положим $f(x) = 0$ и получим кубическое уравнение: $-x^3 + 3x - 2 = 0$ или $x^3 - 3x + 2 = 0$ или $(x^3 - x) - (2x - 2) = 0$ или $x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0$ или $(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $x - 1 = 0$ (корень $x_1 = 1$) и $x^2 + x - 2 = 0$ (корни $x_2 = 1$ и $x_3 = -2$).



и $x_2 = 2$. Найдем производную функции $f'(x) = -\frac{4x}{3} + 1$. Эта производная обращается в нуль при $x = \frac{3}{4}$ (критическая точка). На диаграмме изображены знаки производной. На промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$ функция возрастает, на промежутке $\left[\frac{3}{4}; \infty\right)$ функция убывает. Точка $x = \frac{3}{4}$ — точка максимума и $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{25}{24}$. Теперь построим

Найдем производную функции $f'(x) = -3x^2 + 3$. Производная равна нулю в точках $x = \pm 1$ (критические точки). На диаграмме приведены знаки производной $f'(x)$. Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$ и убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; \infty)$. Точка $x = -1$ — точка минимума и $f(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 2 = -4$, точка $x = 1$ — точка максимума и $f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$. Учитывая перечисленные свойства функции $f(x)$, построим ее график.

Ответ: см. решение.

2986) Найдем производную функции $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$.

Получаем $f'(x) = \frac{5x^4}{5} - \frac{3x^2}{3} - 6 = x^4 - x^2 - 6$. Для нахождения критических точек функции приравняем производную нулю и получим биквадратное уравнение $x^4 - x^2 - 6 = 0$. Введем новую неизвестную $t = x^2 \geq 0$. Имеем квадратное уравнение $t^2 - t - 6 = 0$, корни которого $t_1 = -2$ (не подходит, т.к. $t \geq 0$) и $t_2 = 3$. Теперь найдем $x = \pm\sqrt{3}$. Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму



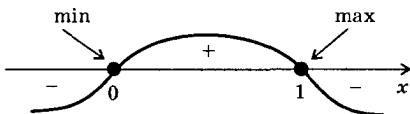
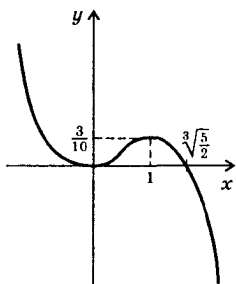
знаков производной $f'(x)$. Из диаграммы видно, что функция возрастает на промежутках $(-\infty; -\sqrt{3}]$ и $[\sqrt{3}; \infty)$, убывает на промежутке $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}; \infty)$ — промежутки возрастания, $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ — промежуток убывания.

299а) Функция $f(x) = 2x - \cos x$ определена на R . Найдем производную $f'(x) = 2 + \sin x$. Определим знак этого выражения. В силу ограниченности функции синус выполняется неравенство $-1 \leq \sin x \leq 1$. Прибавим ко всем частям неравенства число 2 и получим $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ или $1 \leq f'(x) \leq 3$. Видно, что при всех значениях x производная $f'(x)$ положительна. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на R . Ответ: доказано.

300а) Функция $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$ определена на R . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. С осью ординат: положим $x = 0$ и найдем $y = f(0) = 0$. С осью абсцисс: положим $f(x) = 0$ и получим уравнение: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 = 0$ или $x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x^3\right) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $x^2 = 0$ (корень $x = 0$) и $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x^3 = 0$ (корень $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$).

Найдем производную $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x - x^4 = x(1 - x^3)$. Приравняем производную нулю и получим критические точки $x = 0$ и $x = 1$. На диаграмме приведены знаки производной $f'(x)$. В точке $x = 0$ функция имеет минимум и он равен $f(0) = 0$. В точке



$x = 1$ достигается максимум и он равен $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 = \frac{3}{10}$. Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[0; 1]$ и убывает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[1; \infty)$. Учитывая перечисленные свойства функции, построим ее график.

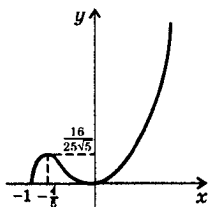
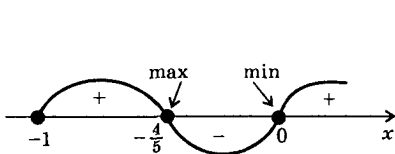
Ответ: см. решение.

301а) Область определения функции $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$ задается условием $1+x \geq 0$, откуда $x \geq -1$. График проходит через начало координат и имеет общую точку $x = -1$ с осью абсцисс.

Найдем производную $f'(x) = (x^2)'\sqrt{1+x} + x^2 \cdot (\sqrt{1+x})' = 2x\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{4x(1+x) + x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{5x^2 + 4x}{2\sqrt{1+x}}$. Приравняем производную нулю $\frac{5x^2 + 4x}{2\sqrt{1+x}} = 0$ и получим критические точки функции $x = -\frac{4}{5}$ и $x = 0$.

На диаграмме приведены знаки производной. Функция возрастает на промежутках $[-1; -\frac{4}{5}]$ и $[0; \infty)$, убывает на промежутке $[-\frac{4}{5}; 0]$.

Функция $f(x)$ в точке $x = -\frac{4}{5}$ имеет максимум, равный $f(-\frac{4}{5}) = (-\frac{4}{5})^2 \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{16}{25\sqrt{5}}$. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум $f(0) = 0$. Учитывая перечисленные свойства функции $f(x)$, построим ее график.



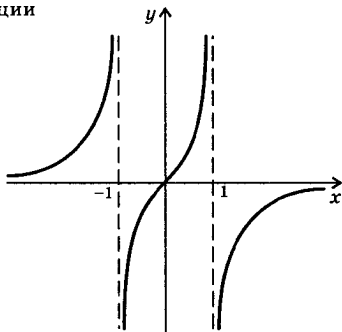
Ответ: см. решение.

301г) Функция $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ определена при $x \neq \pm 1$, т.е. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. Функция проходит через начало координат. Функция является нечетной.

Найдем производную функции

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{(x)(1-x^2) - x \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \\ &= 2 \frac{1-x^2 - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = 2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

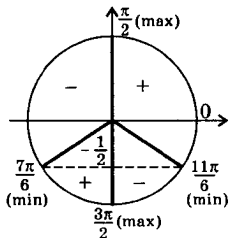
Видно, что производная $f'(x)$ положительна в области определения $D(f)$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает. Полезно также рассмотреть промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Учитывая перечисленные свойства функции $f(x)$, построим ее график.



Ответ: см. решение.

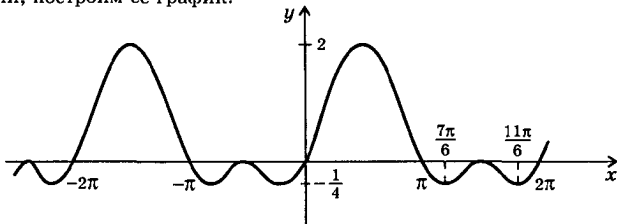
302а) Функция $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ определена на \mathbb{R} . График функции проходит через начало координат. Найдем точки пересечения с осью абсцисс. Положим $f(x) = 0$ и получим уравнение: $\sin^2 x + \sin x = 0$ или $\sin x (\sin x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $\sin x = 0$ (корни $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\sin x + 1 = 0$ (или $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Найдем производную функции $f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x = \cos x (2\sin x + 1)$. Приравняем $f'(x)$ нулю. Получаем уравнение $\cos x (2\sin x + 1) = 0$ для нахождения критических точек. Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ периодичны с периодом 2π , то решим это уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$ с помощью тригонометрического круга. На круге указаны знаки производной и ее минимумы и максимумы. Найдем значения функции в критических



точках: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} =$
 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - 1 = 0$, $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{11\pi}{6} +$

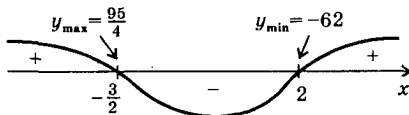
+ $\sin \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. Учитывая перечисленные свойства функции, построим ее график.



Ответ: см. решение.

303а) Для функции $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ найдем производную $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$. На промежутке $I = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ величина $\cos x$ удовлетворяет неравенству $0 < \cos x < 1$. Тогда $0 < \cos^2 x < 1$ и выражение $1 - \cos^2 x > 0$. Следовательно, производная $f'(x)$ на промежутке I положительна и функция $f(x)$ возрастает. Найдем значение $f(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$. Тогда значения $f(x) > f(0)$ или $f(x) > 0$ на этом промежутке. **Ответ:** доказано.

304а) Для анализа уравнения $4x^3 - 3x^2 - 36x - 10 = 0$ рассмотрим функцию $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 10$. Найдем производную $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 36 = 6 \cdot (2x^2 - x - 6)$. Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$, т.е. $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = 2$. Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной. Найдем $y_{\max} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 36 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 10 = -\frac{27}{2} - \frac{27}{4} + 54 - 10 = \frac{95}{4}$ и $y_{\min} = f(2) = 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 - 10 = 32 - 12 - 72 - 10 = -62$.



На промежутке $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ функция возрастает и $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{95}{4} > 0$

Поэтому на этом промежутке функция имеет единственный ко-

рень. На промежутке $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ функция убывает и значения функции на концах промежутка имеют разные знаки. Поэтому и на этом промежутке функция имеет один корень. На промежутке $[2; \infty)$ функция возрастает и $f(2) = -62 < 0$. Следовательно, и на этом промежутке функция имеет корень. Таким образом данное уравнение имеет три корня. Ответ: три корня.

305а) Найдем производную функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ и получим $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$. Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$.

На промежутке $[-1; 1]$ есть критическая точка $x = 0$. Поэтому найдем значения функции в этой точке и на концах промежутка: $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$; $f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 - 9 = -16$ и $f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^2 - 9 = -16$. Теперь из этих трех значений выберем наибольшее и наименьшее значение: $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = -9$ и $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16$.

На промежутке $[0; 3]$ есть две критические точки $x = 0$ и $x = 2$. Уже было найдено значение $f(0) = -9$. Найдем значения $f(2) = 2^4 - 8 \cdot 1^2 - 9 = -25$ и $f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 0$. Теперь из этих трех значений выберем наибольшее и наименьшее значение: $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 0$ и $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -25$.

Ответ: $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = -9$, $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16$;
 $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 0$, $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -25$.

306а) Найдем производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ и получим $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$. Приравняем производную нулю и получим критические точки функции $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$.

На промежутке $P_1 = [-4; 0]$ находится критическая точка $x = -3$. Поэтому найдем значения функции $f(x)$ в этой точке и на концах промежутка: $f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) = 27$; $f(-4) = (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) = 20$ и $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 = 0$. Тогда наибольшее значение функции на промежутке P_1 : $\max_{[-4; 0]} f(x) = f(-3) = 27$.

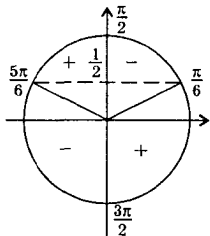
На промежутке $P_2 = [3; 4]$ критических точек функции $f(x)$ нет. Поэтому найдем значения функции на концах промежутка: $f(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = 27$ и $f(4) = 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 = 76$. Выберем наименьшее из этих значений: $\min_{[3; 4]} f(x) = f(3) = 27$.

Из сравнения видно, что $\max_{[-4; 0]} f(x) = \min_{[3; 4]} f(x) = 27$.

Ответ: $\max_{[-4; 0]} f(x) = \min_{[3; 4]} f(x)$.

307) Учтем, что скорость — производная пути по времени, т.е. $v = S'(t)$. Тогда для пути $S(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ найдем скорость $v = 24t - 2t^2$. Определим наибольшее значение этой скорости на промежутке $[4; 10]$. Найдем производную функции $v(t)$ и получим $v' = 24 - 4t$. Единственная критическая точка этой функции $t = 6$. Вычислим $v(6) = 24 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 = 144 - 72 = 72$. **Ответ:** 6 с; 72 м/с.

310а) Найдем производную функции $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ и получим $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$. Определим критические точки. Имеем уравнение: $2\cos x - 2\sin 2x = 0$. Используем формулу для синуса двойного аргумента и получим: $2\cos x - 4\sin x \cos x = 0$ или $2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения: $\cos x = 0$ и $1 - 2\sin x = 0$. На промежутке $[0; 2\pi]$ найдем решения этих уравнений с помощью тригонометрического круга. Получаем четыре ре-



шения: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{3}{2}\pi$. На круге также

отмечены знаки производной $f'(x)$. Найдем значения функции $f(x)$ в этих критических точках и на концах промежутка. Получаем:

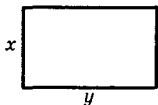
$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot 1 - 1 = 1; & f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{5\pi}{3} = \\ &= 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; & f\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= 2\sin\frac{3}{2}\pi + \\ &+ \cos\left(2 \cdot \frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) + \cos 3\pi = -2 + \cos(2\pi + \pi) = -2 + \cos\pi = \\ &= -2 - 1 = -3; & f(0) = f(2\pi) &= 2\sin 0 + \cos(2 \cdot 0) = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Сравнивая эти значения, найдем: $\max_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ и

$$\min_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3.$$

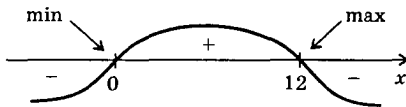
Ответ: $\max_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ и $\min_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3$.

311) Пусть число 24 равно сумме двух неотрицательных чисел x и y , т.е. $x + y = 24$ (откуда $y = 24 - x$). Тогда сумма квадратов чисел x и y равна $x^2 + y^2 = x^2 + (24 - x)^2 = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^2 - 48x + 576$ и определим ее наименьшее значение. Найдем производную этой функции $f'(x) = 4x - 48$. Функция имеет единственную критическую точку $x = 12$ (точка минимума). Таким образом, условия задачи выполняются, если число 24 представить в виде суммы двух одинаковых чисел 12, т.е. $24 = 12 + 12$. Ответ: 12+12.



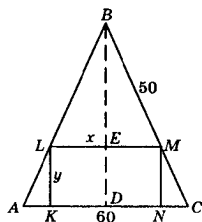
313). Пусть стороны прямоугольника x (м) и y (м). Тогда его периметр $2x + 2y = 48$ (по условию), откуда $y = 24 - x$. Запишем площадь прямоугольника $S = xy = x(24 - x) = 24x - x^2$. По условию задачи такая площадь должна быть наибольшей. Найдем производную $S'(x) = 24 - 2x$. Функция имеет единственную критическую точку $x = 12$ (м). Тогда $y = 24 - x = 24 - 12 = 12$ (м). Таким образом, из всех прямоугольников с периметром 48 м наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 12 м. Ответ: 12 м; 12 м.

314) Так как в числителе 54 два слагаемых пропорциональны числам 1 и 2, то их можно записать в виде x и $2x$. Тогда третье слагаемое равно $54 - 3x$. Произведение всех трех слагаемых $f(x) = x \cdot 2x \cdot (54 - 3x) = 6x^2(18 - x) = 6(18x^2 - x^3)$. Найдем производную функции $f(x)$. Получаем $f'(x) = 6 \cdot (36x - 3x^2) = 6 \cdot 3 \cdot x(12 - x) = 18x(12 - x)$. Функция имеет две критические точки $x = 0$ и $x = 12$. На диаграмме приведены знаки производной $f'(x)$. Видно,



что точка $x = 12$ — точка максимума. Тогда число 54 надо представить в виде слагаемых $x = 12$, $2x = 24$ и $54 - 3x = 18$, т.е. $54 = 12 + 24 + 18$. Ответ: 12 + 24 + 18.

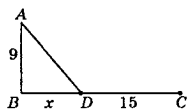
318) В равнобедренный треугольник ABC (где $AC = 60$ см и $BC = 50$ см) вписан прямоугольник $KLMN$. Пусть сторона $LM = x$ (см) и сторона $LK = y$ (см). Найдем связь между величинами x и y .



$$= \frac{120 - 2x}{3}.$$

Площадь прямоугольника $KLMN$ равна $S = LM \cdot LK = xy = x \times \left(\frac{120 - 2x}{3}\right) = \frac{120x - 2x^2}{3}$. По условию площадь S наибольшая. Найдём производную $S'(x) = \frac{1}{3}(120 - 4x)$. Приравняем производную нулю и получим критическую точку $x = 30$ (точка максимума). Теперь найдём $y = \frac{120 - 2x}{3} = \frac{120 - 2 \cdot 30}{3} = 20$. Следовательно, прямоугольник наибольшей площади имеет стороны 30 см и 20 см.

Ответ: 30 см и 20 см.



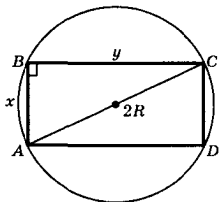
320) Расположение объектов приведено на рисунке: A — буровая вышка, B — ближайшая к ней точка на шоссе, C — пункт назначения. Пусть курьер движется по маршруту ADC , так что расстояние $BD = x$ (км). Часть маршрута AD проходит по полю (где скорость курьера 8 км/ч), часть маршрута DC — по шоссе (где скорость курьера 10 км/ч). Запишем время движения t курьера. Учтем, что $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{81 + x^2}$ (по теореме Пифагора) и $DC = BC - BD = 15 - x$. Тогда время $t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$.

Найдём производную функции $t(x)$ и получим: $t' = \frac{1}{8} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = \frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10}$. Приравняем эту производную нулю. Имеем уравнение: $\frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0$ или $\frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} = \frac{4}{5}$. Возведём обе части уравнения в квадрат: $\frac{x^2}{81 + x^2} = \frac{16}{25}$. Используя свойство пропорции, получаем $25x^2 = 16 \cdot 81 + 16x^2$ или $9x^2 = 16 \cdot 81$ или $x^2 = 16 \cdot 9$, отку-

да $x = 4 \cdot 3 = 12$ (км). Нетрудно показать, что $x = 12$ — точка минимума. Ответ: $BD = 12$ км.

322) Пусть x — искомое число. Тогда сумма числа и его квадрата равна $x + x^2$. Рассмотрим функцию $f(x) = x + x^2$. Найдем производную $f'(x) = 1 + 2x$. Приравняем эту производную нулю $1 + 2x = 0$ и получим критическую точку $x = -\frac{1}{2} = -0,5$. Легко показать, что эта точка минимума. Итак, сумма числа и его квадрата наименьшая, если число равно $(-0,5)$. Ответ: $-0,5$.

324) Пусть в окружность радиуса R вписан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = x$ и $BC = y$. Диагональ AC равна диаметру окружности, т.к. $\angle ABC = 90^\circ$ и опирается на диаметр. Для прямоугольного треугольника ABC запишем теорему Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2$ или $x^2 + y^2 = (2R)^2$, откуда $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Площадь прямоугольника $S = AB \cdot BC = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.



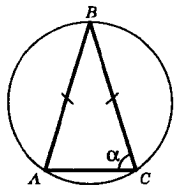
Найдем производную функции $S(x)$. Получаем:

$$S' = \left(x\sqrt{4R^2 - x^2} \right)' = (x)' \sqrt{4R^2 - x^2} + x \left(\sqrt{4R^2 - x^2} \right)' = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Приравняем производную нулю и получим уравнение для нахождения критической точки $2R^2 - x^2 = 0$, откуда $x = R\sqrt{2}$. Легко проверить, что эта точка — точка максимума. Теперь найдем $y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$. Видно, что $x=y=R\sqrt{2}$. Таким образом, из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Ответ: квадрат.

325) В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 2\alpha$.

Запишем также теорему синусов: $\frac{AB}{\sin C} = 2R$, откуда $AB = 2R \sin C = 2R \sin \alpha$. Теперь легко найти площадь $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times 2R \cdot \sin \alpha \cdot 2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin (180^\circ - 2\alpha) = 2R^2 \sin^2 \alpha \times \sin 2\alpha$.



Найдем производную функции $S(\alpha)$ и получим: $S'(\alpha) = 2R^2 \times (\sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha)' = 2R^2 [(\sin^2 \alpha)' \sin^2 2\alpha + \sin^2 \alpha (\sin^2 2\alpha)'] = 2R^2 (2\sin \alpha \times \cos \alpha \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha \cos 2\alpha \cdot 2) = 2R^2 (\sin^2 2\alpha + 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha)$. Приравняем эту производную нулю и получим тригонометрическое уравнение $\sin^2 2\alpha + 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha = 0$. Для его решения используем формулу понижения степени $2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$. Тогда уравнение имеет вид: $\sin^2 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha) \cos 2\alpha = 0$ или $1 - \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha = 0$ или $0 = 2\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha - 1$. Введем новую переменную $t = \cos 2\alpha$ и получим квадратное уравнение $0 = 2t^2 - t - 1$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения.

а) $\cos 2\alpha = 1$, тогда $2\alpha = 2\pi l$ и $\alpha = \pi l$. Очевидно, что треугольник таких углов иметь не может.

б) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$, тогда $2\alpha = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ и $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. Очевидно, что из всех решений в треугольнике может быть только угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Ответ: доказано.

Глава III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 7. Первообразная

326а) Функция $F(x) = x^5$ определена при $x \in (-\infty; \infty)$. Найдем производную этой функции $F'(x) = (x^5)' = 5x^4$. Функция $F'(x)$ также определена при $x \in (-\infty; \infty)$. Видно, что $F'(x) = f(x) = 5x^4$. Следовательно, функция $F(x) = x^5$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на промежутке $x \in (-\infty; \infty)$ по определению.

Ответ: доказано.

327а) Функция $F(x) = 3 - \sin x$ определена при $x \in (-\infty; \infty)$. Найдем производную этой функции $F'(x) = (3 - \sin x)' = (3)' - (\sin x)' = 0 - \cos x = -\cos x$. Видно, что функция $F'(x) = -\cos x$ не равна функции $f(x) = \cos x$. Следовательно, функция $F(x) = 3 - \sin x$ не является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на промежутке $x \in (-\infty; \infty)$ (а также на любом другом промежутке).

Ответ: не является.

328б) Одной из первообразных для функции $f(x) = \cos x$ является функция $F(x) = \sin x - 7,3$. Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на R .

Найдем производную $F'(x) = (\sin x - 7,3)' = (\sin x)' - (7,3)' = \cos x - 0 = \cos x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. По определению функция $F(x) = \sin x - 7,3$ первообразная для функции $f(x) = \cos x$.

Ответ: $F(x) = \sin x - 7,3$.

3296) Одной из первообразных для функции $f(x) = -x$ является функция $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4,8$. Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на \mathbb{R} .

Найдем производную $F'(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 4,8\right)' = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' + (4,8)' = -\frac{1}{2}(x^2)' + 0 = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. По определению функция $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4,8$ первообразная для функции $f(x)$.

Ответ: $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4,8$.

330а) Функции $F(x) = \sin^2 x$ и $f(x) = \sin 2x$ определены на \mathbb{R} . Найдем производную функции $F(x)$ и получим $F'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. По определению функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$.

Ответ: доказано.

331в) Функции $F(x) = \frac{1}{x^2}$ и $f(x) = 14 - \frac{1}{x^2}$ в промежутке $x \in (0; \infty)$ определены. Найдем производную $F'(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Видно, что $F'(x) \neq f(x)$. Следовательно, функция $F(x)$ не является первообразной для функции $f(x)$. Ответ: не является.

331г) Функции $F(x) = 4x\sqrt{x}$ и $f(x) = 6\sqrt{x}$ в промежутке $x \in (0; \infty)$ определены. Найдем производную $F'(x) = (4x\sqrt{x})' = 4(x \cdot x^{\frac{1}{2}})' = 4(x^{\frac{3}{2}})' = 4 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. По определению функция $F(x) = 4x\sqrt{x}$ первообразная для функции $f(x) = 6\sqrt{x}$.

Ответ: является.

332б) Сначала преобразуем функцию $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) - \left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) = 1 - \sin x$. Одной из первообразных для функции $f(x)$ является функция $F(x) = x + \cos x + 1,3$. Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на \mathbb{R} . Найдем производную $F'(x) = (x + \cos x + 1,3)' = (x)' + (\cos x)' + (1,3)' = 1 - \sin x + 0 = 1 - \sin x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. Следовательно, функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Ответ: $F(x) = x + \cos x + 1,3$.

333в) Такими первообразными для функции $f(x) = x^2$ являются, например, функции $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ и $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$. Функции $f(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ определены на R . Найдем производные

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 2\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (2)' = \frac{1}{3}(x^3)' - 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 \text{ и}$$

$$F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (5)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Видно, что $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Следовательно, функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$.

Ответ: $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 2$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$.

334б) Рассмотрим функции $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$, $g(x) = 1 + \cos x$, $h(x) = x + \sin x$. Все эти функции определены на R . Найдем производ-

ную $f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (\cos x)' = \frac{1}{2}(x^2)' - (-\sin x) = \frac{1}{2} \cdot 2x +$

$+\sin x = x + \sin x$. Видно, что $f'(x) = h(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ является первообразной для функции $h(x)$. Теперь найдем производную $h'(x) = (x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x$. Видно, что $h'(x) = g(x)$. Поэтому функция $g(x)$ является производной для функции $h(x)$.

Таким образом, для функции $h(x)$ функция $f(x)$ является первообразной, а функция $g(x)$ является производной.

Ответ: $h(x)$.

335б) Используя таблицу, найдем общий вид первообразных для функции $f(x) = x + \cos x$. Получаем $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$. Про-

верим это. Найдем производную $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + c\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' + (\sin x)' + c' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \cos x + 0 = x + \cos x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$.

336б) Запишем функцию $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$ в виде $f(x) = x^{-3} - 2$. Учитывая таблицу, найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$.

Получаем $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} - 2x + c = -\frac{1}{2x^2} - 2x + c$. Проверим это. Най-

дем производную $F'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^{-2} - 2x + c\right)' = \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)' - (2x)' + c' = -\frac{1}{2} \cdot (x^{-2})' - 2(x)' + 0 = -\frac{1}{2} \cdot (-2x^{-3}) - 2 \cdot 1 = x^{-3} - 2 = \frac{1}{x^3} - 2$. Видно, что $F'(x) = f(x)$.

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x + c$.

337а) Функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ запишем в виде $f(x) = x^{-2}$. Учитывая таблицу, найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$. Получаем $F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$. По условию задачи известно $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$. Подставим значение $x = \frac{1}{2}$ в общий вид первообразных: $-\frac{1}{1/2} + c = -12$ или $-2 + c = -12$, откуда $c = -10$. Таким образом, искомая первообразная $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$. Ответ: $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$.

337б) Используя таблицу, найдем общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Получаем $F(x) = \operatorname{tg} x + c$. По условию задачи известно $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Подставим значение $x = \frac{\pi}{4}$ в общий вид первообразных: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + c = 0$ или $1 + c = 0$, откуда $c = -1$. Тогда искомая первообразная $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$. Ответ: $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$.

338а) Найдем производную функции $F(x) = \sin x - x \cos x$. Получаем: $F'(x) = (\sin x - x \cos x)' = (\sin x)' - (x \cos x)' = \cos x - ((x)' \cos x + x (\cos x)') = \cos x - (1 \cdot \cos x + x (-\sin x)) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. Следовательно, функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда общий вид первообразных $F(x) = \sin x - x \cos x + c$. Ответ: $F(x) = \sin x - x \cos x + c$.

338б) Найдем производную функции $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$. Получаем: $F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. Следовательно, функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда общий вид первообразных $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$. Ответ: $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$.

339а) Найдем общий вид первообразных для функции $f(x) = 2\cos x$. Получаем $F(x) = 2\sin x + c$. Известно, что график первообразной проходит через точку $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Подставим координаты

этой точки в общий вид первообразных: $1 = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c$ или $1 = 2 \cdot (-1) + c$, откуда $c = 3$. Тогда искомая первообразная $F(x) = 2\sin x + 3$. Ответ: $F(x) = 2\sin x + 3$.

339б) Найдем общий вид первообразных для функции $f(x) = 1 - x^2$. Используя таблицу, получаем $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + c$. Известно, что график первообразной проходит через точку $M(-3; 9)$. Подставим координаты этой точки в общий вид первообразных: $9 = (-3) - \frac{(-3)^3}{3} + c$ или $9 = -3 + 9 + c$, откуда $c = 3$. Тогда искомая первообразная $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + 3$. Ответ: $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + 3$.

340б) Функцию $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ запишем в виде $f(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Используя таблицу, найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$ и получим $F(x) = \operatorname{tg} x + c$. Расстояние между соответствующими точками графиков первообразных равно $a = 1$. Это означает, что постоянные для функций $F(x)$ должны отличаться на величину a . Тогда можно выбрать, например, функции $F_1(x) = \operatorname{tg} x + 3$ и $F_2(x) = \operatorname{tg} x + 4$.

Ответ: $F_1(x) = \operatorname{tg} x + 3$, $F_2(x) = \operatorname{tg} x + 4$.

340в) Функцию $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$, используя формулы понижения степени, запишем в виде $f(x) = \frac{1 - \cos x}{2} - \frac{1 + \cos x}{2} = -\cos x$. Учитывая таблицу, найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$ и получим $F(x) = -\sin x + c$. Расстояние между соответствующими точками графиков первообразных равно $a = 0,5$. Это означает, что постоянные для функций $F(x)$ должны отличаться на величину a . Тогда можно выбрать, например, функции $F_1(x) = -\sin x + 0,5$ и $F_2(x) = -\sin x + 1$.

Ответ: $F_1(x) = -\sin x + 0,5$, $F_2(x) = -\sin x + 1$.

341а) Известно, что ускорение точки $a(t) = -2t$. Найдем скорость $v(t)$, учитывая, что скорость — первообразная для ускорения. Получаем: $v(t) = -2 \frac{t^2}{2} + c_1 = -t^2 + c_1$. Известно, что в момент времени

$t_0 = 1$ скорость точки $v_0 = 2$. Подставим эти значения в функцию $v(t)$. Имеем: $2 = -1^2 + c_1$, откуда $c_1 = 3$. Тогда скорость точки $v(t) = -t^2 + 3$. Теперь найдем координату $x(t)$, учитывая, что координата — первообразная для скорости. Получаем: $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + c_2$. В момент времени $t_0 = 1$ координата точки $x_0 = 4$. Подставим эти значения в функцию $x(t)$. Имеем: $4 = -\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1 + c_2$ или $4 = -\frac{1}{3} + 3 + c_2$, откуда $c_2 = \frac{4}{3}$. Тогда координата точки $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + \frac{4}{3}$.

Ответ: $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + \frac{4}{3}$.

342б) Учитывая таблицу и правила нахождения первообразных, для функции $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x = x - 2x^{-5} + \cos x$ получим $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^{-4}}{-4} + \sin x + c = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^4} + \sin x + c$. Проверим это.

Найдем производную $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-4} + \sin x + c \right)' = \left(\frac{1}{2}x^2 \right)' + \left(\frac{1}{2}x^{-4} \right)' + (\sin x)' + c' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (-4x^{-5}) + \cos x + 0 = x - 2x^{-5} + \cos x$. Видно, что $F(x) = f(x)$. Ответ: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^4} + \sin x + c$.

343в) Используя таблицу, для функции $f(x) = x^7$ найдем первообразную $F(x) = \frac{x^8}{8} + c$. Тогда по правилу 3 для функции $f(x) = (4 - 5x)^7$ первообразная $F(x) = \frac{(4 - 5x)^8}{8} : (-5) + c = -\frac{(4 - 5x)^8}{40} + c$.

Проверим это. Найдем производную $F'(x) = \left(-\frac{(4 - 5x)^8}{40} + c \right)' = -\frac{1}{40} \left((4 - 5x)^8 \right)' + c' = -\frac{1}{40} \cdot 8(4 - 5x)^7 \cdot (4 - 5x)' + 0 = -\frac{8}{40} \cdot (4 - 5x)^7 \times (-5) = (4 - 5x)^7$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. Ответ: $F(x) = -\frac{(4 - 5x)^8}{40} + c$.

344г) Функцию $f(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$ запишем в виде $f(x) = -2x^{-3} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$. Учтем, что первообразная функции $\frac{1}{\cos^2 x}$

есть функция $\operatorname{tg} x$, а первообразная функции $\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$ по правилу 3 есть функция $\frac{\operatorname{tg}(3x-1)}{3}$. Теперь находим первообразную функции $f(x)$ и получаем

$$F(x) = -2 \frac{x^{-4}}{-4} + \frac{\operatorname{tg}(3x-1)}{3} + c = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + c.$$

Проверим это. Найдем производную $F'(x) = \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + c \right)' = \left(\frac{1}{2x^4} \right)' + \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) \right)' + c' = \frac{1}{2} (x^{-4})' + \frac{1}{3} \times$
 $\times (\operatorname{tg}(3x-1))' + 0 = \frac{1}{2} \cdot (-4x^{-5}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x-1)} \cdot (3x-1)' =$
 $= -2x^{-5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x-1)} \cdot 3 = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x-1)}.$

Видно, что $F'(x) = f(x)$. Ответ: $F(x) = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + c$.

345г) Запишем функцию $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$ в виде $f(x) = x^{-3} - 10x^4 + 3$. Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$. Получаем $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} - 10 \frac{x^5}{5} + 3x + c = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + c$. По условию график первообразной проходит через точку $M(1; 5)$. Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной: $5 = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} - 2 \cdot 1^5 + 3 \cdot 1 + c$ или $5 = -\frac{1}{2} - 2 + 3 + c$, откуда $c = 4,5$. Тогда искомая первообразная $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4,5$.

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4,5$.

346а) Для функции $f(x) = 1 - \cos 3x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим $F(x) = x - \frac{\sin 3x}{3} + 2 \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{-1} \right) + c = x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + c$. Проверим это. Найдем производную $F'(x) = \left(x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + c \right)' =$
 $= x' - \frac{1}{3} (\sin 3x)' + 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \right)' + c' = 1 - \frac{1}{3} \cos 3x \cdot (3x)' +$

$$+ 2 \left(-\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x \right)' + 0 = 1 - \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 3 + 2 \left(-\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right) \times (-1) = 1 - \cos 3x + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right). \text{ Видно, что } F'(x) = f(x).$$

Ответ: $F(x) = x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + c.$

346г) Функцию $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$ запишем в виде $f(x) = (3-2x)^{-3} + 3(5x-2)^{-\frac{1}{2}} - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. Используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим $F(x) =$

$$= \frac{(3-2x)^{-2}}{-2} : (-2) + 3 \frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} : (5) - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) : (-1) + c = \frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5} \sqrt{5x-2} + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + c. \text{ Проверим это. Найдем производную}$$

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5} \sqrt{5x-2} + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + c \right)' = \frac{1}{4} \cdot \left((3-2x)^{-2} \right)' + \frac{6}{5} \left((5x-2)^{\frac{1}{2}} \right)' + 2 \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)' + c' = \frac{1}{4} \cdot (-2)(3-2x)^{-3} (3-2x)' + \frac{6}{5} \times \frac{1}{2} (5x-2)^{-\frac{1}{2}} (5x-2)' + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - x \right)' + 0 = \frac{1}{4} (-2) \cdot \frac{1}{(3-2x)^3} \times (-2) + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \cdot 5 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cdot (-1) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right). \text{ Видно, что } F'(x) = f(x).$$

Ответ: $F(x) = \frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5} \sqrt{5x-2} + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + c.$

347б) Для функции $f(x) = 3x^2 - 2x$ найдем общий вид первообразных $F(x) = 3 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + c = x^3 - x^2 + c$. Известно, что точка $M(1; 4)$ принадлежит графику функции $F(x)$. Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной: $4 = 1^3 - 1^2 + c$ или $4 = c$. Тогда искомая первообразная $F(x) = x^3 - x^2 + 4$.

Ответ: $F(x) = x^3 - x^2 + 4.$

348) Учтем, что координата движущейся точки $x(t)$ является первообразной для скорости $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Тогда получаем $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2 \frac{t^2}{2} - t + c = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + c$. Для нахождения постоянной c учтем, что в начальный момент времени ($t = 0$) точка находилась в начале координат: $0 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0^2 - 0 + c$, откуда $c = 0$. Тогда координата точки $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t$.

350) Известно, что ускорение точки $a(t) = 12t^2 + 4$. Сначала найдем скорость точки $v(t)$, учитывая, что скорость — первообразная для ускорения. Получаем $v(t) = 12 \frac{t^3}{3} + 4t + c_1 = 4t^3 + 4t + c_1$. Для определения постоянной c_1 учтем, что в момент $t = 1$ с скорость точки $v = 10$ м/с. Имеем: $10 = 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 + c_1$ или $10 = 4 + 4 + c_1$, откуда $c_1 = 2$. Тогда скорость точки $v(t) = 4t^3 + 4t + 2$.

Теперь найдем закон движения (координату) точки, учитывая, что координата — первообразная для скорости. Получаем $x(t) = 4 \cdot \frac{t^4}{4} + 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 2t + c_2 = t^4 + 2t^2 + 2t + c_2$. Для определения постоянной c_2 учтем, что в момент $t = 1$ с координата точки $x = 12$ м. Имеем $12 = 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + c_2$ или $12 = 1 + 2 + 2 + c_2$, откуда $c_2 = 7$. Тогда координата точки $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

Ответ: $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

351a) По второму закону Ньютона ускорение тела $a = \frac{F}{m}$, где F — сила, приложенная к телу массой m . Сначала найдем ускорение $a(t) = \frac{6 - 9t}{3} = 2 - 3t$. Определим скорость тела (учтем, что скорость — первообразная для ускорения) $v(t) = 2t - 3 \frac{t^2}{2} + c_1$. Для определения c_1 учтем, что в момент времени $t_0 = 1$ скорость точки $v_0 = 4$. Имеем: $4 = 2 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + c_1$ или $4 = 2 - \frac{3}{2} + c_1$, откуда $c_1 = 3,5$. Тогда скорость тела $v(t) = 2t - \frac{3}{2}t^2 + 3,5$.

Теперь найдем координату точки (координата — первообразная для скорости) $x(t) = 2 \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{7}{2}t + c_2 = t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t + c_2$. Для определения постоянной c_2 учтем, что в момент времени $t_0 = 1$ координата $x_0 = -5$. Имеем: $-5 = 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{7}{2} \cdot 1 + c_2$ или $-5 = 1 -$

$-\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + c_2$, откуда $c_2 = -9$. Тогда координата точки $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t - 9$. Ответ: $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^3 + t - 9$.

352а) Найдем общий вид первообразных $F(x)$ для функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Получаем $F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + c = x^3 - x^2 + 4x + c$.

Функция $F_1(x)$ проходит через точку $M(-1; 1)$. Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной: $1 = (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + c$ или $1 = -1 - 1 - 4 + c$, откуда $c = 7$. Тогда функция $F_1(x)$ имеет вид: $F_1(x) = x^3 - x^2 + 4x + 7$.

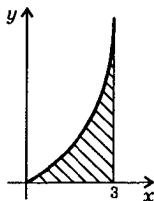
Функция $F_2(x)$ проходит через точку $N(0; 3)$. Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной: $3 = 0^3 - 0^2 + 4 \cdot 0 + c$, откуда $c = 3$. Тогда функция $F_2(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3$.

Найдем разность $F_1 - F_2 = (x^3 - x^2 + 4x + 7) - (x^3 - x^2 + 4x + 3) = 4$. Так как эта разность положительна, то график функции $F_1(x)$ расположен выше графика функции $F_2(x)$. Ответ: 4; первой.

§ 8. Интеграл

353а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = 3$. Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции $y = x^2$. Получаем $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда площадь фигуры $S = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9$.

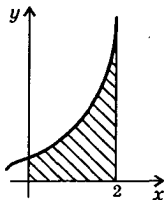
Ответ: 9.



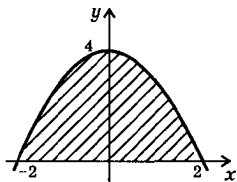
353в) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = \pi$. Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции $y = \sin x$. Получаем $F(x) = -\cos x$. Тогда площадь фигуры $S = F(\pi) - F(0) = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$. Ответ: 2.



354а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2$. Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции $y = x^3 + 1$. Получаем $F(x) =$



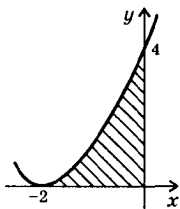
$$= \frac{x^4}{4} + x. \text{ Тогда площадь фигуры } S = F(2) - F(0) = \left(\frac{2^4}{4} + 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} + 0\right) = (4 + 2) - 0 = 6. \quad \text{Ответ: } 6.$$



354в) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$. Найдем точки пересечения параболы $y = 4 - x^2$ с осью абсцисс. Положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = 4 - x^2$, откуда $x = \pm 2$. Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции $y = 4 - x^2$.

Получаем $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. Тогда площадь

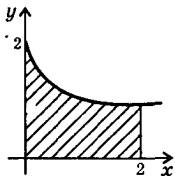
$$\text{фигуры } S = F(2) - F(-2) = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } 10\frac{2}{3}.$$



355а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = (x + 2)^2$, $y = 0$ и $x = 0$. Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции $y = (x + 2)^2$. Получаем

$$F(x) = \frac{(x + 2)^3}{3}. \text{ Тогда площадь фигуры } S = F(0) - F(-2) = \frac{(0 + 2)^3}{3} - \frac{(-2 + 2)^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.



355б) Изобразим фигуру, ограниченную ли-

ниями $y = \frac{1}{(x + 1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2$. Для вычисления площади этой фигуры найдем пер-

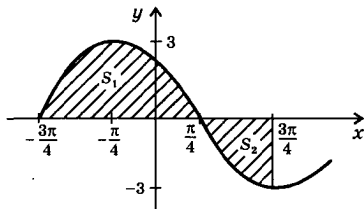
вообразную для функции $y = \frac{1}{(x + 1)^2} + 1 =$

$$= (x + 1)^{-2} + 1. \text{ Получаем } F(x) = \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + x = -\frac{1}{x + 1} + x. \text{ Тогда}$$

$$\text{площадь фигуры } S = F(2) - F(0) = \left(-\frac{1}{2 + 1} + 2\right) - \left(-\frac{1}{0 + 1} + 0\right) = 1\frac{2}{3} -$$

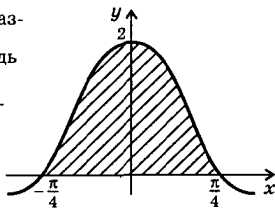
$$-(-1) = 2\frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } 2\frac{2}{3}.$$

356а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$, $y = 0$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$. На промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ функция $y(x) \geq 0$, а на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ функция $y(x) \leq 0$. Поэтому разобьем данную фигуру с площадью S на фигуры с площадями S_1 и S_2 , т.е. $S = S_1 + S_2$. Найдем первообразную для функции $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ и получим $F(x) = -3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Тогда площадь $S_1 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + 3\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\pi + 3\cos 0 = -3 \cdot (-1) + 3 \times$



$\times 1 = 6$. Так как на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ функция $y(x) \leq 0$, то площадь $S_2 = -\left(F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\left(-3\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\left(-3\cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos\pi\right) = -(-3 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)) = 3$. Тогда площадь всей фигуры $S = 6 + 3 = 9$. **Ответ:** 9.

356б) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = 2\cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{4}$. Для вычисления площади этой фигуры для функции $y = 2\cos 2x$ найдем первообразную $F(x) = \frac{2\sin 2x}{2} = \sin 2x$. Тогда площадь фигуры $S = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$. **Ответ:** 2.



357а) Для вычисления $\int_{-1}^2 x^4 dx$ найдем первообразную для функции $f(x) = x^4$ и получим $F(x) = \frac{x^5}{5}$. Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем: $\int_{-1}^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{32}{5} + \frac{1}{5} = \frac{33}{5} = 6 \frac{3}{5}$. **Ответ:** $6 \frac{3}{5}$.

357б) Для вычисления $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ найдем первообразную для функции $f(x) = \cos x$ и получим $F(x) = \sin x$. Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем: $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$. **Ответ:** 1.

358а) Для вычисления $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$ найдем первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} = (2x+1)^{-2}$ и получим $F(x) = \frac{(2x+1)^{-1}}{-1}$: $: 2 = -\frac{1}{2(2x+1)}$. Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем: $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2(2 \cdot 2 + 1)} - \frac{1}{2(2 \cdot 1 + 1)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{-3+5}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$. **Ответ:** $\frac{1}{15}$.

358г) Для вычисления $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx$ найдем первообразную для функции $f(x) = \sin 2x$ и получим $F(x) = \frac{-\cos 2x}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

359б) Для доказательства данного равенства надо вычислить два интеграла. Вычислим:

$$\int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/3} = -\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{и}$$

$$\int_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{1/16}^{1/4} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Видно, что $\int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = \int_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Ответ: доказано.

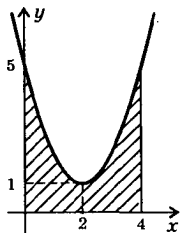
359г) Для доказательства данного равенства надо вычислить два интеграла. Получаем: $\int_0^1 (2x+1) \, dx = (x^2 + x) \Big|_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$

и $\int_0^2 (x^3 - 1) \, dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 0\right) = 4 - 2 - 0 = 2$. Вид-

но, что $\int_0^1 (2x+1) \, dx = \int_0^2 (x^3 - 1) \, dx$. Ответ: доказано.

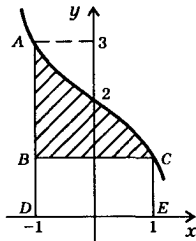
360в) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 4$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{площадь этой фигуры } S &= \int_0^4 (x^2 - 4x + 5) \, dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right) \Big|_0^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4\right) - \\ &- \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0\right) = \left(\frac{64}{3} - 32 + 20\right) - 0 = \\ &= \frac{64}{3} - 12 = 21\frac{1}{3} - 12 = 9\frac{1}{3}. \quad \text{Ответ: } 9\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



361б) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$ и $x = 1$. Очевидно, что искомая площадь $S = S_{ADEC} -$

$$\begin{aligned} - S_{BCED} &= \int_{-1}^1 (2 - x^3) \, dx - \int_{-1}^1 1 \cdot dx = \\ &= \int_{-1}^1 (2 - x^3 - 1) \, dx = \int_{-1}^1 (1 - x^3) \, dx = \end{aligned}$$



$$= \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1^4}{4} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^4}{4} \right) = \frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{4} \right) = 2. \quad \text{Ответ: 2.}$$

362б) Подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ запишем в виде

$f(x) = (2x+5)^{-\frac{1}{2}}$. Теперь вычислим данный интеграл

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} = \int_{-2}^2 (2x+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot 2} \Big|_{-2}^2 = \sqrt{2x+5} \Big|_{-2}^2 = \sqrt{2 \cdot 2 + 5} - \sqrt{2 \cdot (-2) + 5} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2.$$

Ответ: 2.

362в) Вычислим интеграл

$$\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}} = \operatorname{tg} \frac{x}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \right) \Big|_0^{3\pi} = 9 \operatorname{tg} \frac{x}{9} \Big|_0^{3\pi} = 9 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{9} - 9 \operatorname{tg} \frac{0}{9} = 9 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 9 \operatorname{tg} 0 = 9 \cdot \sqrt{3} - 9 \cdot 0 = 9\sqrt{3}.$$

Ответ: $9\sqrt{3}$.

363а) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного аргумента, подынтегральную функцию запишем в виде

$f(x) = \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 = \sin^2 \frac{x}{4} + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4} = \left(\sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4} \right) + \left(2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \right) = 1 + \sin \frac{x}{2}$. Вычислим данный интеграл

$$\int_0^{2\pi/3} \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx = \int_0^{2\pi/3} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right) dx = \left(x - 2 \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/3} = \left(\frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{3} \right) - (0 - 2 \cos 0) = \left(\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) + 2 \cdot 1 = \frac{2\pi}{3} + 1.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 1$.

363б) Вычислим интеграл

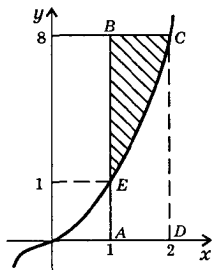
$$\int_0^2 (1+2x)^3 dx = \frac{(1+2x)^4}{4 \cdot 2} \Big|_0^2 = \frac{(1+2x)^4}{8} \Big|_0^2 = \frac{(1+2 \cdot 2)^4}{8} - \frac{(1+2 \cdot 0)^4}{8} = \frac{5^4}{8} - \frac{1^4}{8} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = \frac{624}{8} = 78.$$

Ответ: 78.

364а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = x^3$, $y = 8$ и $x = 1$. Очевидно, что площадь данной фигуры

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} - S_{AECD} = 1 \cdot 8 - \int_1^2 x^3 dx = \\ &= 8 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = 8 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = 8 - \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \\ &= 4 + \frac{1}{4} = 4 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

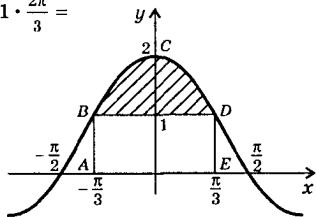
Ответ: $4 \frac{1}{4}$.



364б) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = 2 \cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{3}$. Очевидно, что площадь этой фигуры

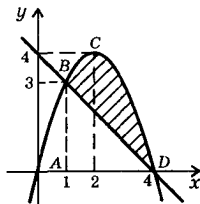
$$\begin{aligned} S &= S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2 \cos x dx - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \\ &= 2 \sin x \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{2\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{3} - \\ &- 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ &- 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

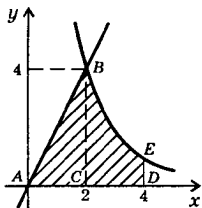


365а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = 4x - x^2$ и $y = 4 - x$. Найдём абсциссы точек пересечения этих линий: $4x - x^2 = 4 - x$ или $0 = x^2 - 5x + 4$, откуда $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Тогда площадь данной фигуры $S =$

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} - S_{ABD} = \int_1^4 (4x - x^2) dx - \int_1^4 (4 - x) dx = \\ &= \int_1^4 [(4x - x^2) - (4 - x)] dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(5 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^4 = \\ &= \left(5 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4 \right) - \left(5 \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1 \right) = \left(40 - \frac{64}{3} - 16 \right) - \\ &- \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4 \right) = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6} \right) = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} = 4,5. \end{aligned}$$

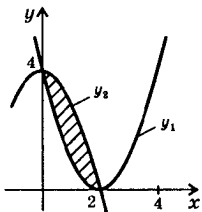


Ответ: 4,5.



365б) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$ и $x = 4$. Найдем абсциссу точки пересечения линий $y = \frac{16}{x^2}$ и $y = 2x$. Получаем уравнение: $\frac{16}{x^2} = 2x$ или $8 = x^3$, откуда $x = 2$. Разобьем данную фигуру на две: ABC и $CBED$. Тогда искомая площадь

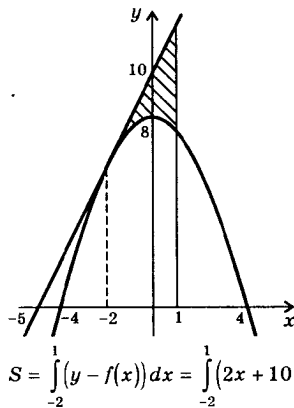
$$S = S_{ABC} + S_{CBED} = \frac{1}{2} AC \cdot BC + \int_2^4 \frac{16}{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{16}{x} \Big|_2^4 = 4 - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{2} \right) = 4 - (4 - 8) = 4 - (-4) = 8. \quad \text{Ответ: } 8.$$



366а) Изобразим фигуру, ограниченную линиями $y_1 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ и $y_2 = 4 - x^2$. Аналогично задаче 365,а можно показать, что площадь этой фигуры

$$S = \int_0^2 (y_2 - y_1) dx = \int_0^2 (4 - x^2 - x^2 + 4x - 4) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right) = \left(-\frac{16}{3} + 8 \right) - 0 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

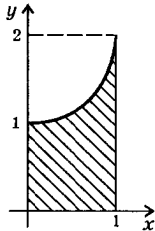


368) Изобразим графики функции $f(x) = 8 - 0,5x^2$ и касательной к этой параболе в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Прежде всего напомним уравнение касательной. Вычислим $f'(x) = -0,5 \cdot 2x = -x$. Напомним уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 : $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$. Учтем, что $f'(x_0) = -(-2) = 2$ и $f(x_0) = 8 - 0,5 \cdot (-2)^2 = 8 - 2 = 6$. Тогда уравнение касательной $y = 2(x + 2) + 6$ или $y = 2x + 10$. Площадь данной фигуры (см. задачу 365,а)

$$S = \int_{-2}^1 (y - f(x)) dx = \int_{-2}^1 (2x + 10 - 8 + 0,5x^2) dx = \int_{-2}^1 (2x + 2 + 0,5x^2) dx =$$

$$= \left(x^2 + 2x + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^1 = \left(1^2 + 2 \cdot 1 + \frac{1^3}{6} \right) - \left((-2)^2 + 2 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{6} \right) = 3 \frac{1}{6} - \left(-\frac{4}{3} \right) = 3 \frac{1}{6} + 1 \frac{1}{3} = 4 \frac{1}{2} = 4,5. \quad \text{Ответ: } 4,5.$$

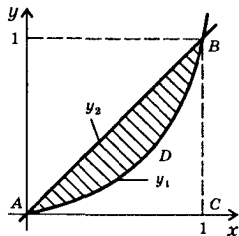
370а) Найдем объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$. Известно, что объем тела вращения



вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{получаем } V &= \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \pi \left(\frac{0}{5} + \frac{2}{3} \cdot 0 + 0 \right) = \pi \frac{3 + 10 + 15}{15} = \\ &= \pi \frac{28}{15} = \frac{28}{15} \pi. \quad \text{Ответ: } \frac{28}{15} \pi. \end{aligned}$$

371а) Вычислим объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x^2$ и $y_2 = x$. При вращении

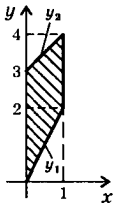


фигуры ABC ее объем $V_2 = \pi \int_0^1 y_2^2 dx$. При вращении фигуры $ADBC$ ее объем $V_1 =$

$\pi \int_0^1 y_1^2 dx$. Тогда объем данной фигуры

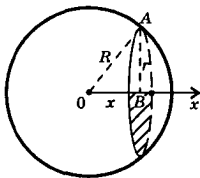
$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 = \pi \int_0^1 y_2^2 dx - \pi \int_0^1 y_1^2 dx = \pi \int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx = \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \pi \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{5} \right) = \\ &= \pi \cdot \frac{2}{15} - \pi \cdot 0 = \frac{2}{15} \pi. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{15} \pi. \end{aligned}$$

371б) Вычислим объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y_1 = 2x$, $y_2 = x + 3$, $x = 0$ и $x = 1$. Учитывая результаты предыдущей задачи, этот объем



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \left((x+3)^2 - (2x)^2 \right) dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 6x + 9 - 4x^2) dx = \\
 &= \pi \int_0^1 (6x + 9 - 3x^2) dx = \pi (3x^2 + 9x - x^3) \Big|_0^1 = \pi(3+9-1) - \pi(0+0-0) = 11\pi.
 \end{aligned}$$

Ответ: 11π .



372а) Введем ось координат перпендикулярно сечению шара с началом в центре шара. Сечением шара является круг радиуса r и площадью $S(x) = \pi r^2$. Для нахождения радиуса r рассмотрим прямоугольный треугольник OAB . По теореме Пифагора $AB^2 = OA^2 - OB^2$ или $r^2 = R^2 - x^2$, тогда $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Теперь найдем объем шарового сегмента, используя формулу $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. Получаем

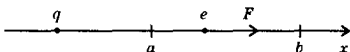
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{R-H}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-H}^R = \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \\
 &- \pi \left(R^2(R-H) - \frac{(R-H)^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi \left(R^3 - R^2 H - \frac{R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3}{3} \right) = \\
 &= \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - RH^2 + \frac{H^3}{3} \right) = \pi \left(RH^2 - \frac{H^3}{3} \right) = \frac{\pi H^2}{3} (3R - H).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi H^2}{3} (3R - H)$.

374) По закону Гука сила F , растягивающая пружину на величину x , вычисляется по формуле $F = kx$ (где k — коэффициент пропорциональности). Так как сила в 4 Н растягивает пружину на 8 см (или 0,08 м), то получаем уравнение $4 = k \cdot 0,08$, откуда $k = 50$. Тогда сила $F = 50x$. Теперь найдем работу, которая при этом совершается, по формуле $A = \int_a^b F(x) dx$. Получаем:

$$A = \int_0^{0,08} 50x dx = 25x^2 \Big|_0^{0,08} = 25 \cdot 0,08^2 = 0,16 \text{ Дж.} \quad \text{Ответ: } 0,16 \text{ Дж.}$$

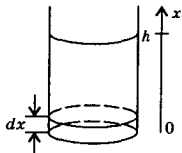
375) По закону Кулона на электрон действует сила $F = -\frac{\gamma q}{x^2}$, где γ — коэффициент пропорциональности, q — величина заряда, x —



расстояние между зарядом и электроном. Найдём работу силы взаимодействия зарядов

$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b -\frac{\gamma q}{x^2} dx = \frac{\gamma q}{x} \Big|_a^b = \gamma q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad \text{Ответ: } \gamma q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

377) Пусть тонкий слой жидкости плотности ρ толщины dx поднимается на высоту x . Тогда объём такого цилиндрического слоя $\pi r^2 dx$ и вес $\rho g \pi r^2 dx$. Работа, которая затрачивается на подъем этого слоя, равна $dA = \rho g \pi r^2 dx \cdot x$. Для нахождения всей работы по заполнению бака надо просуммировать по всем таким слоям (при условии, что толщина слоя $dx \rightarrow 0$). Получаем:



$$A = \int_0^h \rho g \pi r^2 x dx = \rho g \pi r^2 \int_0^h x dx = \rho g \pi r^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}$.

Глава IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 9. Обобщение понятия степени

381а) По определению $\sqrt[4]{16} = 2$, т.к. $2^4 = 16$.

Ответ: проверено.

381г) По определению $\sqrt[5]{-243} = -3$, т.к. $(-3)^5 = -243$.

Ответ: проверено.

383в) Используем свойства корней: $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$.

Ответ: -2 .

384б) Используем свойства корней: $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

385а) Запишем уравнение $x^3 + 4 = 0$ в виде $x^3 = -4$. Так как это уравнение нечетной (третьей степени), то оно имеет единственный корень $x = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$. Ответ: $-\sqrt[3]{4}$.

385б) Уравнение $x^6 = 5$ имеет четную (шестую) степень. Поэтому уравнение имеет два корня $x = \pm \sqrt[6]{5}$. Ответ: $\pm \sqrt[6]{5}$.

387в) Из уравнения $0,02x^6 - 1,28 = 0$ выразим $x^6 = \frac{1,28}{0,02} = 64$. Так как уравнение $x^6 = 64$ четной (шестой) степени, то оно имеет два корня $x = \pm \sqrt[6]{64} = \pm \sqrt[6]{2^6} = \pm 2$. Ответ: ± 2 .

388а) Обе части уравнения $\sqrt[3]{x} = -0,6$ возведем в третью степень: $(\sqrt[3]{x})^3 = (-0,6)^3$ или $x = -0,216$. Итак, уравнение имеет единственный корень. Ответ: $-0,216$.

389б) Используем свойства степеней и определение корня. Тогда получаем: $(2\sqrt[5]{-2})^5 = 2^5 \cdot (\sqrt[5]{-2})^5 = 2^5 \cdot (-2) = -2^6 = -64$. Ответ: -64 .

390б) Используем свойства корней и учтем, что $32 = 2^5$ и $243 = 3^5$. Получаем: $\sqrt[5]{32 \cdot 243} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5} = \sqrt[5]{(2 \cdot 3)^5} = \sqrt[5]{6^5} = 6$.

Ответ: 6.

391в) Подкоренное выражение разложим на простые множители. Учтем, что $48 = 2^4 \cdot 3$ и $27 = 3^3$. Тогда получаем: $\sqrt[4]{48 \cdot 27} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{(2 \cdot 3)^4} = \sqrt[4]{6^4} = 6$. Ответ: 6.

393б) Учтем свойства корней. Тогда получаем:

$$\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2. \quad \text{Ответ: } 2.$$

394а) Обратим смешанные числа в неправильные дроби: $39\frac{1}{16} = \frac{625}{16} = \frac{5^4}{2^4} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$ и $39\frac{19}{27} = \frac{100}{27} = \frac{10^2}{3^3}$ и учтем свойства степеней и

корней. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{\frac{64}{100\,000\,000}} \cdot \sqrt[4]{39\frac{1}{16}} : \sqrt[3]{-3\frac{19}{27}} = \\ & = \sqrt[6]{\frac{2^6}{10^8}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^4} : \sqrt[3]{\frac{10^2}{-3^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^6}}{\sqrt[6]{10^8}} \cdot \frac{5}{2} : \left(-\frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{3^3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt[3]{10^4}} \cdot \frac{5}{2} : \frac{\sqrt[3]{10^2}}{3} = \\ & = -\frac{5}{\sqrt[3]{10^4}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{10^2}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{10^4 \cdot 10^2}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{10^6}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{(10^2)^3}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{100^3}} = \\ & = -\frac{15}{100} = -\frac{3}{20}. \quad \text{Ответ: } -\frac{3}{20}. \end{aligned}$$

394б) Обратим смешанные числа в неправильные дроби и используем свойства корней. Получаем: $\sqrt[5]{1 \frac{11}{16} \cdot 4,5} - \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}} = \sqrt[5]{\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{2}} -$

$$-\sqrt[5]{\frac{9}{288}} = \sqrt[5]{\frac{3^3 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

398б) Так как подкоренные числа связаны неравенством $0,4 < \frac{5}{12}$, то и корни одинаковой (двенадцатой) степени связаны неравенством того же знака: $^{12}\sqrt{0,4} < ^{12}\sqrt{\frac{5}{12}}$. **Ответ:** $^{12}\sqrt{0,4} < ^{12}\sqrt{\frac{5}{12}}$.

399а) Используя свойства корней, первое число запишем в виде $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. второе число — в виде $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Так как числа удовлетворяют неравенству $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, то и корни одинаковой (третьей) степени из этих чисел связаны неравенством того же знака, т.е. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ или $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2} < \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2} < \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$.

400б) Данные числа представим в виде корней одинаковой (пятнадцатой) степени: $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \cdot 5]{4^5} = \sqrt[15]{(2^2)^5} = \sqrt[15]{2^{10}}$ и $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5 \cdot 3]{8^3} = \sqrt[15]{(2^3)^3} = \sqrt[15]{2^9}$. Подкоренные числа удовлетворяют неравенству $2^{10} > 2^9$. Тогда и корни одинаковой (пятнадцатой) степени из этих чисел связаны неравенством того же знака, т.е. $\sqrt[15]{2^{10}} > \sqrt[15]{2^9}$ или $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$. **Ответ:** $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$.

401в) Числа представим в виде корней одинаковой (пятнадцатой) степени: $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3 \cdot 5]{(-2)^5} = \sqrt[15]{-2^5}$ и $\sqrt[5]{-4} = \sqrt[5 \cdot 3]{(-4)^3} = \sqrt[15]{-4^3} = \sqrt[15]{-(2^2)^3} = \sqrt[15]{-2^6}$. Подкоренные числа удовлетворяют

неравенству $-2^5 > -2^6$. Тогда и корни одинаковой (пятнадцатой) степени из этих чисел связаны неравенством того же знака: $\sqrt[15]{-2^5} > \sqrt[15]{-2^6}$ или $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$. Ответ: $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$.

402а) Используем свойства степеней и корней. Получаем:

$\sqrt[6]{64a^8b^{11}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot a^6 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot b^5} = \sqrt[6]{(2^6 a^6 b^6) \cdot (a^2 b^5)} = \sqrt[6]{(2ab)^6} \times \sqrt[6]{a^2 b^5} = |2ab| \sqrt[6]{a^2 b^5} = 2ab \sqrt[6]{a^2 b^5}$. Учтено, что $a > 0$, $b > 0$. Поэтому $2ab > 0$ и $|2ab| = 2ab$. Ответ: $2ab \sqrt[6]{a^2 b^5}$.

403б) Так как $a, b > 0$, то произведение $ab > 0$ и $ab = |ab| = \sqrt[8]{(ab)^8}$. Используем свойства степеней и получим: $ab \sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{(ab)^8} \times \sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{a^8 b^8 \cdot \frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{5ab^{11}}$. Ответ: $\sqrt[8]{5ab^{11}}$.

404а) По определению арифметического корня $\sqrt{a^2} = |a|$. Тогда, если $\sqrt{a^2} = -a$, то должно выполняться равенство $|a| = -a$. По определению модуля числа такое равенство выполняется при $a \leq 0$. Ответ: $a \leq 0$.

405а) По определению арифметического корня $\sqrt[3]{a^3} = a$. Так как по условию $\sqrt[3]{a^3} = -a$, то должно выполняться равенство $a = -a$ или $2a = 0$, откуда $a = 0$. Ответ: $a = 0$.

405в) По определению арифметического корня $\sqrt[4]{a^4} = |a|$. Такое же равенство дано и по условию задачи. Следовательно, это равенство выполняется при любых значениях a .

Ответ: при всех a .

406а) Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби

$\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{7} + \sqrt{5}$, сопряженное знаменателю. Получаем:

$$\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5}).$$

Ответ: $\frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})$.

406б) Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{a - \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}}$, умножим ее числитель и знаменатель на выражение

и знаменатель дроби на величину $\sqrt[4]{2^3}$, сопряженную знаменателю.

$$\text{Получаем: } \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2 \cdot 2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{8}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2} \sqrt[4]{8}.$$

410г) Для решения уравнения $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$ введем новую неизвестную $t = \sqrt[6]{x}$ (по определению арифметического корня $t \geq 0$), тогда $t^2 = (\sqrt[6]{x})^2 = \sqrt[3]{x}$. Получаем квадратное уравнение: $t^2 - 5t = 6$ или $t^2 - 5t - 6 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ (не подходит, т.к. $t \geq 0$) и $t_2 = 6$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение $\sqrt[3]{x} = 6$. Возведем в куб обе части уравнения: $(\sqrt[3]{x})^3 = 6^3$ или $x = 216$. Ответ: 216.

411а) При решении неравенства $x^4 < 3$ извлечем корень четвертой степени из обеих частей, учитывая, что $\sqrt[4]{x^4} = |x|$. Получаем: $|x| < \sqrt[4]{3}$. Это неравенство эквивалентно двойному линейному неравенству: $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$, т.е. $x \in (-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3})$.

$$\text{Ответ: } (-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}).$$

411б) При решении неравенства $x^{11} \geq 7$ извлечем корень одиннадцатой степени из обеих частей: $\sqrt[11]{x^{11}} \geq \sqrt[11]{7}$ или $x \geq \sqrt[11]{7}$, т.е. $x \in [\sqrt[11]{7}; \infty)$. Ответ: $[\sqrt[11]{7}; \infty)$.

411в) При решении неравенства $x^{10} > 2$ извлечем корень десятой (четной) степени из обеих частей, учитывая, что $\sqrt[10]{x^{10}} = |x|$. Получаем: $|x| > \sqrt[10]{2}$. Это неравенство эквивалентно двум неравенствам: $x < -\sqrt[10]{2}$ и $x > \sqrt[10]{2}$, т.е. $x \in (-\infty; -\sqrt[10]{2}) \cup (\sqrt[10]{2}; \infty)$.

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\sqrt[10]{2}) \cup (\sqrt[10]{2}; \infty).$$

412а) Обе части неравенства $\sqrt[3]{x} < -7$ возведем в куб: $x < (-7)^3$ или $x < -343$, т.е. $x \in (-\infty; -343)$. Ответ: $(-\infty; -343)$.

412б) При решении неравенства $\sqrt[6]{x} \geq 2$ учтем, что $x \geq 0$ (т.к. корень четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел). Возведем обе неотрицательные части этого неравенства в шестую степень: $(\sqrt[6]{x})^6 \geq 2^6$ или $x \geq 64$. С учетом ОДЗ получаем решение неравенства $x \in [64; \infty)$. Ответ: $[64; \infty)$.

412г) При решении неравенства $\sqrt[4]{x} \leq 3$ учтем, что $x \geq 0$ (т.к. корень четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел). Возведем обе неотрицательные части этого неравенства в четвертую степень: $(\sqrt[4]{x})^4 \leq 3^4$ или $x \leq 81$. С учетом ОДЗ получаем решение неравенства $0 \leq x \leq 81$ или $x \in [0; 81]$.

Ответ: $[0; 81]$.

413а) Учитывая определение арифметического корня, получим: $\sqrt[6]{a^6} = |a| = -a$ (т.к. $a \leq 0$ и $|a| = -a$). **Ответ:** $-a$.

414б) Учтем определение арифметического корня и получим: $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7} = |a| + 2a = a + 2a = 3a$ (т.к. $a \geq 0$ и $|a| = a$).

Ответ: $3a$.

414г) Учитывая определение арифметического корня, имеем: $\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8} = a + 3|a| = a + 3 \cdot (-a) = a - 3a = -2a$ (т.к. $a \leq 0$ и $|a| = -a$). **Ответ:** $-2a$.

415а) Используем свойства корней и формулу для разности квадратов чисел: $\sqrt[3]{10 + \sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{73}} = \sqrt[3]{(10 + \sqrt{73})(10 - \sqrt{73})} = \sqrt[3]{10^2 - (\sqrt{73})^2} = \sqrt[3]{100 - 73} = \sqrt[3]{27} = 3$. **Ответ:** 3 .

415б) Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}$, используем свойства корней и формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}} + \sqrt{17} &= \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}} + \sqrt{17} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2(4 + \sqrt{17})}}{\sqrt[3]{(4 - \sqrt{17})(4 + \sqrt{17})}} + \sqrt{17} = \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^3}}{\sqrt[3]{4^2 - (\sqrt{17})^2}} + \sqrt{17} = \frac{4 + \sqrt{17}}{\sqrt[3]{16 - 17}} + \\ &+ \sqrt{17} = \frac{4 + \sqrt{17}}{-1} + \sqrt{17} = -4 - \sqrt{17} + \sqrt{17} = -4. \end{aligned}$$

Ответ: -4 .

416а) Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$, умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$, величину, сопряженную знаме-

нателью. Получаем:
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2})} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{2 - 3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{-1} = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}.$$

Ответ: $-\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}.$

416г) Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$, умножим числитель и знаменатель на величину $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, сопряженную знаменателю. Получаем:

$$\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}.$$

Ответ: $\frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}.$

417в) Обе части уравнения $\sqrt{61 - x^2} = 5$ возведем в квадрат: $61 - x^2 = 25$, откуда $61 - 25 = x^2$ или $36 = x^2$. Корни этого уравнения $x = \pm 6$. **Ответ:** ± 6 .

418б) Уравнение $x + \sqrt{2x + 3} = 6$ запишем в виде $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$. По определению арифметического корня правая часть уравнения должна быть неотрицательной, т.е. $6 - x \geq 0$. Обе неотрицательные части уравнения возведем в квадрат: $2x + 3 = (6 - x)^2$. При этом, очевидно, $2x + 3 \geq 0$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно

системе
$$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ 2x + 3 = (6 - x)^2. \end{cases}$$
 Решим уравнение этой системы:

$2x + 3 = 36 - 12x + x^2$ или $0 = x^2 - 14x + 33$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = 11$. Неравенству $6 - x \geq 0$ удовлетворяет только корень $x = 3$. **Ответ:** 3.

419а) Обе неотрицательные части уравнения $\sqrt{2x + 1} =$
 $= \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ возведем в квадрат: $2x + 1 = x^2 - 2x + 4$. Учтем, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным, т.е. $2x + 1 \geq 0$ (тогда в силу равенства $2x + 1 = x^2 - 2x + 4$ выражение $x^2 - 2x + 4 \geq 0$). Таким образом, данное уравнение эквивалентно

системе $\begin{cases} 2x+1 = x^2 - 2x + 4 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$. Решим уравнение этой системы:
 $0 = x^2 - 2x + 4 - 2x - 1$ или $0 = x^2 - 4x + 3$. Корни квадратного уравнения $x_1=1$ и $x_2=3$ удовлетворяют неравенству $2x + 1 \geq 0$.

Ответ: 1; 3.

420г) В уравнение $x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$ входит корень нечетной (третьей) степени. Так как корень нечетной степени можно извлечь из любых чисел, то никаких ограничений на x не возникает. Возведем в куб обе части данного уравнения: $(x + 1)^3 = x^3 + 2x^2 + x$ или $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + x$ или $x^2 + 2x + 1 = 0$ или $(x + 1)^2 = 0$, откуда $x + 1 = 0$ и $x = -1$. **Ответ:** -1.

421а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1 \\ 3\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y} = 10 \end{cases}$ введем новые неизвестные $z = \sqrt[3]{x}$ и $t = \sqrt[3]{y}$. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} z + 2t = 1 \\ 3z - t = 10 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $z = 1 - 2t$ и подставим во второе уравнение: $3(1 - 2t) - t = 10$ или $3 - 6t - t = 10$ или $-7t = 7$, откуда $t = -1$. Тогда $z = 1 - 2t = 1 - 2(-1) = 3$. Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем: $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y} = -1 \end{cases}$. Возведем в куб каждое уравнение системы и найдем $x = 3^3 = 27$ и $y = (-1)^3 = -1$. Итак, система имеет единственное решение (27; -1). **Ответ:** (27; -1).

421г) Для решения системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5} \\ 5\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = \sqrt{5} \end{cases}$ введем новые неизвестные $z = \sqrt{x}$, $t = \sqrt{y}$ и обозначим $a = \sqrt{5}$. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} z + 3t = 5a \\ 5t - 2z = a \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $z = 5a - 3t$ или и подставим во второе уравнение: $5t - 2(5a - 3t) = a$ или $5t - 10a + 6t = a$ или $11t = 11a$, откуда $t = a = \sqrt{5}$. Тогда $z = 5a - 3t = 5a - 3a = 2a = 2\sqrt{5}$. Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем: $\begin{cases} \sqrt{x} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{y} = \sqrt{5} \end{cases}$. Возведем в квадрат каждое уравнение системы и найдем $x = (2\sqrt{5})^2 = 20$ и $y = (\sqrt{5})^2 = 5$. **Ответ:** (20; 5).

422в) Найдем ОДЗ уравнения $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2}$. ОДЗ определяется условиями: $x-2 > 0$ и $3x+2 \geq 0$. Решение этих неравенств $x \in (2; \infty)$. Умножим обе части данного уравнения на $\sqrt{x-2}$: $x+6 = \sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{x-2}$. При $x \in (2; \infty)$ левая часть уравнения $x+6 > 0$. Возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат: $(x+6)^2 = (3x+2)(x-2)$ или $x^2+12x+36 = 3x^2-6x+2x-4$ или $0 = 2x^2-16x-40$ или $0 = x^2-8x-20$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 10$. В ОДЗ входит только решение $x = 10$.

Ответ: 10.

423г) Обе части уравнения $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}} = 1$ возведем в квадрат $x - \sqrt{x^2-5} = 1$. Запишем уравнение в виде $x+1 = \sqrt{x^2-5}$. По определению арифметического корня величина $x+1 \geq 0$. Возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат: $(x+1)^2 = x^2-5$ (тогда выражение $x^2-5 \geq 0$). Таким образом, уравнение

эквивалентно системе $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = x^2-5 \end{cases}$. Решим уравнение этой системы: $x^2+2x+1 = x^2-5$, откуда $2x = -6$ и $x = -3$. Но этот корень не удовлетворяет неравенству $x+1 \geq 0$. Следовательно, уравнение решений не имеет. Ответ: решений нет.

424в) ОДЗ уравнения $2 + \sqrt{10-x} = \sqrt{22-x}$ определяется неравенствами $\begin{cases} 10-x \geq 0 \\ 22-x \geq 0 \end{cases}$, откуда $x \leq 10$. Обе неотрицательные части уравнения возведем в квадрат: $4 + 4\sqrt{10-x} + 10 - x = 22 - x$ или $4\sqrt{10-x} = 8$ или $\sqrt{10-x} = 2$. Вновь возведем в квадрат обе неотрицательные части уравнения: $10-x = 4$, откуда $x = 6$. Этот корень удовлетворяет ОДЗ. Ответ: 6.

425г) Для решения уравнения $3\sqrt[10]{x^2-3} + \sqrt[5]{x^2-3} = 4$ введем новую неизвестную $t = \sqrt[10]{x^2-3}$, тогда $t^2 = (\sqrt[10]{x^2-3})^2 = \sqrt[5]{x^2-3}$. Получаем квадратное уравнение: $3t + t^2 = 4$ или $t^2 + 3t - 4 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -4$ (не подходит, т.к. t — корень четной степени и $t \geq 0$). Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнение $\sqrt[10]{x^2-3} = 1$. Возведем обе части уравнения в десятую степень: $x^2-3 = 1$ или $x^2 = 4$, откуда $x = \pm 2$.

Ответ: ± 2 .

426а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$ введем

новые неизвестные $\sqrt{x} = z$ и $\sqrt{y} = t$. Очевидно, что $z, t \geq 0$. Тогда

система уравнений имеет вид $\begin{cases} 2z - t = 5 \\ zt = 3 \end{cases}$. Из первого уравнения

выразим $t = 2z - 5$ и подставим во второе уравнение: $z(2z - 5) = 3$ или $2z^2 - 5z - 3 = 0$. Корни этого уравнения $z_1 = 3$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$ (не подходит, т.к. $z \geq 0$). Тогда $t = 2z - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Вернемся к

старым неизвестным x и y . Получаем систему $\begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases}$. Возведем каждое уравнение в квадрат и найдем $x = 9$ и $y = 1$.

Ответ: (9; 1).

526б) Для решения системы $\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10 \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6 \end{cases}$ введем

новые неизвестные $\sqrt{6+x} = z \geq 0$ и $\sqrt{3y+4} = t \geq 0$. Получаем систему

линейных уравнений $\begin{cases} z - 3t = -10 \\ 4t - 5z = 6 \end{cases}$. Из первого уравнения

выразим $z = 3t - 10$ и подставим во второе уравнение: $4t - 5(3t - 10) = 6$ или $4t - 15t + 50 = 6$ или $-11t = -44$, откуда $t = 4$. Теперь найдем $z = 3t - 10 = 3 \cdot 4 - 10 = 2$. Вернемся к старым неизвестным

x и y . Получаем систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{6+x} = 2 \\ \sqrt{3y+4} = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} 6+x = 4 \\ 3y+4 = 16 \end{cases}$,

откуда $x = -2$ и $y = 4$. Ответ: (-2; 4).

427б) Для решения системы уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ xy = 216 \end{cases}$ введем

новые неизвестные $z = \sqrt[3]{x}$ и $t = \sqrt[3]{y}$, тогда $z^3 = x$ и $t^3 = y$. Тогда получаем систему

$\begin{cases} z + t = 5 \\ z^3 t^3 = 216 \end{cases}$. Из обеих частей второго уравнения

извлечем кубический корень. Имеем систему уравнений $\begin{cases} z + t = 5 \\ zt = 6 \end{cases}$.

Из первого уравнения выразим $z = 5 - t$ и подставим во второе: $(5 - t)t = 6$ или $0 = t^2 - 5t + 6$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 2$ (тогда $z_1 = 5 - t_1 = 3$) и $t_2 = 3$ (тогда $z_2 = 5 - t_2 = 2$). Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем две системы уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y} = 2 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 3^3 = 27 \\ y = 2^3 = 8 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 2^3 = 8 \\ y = 3^3 = 27 \end{cases}.$$

Ответ: (27; 8), (8; 27).

428а) Показатель степени представим в виде неправильной дроби и используем определение степени с рациональным показателем. Получаем: $3^{1,2} = 3^{1\frac{2}{10}} = 3^{1\frac{1}{5}} = 3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{3^6}$. Ответ: $\sqrt[5]{3^6}$.

429в) Используем определение степени с рациональным показателем. Получаем: $\sqrt[13]{b^{-7}} = b^{-\frac{7}{13}}$. Ответ: $b^{-\frac{7}{13}}$.

$$\text{430г) } \text{Используем свойства степеней и получим: } \left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}} = \\ = \left[\frac{(3^3)^3 \cdot 5^{-\frac{2}{9}}}{(5^{18})^6}\right]^{\frac{2}{9}} = \left(\frac{3^9}{5^{18}}\right)^{\frac{2}{9}} = \frac{(3^9)^{\frac{2}{9}}}{(5^{18})^{\frac{2}{9}}} = \frac{3^2}{5^4} = \frac{9}{625}. \quad \text{Ответ: } \frac{9}{625}.$$

431б) Запишем корни в виде степеней с рациональным показателем. Основания степеней разложим на простые множители.

$$\text{Получаем: } \sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}} = (2^2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{8}{3}} \cdot \frac{1}{5^{\frac{5}{3}}} = \\ = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{5}{3}}} = (2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}) \cdot \left(\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{5}{3}}}\right) = \frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}. \quad \text{Ответ: } \frac{4}{5}.$$

432а) Используем свойства степеней и вынесем общий множитель $a^{\frac{1}{3}}$ за скобки. Получаем: $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \\ = a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})$. Ответ: $a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})$.

433г) Сгруппируем члены суммы и вынесем общие множители за скобки. Имеем: $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = (a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}) + (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) = \\ = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) + (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + 1)$.

$$\text{Ответ: } (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + 1).$$

434а) Разложим числитель дроби, используя формулу для разности квадратов. После этого сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

434г) Разложим числитель дроби, используя формулу для суммы кубов чисел. После этого сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}.$$

Ответ: $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

435а) Разложим числители и знаменатели дробей на множители.

ли. Имеем:
$$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^2+y^2\right)} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}. \quad \text{Ответ: } \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

435в) В скобках приведем дроби к общему знаменателю и сложим их. Разложим числитель последней дроби на множители, используя формулу для разности кубов чисел, и сократим ее. Полу-

чаем:
$$\left(\frac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)} + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}\right) \times$$

$$\times \frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2+a^2+b^2}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot (a-b) = \frac{2a^2}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)} \cdot (a-b) = 2.$$

Ответ: 2.

436а) Запишем первое число в виде числа с рациональным показателем степени $\sqrt[7]{3^3} = 3^{\frac{3}{7}}$. Теперь сравним числа $3^{\frac{3}{7}}$ и $3^{\frac{19}{8}}$. Так как основание степеней 3 больше единицы, то большим будет то число, у которого показатель степени больше, т.е. $3^{\frac{12}{8}} > 3^{\frac{3}{7}}$ или $3^{\frac{12}{8}} > 7\sqrt[3]{3}$. Ответ: $\sqrt[7]{3^3} < 3^{\frac{19}{8}}$.

436г) Второе число запишем в виде числа с рациональным показателем степени $\sqrt[7]{\frac{1}{32}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}$. Теперь срав-

ним числа $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$. Так как основание степеней $\frac{1}{2}$ меньше единицы, то бóльшим будет то число, у которого показатель степени меньше, т.е. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} < \sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} < \sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

437г) Используем свойства степеней. Получаем: $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19 \cdot (-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} - (5^4)^{0,25} - \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{19}{(-3)^3} = (-2^{-1})^{-4} - 5^1 - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{19}{27} = 2^4 - 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} - \frac{19}{27} = 16 - 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{19}{27} = 11 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 10$. Ответ: 10.

438б) Запишем все числа в виде степеней с рациональными показателями, используем формулы сокращенного умножения.

Получаем: $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}}}{1 - x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \times$
 $\times \left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}} - 1)}{1 - x^{\frac{1}{2}}} + x^{-\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(\left(1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$
 $= \left(-x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}} =$
 $= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

438г) Используем формулы сокращенного умножения и упрости-

тим выражение: $\left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{m^3 + 2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m}\right) =$
 $= \left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{m^3 + (\sqrt{2})^3}\right) \cdot \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2}{2m} = \left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{(m + \sqrt{2})(m^2 - \sqrt{2}m + 2)}\right) \times$
 $\times \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2}{2m} = \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2 - m^2 - 4}{(m + \sqrt{2})(m^2 - \sqrt{2}m + 2)} \cdot \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2}{2m} =$
 $= \frac{(-\sqrt{2}m - 2)(m^2 - \sqrt{2}m + 2)}{(m + \sqrt{2})(m^2 - \sqrt{2}m + 2) \cdot 2m} = \frac{-\sqrt{2}(m + \sqrt{2})}{(m + \sqrt{2}) \cdot 2m} = -\frac{1}{\sqrt{2}m}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2m}}$.

439б) Используем свойства степеней. Получаем: $\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a} = (a^2 \cdot a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}}$. Ответ: $a^{\frac{3}{4}}$.

439г) Используем свойства степеней. Имеем: $\frac{1}{3} \cdot 4 \sqrt[3]{27^3 x} = \frac{1}{3} (27 \cdot x^{\frac{1}{3}})^4 = 3^{-1} (3^3)^4 x^{\frac{4}{3}} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{12}{3}} x^{\frac{4}{3}} = 3^{-1} \cdot 3^4 x^{\frac{4}{3}} = 3^3 x^{\frac{4}{3}}$. Ответ: $3^3 x^{\frac{4}{3}}$.

440б) Учитывая свойства степеней, представим выражение $a^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{2}{5}}$ в виде корня: $a^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} : \sqrt[5]{b^{\frac{2}{5}}} = \sqrt[15]{a^{\frac{2}{3} \cdot 5}} : \sqrt[15]{b^{\frac{2}{5} \cdot 3}} = \sqrt[15]{a^{\frac{10}{3}}} : \sqrt[15]{b^{\frac{6}{5}}} = \sqrt[15]{a^{\frac{10}{3}} b^{-\frac{6}{5}}}$. Ответ: $\sqrt[15]{\frac{a^{\frac{10}{3}}}{b^{\frac{6}{5}}}}$.

441а) Представим данные числа в виде степеней числа 3. Получаем: $(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$ и $3 \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = (3^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (3^{-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{5}{12}}$. Видно, что данные числа равны. Ответ: $(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = 3 \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

442а) Выражение $(-3)^{-\frac{1}{4}}$ не имеет смысла, т.к. степень с рациональным показателем a^r определена только при положительном основании a . Ответ: не имеет смысла.

443а) Степень $(x+1)^{-\frac{2}{7}}$ с рациональным основанием определена только при положительном основании, т.е. $x+1 > 0$, откуда $x > -1$ или $x \in (-1; \infty)$. Ответ: $(-1; \infty)$.

444в) Степень $(a^8)^{\frac{1}{8}}$ определена при $a^8 > 0$, т.е. при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Получаем, используя свойства степеней, $(a^8)^{\frac{1}{8}} = |a|$. По условию задачи получаем равенство $|a| = \frac{1}{|a|}$ или $|a|^2 = 1$ или $a^2 = 1$, откуда $a = \pm 1$. Ответ: ± 1 .

§ 10. Показательная и логарифмическая функции

446б) По свойству показательной функции при всех x величина $(\frac{1}{3})^x > 0$. К обеим частям этого неравенства прибавим число 1 и получим $(\frac{1}{3})^x + 1 > 0 + 1$, т.е. $y > 1$. Следовательно, область значений данной функции $y \in (1; \infty)$. Ответ: $(1; \infty)$.

447а) Число 1 представим в виде $1 = \left(\frac{4}{7}\right)^0$ и сравним числа $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ и $\left(\frac{4}{7}\right)^0$. Так как основание $\frac{4}{7}$ меньше единицы, то функция $\left(\frac{4}{7}\right)^x$ убывающая. Так как $-\frac{\sqrt{5}}{2} < 0$, то степени связаны неравенством противоположного знака, т.е. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > \left(\frac{4}{7}\right)^0$ или $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$.

Ответ: $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$.

447г) Показатели степеней связаны неравенством $\frac{\sqrt{5}}{6} > \frac{1}{3}$. Так как основание степени 0,3 меньше единицы, то показательная функция $0,3^x$ убывающая. Поэтому данные степени числа 0,3 связаны неравенством противоположного знака, т.е. $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,3^{\frac{1}{3}}$.

Ответ: $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,3^{\frac{1}{3}}$.

448г) Используем свойства степеней и получим: $(3^{\sqrt[3]{8}})^{\sqrt[4]{4}} = 3^{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[4]{4}} = 3^{\sqrt[3]{8 \cdot 4}} = 3^{\sqrt[3]{32}} = 3^{\sqrt[3]{2^5}} = 3^2 = 9$. Ответ: 9.

449г) Учтем свойства степеней и получим: $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} \cdot \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}} = y^{\sqrt{2} + 1,3} \cdot y^{\sqrt{2}} = y^{1,3}$. Ответ: $y^{1,3}$.

450а) Используем формулу для разности квадратов чисел.

Тогда получаем: $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}})^2 - (b^{\sqrt{3}})^2}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}} + a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} = \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$.

Ответ: $\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$.

450г) Используем формулу для квадрата суммы и разности двух чисел, а также учтем свойства степеней. Получаем:

$\sqrt{(x^\pi + y^\pi)^2 - (4^{\frac{1}{\pi}} xy)^\pi} = \sqrt{x^{2\pi} + 2x^\pi y^\pi + y^{2\pi} - 4x^\pi y^\pi} = \sqrt{x^{2\pi} - 2x^\pi y^\pi + y^{2\pi}} = \sqrt{(x^\pi - y^\pi)^2} = |x^\pi - y^\pi|$. Ответ: $|x^\pi - y^\pi|$.

4536) Для функции $y = (\sqrt{5} - 2)^x$ основание $(\sqrt{5} - 2)$ меньше единицы. Поэтому эта функция убывающая. Функцию $y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$ запишем в виде $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^x$. Основание этой функции $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ больше единицы. Поэтому эта функция возрастающая.

Ответ: $y = (\sqrt{5} - 2)^x$ — убывающая, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^x$ — возрастающая.

4546) Найдем область значений функции $y = |2^x - 2|$. По свойству показательной функции $2^x > 0$. Вычтем из обеих частей неравенства число 2 и получим $2^x - 2 > -2$. Учитывая свойство модуля, получаем $|2^x - 2| \geq 0$, т.е. $y \geq 0$. Следовательно, область значений функции $y \in [0; \infty)$. Ответ: $[0; \infty)$.

454г) Найдем область значений функции $y = 4^{|x|}$. По свойству модуля $|x| \geq 0$. Так как основание 4 показательной функции больше единицы, то эта функция возрастающая. Поэтому степени числа 4 связаны неравенством того же знака, т.е. $4^{|x|} \geq 4^0$ или $4^{|x|} \geq 1$, т.е. $y \geq 1$. Следовательно, область значений функции $y \in [1; \infty)$.

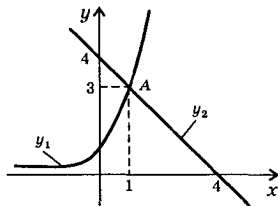
Ответ: $[1; \infty)$.

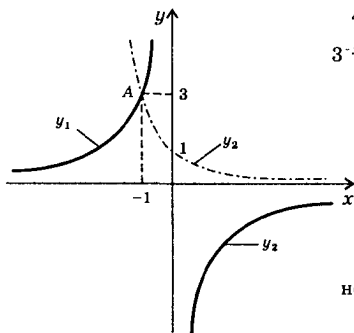
4556) Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $y = 5 + 3^{|\cos x|}$ на \mathbb{R} . Учитывая ограниченность функции косинус и неотрицательность значения модуля, имеем $0 \leq |\cos x| \leq 1$. Показательная функция с основанием 3 (большим единицы) возрастающая. Поэтому $3^0 \leq 3^{|\cos x|} \leq 3^1$ или $1 \leq 3^{|\cos x|} \leq 3$. Прибавим ко всем частям этого неравенства число 5. Получаем: $5 + 1 \leq 5 + 3^{|\cos x|} \leq 5 + 3$ или $6 \leq y \leq 8$. Следовательно, наименьшее значение функции равно 6, а наибольшее значение равно 8.

Ответ: наименьшее значение 6, наибольшее значение 8.

457а) Для решения уравнения $3^x = 4 - x$ построим графики функций $y_1 = 3^x$ и $y_2 = 4 - x$. Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке А, абсцисса которой $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ — корень данного уравнения.

Ответ: 1.





458г) Для решения уравнения

$$3^{-x} = -\frac{3}{x}$$

построим графики функций $y_1 = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y_2 = -\frac{3}{x}$.

Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке А, абсцисса которой $x = -1$. Следовательно, $x = -1$ — корень данного уравнения.

Ответ: -1 .

460б) При решении уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ запишем его части в виде степеней числа 3. Получаем: $(3^{-1})^x = 3^3$ или $3^{-x} = 3^3$. Если равны степени чисел (при одинаковом основании 3), то равны и показатели степеней: $-x = 3$, откуда $x = -3$. Ответ: -3 .

461б) Обе части уравнения $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$ запишем в виде степеней числа 2. Получаем: $8^{\frac{x-3}{2}} = 4^{\frac{2-x}{3}}$ или $(2^3)^{\frac{x-3}{2}} = (2^2)^{\frac{2-x}{3}}$ или $2^{3 \cdot \frac{x-3}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{2-x}{3}}$. Так как равны степени чисел (при одинаковом основании 2), то равны и показатели степеней: $3 \cdot \frac{x-3}{2} = 2 \cdot \frac{2-x}{3}$ или $\frac{3x-9}{2} = \frac{4-2x}{3}$. По свойству пропорции получаем: $3(3x-9) = 2(4-2x)$ или $9x-27 = 8-4x$ или $13x = 35$, откуда $x = \frac{35}{13}$. Ответ: $\frac{35}{13}$.

462б) Обе части уравнения $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ представим в виде степеней числа $\frac{1}{7}$. Получаем: $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ или $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{0,5}$. Так как равны степени чисел (при одинаковом основании $\frac{1}{7}$), то равны и показатели степеней: $2x^2 + x - 0,5 = 0,5$ или $2x^2 + x - 1 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ также будут решениями данного уравнения. Ответ: $-1; \frac{1}{2}$.

463а) При решении уравнения $7^{x-2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$ в левой части вынесем общий множитель 7^{x+1} за скобки. Получаем: $7^{x+1}(7+4) = 539$ или $7^{x+1} \cdot 11 = 539$ или $7^{x+1} = 49$ или $7^{x+1} = 7^2$. Так как равны степени чисел (при одинаковом основании 7), то равны и показатели степеней: $x+1 = 2$, откуда $x = 1$. **Ответ:** 1.

463г) Для решения уравнения $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$ в левой части вынесем общий множитель 5^{x+1} за скобки. Получаем: $5^{x+1}(3 \cdot 5^2 + 2) = 77$ или $5^{x+1}(3 \cdot 25 + 2) = 77$ или $5^{x+1} \cdot 77 = 77$ или $5^{x+1} = 1$ или $5^{x+1} = 5^0$. Так как равны степени чисел (при одинаковом основании 5), то равны и показатели степеней $x+1 = 0$, откуда $x = -1$. **Ответ:** -1.

464а) Для решения уравнения $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$ запишем его в виде $(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$ и введем новую неизвестную $t = 3^x > 0$. Получаем квадратное уравнение $t^2 - 8t - 9 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ (не подходит, т.к. $t > 0$) и $t_2 = 9$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение: $3^x = 9$ или $3^x = 3^2$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2.

464в) Уравнение $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$ запишем в виде $(6^x)^2 - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$ и введем новую неизвестную $t = 6^x > 0$. Получаем квадратное уравнение $t^2 - 4t - 12 = 0$, корни которого $t_1 = 6$ и $t_2 = -2$ (не подходит, т.к. $t > 0$). Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение $6^x = 6$, откуда $x = 1$. **Ответ:** 1.

465а) Систему уравнений $\begin{cases} 4^{x+y} = 16 \\ 4^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$ запишем в виде

$\begin{cases} 4^{x+y} = 4^2 \\ 4^{x+2y-1} = 4^0 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x+y = 2 \\ x+2y-1 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y = 2 \\ x+2y = 1 \end{cases}$. Вычтем из первого уравнения второе: $x+y-x-2y = 2-1$ или $-y = 1$, тогда $y = -1$. Из первого уравнения находим $x = 2 - y = 3$.

Ответ: (3; -1).

465в) Систему уравнений $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81} \\ 3^{x-y+2} = 27 \end{cases}$ запишем в виде

$\begin{cases} 3^{2y-x} = 3^{-4} \\ 3^{x-y+2} = 3^3 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} 2y-x = -4 \\ x-y+2 = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y-x = -4 \\ x-y = 1 \end{cases}$. Сложим уравнения системы: $2y-x+x-y = -4+1$ или $y = -3$. Из второго уравнения найдем $x = y+1 = -3+1 = -2$. **Ответ:** (-2; -3).

466а) Неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$ запишем в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

Так как основание $\frac{1}{3}$ меньше единицы, то показатели степеней

связаны неравенством противоположного знака $x \leq -3$, т.е. $x \in (-\infty; -3]$. Ответ: $(-\infty; -3]$.

4666) Обе части неравенства $(\sqrt{6})^x \leq \frac{1}{36}$ запишем в виде степени числа 3. Получаем: $(6^{\frac{1}{2}})^x \leq 6^{-2}$ или $6^{\frac{x}{2}} \leq 6^{-2}$. Так как основание степеней 6 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака $\frac{x}{2} \leq -2$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется). Получаем: $x \leq -4$ или $x \in (-\infty; -4]$. Ответ: $(-\infty; -4]$.

467а) Неравенство $4^{5-2x} \leq 0,25$ запишем в виде $4^{5-2x} \leq 4^{-1}$. Так как основание степеней 4 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $5 - 2x \leq -1$ или $5 + 1 \leq 2x$ или $6 \leq 2x$. Разделим обе части этого линейного неравенства на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется). Получаем: $3 \leq x$ или $x \in [3; \infty)$. Ответ: $[3; \infty)$.

468в) В уравнении $5\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$ вынесем в левой части общий множитель $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ за скобки. Получаем: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \times \left(5\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + 1\right) = 162$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot (5 \cdot 2^4 + 1) = 162$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot 81 = 162$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 2$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$. Так как степени (с одинаковым основанием $\frac{1}{2}$) равны, то равны и показатели степеней $x + 1 = -1$, откуда $x = -2$. Ответ: -2 .

468г) В левой части уравнения $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$ вынесем общий множитель 9^{x-2} за скобки: $9^{x-2}(5 \cdot 9^2 + 1) = 406$ или $9^{x-2} \times 406 = 406$ или $9^{x-2} = 1$ или $9^{x-2} = 9^0$. Так как степени (с одинаковым основанием 9) равны, то равны и показатели степеней $x-2 = 0$, откуда $x = 2$. Ответ: 2 .

469а) Так как $8^{x+1} \neq 0$ (по свойству показательной степени), то обе части уравнения $5^{x+1} = 8^{x+1}$ разделим на выражение 8^{x+1} . Получаем: $\frac{5^{x+1}}{8^{x+1}} = 1$ или $\left(\frac{5}{8}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^0$, откуда $x + 1 = 0$ и $x = -1$.

Ответ: -1 .

470а) Уравнение $3^x + 3^{3-x} = 12$ запишем в виде $3^x + \frac{3^3}{3^x} = 12$ или $3^x + \frac{27}{3^x} = 12$. Введем новую неизвестную $t = 3^x > 0$ и получим уравнение $t + \frac{27}{t} = 12$ или $t^2 - 12t + 27 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 3$ и $t_2 = 9 = 3^2$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $3^x = 3$ (откуда $x = 1$) и $3^x = 3^2$ (тогда $x = 2$).

Ответ: 1; 2.

470б) Уравнение $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ запишем в виде $(2^{\sqrt{x-2}})^2 + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ и введем новую неизвестную $t = 2^{\sqrt{x-2}} \geq 1$. Получаем квадратное уравнение: $t^2 + 16 = 10t$ или $t^2 - 10t + 16 = 0$, корни которого $t_1 = 2$ и $t_2 = 8 = 2^3$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $2^{\sqrt{x-2}} = 2$ (тогда $\sqrt{x-2} = 1$ или $x - 2 = 1$ и $x = 3$) и $2^{\sqrt{x-2}} = 2^3$ (откуда $\sqrt{x-2} = 3$ или $x - 2 = 9$ и $x = 11$).

Ответ: 3; 11.

471а) Систему уравнений $\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1 \end{cases}$ запишем в виде

$\begin{cases} 5^{x+y} = 5^3 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 4^0 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x + y = 3 \\ (x - y)^2 - 1 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 3 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases}$. Извлекая корень из обеих частей второго уравнения, получим две системы.

а) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Сложим уравнения системы $2x = 4$ и $x = 2$. Тогда из первого уравнения найдем $y = 3 - x = 3 - 2 = 1$.

б) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$. Сложим уравнения системы $2x = 2$ и $x = 1$. Тогда из первого уравнения найдем $y = 3 - x = 3 - 1 = 2$.

Итак, данная система уравнений имеет два решения (2; 1) и (1; 2). Ответ: (2; 1), (1; 2).

471б) Из первого уравнения системы $\begin{cases} x + y = 5 \\ 4^x + 4^y = 80 \end{cases}$ выразим $y = 5 - x$ и подставим во второе уравнение: $4^x + 4^{5-x} = 80$. Запишем его в виде $4^x + \frac{4^5}{4^x} = 80$ и введем новую неизвестную $t = 4^x > 0$. Получаем уравнение $t + \frac{1024}{t} = 80$ или $t^2 - 80t + 1024 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 16$ и $t_2 = 64$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $4^x = 16$ (корень $x = 2$) и $4^x = 64$ (корень $x = 3$). Теперь найдем $y = 5 - x$. Для $x = 2$ получаем $y = 3$, для $x = 3$ имеем $y = 2$. Ответ: (2; 3), (3; 2).

472б) Запишем обе части неравенства $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}$ в

виде степеней числа 5: $(5^{-2})^{2x} < (5^{\frac{1}{2}})^{x^2+3,75}$ или $5^{-4x} < 5^{\frac{x^2+3,75}{2}}$. Так как основание степеней 5 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $-4x < \frac{x^2+3,75}{2}$ или $0 < x^2 + 8x + 3,75$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -7,5$ и $x_2 = -0,5$. Тогда решение квадратного неравенства $x \in (-\infty; -7,5) \cup (-0,5; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -7,5) \cup (-0,5; \infty)$.

472в) Правую часть неравенства $3^{4x+3} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$ представим в

виде степени числа 3: $3^{4x+3} \leq (3^{-2})^{\frac{x^2}{2}}$ или $3^{4x-3} \leq 3^{-x^2}$. Так как основание степеней 3 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $4x + 3 \leq -x^2$ или $x^2 + 4x + 3 \leq 0$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Тогда решение квадратного неравенства $x \in [-3; -1]$. Ответ: $[-3; -1]$.

473б) При решении неравенства $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$ в левой части вынесем общий множитель 2^{2x-3} за скобки: $2^{2x-3} \times (2^2 + 2^1 + 1) < 448$ или $2^{2x-3} \cdot 7 < 448$ или $2^{2x-3} < 64$ или $2^{2x-3} < 2^6$. Так как основание степеней 2 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $2x - 3 < 6$ или $2x < 9$, откуда $x < 4,5$, т.е. $x \in (-\infty; 4,5)$. Ответ: $(-\infty; 4,5)$.

473в) В левой части неравенства $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$ вынесем общий множитель $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ за скобки: $\left(\frac{4}{3}\right)^x \left(\frac{4}{3} - 1\right) > \frac{3}{16}$ или $\left(\frac{4}{3}\right)^x \times \frac{1}{3} > \frac{3}{16}$. Умножим обе части неравенства на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $\left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{9}{16}$ или $\left(\frac{4}{3}\right)^x > \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$. Так как основание степеней $\frac{4}{3}$ больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $x > -2$ или $x \in (-2; \infty)$.

Ответ: $(-2; \infty)$.

474б) Неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$ запишем в виде

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$ или $3^{-2x} \cdot 3 - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$ или $3 \cdot (3^{-x})^2 - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$. Введем новую неизвестную $t = 3^{-x} > 0$ и получим квадратное неравенство $3t^2 - 10t + 3 < 0$. Корни этого квадратного трехчлена $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = 3$. Поэтому решение неравенства $\frac{1}{3} < t < 3$.

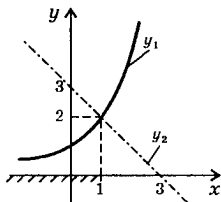
Вернемся к старой неизвестной x . Имеем $3^{-1} < 3^{-x} < 3$. Так как основание степеней 3 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака $-1 < -x < 1$. Умножим все части неравенства на отрицательное число (-1) . При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получаем: $1 > x > -1$ или $x \in (-1; 1)$.

Ответ: $(-1; 1)$.

474г) Запишем неравенство $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$ в виде $(6^{-x})^2 -$

$- 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$ и введем новую неизвестную $t = 6^{-x} > 0$. Получаем квадратное неравенство $t^2 - 5t - 6 \leq 0$, решение которого $-1 \leq t \leq 6$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем неравенство $-1 \leq 6^{-x} \leq 6$. Так как $6^{-x} > 0$ при всех x , то левая часть неравенства выполнена. Решим неравенство $6^{-x} \leq 6$. Так как основание степеней 6 больше единицы, то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $-x \leq 1$. Умножим обе части на отрицательное число (-1) . При этом знак неравенства меняется на противоположный: $x \geq -1$ или $x \in [-1; \infty)$. **Ответ:** $[-1; \infty)$.

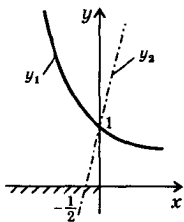
475а) Для решения неравенства $2^x \leq 3 - x$ построим графики функций $y_1 = 2^x$ и $y_2 = 3 - x$. Необходимо определить значения x , при которых $y_1 \leq y_2$. Графики функций y_1 и y_2 пересекаются в точке с абсциссой $x = 1$. Из рисунка видно, что значения первой функции не больше значений второй при $x \leq 1$. Поэтому решение данного неравенства $x \in (-\infty; 1]$.



Ответ: $(-\infty; 1]$.

475в) Для решения неравенства $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$ построим графики

функций $y_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y_2 = 2x + 1$. Необходимо определить значения x , при которых $y_1 \geq y_2$. Графики функций y_1 и y_2 пересекаются в точ-



ке с абсциссой $x = 0$. Из рисунка видно, что значения первой функции не меньше значений второй при $x \leq 0$. Поэтому решение данного неравенства $x \in (-\infty; 0]$.

Ответ: $(-\infty; 0]$.

476а) По определению логарифма $\log_3 9 = 2$, т.к. $3^2 = 9$. Ответ: 2.

477в) По определению логарифма $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$, т.к. $32^{\frac{1}{5}} = 2$.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

478б) По определению логарифма $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$, т.к. $32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$. Ответ: $\frac{3}{5}$.

479а) По определению логарифма $\log_3 \frac{1}{81}$ — степень, в которую надо возвести основание 3, чтобы получить число $\frac{1}{81}$. Проверим это: $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$. Ответ: проверено.

481б) По определению логарифма $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27$ — степень, в которую надо возвести основание $\sqrt{\frac{1}{3}}$, чтобы получить число 27. Проверим это: $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{-6} = \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6} = 3^3 = 27$. Ответ: проверено.

483б) Используя определение логарифма (степень, в которую надо возвести основание 8, чтобы получить данное число), найдем: $\log_8 64 = 2$, т.к. $8^2 = 64$; $\log_8 \frac{1}{8} = -1$, т.к. $8^{-1} = \frac{1}{8}$ и $\log_8 2 = \frac{1}{3}$, т.к. $8^{\frac{1}{3}} = 2$. Ответ: 2; -1; $\frac{1}{3}$.

484б) Для решения уравнения $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$ используем определение логарифма (степень, в которую надо возвести основание $\frac{1}{6}$, чтобы получить число x). Тогда имеем: $x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = (6^{-1})^{-3} = 6^3 = 216$. Ответ: 216.

486б) Для решения уравнения $\log_x \frac{1}{16} = 2$ воспользуемся определением логарифма (степень, в которую надо возвести основание x , чтобы получить число $\frac{1}{16}$). Тогда имеем: $x^2 = \frac{1}{16}$, откуда $x = \pm \frac{1}{4}$. Однако по определению логарифма основанием не может быть отрицательное число. Поэтому остается одно значение $x = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

487а) Запишем данные числа в виде логарифма с основанием 4, используя определение логарифма. Пусть $2 = \log_4 x$. Тогда по определению $x = 4^2 = 16$ и можно записать $2 = \log_4 16$. Аналогично запишем оставшиеся числа: $\frac{1}{2} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$; $1 = \log_4 4^1 = \log_4 4$ и $0 = \log_4 4^0 = \log_4 1$. **Ответ:** $\log_4 16$; $\log_4 2$; $\log_4 4$; $\log_4 1$.

488б) Используя основное логарифмическое тождество, запишем: $\pi^{\log_\pi 5,2} = 5,2$. **Ответ:** 5,2.

489г) Запишем выражение $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2}$ в виде $\left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 2}$. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, получаем: $\frac{1}{7} \cdot 2 = \frac{2}{7}$. **Ответ:** $\frac{2}{7}$.

490в) Используя свойства степеней, данное выражение запишем в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^{4 \log_{\frac{1}{2}} 3} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}\right)^4 = 3^4 = 81$. **Ответ:** 81.

491б) Используя свойства степеней, сначала упростим данное

выражение: $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2} = \left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{6}}}\right)^{-0,2} = \frac{(a^{10})^{0,2}}{\left(b^{\frac{5}{6}}\right)^{-0,2}} = \frac{a^{-2}}{b^{-\frac{1}{6}}} = a^{-2} b^{\frac{1}{6}}$. Теперь най-

дем логарифм по основанию 3, пользуясь свойствами логарифмов:

$$\log_3 \left(a^{-2} b^{\frac{1}{6}} \right) = \log_3 a^{-2} + \log_3 b^{\frac{1}{6}} = -2 \log_3 a + \frac{1}{6} \log_3 b.$$

Ответ: $-2 \log_3 a - \frac{1}{6} \log_3 b$.

492в) Запишем данное выражение $\sqrt[3]{10} a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}$ в виде $10^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}$. Используя свойства логарифмов, найдем десятичный логарифм этого выражения:

$$\lg\left(10^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}\right) = \lg 10^{\frac{1}{3}} + \lg a^{\frac{1}{3}} + \lg b^4 + \lg c^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \lg 10 + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c. \text{ Учтено, что } \lg 10 = 1.$$

Ответ: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c.$

494а) Число 72 разложим на простые множители $72 = 2^3 \cdot 3^2$ и преобразуем число $\log_5 72$, пользуясь свойствами логарифмов. Получаем: $\log_5 72 = \log_5 (2^3 \cdot 3^2) = \log_5 2^3 + \log_5 3^2 = 3 \log_5 2 + 2 \log_5 3$. Так как по условию $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$, то получаем $\log_5 72 = 3a + 2b$. **Ответ:** $3a + 2b$.

495б) Известно, что разность логарифмов чисел равна логарифму частного этих чисел. Поэтому получаем: $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2 \left(7 : \frac{7}{16}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$. **Ответ:** 4.

496а) Воспользуемся свойствами логарифмов. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} &= \frac{\lg 2^3 + \lg (2 \cdot 3^2)}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{3 \lg 2 + \lg 2 + \lg 3^2}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{4 \lg 2 + 2 \lg 3}{2 \lg 2 + \lg 3} \\ &= \frac{2(2 \lg 2 + \lg 3)}{2 \lg 2 + \lg 3} = 2. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 2.$$

497а) Для вычисления x преобразуем правую часть равенства, используя свойства логарифмов. Получаем: $\log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3 = \log_6 2^3 + \log_6 25^{0,5} - \log_6 3^2 = \log_6 8 + \log_6 5 - \log_6 9 = \log_6 \frac{8 \cdot 5}{9} = \log_6 \frac{40}{9}$. Имеем равенство $\log_6 x = \log_6 \frac{40}{9}$. Так как равны логарифмы (по одинаковому основанию 6) чисел, то равны и сами числа $x = \frac{40}{9}$. **Ответ:** $\frac{40}{9}$.

497б) Используя свойства логарифмов, преобразуем правую часть данного равенства: $\lg x = \frac{1}{2} \lg 5a - 3 \lg b + 4 \lg c = \lg (5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4 = \lg \frac{(5a)^{\frac{1}{2}} \cdot c^4}{b^3} = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$. Имеем равенство $\lg x = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$. Так как равны логарифмы (по одинаковому основанию 10), то равны и сами числа $x = \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$. **Ответ:** $\frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$.

498а) В неравенстве $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$ в первом логарифме перейдем к основанию 3: $\log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{2}} = \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}}$. Тогда неравенство имеет вид: $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 \frac{1}{2} < -2$. Обозначим $a = \log_3 \frac{1}{2}$ и запишем неравенство в виде: $\frac{1}{a} + a < -2$ или $\frac{1}{a} + a + 2 < 0$ или $\frac{1 + a^2 + 2a}{a} < 0$ или $\frac{(a+1)^2}{a} < 0$. Так как $a \neq -1$, то числитель дроби $(a+1)^2$ положительный. Число $a = \log_3 \frac{1}{2}$ отрицательно. Поэтому неравенство $\frac{(a+1)^2}{a} < 0$ или $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$ верное. **Ответ:** доказано.

498б) Для доказательства равенства $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$ преобразуем его части, используя основное логарифмическое тождество и свойства степеней. Запишем число 4 в виде $4 = 5^{\log_5 4}$, тогда левая часть имеет вид $4^{\log_5 7} = (5^{\log_5 4})^{\log_5 7} = 5^{\log_5 4 \cdot \log_5 7}$. Число 7 запишем в виде $7 = 5^{\log_5 7}$, тогда правая часть $7^{\log_5 4} = (5^{\log_5 7})^{\log_5 4} = 5^{\log_5 7 \cdot \log_5 4}$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. **Ответ:** доказано.

500а) Область определения выражения $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x_2)$ задается неравенством $6+x-x^2 > 0$ (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Неравенство запишем в виде $0 > x^2 - x - 6$. Его решение $x \in (-2; 3)$. **Ответ:** $(-2; 3)$.

500б) Область определения выражения $\lg \frac{2x+5}{x-1}$ задается неравенством $\frac{2x+5}{x-1} > 0$ (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Решим это неравенство, например, методом интервалов. Получаем $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (1; \infty)$.



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

501a) Так как основание логарифмов 2 больше единицы, то логарифмическая функция $y = \log_2 x$ возрастающая. Данные числа связаны неравенством $3,8 < 4,7$. Поэтому логарифмы этих чисел связаны неравенством того же знака: $\log_2 3,8 < \log_2 4,7$.

Ответ: $\log_2 3,8 < \log_2 4,7$.

501б) Так как основание логарифмов $\frac{1}{3}$ меньше единицы, то логарифмическая функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ убывающая. Данные числа связаны неравенством $0,15 < 0,2$. Поэтому логарифмы этих чисел связаны неравенством противоположного знака: $\log_{\frac{1}{3}} 0,15 > \log_{\frac{1}{3}} 0,2$.

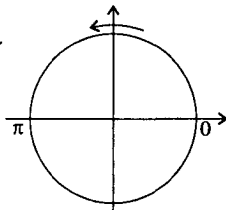
Ответ: $\log_{\frac{1}{3}} 0,15 > \log_{\frac{1}{3}} 0,2$.

502a) Число 1 запишем в виде $1 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$. Теперь сравним числа $\log_{\sqrt{2}} 3$ и $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$. Так как основание логарифмов $\sqrt{2}$ больше единицы, то логарифмическая функция $y = \log_{\sqrt{2}} x$ возрастающая. Числа связаны неравенством $3 > \sqrt{2}$. Поэтому логарифмы этих чисел связаны неравенством того же знака: $\log_{\sqrt{2}} 3 > \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$ или $\log_{\sqrt{2}} 3 > 1$.

Ответ: $\log_{\sqrt{2}} 3 > 1$.

503a) Оценим числа $\log_2 10$ и $\log_5 30$. Основания логарифмов 2 и 5 больше единицы, поэтому соответствующие логарифмические функции возрастающие. Число 10 оценим степенями числа 2: $2^3 < 10 < 2^4$, тогда $\log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^4$ или $3 < \log_2 10 < 4$. Число 30 оценим степенями числа 5: $5^2 < 30 < 5^3$, поэтому $\log_5 5^2 < \log_5 30 < \log_5 5^3$ или $2 < \log_5 30 < 3$. Получили, что $\log_2 10 > 3$ и $\log_5 30 < 3$. Следовательно, $\log_5 30 < \log_2 10$.

Ответ: $\log_5 30 < \log_2 10$.



505a) Область определения выражения $\log_2 \sin x$ задается неравенством $\sin x > 0$. Видно, что это неравенство выполнено для углов, расположенных в первой и второй четвертях. Поэтому решение неравенства $x \in (2\pi l; \pi + 2\pi l)$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in (2\pi l; \pi + 2\pi l)$, где $l \in \mathbb{Z}$.

505г) Область определения выражения $\lg(1 - 3^x)$ задается неравенством $1 - 3^x > 0$ (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Решим это неравенство: $1 > 3^x$ или $3^0 > 3^x$. Так как основание степеней 3 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $0 > x$ или $x \in (-\infty; 0)$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

506а) Преобразуем данное выражение, используя свойства логарифмов и формулу для разности кубов двух чисел. Имеем:

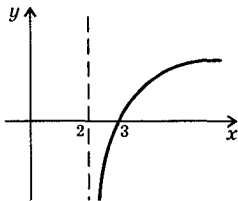
$$\log_4(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) + \log_4(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} - \sqrt[3]{9}) = \log_4 \left[(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) \left((\sqrt[3]{7})^2 + \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2 \right) \right] = \log_4 \left[(\sqrt[3]{7})^3 - (\sqrt[3]{3})^3 \right] = \log_4(7 - 3) = \log_4 4 = 1.$$

Ответ: 1.

506в) Преобразуем данное выражение, используя свойства логарифмов: $\lg \operatorname{tg} 4 + \lg \operatorname{ctg} 4 = \lg (\operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 4) = \lg 1 = 0$. **Ответ:** 0.

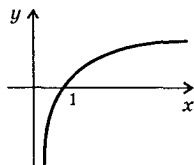
507а) График функции $y = \log_3(x - 2)$ получается из графика функции $y = \log_3 x$ его смещением на две единицы вправо вдоль оси абсцисс.

Ответ: см. график.



507б) Запишем функцию $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ в виде $y = -\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\frac{\log_2 x}{-1} = \log_2 x$. Таким образом, надо построить хорошо известный график $y = \log_2 x$.

Ответ: см. график.



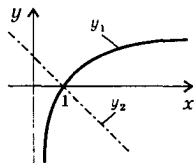
508б) Преобразуем правую часть уравнения, используя свойства логарифмов: $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{0,2} 35 - 2 \log_{0,2} 25\sqrt{7} = \log_{0,2} 35 -$

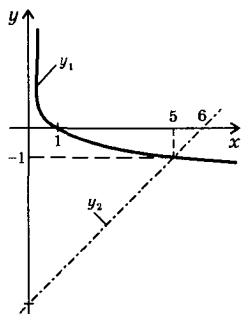
$$- \log_{0,2} (25\sqrt{7})^2 = \log_{0,2} \frac{35}{(25\sqrt{7})^2} = \log_{0,2} \frac{35}{25^2 \cdot 7} = \log_{0,2} \frac{5 \cdot 7}{(5^2)^2 \cdot 7} =$$

$$= \log_{0,2} \frac{5}{5^4} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \right)^3 = 3. \text{ Получили } \log_{\frac{1}{2}} x = 3, \text{ тогда по определению логарифма } x = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

509а) Для решения уравнения $\lg x = 1 - x$ построим графики функций $y_1 = \lg x$ и $y_2 = 1 - x$. Видно, что графики пересекаются в единственной точке $(1; 0)$. Поэтому корень данного уравнения $x = 1$. **Ответ:** 1.





509в) Для решения уравнения

$\log_5 x = x - 6$ построим графики функций $y_1 = \log_5 x$ и $y_2 = x - 6$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x = 5$. Следовательно, корень данного уравнения $x = 5$.

Ответ: 5.

511а) Функция $f(x) = \log_4 x$ убывающая, т.к. основание логарифма меньше единицы. Поэтому на промежутке $I = [1; 4]$ функция принимает наибольшее

значение на левой границе промежутка $y_{\text{наиб}} = f(1) = \log_4 1 = 0$. Наименьшее значение функция принимает на правой границе промежутка $y_{\text{наим}} = f(4) = \log_4 4 = -1$. Ответ: 0; -1.

512в) При решении уравнения $2^x = 10$ учтем определение логарифма и получим $x = \log_2 10$. Ответ: $\log_2 10$.

513б) Для решения уравнения $\log_{0,4} x = -1$ воспользуемся определением логарифма $x = 0,4^{-1} = \frac{1}{0,4} = 2,5$. Ответ: 2,5.

514а) При решении уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4) = -2$ используем определение логарифма. Имеем: $2x - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ или $2x - 4 = 4$, откуда $x = 4$. Ответ: 4.

514б) Так как равны логарифмы величин $\log_{\pi}(x^2 + 2x + 3) = \log_{\pi} 6$ по одному основанию, то равны и сами величины: $x^2 + 2x + 3 = 6$ или $x^2 + 2x - 3 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Ответ: 1; -3.

515б) Для решения уравнения $5^{x^2} = 7$ используем определение логарифма и получим $x^2 = \log_5 7$, тогда $x = \pm \sqrt{\log_5 7}$.

Ответ: $\pm \sqrt{\log_5 7}$.

516а) При решении неравенства $\log_3 x > 2$ запишем ОДЗ: $x > 0$ (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Правую часть неравенства также представим в виде логарифма по основанию 3: $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$. Имеем неравенство $\log_3 x > \log_3 9$. Так как основание логарифмов 3 больше единицы (логарифмическая

функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака $x > 9$. С учетом ОДЗ получаем решение неравенства $x \in (9; \infty)$. Ответ: $(9; \infty)$.

5166) Для неравенства $\log_{0,5} x > -2$ запишем ОДЗ: $x > 0$ (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Правую часть неравенства также представим в виде логарифма по основанию 0,5: $-2 = \log_{0,5} 0,5^{-2} = \log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0,5} 4$. Имеем неравенство $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 4$. Так как основание логарифмов 0,5 меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака $x < 4$. С учетом ОДЗ получаем решение данного неравенства $x \in (0; 4)$.

Ответ: $(0; 4)$.

5176) Запишем ОДЗ неравенства $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1$. ОДЗ задается неравенством $3-2x > 0$, откуда $x < \frac{3}{2}$. Представим число -1 в виде $-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$. Получаем неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 3$. Так как основание логарифмов $\frac{1}{3}$ меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то аргументы логарифмов связаны неравенством противоположного знака: $3-2x < 3$, откуда $0 < 2x$ и $x > 0$. С учетом ОДЗ получаем решение данного неравенства $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

518а) Для уравнения $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$ выпишем ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Используя свойства логарифмов, преобразуем правую часть уравнения: $\log_a x = \log_a 3^2 + \log_a 5 = \log_a 9 + \log_a 5 = \log_a (9 \cdot 5) = \log_a 45$. Так как равны логарифмы величин (по одинаковому основанию a), то равны и сами величины $x = 45$. Учитывая ОДЗ запишем ответ (принято записывать в порядке возрастания параметра a).

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ $x \in \emptyset$, при $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ $x = 45$.

5186) Для уравнения $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$ запишем ОДЗ, которая задается условиями $x-9 > 0$ и $2x-1 > 0$, откуда $x > 9$. Используя свойства логарифмов, получаем уравнение $\lg[(x-9)(2x-1)] = 2 = \lg 100$. Так как равны логарифмы величин, то равны и сами величины $(x-9)(2x-1) = 100$. Решим это уравнение: $2x^2 - x - 18x + 9 = 100$ или $2x^2 - 19x - 91 = 0$. Корни уравнения $x_{1,2} =$

$= \frac{19 \pm \sqrt{361 + 4 \cdot 2 \cdot 91}}{4} = \frac{19 \pm \sqrt{1089}}{4} = \frac{19 \pm 33}{4}$, т.е. $x_1 = 13$ и $x_2 = -\frac{7}{2}$.
В ОДЗ входит только решение $x = 13$. **Ответ:** 13.

519а) Найдем ОДЗ уравнения $\frac{1}{2} \log_2(x-4) + \frac{1}{2} \log_2(2x-1) = \log_2 3$, которая задается неравенствами $x-4 > 0$ и $2x-1 > 0$, откуда $x > 4$. Умножим обе части уравнения на 2 и используем свойства логарифмов. Получаем: $\log_2(x-4) + \log_2(2x-1) = 2\log_2 3$ или $\log_2[(x-4)(2x-1)] = \log_2 3^2$, откуда $(x-4)(2x-1) = 9$. Решим это уравнение: $2x^2 - x - 8x + 4 = 9$ или $2x^2 - 9x - 5 = 0$. Корни квадратного уравнения $x_1 = 5$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$. В ОДЗ входит только решение $x = 5$. **Ответ:** 5.

520а) Уравнение $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0$ запишем в виде $\log_4^2 x + 0,5 \log_4 x - 1,5 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \log_4 x$ и получим квадратное уравнение: $t^2 + 0,5t - 1,5 = 0$ или $2t^2 + t - 3 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\log_4 x = 1$ (откуда $x = 4^1 = 4$) и $\log_4 x = -\frac{3}{2}$ (тогда $x = 4^{-\frac{3}{2}} = (2^2)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$). **Ответ:** 4; $\frac{1}{8}$.

521а) Преобразуем второе уравнение системы $\begin{cases} x + y = 7 \\ \lg x + \lg y = 1 \end{cases}$.
Получаем: $\lg(x \cdot y) = \lg 10$, откуда $xy = 10$. Тогда система имеет вид $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $y = 7 - x$ и подставим во второе уравнение: $x(7 - x) = 10$ или $0 = x^2 - 7x + 10$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ (тогда $y_1 = 7 - x_1 = 5$) и $x_2 = 5$ (тогда $y_2 = 7 - x_2 = 2$). Итак, система имеет два решения (2; 5) и (5; 2).
Ответ: (2; 5), (5; 2).

521б) Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения системы $\begin{cases} \log_4(x+y) = 2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7 \end{cases}$. Получаем:
 $\begin{cases} \log_4(x+y) = \log_4 4^2 \\ \log_3(xy) = \log_3 9 + \log_3 7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y = 16 \\ \log_3(xy) = \log_3(9 \cdot 7) \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y = 16 \\ xy = 63 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $y = 16 - x$ и подставим во второе уравнение: $x(16 - x) = 63$ или $0 = x^2 - 16x + 63$. Корни

этого квадратного уравнения $x_1 = 7$ (тогда $y_1 = 16 - x_1 = 9$) и $x_2 = 9$ (тогда $y_2 = 16 - x_2 = 7$). Система имеет два решения (7; 9) и (9; 7).

Ответ: (7; 9), (9; 7).

522а) Для решения уравнения $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1$ введем новую неизвестную $y = \lg x + 1$. Тогда уравнение имеет вид: $\frac{1}{y} + \frac{6}{y+4} = 1$ или $y + 4 + 6y = y(y + 4)$ или $0 = y^2 - 3y - 4$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = -1$ и $y_2 = 4$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем два уравнения.

а) $\lg x + 1 = -1$, откуда $\lg x = -2$ и по определению логарифма $x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$.

б) $\lg x + 1 = 4$, тогда $\lg x = 3$ и $x = 10^3 = 1000$.

Ответ: $\frac{1}{100}$; 1000.

522б) Учтем, что логарифм частного равен разности логарифмов числителя и знаменателя. Преобразуем уравнение $\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$. Получаем: $\log_2 x - \log_2 4 = \frac{15}{\log_2 x - \log_2 8 - 1}$ или $\log_2 x - 2 = \frac{15}{\log_2 x - 3 - 1}$ или $\log_2 x - 2 = \frac{15}{\log_2 x - 4}$. Введем новую неизвестную $y = \log_2 x$. Имеем уравнение: $y - 2 = \frac{15}{y - 4}$ или $y^2 - 6y + 8 = 15$ или $y^2 - 6y - 7 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = -1$ и $y_2 = 7$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения.

а) $\log_2 x = -1$, откуда $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ (по определению логарифма).

б) $\log_2 x = 7$, тогда $x = 2^7 = 128$.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 128.

523а) Для уравнения $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$ запишем ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$. В логарифмах перейдем к новому основанию a .

Получаем: $\log_a x = \frac{\log_a 2}{\log_a \sqrt{a}} + \frac{\log_a 3}{\log_a \frac{1}{a}}$ или $\log_a x = \frac{\log_a 2}{\frac{1}{2}} + \frac{\log_a 3}{-1}$ или $\log_a x = 2\log_a 2 - \log_a 3$ или $\log_a x = \log_a 2^2 - \log_a 3$ или $\log_a x = \log_a \frac{4}{3}$, откуда $x = \frac{4}{3}$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ решений нет; при $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ $x = \frac{4}{3}$.

523б) Для решения уравнения $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$ в логарифмах перейдем к основанию 2. Получаем: $\frac{\log_2 2}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{7}{6} = 0$ или $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{2} + \frac{7}{6} = 0$. Введем новую неизвестную $y = \log_2 x$ и получим уравнение: $\frac{1}{y} - \frac{y}{2} + \frac{7}{6} = 0$ или $6 - 3y^2 + 7y = 0$ или $0 = 3y^2 - 7y + 6$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 3$ и $y_2 = -\frac{2}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения.

а) $\log_2 x = 3$, откуда $x = 2^3 = 8$ (по определению логарифма).

б) $\log_2 x = -\frac{2}{3}$, тогда $x = 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2}$.

Ответ: 8; $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

524а) При решении уравнения $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ используем определение логарифма: $9 - 2^x = 2^{3-x}$ или $9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$. Введем новую неизвестную $y = 2^x > 0$ и получим уравнение: $9 - y = \frac{8}{y}$ или $y^2 - 9y + 8 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = 8$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения.

а) $2^x = 1$ или $2^x = 2^0$, откуда $x = 0$.

б) $2^x = 8$ или $2^x = 2^3$, тогда $x = 3$.

Ответ: 0; 3.

524б) Для решения уравнения $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$ введем новую неизвестную $y = 5^{x+3} > 0$ и получим уравнение $\log_2(y^2 - 1) = \log_2 2^2 + \log_2(y + 1)$ или $\log_2(y^2 - 1) = \log_2[4(y + 1)]$, откуда $y^2 - 1 = 4(y + 1)$ или $(y - 1)(y + 1) = 4(y + 1)$. Так как $y > 0$, то величина $y + 1 \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $(y + 1)$ и получим $y - 1 = 4$, откуда $y = 5$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение $5^{x+3} = 5$, откуда $x + 3 = 1$ и $x = -2$. Ответ: -2.

525а) ОДЗ неравенства $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1)$ определяется условиями $2x - 3 > 0$ и $x + 1 > 0$. Так как основание логарифмов 10 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака $2x - 3 > x + 1$. С учетом этого неравенства понятно, что если $x + 1 > 0$, то тем более $2x - 3 > 0$. Поэтому данное логарифмическое неравенство эквивалентно системе линейных неравенств:
$$\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$
 или $\begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases}$, откуда $x > 4$ или $x \in (4; \infty)$. Ответ: (4; ∞).

5256) ОДЗ неравенства $\log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1)$ определяется условиями $2x - 4 > 0$ и $x + 1 > 0$. Так как основание логарифмов 0,3 меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака $2x - 4 < x + 1$. С учетом этого неравенства понятно, что если $2x - 4 > 0$, то тем более $x + 1 > 0$. Поэтому данное логарифмическое неравенство эквивалентно системе линейных нера-

$$\text{венств } \begin{cases} 2x - 4 < x + 1 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 5 \\ x > 2 \end{cases}, \text{ откуда } 2 < x < 5 \text{ или } x \in (2; 5).$$

Ответ: (2; 5).

526а) Запишем ОДЗ неравенства $\log_{0,5} x > \log_2(3 - 2x)$, которая определяется условиями: $x > 0$ и $3 - 2x > 0$, откуда $0 < x < \frac{3}{2}$.

В данном неравенстве в логарифме перейдем к основанию 2. Име-

ем: $\frac{\log_2 x}{\log_2 0,5} > \log_2(3 - 2x)$ или $\frac{\log_2 x}{-1} > \log_2(3 - 2x)$ или $0 >$

$> \log_2 x + \log_2(3 - 2x)$ или $\log_2 1 > \log_2[x(3 - 2x)]$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака: $1 > x(3 - 2x)$ или $2x^2 - 3x + 1 > 0$. Решение

этого квадратного неравенства: $x < \frac{1}{2}$ и $x > 1$. С учетом ОДЗ полу-

чаем решение данного неравенства: $0 < x < \frac{1}{2}$ и $1 < x < \frac{3}{2}$ или

$$x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right). \quad \text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

527а) Для решения неравенства $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$ введем новую неизвестную $y = \log_2 x$. Получаем квадратное неравенство $y^2 - y \leq 6$ или $y^2 - y - 6 \leq 0$. Решение этого неравенства $-2 \leq y \leq 3$. Вернемся к старой неизвестной x , числа (-2) и 3 представим в виде логарифмов с основанием 2. Получаем: $-2 \leq \log_2 x \leq 3$ или $\log_2 2^{-2} \leq$

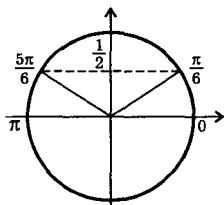
$\leq \log_2 x \leq \log_2 2^3$ или $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того

же знака: $\frac{1}{4} \leq x \leq 8$ или $x \in \left[\frac{1}{4}; 8\right]$. Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$.

528а) ОДЗ неравенства $\log_2 \sin \frac{x}{2} < -1$ определяется условием $\sin \frac{x}{2} > 0$ (логарифмируемая величина должна быть положитель-

ной). Данное неравенство запишем в виде: $\log_2 \sin \frac{x}{2} < \log_2 2^{-1}$ или

$\log_2 \sin \frac{x}{2} < \log_2 \frac{1}{2}$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака: $\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$. Таким образом, данное неравенство свелось к тригонометрическому



му неравенству $0 < \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$.

Для решения этого неравенства введем неизвестную $t = \frac{x}{2}$ и решим неравенство $0 < \sin t < \frac{1}{2}$ с помощью тригонометрического круга. На промежутке $[0; 2\pi]$ неравенство выполняется при $0 < t < \frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6} < t < \pi$. Функция $\sin t$ периодична с периодом 2π . Учитывая периодичность, получаем решение неравенства: $2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим двойные линейные неравенства $2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \pi + 2\pi n$. Все части каждого неравенства умножим на положительное число 2. При этом знаки неравенств сохраняются: $4\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 4\pi n$ и $\frac{5\pi}{3} + 4\pi n < x < 2\pi + 4\pi n$.

Ответ: $\left(4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; 2\pi + 4\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

5286) Неравенство $|3 - \log_2 x| < 2$ эквивалентно двойному неравенству $-2 < 3 - \log_2 x < 2$. Из всех частей неравенства вычтем число 3: $-5 < -\log_2 x < -1$. Умножим все части на отрицательное число (-1) . При этом знаки неравенства меняются на противоположные $5 > \log_2 x > 1$. Запишем неравенство в виде: $\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 2^5$ или $\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 32$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака: $2 < x < 32$ или $x \in (2; 32)$. Ответ: $(2; 32)$.

529а) Используя определение логарифма, систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = 2 \\ \log_3(x-y) = 2 \end{cases} \text{ запишем в виде } \begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \log_3(x-y) = \log_3 3^2 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{9} \\ x - y = 9 \end{cases}$$
 Для решения этой системы линейных уравнений сначала сложим уравнения: $2x = \frac{1}{9} + 9$ или $2x = \frac{82}{9}$ (откуда $x = \frac{41}{9} = 4\frac{5}{9}$), потом вычтем уравнения: $y - (-y) = \frac{1}{9} - 9$ или $2y = -\frac{80}{9}$ (откуда $y = -\frac{40}{9} = -4\frac{4}{9}$). Ответ: $\left(4\frac{5}{9}; -4\frac{4}{9}\right)$.

529г) Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения

системы
$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 13 \\ \lg(x + y) = \lg(x - y) + \lg 8 \end{cases}$$
 Получаем

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 10 + \lg 13 \\ \lg(x + y) = \lg[(x - y) \cdot 8] \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg(10 \cdot 13) \\ \lg(x + y) = \lg(8x - 8y) \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ x + y = 8x - 8y \end{cases} \text{ Из второго уравнения выразим } y: y + 8y = 8x - x,$$

откуда $y = \frac{7}{9}x$. Подставим эту величину в первое уравнение:

$$x^2 + \left(\frac{7}{9}x\right)^2 = 130 \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{49}{81}x^2 = 130 \quad \text{или} \quad \frac{130}{81}x^2 = 130, \text{ откуда}$$

$x^2 = 81$ и $x = \pm 9$. Теперь найдем $y = \frac{7}{9}x \pm 7$. Очевидно, что решение $x = -9$, $y = -7$ не подходит, т.к. $x + y > 0$. Ответ: (9; 7).

530а) Используя свойства степеней и логарифмов, преобразуем

уравнения системы
$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2 \lg 3 \end{cases}$$
 Получаем:

$$\begin{cases} 3^y \cdot 3^{2x} = 3^4 \\ \lg \frac{(x + y)^2}{x} = \lg 3^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4 \\ \lg \frac{(x + y)^2}{x} = \lg 9 \end{cases}, \text{ откуда} \quad \begin{cases} y + 2x = 4 \\ \frac{(x + y)^2}{x} = 9 \end{cases} \text{ Из}$$

первого уравнения выразим $y = 4 - 2x$ и подставим во второе уравнение:

$$\frac{(x + 4 - 2x)^2}{x} = 9 \quad \text{или} \quad (4 - x)^2 = 9x \quad \text{или} \quad 16 - 8x + x^2 = 9x \quad \text{или}$$

$x^2 - 17x + 16 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 16$. Теперь, используя соотношение $y = 4 - 2x$, найдем: $y_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$ и $y_2 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$.

Ответ: (1; 2), (16; -28).

5306) Для решения системы $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$ ис-

пользуем свойства логарифмов. Обе части первого уравнения прологарифмируем по основанию 10. Получаем:

$$\begin{cases} \lg 10^{1+\lg(x+y)} = \lg 50 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 10^2 - \lg 5 \end{cases}$$

или $\begin{cases} 1 + \lg(x+y) = \lg 50 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg \frac{100}{5} \end{cases}$

или $\begin{cases} \lg(x+y) = \lg 50 - \lg 10 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 20 \end{cases}$

или $\begin{cases} \lg(x+y) = \lg \frac{50}{10} \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 20 \end{cases}$

или $\begin{cases} \lg(x+y) = \lg 5 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 20 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во

второе: $\lg 5 + \lg(x-y) = \lg 20$, откуда $\lg(x-y) = \lg 20 - \lg 5 = \lg \frac{20}{5} =$

$= \lg 4$. Получили систему уравнений $\begin{cases} \lg(x+y) = \lg 5 \\ \lg(x+y) = \lg 4 \end{cases}$, откуда

$\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = 4 \end{cases}$. Сложим уравнения системы: $2x = 9$, тогда $x = 4,5$. Выч-

тем уравнения системы: $y - (-y) = 1$ или $2y = 1$, откуда $y = 0,5$.

Ответ: (4,5; 0,5).

531а) Для функции $f(x) = 2x + 1$ найдем производную $f'(x) = 2 > 0$. Поэтому функция $f(x)$ возрастающая и, следовательно, имеет обратную функцию. Из равенства $y = 2x + 1$ найдем $x = \frac{y-1}{2}$.

Введем обычные обозначения: аргумент функции обозначим буквой x и саму функцию — символом $g(x)$. Таким образом, функция $g(x) = \frac{x-1}{2}$ является обратной к функции $f(x) = 2x + 1$. Очевидно,

$D(g) = E(g) = R$. Ответ: $g(x) = \frac{x-1}{2}$; $D(g) = E(g) = R$.

532в) Найдем производную функции $f(x) = \frac{x}{x+2}$. Получаем:

$$f'(x) = \frac{(x)(x+2) - x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} > 0. \quad \text{Так как}$$

производная положительная, то функция $f(x)$ возрастает. Поэтому

функция $f(x)$ имеет обратную. Найдем ее. Из равенства $y = \frac{x}{x+2}$ выразим x . Имеем: $yx + 2y = x$ или $2y = x - xy$ или $2y = x(1 - y)$,

откуда $x = \frac{2y}{1-y}$. Введем принятые обозначения: аргумент функции обозначим буквой x и саму функцию — символом $g(x)$. Та-

ким образом, функция $g(x) = \frac{2x}{1-x}$ является обратной к функции

$f(x) = \frac{x}{x+2}$. Области определения и значений для функций $f(x)$ и

$g(x)$ меняются местами: $D(g) = E(f)$ и $E(g) = D(f)$. Поэтому для функции $g(x)$: $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ и $E(g) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Ответ: $g(x) = \frac{2x}{1-x}$; $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ и $E(g) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

532г) Найдем производную функции $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$.

Получаем: $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$. Так как производная

положительная, то функция $f(x)$ возрастает. Поэтому функция $f(x)$

имеет обратную. Найдем ее. Из равенства $y = \sqrt{x+1}$ выразим x .

Имеем: $y^2 = x+1$, откуда $x = y^2 - 1$. Введем принятые обозначения:

аргумент функции обозначим буквой x и саму функцию — символом

$g(x)$. Таким образом, функция $g(x) = x^2 - 1$ является обратной

к функции $f(x) = \sqrt{x+1}$. Области определения и значений для функций

$f(x)$ и $g(x)$ меняются местами: $D(g) = E(f)$ и $E(g) = D(f)$. Поэтому

для функции $g(x)$: $D(g) = [0; \infty)$

и $E(g) = [-1; \infty)$.

Ответ: $g(x) = x^2 - 1$; $D(g) = [0; \infty)$, $E(g) = [-1; \infty)$.

533а) Построим сначала график

функции $f(x) = 2x^3 + 1$. Этот график

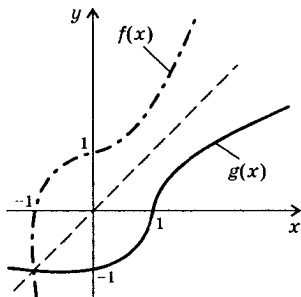
получается из графика функции

$y = 2x^3$ его смещением на одну

единицу вверх вдоль оси ординат.

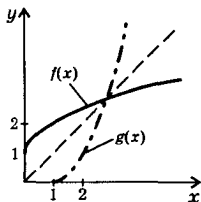
По свойству обратных функций

график обратной функции $g(x)$ сим-



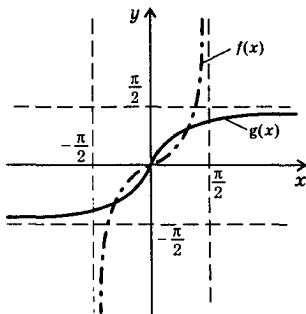
относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Ответ: см. график.



533г) Построим сначала график функции $f(x) = (x-1)^2$ на промежутке $x \in [1; \infty)$. По свойству обратных функций график обратной функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

Ответ: см. график.



динатных углов. **Ответ:** см. решение

536б) Найдем производную функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Получаем $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Так как производная $f'(x)$ положительна, то функция $f(x)$ возрастает. Поэтому функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет обратную функцию $g(x) = \operatorname{arctg} x$. По свойству обратных функций график обратной функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Ответ: см. решение

§ 11. Производная показательной и логарифмической функций

538а) Учтем правило нахождения производной от суммы функций. Для функции $y = 4e^x + 5$ найдем производную: $y' = (4e^x + 5)' = (4e^x)' + (5)' = 4(e^x)' - 0 = 4e^x$. **Ответ:** $4e^x$.

538г) Используем правило нахождения производной для разности функций. Для функции $y = 5e^{-x} - x^2$ найдем производную: $y' = (5e^{-x} - x^2)' = (5e^{-x})' - (x^2)' = 5(e^{-x})' - 2x = 5e^{-x} \cdot (-x)' - 2x = 5e^{-x} \cdot (-1) - 2x = -5e^{-x} - 2x$. **Ответ:** $-5e^{-x} - 2x$.

539а) Учтем правило нахождения производной от произведения функций. Для функции $y = e^x \cos x$ найдем производную: $y' = (e^x \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$. **Ответ:** $e^x (\cos x - \sin x)$.

539б) Используем правила нахождения производных. Для функции $y = 3e^x + 2^x$ найдем производную: $y' = (3e^x + 2^x)' = (3e^x)' + (2^x)' = 3(e^x)' + 2^x \ln 2 = 3e^x + 2^x \ln 2$. **Ответ:** $3e^x + 2^x \ln 2$.

5406) Напомним уравнение касательной: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, где x_0 — точка касания. Для функции $f(x) = 3^x$ найдем производную $f'(x) = 3^x \ln 3$. Вычислим значения производной и функции в точке касания $x_0 = 1$: $f'(x_0) = 3 \ln 3$ и $f(x_0) = 3$. Тогда касательная имеет вид: $y = 3 \ln 3 (x - 1) + 3$ или $y = 3 \ln 3 \cdot x - 3 \ln 3 + 3$ или $y = x \cdot 3 \ln 3 + (3 - 3 \ln 3)$. Ответ: $y = x \cdot 3 \ln 3 + (3 - 3 \ln 3)$.

5416) Учитывая правила нахождения первообразных, для функции $f(x) = 2 \cdot 3^x$ найдем первообразную $F(x) = \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + c$.

Ответ: $\frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + c$.

542а) Вычислим интеграл

$$\int_0^1 0,5^x dx = \left. \frac{0,5^x}{\ln 0,5} \right|_0^1 = \frac{0,5^1 - 0,5^0}{\ln 0,5} = \frac{0,5 - 1}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2 \ln 2}$.

543а) Используем правило нахождения производной от произведения функций. Для функции $y = e^{x^2} \sin \frac{x}{2}$ найдем производную:

$$y' = \left(e^{x^2} \sin \frac{x}{2} \right)' = \left(e^{x^2} \right)' \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \left(\sin \frac{x}{2} \right)' = e^{x^2} (x^2)' \cdot \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \cos \frac{x}{2} \times \left(\frac{x}{2} \right)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = e^{x^2} \left(2x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \right).$$

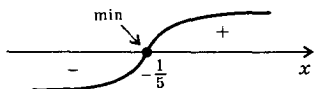
Ответ: $e^{x^2} \left(2x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \right)$.

544а) Учтем правило нахождения производной от частного двух функций. Для функции $y = \frac{x^6}{4^x - 5}$ найдем производную:

$$y' = \frac{(x^6)'(4^x + 5) - x^6(4^x + 5)'}{(4^x + 5)^2} = \frac{6x^5(4^x + 5) - x^6 \cdot 4^x \ln 4}{(4^x + 5)^2} = \frac{x^5(6 \cdot 4^x + 30 - x \cdot 4^x \ln 4)}{(4^x + 5)^2}.$$

Ответ: $\frac{x^5(6 \cdot 4^x + 30 - x \cdot 4^x \ln 4)}{(4^x + 5)^2}$.

545а) Найдем производную функции $f(x) = xe^{5x}$. Получаем $f'(x) = (xe^{5x})' = (x)'e^{5x} + x(e^{5x})' = 1 \cdot e^{5x} + xe^{5x} \cdot 5 = e^{5x}(1 + 5x)$. Так как при всех значениях x величина $e^{5x} > 0$, то функция имеет единственную критическую точку $x = -\frac{1}{5}$. На рисунке приведена диаграмма знаков производной $f'(x)$. Так как при проходе через критическую



кую точку знак производной меняется с минуса на плюс, то точка

$$x = -\frac{1}{5} \text{ — точка минимума и } f_{\min} = \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5} e^{5(-\frac{1}{5})} = -\frac{1}{5} e^{-1} = -\frac{1}{5e}.$$

Ответ: промежуток убывания $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$, промежуток возрастания $\left[-\frac{1}{5}; \infty\right)$; $x_{\min} = -\frac{1}{5}$, $f_{\min} = -\frac{1}{5e}$.

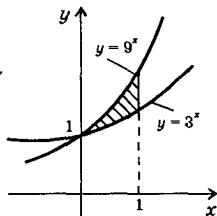
546а) Так как первообразная функции $f(x) = e^x$, то первообразная функции $f(x) = e^{3-2x}$ равна $F(x) = \frac{e^{3-2x}}{-2} + c = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + c$.

Ответ: $-\frac{1}{2} e^{3-2x} + c$.

546б) Учитывая правила нахождения первообразных, для функции

$$f(x) = 2 \cdot 0,9^x - 5,6^{-x} \text{ получаем } F(x) = 2 \frac{0,9^x}{\ln 0,9} - \frac{5,6^{-x}}{(-1) \ln 5,6} + c = \\ = \frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} + \frac{5,6^{-x}}{\ln 5,6} + c. \quad \text{Ответ: } \frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} + \frac{5,6^{-x}}{\ln 5,6} + c.$$

547б) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3^x$, $y = 9^x$ и $x = 1$. На рисунке изображена эта фигура. Ее площадь



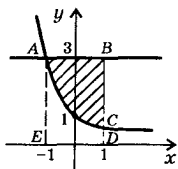
$$S = \int_0^1 (9^x - 3^x) dx = \left(\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^1 = \\ = \left(\frac{9}{\ln 9} - \frac{3}{\ln 3} \right) - \left(\frac{1}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 3} \right) = \\ = \left(\frac{9}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 9} \right) - \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{8}{\ln 9} - \\ - \frac{2}{\ln 3} = \frac{8}{2 \ln 3} - \frac{2}{\ln 3} = \frac{4}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}.$$

Ответ: $\frac{2}{\ln 3}$.

548а) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,

$y = 3$ и $x = 1$. На рисунке изображена эта фигура ABC . Площадь этой фигуры

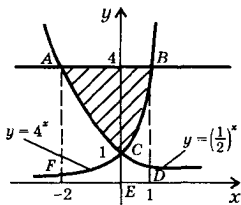
$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= S_{ABDE} - S_{ACDE} = 3 \cdot 2 - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \\
 &= 6 - \left. \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} \right|_{-1}^1 = 6 + \left. \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3} \right|_{-1}^1 = 6 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\ln 3} = \\
 &= 6 + \frac{1 - 3}{\ln 3} = 6 - \frac{8}{3 \ln 3}. \quad \text{Ответ: } 6 - \frac{8}{3 \ln 3}.
 \end{aligned}$$



548г) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 4^x$ и $y = 4$. Эта фигура изображена на рисунке. Найдем абсциссу точки пересечения прямой $y = 4$ и зависимости $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Получаем уравнение: $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ или $4 = 2^{-x}$, откуда $x = -2$. Аналогично находим точку пересечения линий $y = 4$ и $y = 4^x$. Получаем $x = 1$.

Площадь данной фигуры ABC :

$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= S_{ABDF} - S_{ACEF} - S_{BDEC} = \\
 &= 4 \cdot 3 - \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x - \int_0^1 4^x \ln x = 12 - \\
 &- \left. \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} \right|_{-2}^0 - \left. \frac{4^x}{\ln 4} \right|_0^1 = 12 + \left. \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2} \right|_{-2}^0 - \left. \frac{4^x}{2 \ln 2} \right|_0^1 = \\
 &= 12 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\ln 2} - \frac{4^1 - 4^0}{2 \ln 2} = 12 + \frac{1 - 4}{\ln 2} - \frac{4 - 1}{2 \ln 2} = 12 - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{2 \ln 2} = \\
 &= 12 - \frac{3 \cdot 2 + 3}{2 \ln 2} = 12 - \frac{9}{2 \ln 2}. \quad \text{Ответ: } 12 - \frac{9}{2 \ln 2}.
 \end{aligned}$$



549а) Используем правило нахождения производной сложной функции. Для функции $y = \ln(2 + 3x)$ получаем: $y' = \frac{1}{2 + 3x} \cdot (2 + 3x)' =$
 $= \frac{1}{2 + 3x} \cdot 3 = \frac{3}{3x + 2}$. Ответ: $\frac{3}{3x + 2}$.

549б) Учтем правило нахождения производной от суммы функций. Для функции $y = \log_{0.3} x + \sin x$ получаем: $y' = (\log_{0.3} x + \sin x)' =$

$$= (\log_{0,3} x)' + (\sin x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 0,3} \right)' + \cos x = \frac{1}{x \ln 0,3} + \cos x.$$

Ответ: $\frac{1}{x \ln 0,3} + \cos x.$

550а) Учтем правило нахождения производной для произведения функций. Для функции $y = x^2 \log_2 x$ получаем: $y' = (x^2 \log_2 x)' = (x^2)' \log_2 x + x^2 (\log_2 x)' = 2x \log_2 x + x^2 \left(\frac{\ln x}{\ln 2} \right)' = 2x \log_2 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}.$ Ответ: $2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}.$

550б) Для функции $y = \frac{\ln x}{x}$ учтем правило нахождения производной для частного двух функций. Получаем: $y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$ Ответ: $\frac{1 - \ln x}{x^2}.$

551а) Учтем правило нахождения первообразных. Так как первообразная функции $\frac{1}{x}$ есть функция $\ln|x|$, то первообразная функции $\frac{1}{7x+1}$ есть функция $\frac{\ln|7x+1|}{7}$. Поэтому первообразной функции $f(x) = \frac{3}{7x+1}$ является функция $F(x) = \frac{3 \ln|7x+1|}{7} + c.$

Ответ: $\frac{3 \ln|7x+1|}{7} + c.$

551б) Учтем правило нахождения для разности функций. Тогда первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+5}$ является функция $F(x) = \ln|x| - 2 \ln|x+5| + c.$ Ответ: $\ln|x| - 2 \ln|x+5| + c.$

552а) Напомним уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, где x_0 — точка касания. Для функции $f(x) = \ln(x+1)$ найдем производную $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Вычислим значения производной $f'(x)$ и функции $f(x)$ в точке касания $x_0 = 0$: $f'(x_0) = \frac{1}{0+1} = 1$ и $f(x_0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$. Тогда уравнение касательной: $y = 1 \cdot (x - 0) + 0$ или $y = x.$ Ответ: $y = x.$

553г) Используя правила нахождения первообразных, вычислим интеграл:

$$\int_0^3 \frac{dx}{3x+1} = \frac{\ln|3x+1|}{3} \Big|_0^3 = \frac{\ln|3 \cdot 3 + 1|}{3} - \frac{\ln|3 \cdot 0 + 1|}{3} = \frac{\ln 10}{3} - \frac{\ln 1}{3} = \frac{1}{3} \ln 10.$$

Ответ: $\frac{1}{3} \ln 10$.

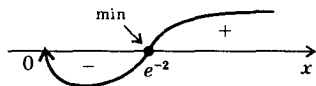
554а) Учтем правило нахождения производной для частного двух функций и для сложной функции. Для функции $y = \frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} \text{получаем: } y' &= \frac{(\ln(5+3x))' \cdot (x^2+1) - \ln(5+3x) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{5+3x} \cdot (5+3x)' \cdot (x^2+1) - \ln(5+3x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{3(x^2+1)}{5+3x} - 2x \ln(5+3x)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{3(x^2+1) - 2x(5+3x) \ln(5+3x)}{(5+3x)(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3(x^2+1) - 2x(5+3x) \ln(5+3x)}{(5+3x)(x^2+1)^2}$.

555а) Найдем производную функции $f(x) = \sqrt{x} \ln x = x^{\frac{1}{2}} \ln x$. Получаем: $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} \ln x)' = (x^{\frac{1}{2}})' \ln x + x^{\frac{1}{2}} (\ln x)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$. Критическая точка функции определяется уравнением: $\ln x + 2 = 0$ или $\ln x = -2$, откуда $x = e^{-2}$. В выражении для производной знаменатель $2\sqrt{x} > 0$, поэтому знак производной определяется числителем $\ln x + 2$.

На рисунке приведена диаграмма знаков производной $f'(x)$. Видно, что $(0; e^{-2}]$ — промежуток убывания, $[e^{-2}; \infty)$ — промежуток возрастания.

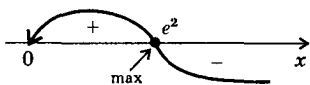


Точка $x = e^{-2}$ — точка минимума и $f_{\min} = f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}} \ln e^{-2} = e^{-1} \cdot (-2) = -\frac{2}{e}$. **Ответ:** $(0; e^{-2}]$ — промежуток убывания, $[e^{-2}; \infty)$ — промежуток возрастания; $x_{\min} = e^{-2}$, $f_{\min} = -\frac{2}{e}$.

556в) Найдем производную функции $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Получаем: $f'(x) =$

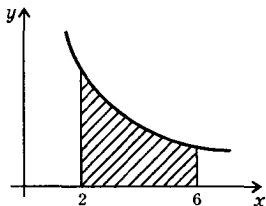
$$= \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Критическая точка функции определяется уравнением: $2 - \ln x = 0$ или $\ln x = 2$, откуда $x = e^2$. В выражении для производной знаменатель $2x\sqrt{x} > 0$, поэтому знак производной определяется числителем $2 - \ln x$. На рисунке приведена диаграмма знаков производной $f'(x)$.



Видно, что $(0; e^2]$ — промежуток возрастания, $[e^2; \infty)$ — промежуток убывания. Точка $x = e^2$ — точка максимума и $f_{\max} = f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$.

Ответ: $(0; e^2]$ — промежуток возрастания, $[e^2; \infty)$ — промежуток убывания; $x_{\max} = e^2$, $f_{\max} = \frac{2}{e}$.



557а) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x} + 2$, $y = 0$, $x = 2$ и $x = 6$. Эта фигура изображена на рисунке. Площадь этой фигуры

$$S = \int_2^6 \left(\frac{4}{x} + 2 \right) dx = (4 \ln |x| + 2x) \Big|_2^6 =$$

$$= (4 \ln 6 + 12) - (4 \ln 2 + 4) = 4(\ln 6 - \ln 2) + 8 = 4 \ln \frac{6}{2} + 8 = 4 \ln 3 + 8.$$

Ответ: $4 \ln 3 + 8$.

560а) Для вычисления числа $24^{\frac{1}{3}}$ найдем ближайшее к числу 24 число, которое является кубом целого числа, т.е. $24 = 27 - 3 = 27 \left(1 - \frac{3}{9} \right) = 27 \left(1 - \frac{1}{3} \right)$. Тогда получаем: $24^{\frac{1}{3}} = \left(27 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right)^{\frac{1}{3}} =$

$$= 27^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 3 - \frac{1}{3} = 2 \frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } 2 \frac{2}{3}.$$

560б) Используем правила действий со степенями. Получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{625 \cdot 3} &= \sqrt[4]{625 \cdot 16 \cdot \frac{3}{16}} = \sqrt[4]{625 \cdot 16} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{16}} = 5 \cdot 2 \sqrt[4]{1 - \frac{13}{16}} \approx \\ &\approx 10 \cdot \left(1 - \frac{13}{16 \cdot 4} \right) = 10 \cdot \left(1 - \frac{13}{64} \right) = 10 \cdot \frac{51}{64} = \frac{5 \cdot 51}{32} = \frac{255}{32} = 7 \frac{31}{32}. \end{aligned}$$

Ответ: $7 \frac{31}{32}$.

561в) Используем свойства корней. Тогда получаем:

$$\sqrt{9,02} = \sqrt{9 + \frac{1}{50}} = \sqrt{9 \cdot \left(1 + \frac{1}{450} \right)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{450}} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{450 \cdot 2} \right) =$$

$$= 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{900}\right) = 3 + \frac{1}{300} = 3\frac{1}{300}. \quad \text{Ответ: } 3\frac{1}{300}.$$

5626) Найдем производную степенной функции $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$. Получаем $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$. Видно, что в области определения функции $f(x)$ $x \in (0; \infty)$ производная $f'(x) < 0$. Поэтому функция $f(x)$ убывает.

Тогда на промежутке $I = \left[\frac{1}{8}; 27\right]$ наибольшее значение достигается на левой границе промежутка при $x = \frac{1}{8}$ и равно $f\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$. Наименьшее значение достигается на правой границе промежутка при $x = 27$ и равно $f(27) = 27^{-\frac{4}{3}} = \left(3^3\right)^{-\frac{4}{3}} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$.

Ответ: 16; $\frac{1}{81}$.

5636) Найдем первообразную степенной функции $f(x) = x^{2\sqrt{3}}$.

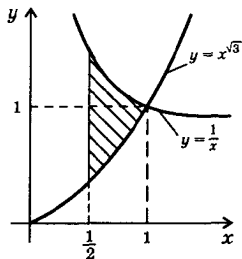
$$\begin{aligned} \text{Получаем: } F(x) &= \frac{x^{2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{3}+1} + c = \frac{x^{2\sqrt{3}+1}(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)} + c = \frac{x^{2\sqrt{3}+1}(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1} + c = \\ &= \frac{2\sqrt{3}-1}{11} x^{2\sqrt{3}+1} + c. \quad \text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}-1}{11} x^{2\sqrt{3}+1} + c. \end{aligned}$$

5646) Вычислим интеграл, используя правила нахождения первообразных.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \int_1^8 \frac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}} &= 4 \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = 4 \left. \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_1^8 = 12x^{\frac{1}{3}} \Big|_1^8 = \\ &= 12 \left(8^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}\right) = 12(2 - 1) = 12. \quad \text{Ответ: } 12. \end{aligned}$$

5656) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{x}$ и $x = \frac{1}{2}$. Эта фигура изображена на рисунке. Очевидно, что графики функций пересекаются при $x = 1$. Поэтому площадь фигуры

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - x^{\sqrt{3}}\right) dx = \left(\ln|x| - \frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$



$$\begin{aligned}
&= \left(\ln x - \frac{x^{\sqrt{3}+1}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \right) \Big|_1^1 = \left(\ln x - \frac{\sqrt{3}-1}{2} x^{\sqrt{3}+1} \right) \Big|_1^1 = \left(\ln 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot 1^{\sqrt{3}+1} \right) - \\
&- \left(\ln \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} \right) = \left(0 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) - \left(-\ln 2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2^{\sqrt{3}+2}} \right) = \ln 2 + \\
&+ \frac{\sqrt{3}-1}{4 \cdot 2^{\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \quad \text{Ответ: } \ln 2 - \frac{\sqrt{3}-1}{4 \cdot 2^{\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

5686) Проверим, что функция $y(t) = 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = -\frac{1}{4}y$. Сначала найдем первую производную $y' = 4\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)' = 4\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{1}{2} = 2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$. Теперь найдем вторую производную $y'' = (y')' = \left(2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 2\left(-\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)' = -2\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$. Найдем функцию $-\frac{1}{4}y = -\frac{1}{4} \cdot 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$. Видно, что $y'' = -\frac{1}{4}y = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: доказано.

570) Докажем, что функция $y = 7e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y' = -2y$. Найдем $y' = (7e^{-2x})' = 7(e^{-2x})' = 7e^{-2x} \cdot (-2x)' = 7e^{-2x} \cdot (-2) = -2y$. Таким образом, видно, что $y' = -2y$. **Ответ:** доказано.

572а) Известно, что гармонические колебания описываются дифференциальным уравнением $f''(t) = -\omega^2 f(t)$. Его решением является функция $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. По условию дано уравнение $y'' = -25y$ или $y'' = -5^2 y$. Тогда из сопоставления с гармоническими колебаниями сразу можно записать решение: $y(t) = A\cos(5t + \varphi)$. В частности, можно выбрать $A = 10$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда решение имеет

$$\text{вид: } y(t) = 10\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right). \quad \text{Ответ: } 10\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right).$$

575) Радиоактивный распад вещества описывается соотношением $m(t) = m_0 e^{-kt}$, где $m(t)$ — количество вещества в момент времени t , m_0 — первоначальное количество вещества, k — величина,

связанная с периодом T полураспада $\left(k = \frac{\ln 2}{T}\right)$. По условию задачи $m(t) = n$, $m_0 = m$. Поэтому имеем соотношение $n = me^{-kt}$. Прологарифмируем обе части этого равенства по основанию e . Получаем: $\ln n = \ln(me^{-kt})$ или $\ln n = \ln m + \ln e^{-kt}$ или $\ln n = \ln m - kt$ или $kt = \ln m - \ln n$ или $\frac{\ln 2}{T} t = \ln m - \ln n$, откуда $T = \frac{t \ln 2}{\ln m - \ln n}$.

Ответ: $\frac{t \ln 2}{\ln m - \ln n}$.

Глава V. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Действительные числа

2) Три последовательных натуральных числа можно записать в виде n , $n+1$, $n+2$. Тогда сумма этих чисел $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$. Видно, что это число делится на 3, т.е. сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3. Среди трех последовательных натуральных чисел (например, 26, 27, 28) всегда одно число кратно трем и одно (или два) кратно двум. Поэтому произведение этих чисел делится на 6 (т.к. $6 = 3 \cdot 2$).

Ответ: доказано.

3а) Если к числу 523 дописать цифры X и Y , то получится пятизначное число 523XY. Для делимости этого числа на 3 и 5 используем признаки делимости на 3 и 5. Число делится на 5, если последняя цифра числа Y равна 0 или 5. Число делится на 3, если сумма цифр числа $5 + 2 + 3 + X + Y = 10 + X + Y$ делится на 3. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $Y = 0$, тогда сумма цифр числа $10 + X + Y = 10 + X + 0 = 10 + X$. Эта сумма делится на 3, если $X = 2, 5, 8$. Получаем три числа 52320, 52350, 52380.

б) Пусть $Y = 5$, тогда сумма цифр числа $10 + X + Y = 10 + X + 5 = 15 + X$. Эта сумма делится на 3, если $X = 0, 3, 6, 9$. Получаем четыре числа: 52305, 52335, 52365, 52395.

Ответ: 52320, 52350, 52380, 52305, 52335, 52365, 52395.

5) Пусть первая цифра двузначного числа x , тогда вторая (по условию) — $x+2$. Запишем это число в десятичной системе: $10x + (x+2) = 11x + 2$. По условию это число $30 < 11x + 2 < 40$. Вычтем из всех частей неравенства число 2 и получим: $28 < 11x < 38$. Разделим все части неравенства на положительное число 11. При этом знак неравенства сохраняется: $\frac{28}{11} < x < \frac{38}{11}$ или $2\frac{6}{11} < x < 3\frac{5}{11}$.

В этом промежутке есть только одно целое число $x = 3$. Тогда искомое число 35. **Ответ:** 35.

7) Докажем, что $|a| = |-a|$. Рассмотрим два случая.

а) Если $a \geq 0$, то $|a| = a$. Тогда число $-a \leq 0$ и $|-a| = -(-a) = a$. Получим $|a| = |-a| = a$.

б) Если $a < 0$, то $|a| = -a$. Тогда число $-a > 0$ и $|-a| = -a$. Получим $|a| = |-a| = -a$.

Итак, в обоих случаях выполнено равенство $|a| = |-a|$.

Ответ: доказано.

8а) Найдем значение выражения

$$\frac{2,75 \cdot 1,1 + 3 \frac{1}{3}}{2,5 - 0,4 \cdot (-3 \frac{1}{3})} = \frac{2,5 + 3 \frac{1}{3}}{2,5 + \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{10}{3}}{\frac{5}{2} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{15+20}{6}}{\frac{15+8}{6}} = \frac{35}{23} = 1 \frac{12}{23}.$$

Ответ: $1 \frac{12}{23}$.

9а) В числителе дроби вынесем за скобки общий множитель 0,5. В знаменателе используем формулу для квадрата суммы чисел. Получаем:

$$\frac{0,5^2 - 0,5}{0,4^2 + 0,1^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,1} = \frac{0,5(0,5 - 1)}{(0,4 + 0,1)^2} = \frac{0,5 \cdot (-0,5)}{0,5^2} = -1.$$

Ответ: -1.

13б) Чтобы записать число 0,(66) в виде обыкновенной дроби, можно использовать два способа.

а) Пусть $x = 0,(66) = 0,66\dots$ Так как в периоде содержатся две цифры, то найдем число $100x = 100 \cdot 0,6666\dots = 66,66\dots$. Теперь определим разность: $100x - x = 66,66\dots - 0,66\dots$ или $99x = 66$, тогда $x = \frac{66}{99} = \frac{2}{3}$.

б) Представим данное число в виде $0,(66)\dots = \frac{66}{100} + \frac{66}{10000} + \dots$. Видно, что число является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{66}{100}$ и знаменателем

$$q = \frac{1}{100}. \text{ Эта сумма } S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{66}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{66}{100} : \frac{99}{100} = \frac{66}{99} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

18а) Для сравнения чисел $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}}$ и $\frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$ найдем их разность: $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}} - \frac{7}{\lg \frac{1}{2}} = \frac{4-7}{\lg \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\lg \frac{1}{2}} > 0$, т.к. числитель (-3) и знаменатель $\lg \frac{1}{2}$ дроби

би — отрицательные числа. Поэтому $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}} > \frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$.

Ответ: $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}} > \frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$.

186) Сравним числа $(\sqrt{5} + 2)$ и $\sqrt{17}$, т.е. $\sqrt{5} + 2 \vee \sqrt{17}$. Возведем в квадрат обе положительные части сравнения: $5 + 2\sqrt{5} \times \times 2 + 4 \vee 17$ или $9 + 4\sqrt{5} \vee 17$. Это сравнение можно записать в виде: $4\sqrt{5} \vee 17 - 9$ или $4\sqrt{5} \vee 8$ или $\sqrt{5} \vee 2$. Вновь возведем в квадрат обе положительные части сравнения: $5 \vee 4$. Очевидно, что справедливо неравенство $5 > 4$. Так как все операции обратимы, то $\sqrt{5} + 2 > \vee \sqrt{17}$. Ответ: $\sqrt{5} + 2 > \vee \sqrt{17}$.

18в) Для сравнения чисел $\log_3 7$ и $\log_7 3$ найдем их разность: $\log_3 7 - \log_7 3 = \log_3 7 - \frac{\log_3 3}{\log_3 7} = \log_3 7 - \frac{1}{\log_3 7} = \frac{\log_3^2 7 - 1}{\log_3 7}$. Определим знак числителя: так как $3 < 7 < 9$, то $\log_3 3 < \log_3 7 < \log_3 9$ или $1 < \log_3 7 < 2$. Поэтому и числитель и знаменатель дроби положительны. Следовательно, $\log_3 7 - \log_7 3 > 0$, т.е. $\log_3 7 > \log_7 3$.

Ответ: $\log_3 7 > \log_7 3$.

19а) Для сравнения чисел запишем их в виде степеней с одинаковым основанием 3: $15^{\log_3 10} = (3^{\log_3 15})^{\log_3 10} = 3^{\log_3 15 \cdot \log_3 10}$ и $10^{\log_3 15} = (3^{\log_3 10})^{\log_3 15} = 3^{\log_3 10 \cdot \log_3 15}$. Видно, что данные числа равны, т.е. $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 15}$. Ответ: $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 15}$.

196) Сравним данные числа, т.е. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \vee \sqrt{30} - \sqrt{3}$ или $\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \vee \sqrt{30}$. Возведем в квадрат обе положительные части сравнения: $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 12 \vee 30$ или $14 + 4\sqrt{6} \vee 30$ или $4\sqrt{6} \vee 30 - 14$ или $4\sqrt{6} \vee 16$ или $\sqrt{6} \vee 4$. Вновь возведем в квадрат обе положительные части сравнения: $6 \vee 16$. Очевидно, что выполнено неравенство $6 < 16$. Так как все операции обратимы, то справедливо и неравенство $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{30} - \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{30} - \sqrt{3}$.

19в) Для сравнения чисел $\sin 2,1$ и $\sin 7,98$ найдем их разность и преобразуем ее в произведение. Получаем: $\sin 2,1 - \sin 7,98 = 2\sin \frac{2,1 - 7,98}{2} \cos \frac{2,1 + 7,98}{2} = 2\sin (-2,94) \cos 5,04 = -2\sin 2,94 \cos 5,04$. Учтем, что $\pi \approx 3,14$, и определим знак выражения. Очевидно, что

$\frac{\pi}{2} < 2,94 < \pi$ (вторая четверть) и $\sin 2,94 > 0$. Аналогично, $\frac{3\pi}{2} < 5,04 < 2\pi$ (четвертая четверть) и $\cos 5,04 > 0$. Поэтому произведение $\sin 2,94 \cdot \cos 5,04 > 0$ и разность $\sin 2,1 - \sin 7,98 < 0$, т.е. $\sin 2,1 < \sin 7,98$. Ответ: $\sin 2,1 < \sin 7,98$.

20а) Упростим данное числовое выражение. Для этого избавимся от иррациональности в знаменателе дроби, умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6} &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} - 2\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} - 2\sqrt{6} = \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2}{3 - 2} - 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5. \end{aligned}$$

В результате преобразований получили рациональное число 5.

Ответ: доказано.

20б) Упростим данное числовое выражение. Для этого используем формулы сокращенного умножения. Получаем:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + 1)^2 + (1 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1) &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 - \\ - (7 - 1) &= 6 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Имеем рациональное число 0.

Ответ: доказано.

22) Напомним, что 1% — $\frac{1}{100}$ величины. Пусть сначала выпуск предприятия составлял x изделий. Потом выпуск возрос на 4% (т.е. на $\frac{x}{100} \cdot 4 = \frac{x}{25}$ изделий) и завод стал выпускать $x + \frac{x}{25} = \frac{26}{25}x$ изделий. Затем выпуск возрос на 8% (т.е. на $\frac{26x}{25 \cdot 100} \cdot 8 = \frac{52x}{625}$ изделий) и завод стал выпускать $\frac{26}{25}x + \frac{52}{625}x = \frac{702}{625}x$ изделий. За два года выпуск продукции увеличился на $\frac{702}{625}x - x = \frac{77}{625}x$ изделий, что составляет $\left(\frac{77x}{625} : x\right) \cdot 100 = \frac{7700}{625} = 12,32\%$. Поэтому средний ежегодный прирост продукции за двухлетний период равен $\frac{12,32}{2} = 6,16\%$. Ответ: $6,16\%$.

24) Пусть первоначально овощи стоили x рублей. Потом цена возросла на 25% (т.е. на $\frac{x}{100} \cdot 25 = \frac{x}{4}$ рублей) и составила $x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}$ рублей. Потом цену снизили на $\frac{x}{4}$ рублей и она стала вновь

равной x рублей. Теперь определим, сколько составляет $\frac{x}{4}$ рублей от стоимости овощей $\frac{5x}{4}$ рублей. Получаем: $\left(\frac{x}{4} : \frac{5x}{4}\right) \cdot 100 = 20\%$. Итак, цену надо снизить на 20%. Ответ: 20%.

25в) Для пропорции $\frac{0,13}{x} = \frac{26}{3\frac{1}{3}}$ используем ее свойство: $0,13 \times 3\frac{1}{3} = x \cdot 26$ или $0,13 \cdot \frac{10}{3} = x \cdot 26$ или $\frac{13}{100} \cdot \frac{10}{3} = x \cdot 26$ или $\frac{13}{30} = x \cdot 26$, откуда $x = \frac{13}{30 \cdot 26} = \frac{1}{30 \cdot 2} = \frac{1}{60}$. Ответ: $\frac{1}{60}$.

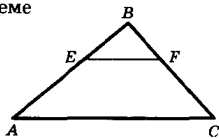
26а) Для решения уравнения $\frac{x-2}{2,5} = \frac{6}{x}$ используем свойство пропорции: $x(x-2) = 6 \cdot 2,5$ или $x^2 - 2x = 15$ или $x^2 - 2x - 15 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -3$ и $x_2 = 5$. Ответ: -3; 5.

27а) По условию задачи $EF \parallel AC$. По теореме

Фалеса $\frac{AE}{AB} = \frac{FC}{BC}$. Так как $AB = 22,5$ см,

$AE = 18$ см, $BC = 15$ см, то получаем: $\frac{18}{22,5} = \frac{FC}{15}$. По свойству пропорции имеем:

$18 \cdot 15 = 22,5 \cdot FC$, откуда $FC = \frac{18 \cdot 15}{22,5} = 12$ (см). Тогда $BF = BC - FC = 15 - 12 = 3$ (см). Ответ: 12 см и 3 см.



28) Используя формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем: $a_7 = a_1 + 6d$ или $20 = 2 + 6d$, откуда $d = 3$. Теперь по формуле суммы n первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ находим $S_{20} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 19}{2} \cdot 20 = 610$.

Ответ: 610.

29) По условию задачи первый член арифметической прогрессии $a_1 = 4$ и шестой член $a_6 = 40$. Используя формулу n -го члена прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем $40 = 4 + 5d$, откуда $d = 7,2$. Теперь найдем искомые четыре числа: $a_2 = a_1 + d = 4 + 7,2 = 11,2$; $a_3 = a_2 + d = 11,2 + 7,2 = 18,4$; $a_4 = a_3 + d = 18,4 + 7,2 = 25,6$ и $a_5 = a_4 + d = 25,6 + 7,2 = 32,8$. Ответ: 11,2; 18,4; 25,6; 32,8.

30) Используем свойство арифметической прогрессии $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ (т.е. любой удвоенный член прогрессии равен сумме с ним соседних). Проверим это, найдя сумму первого и третьего членов: $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2} = \log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 (3 \cdot 12) = \log_2 36 = \log_2 6^2 =$

$= 2\log_2 6 = \frac{2}{\log_6 2}$. Видим, что эта сумма равна удвоенному второму члену. Поэтому указанные числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Ответ: доказано.

31) Запишем все нужные члены прогрессии, используя формулу n -го члена $a_n = a_1 + d(n-1)$. Так как сумма первого и пятого членов равна 26, то получаем уравнение: $a_1 + (a_1 + 4d) = 26$ или $2a_1 + 4d = 26$ или $a_1 + 2d = 13$. Произведение второго и четвертого членов равно 160. Поэтому имеем уравнение: $(a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 13 \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $a_1 = 13 - 2d$ и подставим во второе: $(13 - 2d + d)(13 - 2d + 3d) = 160$ или $(13 - d)(13 + d) = 160$ или $169 - d^2 = 160$, откуда $d^2 = 9$ и $d = \pm 3$. Теперь найдем a_1 и сумму первых шести членов $S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 3(2a_1 + 5d)$. Рассмотрим два случая.

а) $d = 3$, тогда $a_1 = 13 - 2d = 13 - 2 \cdot 3 = 7$ и $S_6 = 3 \cdot (2 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = 3 \cdot 29 = 87$.

б) $d = -3$, тогда $a_1 = 13 - 2d = 13 - 2 \cdot (-3) = 19$ и $S_6 = 3 \cdot (2 \cdot 19 + 5 \cdot (-3)) = 3 \cdot 23 = 69$.

Ответ: 87 или 69.

32) В данном выражении раскроем скобки и приведем подобные члены: $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 - a^2 + 2ad - d^2 = 2b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc - 2bd + 2ad$. Так как числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию, то $b = aq, c = aq^2$ и $d = aq^3$. Подставим эти числа в полученное выражение: $2(aq)^2 + 2(aq^2)^2 - 2aaq^2 - 2aqaq^2 - 2aqaq^3 + 2aaq^3 = 2a^2q^2 + 2a^2q^4 - 2a^2q^2 - 2a^2q^3 - 2a^2q^4 + 2a^2q^3 = 0$. Ответ: 0.

33) Используем свойство геометрической прогрессии $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (т.к. квадрат любого члена равен произведению членов соседних с ним). Найдем произведение первого и третьего числа:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) \cdot 2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(2-1) \cdot 2} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

Теперь преобразуем второе число, избавившись от иррациональности в

$$\text{знаменателе: } \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{этого числа: } \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{4+4\sqrt{2}+2}{4} = \frac{6+4\sqrt{2}}{4} = \frac{2(3+2\sqrt{2})}{4} =$$

$= \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$. Видно, что для данных чисел выполнено свойство геометрической прогрессии. Следовательно, эти числа образуют геометрическую прогрессию. **Ответ:** доказано.

34) Запишем данные члены геометрической прогрессии, используя формулу n -го члена $b_n = b_1 q^{n-1}$. Известно, что четвертый член больше второго на 24. Получаем уравнение: $b_1 q^3 - b_1 q = 24$ или $b_1 q (q^2 - 1) = 24$. Так как сумма второго и третьего члена равна 6, то имеем уравнение: $b_1 q + b_1 q^2 = 6$ или $b_1 q (1 + q) = 6$. Получили

$$\text{систему уравнений } \begin{cases} b_1 q (q^2 - 1) = 24 \\ b_1 q (q + 1) = 6 \end{cases} .$$

Разделим первое уравнение на второе: $\frac{b_1 q (q^2 - 1)}{b_1 q (q + 1)} = \frac{24}{6}$ или $q - 1 = 4$, откуда $q = 5$. Подставим это значение во второе уравнение системы: $b_1 \cdot 5 (5 + 1) = 6$, откуда $b_1 = \frac{1}{5}$. Таким образом, $b_1 = \frac{1}{5}$ и $q = 5$. **Ответ:** $b_1 = \frac{1}{5}$, $q = 5$.

35) Сначала найдем знаменатель геометрической прогрессии $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{3} = 4$. Воспользуемся формулой n -го члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$. Получаем уравнение: $3072 = 3 \cdot 4^{n-1}$ или $1024 = 4^{n-1}$ или $4^3 = 4^{n-1}$, откуда $n - 1 = 5$ и $n = 6$. Таким образом, прогрессия содержит 6 членов. **Ответ:** 6.

36) Найдем первый член геометрической прогрессии, используя формулу n -го члена $b_n = b_1 q^{n-1}$. Получаем уравнение: $\frac{1}{54} = b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3$

или $\frac{1}{54} = b_1 \frac{1}{27}$, откуда $b_1 = \frac{1}{2}$. Для нахождения количества членов прогрессии используем формулу для суммы n первых членов $S_n =$

$$= \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}. \text{ Получаем уравнение: } \frac{121}{162} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \text{ или } \frac{121}{81} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{или } \frac{121}{81} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \text{ или } \frac{242}{243} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ откуда } \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{243} \text{ или}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^5$ и $n = 5$. Следовательно, прогрессия содержит 5 членов.

Ответ: 5.

37) Даны четыре числа a, b, c, d . Так как первые три составляют геометрическую прогрессию, то $b = aq$ и $c = aq^2$. Последние три числа образуют арифметическую прогрессию, и выполняется свойство этой прогрессии: $2c = b + d$, откуда $d = 2c - b = 2aq^2 - aq$. По условию сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних 12. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a + 2aq^2 - aq = 14 \\ aq + aq^2 = 12 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$a(1 + 2q^2 - q) = 14.$$

$$\begin{cases} a(1 + 2q^2 - q) = 14 \\ a(q + q^2) = 12 \end{cases} \quad \cdot \quad \text{Разделим первое уравнение на второе:}$$

$$\frac{a(1 + 2q^2 - q)}{a(q + q^2)} = \frac{14}{12} \quad \text{или} \quad \frac{1 + 2q^2 - q}{q + q^2} = \frac{7}{6} \quad \text{или} \quad 6 + 12q^2 - 6q = 7q + 7q^2 \quad \text{или}$$

$$5q^2 - 13q + 6 = 0. \quad \text{Корни этого квадратного уравнения } q = 2 \text{ и } q = \frac{3}{5}.$$

Теперь найдем данные числа. Рассмотрим два случая.

а) $q = 2$, тогда из второго уравнения $a = \frac{12}{q + q^2} = \frac{12}{2 + 2^2} = 2$. Теперь найдем остальные числа: $b = aq = 2 \cdot 2 = 4$, $c = aq^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$ и $d = 2c - b = 2 \cdot 8 - 4 = 12$.

б) $q = \frac{3}{5}$. Из второго уравнения найдем $a = \frac{12}{q + q^2} = \frac{12}{\frac{3}{5} + (\frac{3}{5})^2} = \frac{12}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{2} = 12,5$. Также найдем остальные числа: $b = aq = 12,5 \times \frac{3}{5} = 7,5$, $c = aq^2 = 12,5 \cdot (\frac{3}{5})^2 = 4,5$ и $d = 2c - b = 2 \cdot 4,5 - 7,5 = 1,5$.

Ответ: 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

$$\begin{aligned} 38) \text{ Знаменатель геометрической прогрессии } q &= \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Найдем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})} = \sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Ответ: $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $S = 3$.

39) Так как сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 10,5, то получаем уравнение: $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 10,5$

или $b_1(1+q+q^2) = 10,5$. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12. Имеем уравнение: $\frac{b_1}{1-q} = 12$. Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{b_1(1+q+q^2)(1-q)}{b_1} = \frac{10,5}{12} \quad \text{или}$$

$1 - q^3 = \frac{7}{8}$, откуда $q^3 = \frac{1}{8}$ и $q = \frac{1}{2}$. Из второго уравнения найдем

$$b_1 = 12(1-q) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 6.$$

Ответ: $b_1 = 6, q = \frac{1}{2}$.

40) Известно, что числа a^m, a^n, a^p образуют геометрическую прогрессию. Поэтому выполняется свойство такой прогрессии: квадрат любого члена равен произведению с ним соседних членов, т.е. $(a^n)^2 = a^m \cdot a^p$ или $a^{2n} = a^{m+p}$, откуда $2n = m + p$. Записанное соотношение — свойство арифметической прогрессии: удвоенный член прогрессии равен сумме с ним соседних. Поэтому числа m, n, p образуют арифметическую прогрессию. Эти числа являются логарифмами чисел a^m, a^n, a^p : $m = \log_a a^m, n = \log_a a^n, p = \log_a a^p$.

Ответ: доказано.

§ 2. Тождественные преобразования

41а) Сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобки: $a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab = (a^2 - 2ab + b^2) + (2a - 2b) = (a - b)^2 + 2(a - b) = (a - b)(a - b + 2)$. Ответ: $(a - b)(a - b + 2)$.

41б) Раскроем скобки, сгруппируем члены выражения и вынесем общие множители за скобки: $x^3 + (y - 1)x + y = x^3 + yx - x + y = (x^3 - x) + (yx + y) = x(x^2 - 1) + y(x + 1) = x(x - 1)(x + 1) + y(x + 1) = (x + 1)(x - 1 + y) = (x + 1)(x^2 - x + y)$.

Ответ: $(x + 1)(x^2 - x + y)$.

42б) В данном выражении разложим квадратные трехчлены на множители, используя формулы сокращенного умножения: $(n^2 + 4n + 3)(n^2 + 6n + 8) = (n^2 + 4n + 4 - 1)(n^2 + 6n + 9 - 1) = ((n + 2)^2 - 1^2)((n + 3)^2 - 1^2) = (n + 2 + 1)(n + 2 - 1)(n + 3 + 1)(n + 3 - 1) = (n - 3)(n + 1)(n + 4)(n + 2) = (n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$. Среди четырех последовательных натуральных чисел $n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$ обязательно одно число кратно 2, одно — кратно 3 и одно — кратно 4. Поэтому произведение таких чисел делится на $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Например, среди четырех последовательных натуральных чисел 28, 29, 30, 31: число 28 кратно 4 (т.е. $28 = 4 \cdot 7$), число 30 кратно 2 и 3 (т.е. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$). Поэтому число $28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 = 4 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 = (4 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 29 \cdot 5 \cdot 31) = 24 \cdot (7 \cdot 29 \cdot 5 \cdot 31)$ кратно 24.

Ответ: доказано.

43а) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе используем группировку членов, в знаменателе — формулу для квадрата суммы чисел. Получаем: $\frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{(a^3 + a^2) - (a + 1)}{(a + 1)^2} = \frac{a^2(a + 1) - (a + 1)}{(a + 1)^2} = \frac{(a + 1)(a^2 - 1)}{(a + 1)^2} = \frac{(a + 1)(a + 1)(a - 1)}{(a + 1)^2} = a - 1$. **Ответ:** $a - 1$.

44г) Разложим знаменатели дробей на множители и сложим их, приведя к общему знаменателю. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c^2 + 3c + 2} + \frac{2c}{c^2 + 4c + 3} + \frac{1}{c^2 + 5c + 6} \right) \cdot \frac{(c - 3)^2 + 12c}{2} = \left(\frac{1}{(c + 1)(c + 2)} + \right. \\ & \left. + \frac{2c}{(c + 1)(c + 3)} + \frac{1}{(c + 2)(c + 3)} \right) \cdot \frac{c^2 - 6c + 9 + 12c}{2} = \left(\frac{c + 3 + 2c(c + 2) + c - 1}{(c + 1)(c + 2)(c + 3)} \right) \times \\ & \times \frac{c^2 + 6c + 9}{2} = \left(\frac{c + 3 + 2c^2 + 4c + c + 1}{(c + 1)(c + 2)(c + 3)} \right) \cdot \frac{(c + 3)^2}{2} = \frac{(2c^2 + 6c + 4)^2 (c + 3)^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2 (c + 3)^2 \cdot 2} = \\ & = \frac{4(c^2 + 3c + 2)^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2 \cdot 2} = \frac{2((c + 1)(c + 2))^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2} = \frac{2(c + 1)^2 (c + 2)^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

45а) В скобках данного выражения сначала вычтем первые две дроби, приведя их к общему знаменателю. Деление выражений заменим умножением на дробь, обратную делителю. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2x - y} - \frac{2}{2x + y} - \frac{1}{2x - 5y} \right) : \frac{4y^2}{4x^2 - y^2} = \left(\frac{3(2x + y) - 2(2x - y) - 1}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{1}{2x - 5y} \right) \times \\ & \times \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \left(\frac{6x + 3y - 4x + 2y}{4x^2 - y^2} - \frac{1}{2x - 5y} \right) \cdot \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \left(\frac{2x + 5y}{4x^2 - y^2} - \frac{1}{2x - 5y} \right) \times \\ & \times \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \frac{(2x + 5y)(2x - 5y) - (4x^2 - y^2)}{(4x^2 - y^2)(2x - 5y)} \cdot \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \frac{4x^2 - 25y^2 - 4x^2 + y^2}{(2x - 5y) \cdot 4y^2} = \\ & = \frac{-24y^2}{(2x - 5y) \cdot 4y^2} = \frac{-6}{2x - 5y} = \frac{6}{5y - 2x}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{6}{5y - 2x}$.

46а) Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ — величину, сопряженную знаменателю. Получаем:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$.

47а) Используем определение корня и его свойства. Получаем:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2,5)^2} - \sqrt[3]{(1,5 - \sqrt{5})^3} - 1 = |\sqrt{5} - 2,5| - (1,5 - \sqrt{5}) - 1 =$$

$$= -(\sqrt{5} - 2,5) - 1,5 + \sqrt{5} - 1 = -\sqrt{5} + 2,5 - 1,5 + \sqrt{5} - 1 = 0.$$

Было учтено, что $\sqrt{5} - 2,5 < 0$ и $|\sqrt{5} - 2,5| = -(\sqrt{5} - 2,5)$.

Ответ: 0.

47б) Вынесем множители из-под корней и используем формулы сокращенного умножения. Имеем:

$$\frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{25 \cdot 2})(5 - \sqrt{4 \cdot 6})}{\sqrt{25 \cdot 3} - 5\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6})}{5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} + 2)(3 - 2\sqrt{6} + 2)}{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1. \quad \text{Ответ: 1.}$$

48а) Разложим знаменатели дробей на множители, приведем их к общему знаменателю и найдем алгебраическую сумму дробей.

$$\text{Имеем: } \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a+2}} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \left(\frac{a+2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{a+2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{(a+2)(\sqrt{a+2})(\sqrt{a}-\sqrt{2}) - a\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(\sqrt{a+2})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a+2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})}$$

$$\times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{(a+2)(a-2) - a \cdot a + a\sqrt{a} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a+2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} =$$

$$= \frac{a^2 - 4 - a^2 + a\sqrt{a} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a+2})(a+2)} = \frac{a\sqrt{a} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a+2})(a+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{2}(a+2)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a+2})(a+2)} = \frac{1}{\sqrt{a+2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{a+2}}$.

48г) Для преобразований используем формулы сокращенного

умножения. Получаем:
$$\left(\frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}-1} - \frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}-1}\right) = \left(\frac{c-1}{2\sqrt{c}}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{(\sqrt{c}-1)^2 - (\sqrt{c}+1)^2}{(\sqrt{c}+1)(\sqrt{c}-1)} = \frac{(c-1)^2}{4c} \cdot \frac{(\sqrt{c}-1-\sqrt{c}+1)(\sqrt{c}-1-\sqrt{c}-1)}{c-1} =$$

$$= \frac{(c-1) \cdot 2\sqrt{c}(-2)}{4c} = \frac{-(c-1)}{\sqrt{c}} = \frac{1-c}{\sqrt{c}}. \quad \text{Ответ: } \frac{1-c}{\sqrt{c}}.$$

49б) При преобразованиях используем формулы сокращенного

умножения. Имеем:
$$\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (2\sqrt{b})^2}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+3\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot 32b\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} = \frac{1}{8b}.$$

Ответ: $\frac{1}{8b}$.

50а) При преобразованиях применим формулы сокращенного умножения. Получаем:

$$\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \frac{2}{x^{-0,5}} = \frac{(x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{2}}-1)\left((x^{\frac{1}{2}})^3-1\right)}{(x+x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+1)} + 2x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}-1)(x+x^{\frac{1}{2}}+1)}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} + 2x^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}}-1)^2 + 2x^{\frac{1}{2}} = x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1 + 2x^{\frac{1}{2}} =$$

$= x + 1.$ Ответ: $x + 1.$

50в) Используем формулы сокращенного умножения. Разложим числители и знаменатели дробей на множители. Имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}} \right) = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{3x} \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{(x^{\frac{1}{2}})^3 - (y^{\frac{1}{2}})^3}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})} - \frac{(x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) = \left(\frac{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} - \right. \\ & \left. \frac{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y}{x^{\frac{1}{2}}} - (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \right) = \\ & = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y - x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{3y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = 3y^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $3y^{\frac{1}{2}}$.

51а) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе используем формулу для квадрата разности чисел, в знаменателе группируем члены и вынесем общие множители за скобки. Получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a(a^{\frac{4}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}})}{(a^{\frac{3}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}) - (ab^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b)} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \\ & = \frac{a(a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}})^2}{a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a(a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}) \cdot a^{-\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})} = \\ & = \frac{a^{\frac{3}{3}}(a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}})^2}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})} = \frac{a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Ответ: $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$.

51б) Разложим знаменатель дроби на множители и используем формулы сокращенного умножения. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}} - x - y \right) : \frac{y - x}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}})} - x - y \right) \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{y - x} = \\ & = (-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x - y) \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$.

52а) В выражении сгруппируем члены, вынесем за скобки общий множитель. Также учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Получаем: $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \times \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$. **Ответ:** 0.

52б) Раскроем скобки, учтем, что $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ и $\operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta) + \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta)} &= \sqrt{\sin^2 \beta \left(1 + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right) + \cos^2 \beta \left(1 + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \beta + \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta + \cos \beta \sin \beta} = \sqrt{\sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta} = \\ &= \sqrt{(\sin \beta + \cos \beta)^2} = |\sin \beta + \cos \beta|. \quad \text{Ответ: } |\sin \beta + \cos \beta|. \end{aligned}$$

53б) Используем формулы приведения и нечетность функции синус (т.е. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$). Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} &= \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= -1 - 1 + 1 = -1. \quad \text{Ответ: } -1. \end{aligned}$$

53г) Учтем формулы приведения и таблицу значений тригонометрических функций. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{16\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cos \frac{5\pi}{18} \sin \frac{11\pi}{9} \cos 2\pi} &= \frac{\operatorname{tg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) \cdot 1 \cdot \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{18}\right)}{\operatorname{ctg}(-\alpha) \cos \frac{5\pi}{18} \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{9}\right) \cdot 1} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right) \left(-\cos \frac{5\pi}{18}\right)}{-\operatorname{ctg} \alpha \cos \frac{5\pi}{18} \left(-\sin \frac{2\pi}{9}\right)} = \frac{-\operatorname{ctg} \alpha \left(-\sin \frac{2\pi}{9}\right) \left(-\cos \frac{5\pi}{18}\right)}{\operatorname{ctg} \alpha \cos \frac{5\pi}{18} \sin \frac{2\pi}{9}} = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1.

54а) Используем формулу для тангенса суммы аргументов

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ и преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} &= \frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta))}{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

54б) Преобразуем левую часть равенства. Для этого используем основное тригонометрическое тождество и формулы для синуса и косинуса двойного аргумента. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

55а) Преобразуем левую часть равенства, используя формулы

понижения степени:
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \left| \cos \frac{\alpha}{4} \right| = \cos \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Было учтено следующее: так как $\pi < \alpha < 2\pi$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ (вторая четверть); $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ и $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = -\cos \frac{\alpha}{2}$; так как $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}$ (первая четверть), то $\cos \frac{\alpha}{4} > 0$ и $\left| \cos \frac{\alpha}{4} \right| = \cos \frac{\alpha}{4}$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Ответ: доказано.

56а) Преобразуем левую часть равенства, используя формулу

приведения $\cos \frac{5\pi}{7} = \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{7} \right) = -\cos \frac{2\pi}{7}$. Данное выражение умножим и разделим на $\sin \frac{\pi}{7}$ и применим формулу синуса двойного аргумента. Получаем:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} &= \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \left(-\cos \frac{2\pi}{7} \right) = -\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \\ &= \frac{-(\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}) \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\frac{1}{2} (\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7}) \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7})}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right)}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. **Ответ:** доказано.

56в) В левой части приведем выражение к общему знаменателю, преобразуем произведение синусов в сумму и используем формулы приведения. Получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} = \\ & = \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(10^\circ - 70^\circ)) - \cos(10^\circ + 70^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2 \cos 60^\circ + 2 \cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \\ & = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cos(90^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 2. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. **Ответ:** доказано.

57б) Преобразуем левую часть неравенства. Для этого используем формулы приведения и в знаменателе дроби преобразуем произведение синусов в сумму функций. Получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right) \right]} + \\ & + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)\right)}{\frac{1}{2} (\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{3}) - \cos \frac{\pi}{2})} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \\ & = \frac{2 \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \\ & = 4 \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \\ & + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3} \quad (\text{т.к. функция } \cos \frac{\alpha}{2} \text{ ограничена, т.е.} \\ & \cos \frac{\alpha}{2} \leq 1). \quad \text{Ответ: доказано.} \end{aligned}$$

57в) Преобразуем левую часть неравенства. Для этого используем формулу для разности квадратов чисел и формулу для синуса двойного аргумента. Получаем: $(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi + \cos \varphi) \times (1 + \sin \varphi - \cos \varphi)(\sin \varphi + \cos \varphi - 1) - ((1 + \cos \varphi) + \sin \varphi)((1 + \cos \varphi) - \sin \varphi)((1 - \cos \varphi) + \sin \varphi)((1 - \cos \varphi) - \sin \varphi) = -((1 + \cos \varphi)^2 - \sin^2 \varphi) \times ((1 - \cos \varphi)^2 - \sin^2 \varphi) = -(1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = -(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = -(2\cos^2 \varphi + 2\cos \varphi)(2\cos^2 \varphi - 2\cos \varphi) = -2\cos \varphi \times (\cos \varphi + 1)2\cos \varphi(\cos \varphi - 1) = -4\cos^2 \varphi(\cos^2 \varphi - 1) = 4\cos^2 \varphi(1 - \cos^2 \varphi) = 4\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = (2\sin \varphi \cos \varphi)^2 = \sin^2 2\varphi \leq 1$. Видно, что неравенство выполнено, т.к. $\sin 2\varphi \leq 1$. **Ответ:** доказано.

58а) К данному выражению прибавим и вычтем $2\cos^2\alpha \sin^2\alpha$.
 Получаем: $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha) - 2\cos^2\alpha \times$
 $\times \sin^2\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha)^2 = 1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Ответ: $\frac{7}{9}$.

58б) Данное выражение запишем через функции половинного аргумента и разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos \frac{\alpha}{2}$.
 Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha} &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})}{(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\cos \alpha/2}{\cos \alpha/2} - \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2}}{\frac{\cos \alpha/2}{\cos \alpha/2} + \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2}} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - m}{1 + m}. \quad \text{Ответ: } \frac{1 - m}{1 + m}. \end{aligned}$$

58в) Учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и основное тригонометрическое тождество. Получаем: $\sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$ или $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$ или $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$
 или $2 - 2\cos^2 \alpha = \cos \alpha$ или $0 = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2$. Введем новую неизвестную $t = \cos \alpha$ и получим квадратное уравнение $0 = 2t^2 + t - 2$.
 Корни этого уравнения $t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Корень $t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < -1$ не подходит. Итак, $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$. Ответ: $\frac{\sqrt{17} - 1}{4}$.

59а) Используем свойство логарифмов и формулы приведения. Получаем: $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) =$
 $= \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \times$
 $\times \dots \times \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ)) = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \times$
 $\times \operatorname{ctg} 1^\circ) = \lg((\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ) =$
 $= \lg(1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1) = \lg 1 = 0$. Ответ: 0.

60а) В выражении $\lg \sin 32^\circ \cdot \lg \cos 7^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 20^\circ$ определим знак каждого множителя. Изобразив углы на тригонометрическом круге, видим, что $0 < \sin 32^\circ$, $\cos 7^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ < 1$ и $\lg \sin 32^\circ$, $\lg \cos 7^\circ$, $\lg \operatorname{tg} 40^\circ < 0$; $\operatorname{ctg} 20^\circ > 1$ и $\lg \operatorname{ctg} 20^\circ > 0$. Так как в произведе-

дение входит три отрицательных и один положительный множитель, то произведение отрицательно. Ответ: меньше нуля.

61) Сначала выразим $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ через $\cos x$. Для этого используем

$$\text{формулы понижения степени: } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{(1 - \cos x)/2}{(1 + \cos x)/2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Так как $\cos x = \frac{a}{b+c}$, то $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \frac{a}{b+c}}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$. Аналогично най-

дем $\operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} = \frac{a+c-b}{a+b+c}$ и $\operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$. Теперь вычислим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} + \frac{a+c-b}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Ответ: 1.

62а) Представим числа 3^{400} и 4^{300} в виде чисел с одинаковой степенью: $3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}$ и $4^{300} = (4^3)^{100} = 64^{100}$. Так как $81 > 64$, то $81^{100} > 64^{100}$, т.е. $3^{400} > 4^{300}$. Ответ: $3^{400} > 4^{300}$.

62б) Найдем данные числа: $-\log_5 \frac{1}{5} = -\log_5 5^{-1} = 1$ и $7^{\log_3 1} = 7^0 = 1$. Видно, что данные числа равны: $-\log_5 \frac{1}{5} = 7^{\log_3 1}$.

Ответ: $-\log_5 \frac{1}{5} = 7^{\log_3 1}$.

63а) Используя свойства логарифма, упростим первое число: $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3 (2 \cdot 7) = \log_3 14$. Второе число запишем в виде: $\log_3 (2 + 7) = \log_3 9$. Так как $14 > 9$ и основание логарифма 3 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмы этих чисел связаны неравенством того же знака $\log_3 14 > \log_3 9$, т.е. $\log_3 2 + \log_3 7 > \log_3 (2 + 7)$. Ответ: $\log_3 2 + \log_3 7 > \log_3 (2 + 7)$.

64а) Используем свойства логарифмов и свойства степеней. Получаем:

$$\begin{aligned} 81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} &= 81^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2} \log_9 4} + (5^2)^{\frac{\log_5 8}{\log_5 125}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (9^2)^{-\frac{1}{2} \log_9 4} + \\ &+ (5^2)^{\frac{\log_5 2^3}{\log_5 5^3}} = 3 \cdot 9^{-\log_9 4} + (5^2)^{\frac{3 \log_5 2}{3}} = 3 \cdot (9^{\log_9 4})^{-1} + 5^{2 \log_5 2} = 3 \cdot 4^{-1} + \\ &+ (5^{\log_5 2})^2 = \frac{3}{4} + 2^2 = \frac{3}{4} + 4 = 4 \frac{3}{4}. \quad \text{Ответ: } 4 \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

65а) Используем свойства степеней и основное логарифмическое тождество. Получаем:

$$49^{1 - \log_7 2} + 5 = 49^1 \cdot 49^{-\log_7 2} + 5 = 49 \cdot (7^2)^{-\log_7 2} + 5 = 49 \cdot 7^{-2 \log_7 2} + 5 =$$

$$= 49 \cdot (7^{\log_7 2})^{-2} + 5 = 49 \cdot 2^{-2} + 5 = \frac{49}{4} + 5 = 12\frac{1}{4} + 5 = 17\frac{1}{4} = 17,25.$$

Ответ: 17,25.

66а) Воспользуемся свойствами логарифмов. Получаем:

$$\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg(8 \cdot 18)}{\lg 2^2 + \lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 4 + \lg 3} = \frac{\lg 12^2}{\lg(4 \cdot 3)} = \frac{2 \lg 12}{\lg 12} = 2.$$

Ответ: 2.

67а) Используем свойства логарифмов. Имеем:

$$\begin{aligned} \log_5(25b^3\sqrt[4]{c^7}) &= \log_5(25b^3c^{\frac{7}{4}}) = \log_5 25 + \log_5 b^3 + \log_5 c^{\frac{7}{4}} = \\ &= 2 + 3 \log_5 b + \frac{7}{4} \log_5 c. \end{aligned} \quad \underline{\text{Ответ:}} \quad 2 + 3 \log_5 b + \frac{7}{4} \log_5 c.$$

68а) Преобразуем правую часть уравнения, используя свойства логарифмов:

$$\begin{aligned} \log_4 x &= 2 \log_4 10 + \frac{3}{4} \log_4 81 - \frac{2}{3} \log_4 125 = \log_4 10^2 + \log_4 81^{\frac{3}{4}} + \\ &+ \log_4 125^{-\frac{2}{3}} = \log_4 100 + \log_4 (3^4)^{\frac{3}{4}} + \log_4 (5^3)^{-\frac{2}{3}} = \log_4 100 + \log_4 3^3 + \\ &+ \log_4 5^{-2} = \log_4 100 + \log_4 27 + \log_4 \frac{1}{25} = \log_4 \left(100 \cdot 27 \cdot \frac{1}{25}\right) = \log_4 108. \end{aligned}$$

Получили $\log_4 x = \log_4 108$, откуда $x = 108$. Ответ: $x=108$.

70) Во всех логарифмах перейдем к новому основанию 10 и используем свойства логарифмов. Тогда получаем: $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \times$

$$\times \log_6 5 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 6} \cdot \dots \cdot \frac{\lg 9}{\lg 10} = \frac{\lg 2}{\lg 10} = \lg 2 \approx 0,3010.$$

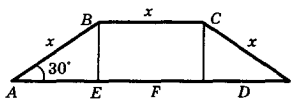
Ответ: $\lg 2 \approx 0,3010$.

71) Найдем связь между числами $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{3} + 1$; $\sqrt{6} + 2$ и $\sqrt{6} - 2$. Для этого избавимся от иррациональности в числителе.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \sqrt{3} - 1 &= \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)^{-1} \text{ и } \sqrt{6} + 2 = \\ &= \frac{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}{\sqrt{6} - 2} = \frac{6 - 4}{\sqrt{6} - 2} = 2(\sqrt{6} - 2)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{имеет вид: } \log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} + 2) &= \log_2\left(2(\sqrt{3} + 1)^{-1}\right) + \\ &+ \log_2\left(2(\sqrt{6} - 2)^{-1}\right) = \log_2 2 + \log_2(\sqrt{3} + 1)^{-1} + \log_2 2 + \log_2(\sqrt{6} - 2)^{-1} = \\ &= 1 - \log_2(\sqrt{3} + 1) + 1 - \log_2(\sqrt{6} - 2) = 2 - \left(\log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2)\right) = \\ &= 2 - A. \end{aligned} \quad \underline{\text{Ответ:}} \quad 2 - A.$$

§ 3. Функции



72а) Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$: $AB = BC = CD = x$. Рассмотрим $\triangle ABE$ (BE и CF — высоты трапеции): $BE = AB \sin A = x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}x$ и $AE =$

$= AB \cos A = x \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Найдём нижнее основание трапеции:

$$AD = AE + EF + FD = \frac{\sqrt{3}}{2}x + x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = x + \sqrt{3}x = x(1 + \sqrt{3}).$$

Площадь трапеции: $S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{x + x(1 + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x(2 + \sqrt{3}) \cdot x}{4} = \frac{x^2(2 + \sqrt{3})}{4}$.

Ответ: $S = \frac{x^2(2 + \sqrt{3})}{4}$.

76а) Обсудим график функции, приведенный на рисунке 151,а.

1) Функция возрастает на промежутках $[-5; -3]$ и $[-2; 1,5]$.

2) Функция убывает на промежутках $[-3; -2]$ и $[1,5; 6,5]$.

3) Точка максимума $x_{\max} = -3$ и $f_{\max} = f(-3) = 2,5$; точка минимума $x_{\min} = -2$ и $f_{\min} = f(-2) = 0,5$.

4) На отрезке $[-2; 2]$ наибольшее значение функции $f_{\text{наиб}} = f(1,5) = 3,5$ и наименьшее значение $f_{\text{наим}} = f(-2) = 0,5$.

5) Функция не является непрерывной в точке $x = 1,5$ и $f(1,5) = 3,5$.

6) Функция непрерывна на промежутках $[-5; 1,5]$ и $(1,5; 6,5]$.

Ответ: см. решение.

77а) Область определения функции $y = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$ задается условием $x^2 + 2x - 8 \neq 0$ (т.к. делить на ноль нельзя). Корни квадратного уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$ $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. Поэтому $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; \infty)$. **Ответ:** $(-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; \infty)$.

79а) Область определения функции $y = x^3 - 3x$ $D(y) = R$ — симметричное множество. Найдём $y(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$. Так как выполняется равенство $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ по определению нечетная.

Ответ: функция нечетная.

80в) Найдём промежутки знакопостоянства функции $y = 1 - \frac{2x-3}{5-x} = \frac{5-x-2x+3}{5-x} = \frac{8-3x}{5-x}$ методом интервалов. Определим точки, в которых обращаются в нуль числитель $8 - 3x = 0$ (откуда $x = \frac{8}{3}$) и знаменатель $5 - x = 0$ (тогда $x = 5$) дроби. Отметим эти

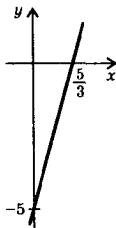


точки на координатной оси. Они разбивают ось на три интервала. Определим знак функции, например, в последнем, третьем промежутке. При $x = 10$ (из этого интервала) имеем: $y = \frac{8 - 3 \cdot 10}{5 - 10} > 0$. При переходе к каждому следующему интервалу знак функции меняется на противоположный. Получили диаграмму знаков данной функции. Итак, $y > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{8}{3}\right) \cup (5; \infty)$ и $y < 0$ при $x \in \left(\frac{8}{3}; 5\right)$. Ответ: $y > 0$ на $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$ и $(5; \infty)$; $y < 0$ на $\left(\frac{8}{3}; 5\right)$.

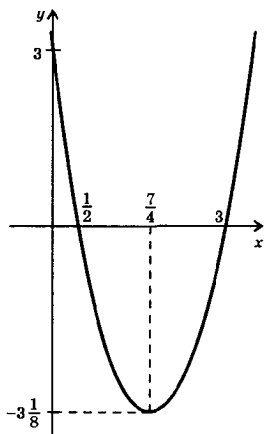
81а) Найдем абсциссу вершины параболы $y = 4x^2 + 3x - 1$: $x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{8}$. Так как старший коэффициент $a = 4$ положительный, то ветви параболы направлены вверх. Следовательно, функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right]$, возрастает — на промежутке $\left[-\frac{3}{8}; \infty\right)$, точка $x = -\frac{3}{8}$ — точка минимума.

Ответ: промежуток убывания $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right]$, промежуток возрастания $\left[-\frac{3}{8}; \infty\right)$, точка минимума $x = -\frac{3}{8}$.

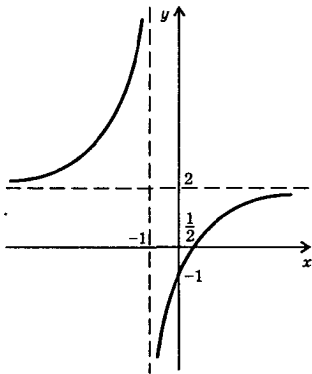
82а) Функция $y = 3x - 5$ линейная и ее графиком является прямая линия. Область определения $D(y) = R$ и область значений $E(y) = R$. Так как угловой коэффициент 3 положительный, то функция возрастает на R . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если $x = 0$, то $y = 3x - 5 = 3 \cdot 0 - 5 = -5$. Если $y = 0$, то имеем уравнение $0 = 3x - 5$, откуда $x = \frac{5}{3}$. Отметим эти точки и проведем через них прямую линию.



Ответ: см. решение.



$= 2x^2 - 7x + 3$, корни которого $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 3$. Отметим характерные точки параболы и построим график. **Ответ:** см. решение.



826) Функция $y = 2x^2 - 7x + 3$ определена на R , т.е. $D(y) = R$. Графиком функции является парабола, направленная ветвями вверх. Найдем координаты вершины параболы: $x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot 2} = \frac{7}{4}$ и $y_b = y\left(\frac{7}{4}\right) = 2\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{4} + 3 = \frac{49}{8} - \frac{49}{4} + 3 = -\frac{49}{8} + 3 = -\frac{25}{8} = -3\frac{1}{8}$. Поэтому область значений

функции $E(y) = \left[-3\frac{1}{8}; \infty\right)$. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 3 = 3$. Если $y = 0$, то получаем квадратное уравнение $0 =$

83а) Функция $y = 2 - \frac{3}{x+1}$ определена при $x \neq -1$ (т.к. делить на нуль нельзя), т.е. $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$. Прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота данной функции. При $x \rightarrow \infty$ величина $\frac{3}{x+1} \rightarrow 0$ и функция $y \rightarrow 2$. Поэтому область значений функции $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Прямая $y = 2$ — горизонтальная асимптота. Запишем функцию в виде: $y = 2 - \frac{3}{x+1} = \frac{2x+2-3}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$ и найдем точки пересечения

графика с осями координат. Если $x = 0$, то $y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 + 1} = -1$.

Если $y = 0$, то получаем уравнение $0 = \frac{2x-1}{x+1}$, откуда $x = \frac{1}{2}$. Отметим характерные точки, построим асимптоты функции, Учтем, что

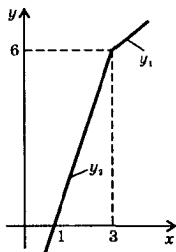
графиком функции является гипербола, и построим этот график.

Ответ: см. решение.

85в) Для построения графика функции $y = 2x - |x - 3|$ надо раскрыть знак модуля. Име-

$$\text{см: } y = \begin{cases} 2x - (x - 3), & \text{если } x - 3 \geq 0 \\ 2x + (x - 3), & \text{если } x - 3 < 0 \end{cases} \text{ или}$$

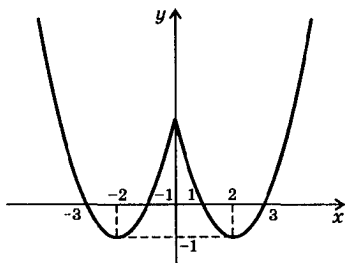
$y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \geq 3 \\ 3x - 3, & \text{если } x < 3 \end{cases}$. Построим график линейной функции $y = x + 3$ и выберем из него часть y_1 , для которой $x \geq 3$. Также строим график линейной функции $y = 3x - 3$ и выбираем из него часть y_2 , для которой $x < 3$.



Ответ: см. решение.

85г) Для построения графика функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ учтем, что эта функция четная.

Ее график симметричен относительно оси ординат. Поэтому сначала построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ для $x \geq 0$. Вершина параболы имеет координаты (2; -1). Ось абсцисс пересекается в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. По этим характерным

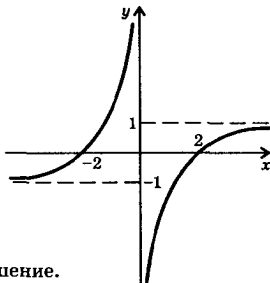


точкам построим график функции сначала в области $x \geq 0$, а затем зеркально отразим его относительно оси ординат в область $x < 0$.

Ответ: см. решение.

86в) Учтем, что функция $y = \frac{|x| - 2}{x}$ нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому сначала постро-

им график функции $y = \frac{x - 2}{x}$ в области $x > 0$. Графиком является гипербола. Вертикальная асимптота функции $x = 0$, горизонтальная асимптота $y = 1$ (при $x \rightarrow \infty$ величина $y \rightarrow 1$). График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = 2$. Учитывая эти свойства функции, построим ее график сначала в области $x > 0$, а затем отразим симметрично относительно начала координат в область $x < 0$.



Ответ: см. решение.

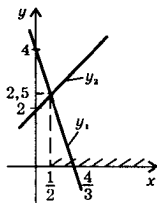
87а) Если графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$ имеют общую точку, то координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}.$$

Так как левые части уравнений одинаковы, то приравняем и правые: $x^2 = x + 6$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Используя второе уравнение системы $y = x + 6$, найдем: $y_1 = 4$ и $y_2 = 9$. Итак, графики данных функций имеют две общие точки с координатами $(-2; 4)$ и $(3; 9)$.

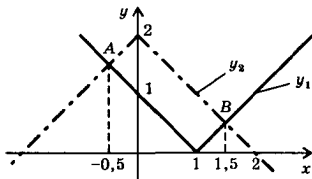
Ответ: имеют, $(-2; 4)$, $(3; 9)$.

88в) Уравнение $x^5 + 3x = 5$ запишем в виде $x^5 + 3x - 5 = 0$ и рассмотрим поведение функции $f(x) = x^5 + 3x - 5 = 0$ на промежутке $I = [1; 2]$. Найдем значения функции на концах промежутка: $f(1) = 1^5 + 3 \cdot 1 - 5 = -1$ и $f(2) = 2^5 + 3 \cdot 2 - 5 = 33$. Видно, что эти значения имеют противоположные знаки. Следовательно, на отрезке существует такая точка x_0 , что значение в ней равно нулю, т.е. $f(x_0) = 0$. Поэтому данное уравнение на указанном отрезке имеет корень. **Ответ:** доказано.



89а) Для решения неравенства $4 - 3x \leq x - 2$ построим графики линейных функций $y_1 = 4 - 3x$ и $y_2 = x + 2$. Графики этих функций пересекаются в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right)$. Нужно определить, при каких значениях x график функции y_1 расположен не выше графика y_2 . Из рисунка видно, что это происходит при $x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.



90б) Используя свойства модуля, уравнение $|1 - x| = 2 - |x|$ запишем в виде $|x - 1| = 2 - |x|$ и построим графики функций $y_1 = |x - 1|$ и $y_2 = 2 - |x|$. График функции y_1 получается сдвигом графика $y = |x|$ на одну единицу вправо. График функции y_2 получается отражением графика $y = |x|$ относительно оси абсцисс и его смещением на две единицы вверх. Видно, что графики функций y_1 и y_2 пересекаются в двух точках A и B , абсциссы которых $x_1 = -0,5$ и $x_2 = 1,5$ являются решениями данного уравнения. **Ответ:** $-0,5; 1,5$.

91) Так как график функции $y = ax + b$ проходит через точки $A(2; 1)$ и $B(5; 10)$, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению функции. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 2 + b \\ 10 = a \cdot 5 + b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 = 2a + b \\ 10 = 5a + b \end{cases}. \quad \text{Вычтем из первого уравнения второе: } 1 - 10 = 2a - 5a \text{ или } -9 = -3a, \text{ откуда } a = 3. \text{ Из первого уравнения найдем } b = 1 - 2a = 1 - 2 \cdot 3 = -5. \quad \text{Ответ: } a = 3, b = -5.$$

92а) На рис. 152,а приведен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Так как ветви параболы направлены вверх, то коэффициент $a > 0$. Из рисунка видно, что абсцисса вершины параболы отрицательна, т.е. $x_b = -\frac{b}{2a} < 0$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательную величину $(-2a)$. Знак неравенства меняется на противоположный: $-\frac{b}{2a} \cdot (-2a) > 0 \cdot (-2a)$, откуда $b > 0$. Найдем значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, т.е. $y(0) = c$. Следовательно c — ордината точки пересечения графика функции с осью ординат. Из рисунка видно, что эта величина отрицательна, т.е. $c < 0$. Так как график функции пересекает ось абсцисс, то дискриминант $D > 0$. Ответ: $a > 0, b > 0, c < 0, D > 0$.

94в) Область определения функции $y = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^4 - 1}$ $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ — симметричное множество. Знаменатель дроби — четная функция. Числитель дроби состоит из четной функции x^2 и нечетной функции $x^3 - x$. Учитывая это, представим функцию в виде суммы четной и нечетной функций: $y(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1} + \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$, где функция $y_1(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}$ — четная и функция $y_2(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$ — нечетная. Ответ: $y = \frac{x^2}{x^4 - 1} + \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$.

95а) Область определения функции $y(x) = 5x^6 - 2x^2 - 3$ $D(y) = R$ — симметричное множество. Найдем $y(-x) = 5(-x)^6 - 2(-x)^2 - 3 = 5x^6 - 2x^2 - 3 = y(x)$. Так как выполняется равенство $y(-x) = y(x)$, то функция $y(x)$ по определению четная. Ответ: четная.

95б) Область определения функции $y(x) = 4x^5 - 2x^3 + x$ $D(y) = R$ — симметричное множество. Найдем $y(-x) = 4(-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -4x^5 + 2x^3 - x = -(4x^5 - 2x^3 + x) = -y(x)$. Так как выполняется равенство $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ по определению нечетная.

Ответ: нечетная.

96в) Область определения функции $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos x - 3}$ задается условием $\sqrt{3} \cos x - \frac{3}{2} \neq 0$ (т.к. делить на нуль нельзя), откуда получаем $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая это неравенство, находим $x \neq \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, область определения функции — все x , кроме $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

Ответ: все числа, кроме чисел $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$).

97в) Область определения функции $y = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$ задается условием $\sin^2 x - \cos^2 x \geq 0$ (т.к. подкоренное выражение неотрицательное) или $0 \geq \cos^2 x - \sin^2 x$ или $0 \geq \cos 2x$. Это неравенство выполняется во второй и третьей четвертях, т.е. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n$, т.е. $D(y) = \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

97г) Область определения функции $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ задается условиями $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$. Эти неравенства выполняются в первой четверти, т.е. $0 + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $D(y) = \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

98а) Функция $\sin \frac{x}{2}$ ограничена, т.е. $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на отрицательное число (-3) . Знаки неравенства при этом меняются на противоположные: $3 \geq -3 \sin \frac{x}{2} \geq -3$. Ко всем частям неравенства прибавим число 1 и получим: $4 \geq 1 - 3 \sin \frac{x}{2} \geq -2$ или $4 \geq y \geq -2$, т.е. область значений данной функции $E(y) = [-2; 4]$. Ответ: $[-2; 4]$.

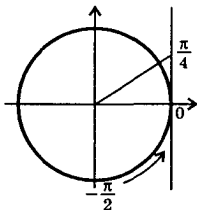
98б) Учтем, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Поэтому область определения данной функции задается условием $\cos x \neq 0$. Если $\cos x = 0$, то из основного тригонометрического тождества $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm 1$. Запишем данную функцию $y = 2 \cos x \operatorname{tg} x$ в виде $y = 2 \cos x \times$

$\times \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x$. Очевидно, что выполнено неравенство $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$. Однако, т.к. $\cos x \neq 0$, то $\sin x \neq \pm 1$ и $2 \sin x \neq \pm 2$. Поэтому область значений функции $E(y) = (-2; 2)$. Ответ: $(-2; 2)$.

99г) Функцию $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ запишем в виде $y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$. Функция $\sin 2x$ ограничена, т.е. $-1 \leq \sin 2x \leq 1$. Из этого неравенства можно получить: $\frac{1}{\sin 2x} \leq -1$ или $\frac{1}{\sin 2x} \geq 1$, тогда $\frac{2}{\sin 2x} \leq -2$ или $\frac{2}{\sin 2x} \geq 2$. Таким образом, область значений функции $E(y) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

Ответ: $E(y) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

100б) Сначала найдем промежутки, на которых функция $y = 1 - \operatorname{tg} 3x$ положительна. Для этого решим неравенство $1 - \operatorname{tg} 3x > 0$ или $\operatorname{tg} 3x < 1$. Введем новую переменную $z = 3x$ и получим неравенство $\operatorname{tg} z < 1$. На оси тангенсов отложим значение 1 и построим соответствующий угол $z = \frac{\pi}{4}$. Неравенству удовлетво-



ряют величины $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{4}$. Учтем периодич-

ность функции тангенс: $-\frac{\pi}{2} + \pi l < z < \frac{\pi}{4} + \pi l$, где $l \in \mathbb{Z}$. Вернемся теперь к неизвестной x . Получаем: $-\frac{\pi}{2} + \pi l < 3x < \frac{\pi}{4} + \pi l$, откуда

$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n$. Таким образом, $y > 0$ на промежутках $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n\right)$. Аналогично найдем, что $y < 0$ на промежутках $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n\right)$.

Ответ: $y > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n\right)$, $y < 0$ на $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

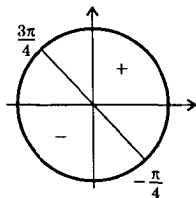
101б) Область определения функции $y(x) = \frac{\sin x \cos^2 x}{x}$ $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ — симметричное множество. Найдем $y(-x) = \frac{\sin(-x) \cos^2(-x)}{-x} = \frac{-\sin x \cos^2 x}{-x} = \frac{\sin x \cos^2 x}{x} = y(x)$. Учтено, что $\sin x$ — нечетная функция (т.е. $\sin(-x) = -\sin x$) и $\cos x$ — четная функция

(т.е. $\cos(-x) = \cos(x)$). Получили, что $y(-x) = y(x)$. Тогда по определению функция $y(x)$ — четная. Ответ: четная.

101в) Область определения функции $y = \sin \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = \sin x$ $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ — симметричное множество. Как известно, функция $y(x) = \sin x$ — нечетная, т.е. $y(-x) = -y(x)$.

Ответ: нечетная.

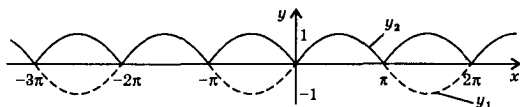
102г) Функцию $y = (\sin x + \cos x)^2$ запишем в виде: $y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + (2\sin x \cos x) = 1 + \sin 2x$. Функция $y = 1 + \sin 2x$ периодическая и ее наименьший положительный период $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Ответ: периодическая, π .



104в) Найдем производную функции $y = \sin x - \cos x$. Получаем $y' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$. Приравняем производную нулю: $\cos x + \sin x = 0$ или $1 + \operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -1$.

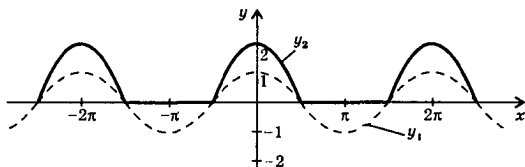
Найдем критические точки $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. На тригонометрическом круге отложим углы $x = -\frac{\pi}{4}$ (при $n = 0$) и $x = \frac{3\pi}{4}$ (при $n = 1$). Определим знак производной $y' = \cos x + \sin x$, например, при $x = 0$: $y' = \cos 0 + \sin 0 = 1 > 0$. При переходе через значение $x = \frac{3\pi}{4}$ знак производной меняется на противоположный, т.е. $y' < 0$. Поэтому точки максимума $x_{\max} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$) и $y_{\max} = y(x_{\max}) = \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, точки минимума $x_{\min} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $y_{\min} = y(x_{\min}) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$. Ответ: $y_{\max} = \sqrt{2}$, $y_{\min} = -\sqrt{2}$.

105б) Функцию $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ запишем в виде $y = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$. Сначала построим график функции $y_1 = \sin x$. Там, где $\sin x \geq 0$, функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = |\sin x|$ совпадают (поэтому эти части графиков y_1 и y_2 также совпадают). Там, где $\sin x < 0$, функция $y_2 = -\sin x = -y_1$. Поэтому, чтобы построить такую часть графи-



ка функции y_2 , надо часть графика функции y_1 зеркально отразить вверх относительно оси абсцисс. Ответ: см. график.

106в) Сначала построим график функции $y_1 = \cos x$. Для функции $y_2 = \cos x + |\cos x|$ раскроем знак модуля, используя определение:



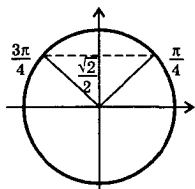
$$y_2 = \begin{cases} \cos x + \cos x, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ \cos x - \cos x, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\cos x, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ 0, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases}$$
. Поэтому на промежутках, для которых $\cos x \geq 0$, строим функцию $y_2 = 2y_1 = 2\cos x$. На промежутках, для которых $\cos x < 0$, строим функцию $y_2 = 0$. Ответ: см. график.

108) Запишем уравнение $\sin \frac{x}{10} = x^3$ в виде $\sin \frac{x}{10} - x^3 = 0$ и рассмотрим функцию $f(x) = \sin \frac{x}{10} - x^3$. Легко проверить, что эта функция нечетная. Если данное уравнение имеет корень x_0 , то выполняется равенство $f(x_0) = 0$. Найдем $f(-x_0) = -f(x_0) = -0 = 0$. Следовательно, число $(-x_0)$ также корень данного уравнения. Ответ: да.

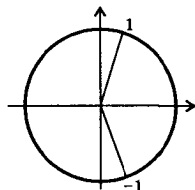
109а) Используем формулы приведения и получим: $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) = -\sin \frac{1}{\pi}$ и $\cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) = -\cos \frac{1}{\pi}$. Оценим число $\frac{1}{\pi}$: $0 < \frac{1}{\pi} < \frac{\pi}{6}$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция синус возрастающая, а косинус убывающая. Поэтому: $\sin 0 < \sin \frac{1}{\pi} < \sin \frac{\pi}{6}$ (или $0 < \sin \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$) и $\cos 0 > \cos \frac{1}{\pi} > \cos \frac{\pi}{6}$ (или $1 > \cos \frac{1}{\pi} > \frac{\sqrt{3}}{2}$). Из сравнения неравенств следует, что $\sin \frac{1}{\pi} < \cos \frac{1}{\pi}$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-1) . При этом знак неравенства меняется на

противоположный, и получаем: $-\sin \frac{1}{\pi} > -\cos \frac{1}{\pi}$, т.е. $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) > \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$. **Ответ:** $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) > \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$.

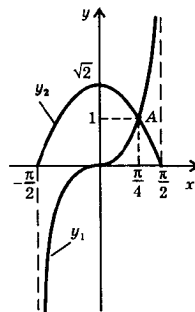
110а) Преобразуем левую часть неравенства $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, используя вспомогательный угол. Получаем: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.



Обозначим $z = \alpha + \frac{\pi}{4}$. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{4} < z < \frac{3\pi}{4}$. Из рисунка видно, что для таких z величина $\sin z > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число $\sqrt{2}$. Знак неравенства сохраняется и получаем $\sqrt{2} \sin z > \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\sqrt{2} \sin z > 1$ или $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$. **Ответ:** доказано.

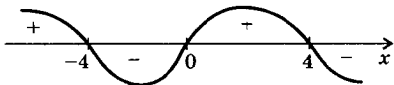


110б) Очевидно, что $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ при $\alpha \in R$. Построим углы, равные ± 1 (радиану). Очевидно, что промежуток $[-1; 1]$ принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. Очевидно, что при $-\frac{\pi}{3} < z < \frac{\pi}{3}$ величина $\cos z > 0$. Поэтому и $\cos(\sin \alpha) > 0$ при $\alpha \in R$. **Ответ:** доказано.



111б) Для решения уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$ на промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ построим графики функций $y_1 = \operatorname{tg} x$ и $y_2 = \sqrt{2} \cos x$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке А. Абсцисса этой точки $x = \frac{\pi}{4}$ — единственное решение данного уравнения. **Ответ:** $\frac{\pi}{4}$.

112а) Область определения функции $y = \sqrt{16x - x^3}$ задается условием $16x - x^3 \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим это неравенство методом интервалов: $x(16 - x^2) \geq 0$ или $x(4+x)(4-x) \geq 0$. На диаграмме приведены знаки выражения $16x - x^3$. Видно, что неравенство выполнено при $x \in (-\infty; -4] \cup [0; 4]$, что и является областью определения $D(y)$.

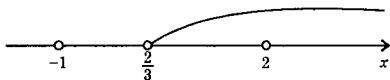


Ответ: $(-\infty; -4] \cup [0; 4]$.

113а) Область определения функции $y = \sqrt{x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1}}$ задается условием $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим это неравенство: $3^x(x^2 - 3) \geq 0$. Так как при всех x функция $3^x > 0$, то разделим обе части неравенства на 3^x . При этом знак неравенства сохраняется и получаем квадратное неравенство $x^2 - 3 \geq 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$ является областью определения данной функции $D(y)$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$.

114в) Область определения функции $y = \frac{\ln(3x - 2)}{x^2 - x - 2}$ задается условиями: $3x - 2 > 0$ (логарифмическая величина должна быть положительной) и $x^2 - x - 2 \neq 0$ (делить на нуль нельзя). Решая первое неравенство, получаем $x > \frac{2}{3}$. Решая второе неравенство, находим: $x \neq -1$ и $x \neq 2$. Учитывая эти результаты, получаем область определения функции $D(y) = \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$.



Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$.

115а) Функцию $y = 3x^{-2}$ запишем в виде $y = \frac{3}{x^2}$. Так как $x^2 > 0$, то $0 < \frac{3}{x^2} < \infty$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = (0; \infty)$. **Ответ:** $(0; \infty)$.

116а) Учтем, что функция косинус ограничена, т.е. $-1 \leq \cos x \leq 1$. Показательная функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому

получаем: $2^{-1} \leq 2^{\cos x} \leq 2^1$ или $\frac{1}{2} \leq 2^{\cos x} \leq 2$. Следовательно, область значений функции $y = 2^{\cos x}$ $E(y) = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. **Ответ:** $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

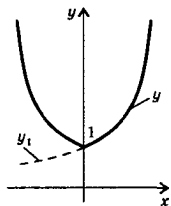
117в) Область определения функции $y = 2 - 3^x$ $D(y) = R$. Сначала найдем промежуток, на котором функция положительна. Решим неравенство: $2 - 3^x > 0$ или $2 > 3^x$, откуда $\log_3 2 > x$ или $x \in (-\infty; \log_3 2)$. Тогда очевидно, что на промежутке $x \in (\log_3 2; \infty)$ значения функций $y < 0$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; \log_3 2)$ и $y < 0$ при $x \in (\log_3 2; \infty)$.

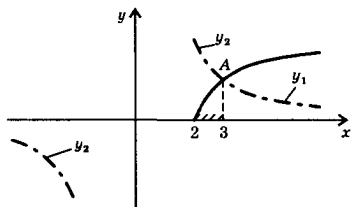
118б) Область определения функции $y = \lg(x - 2) - 1$ $D(y) = (2; \infty)$. Найдем промежуток, на котором значения функции положительны. Решим неравенство: $\lg(x - 2) - 1 > 0$ или $\lg(x - 2) > 1$ или $\lg(x - 2) > \lg 10$, откуда $x - 2 > 10$ и $x > 12$, т.е. $x \in (12; \infty)$. Очевидно, что на промежутке $x \in (2; 12)$ значения функции $y < 0$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (12; \infty)$ и $y < 0$ при $x \in (2; 12)$.

119а) Область определения функции $y(x) = 5^x + 5^{-x}$ $D(y) = R$ — симметричное множество. Найдем $y(-x) = 5^{-x} + 5^{-(-x)} = 5^{-x} + 5^x = 5^x + 5^{-x} = y(x)$. Так как $y(-x) = y(x)$, то функция $y(x)$ по определению четная. **Ответ:** четная.



123в) Функция $y = 2^{|x|}$ определена на R и является четной. Поэтому сначала построим график этой функции при $x \geq 0$. В этом промежутке функция имеет вид $y_1 = 2^x$. По свойству четной функции отразим эту часть графика влево относительно оси ординат. Получаем график данной функции. **Ответ:** см. график.



126б) Для решения неравенства $\sqrt{x-2} \leq \frac{3}{x}$ построим графики функций $y_1 = \sqrt{x-2}$ и $y_2 = \frac{3}{x}$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке A , абсцисса которой $x = 3$. График первой

функции располагается не выше графика второй функции на промежутке $x \in [2; 3]$. **Ответ:** $[2; 3]$.

127) Для нахождения наибольших значений функций сначала рассмотрим их основания. Очевидно, что $2 < 3 < 2^2$, поэтому $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 2^2$ или $1 < \log_2 3 < 2$. Так как основание показательной функции $y = (\log_2 3)^{\sin x}$, то эта функция возрастающая. Тогда эта функция имеет наибольшее значение, если показатель степени наибольший, т.е. $\sin x = 1$. Это значение функции равно $y = (\log_2 3)^1 = \log_2 3$.

Очевидно, что $1 < 2 < 3$, поэтому $\log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3$ или $0 < \log_3 2 < 1$. Так как основание показательной функции $y = (\log_3 2)^{\cos x}$ меньше единицы, то эта функция убывающая. Тогда функция имеет наибольшее значение, если показатель степени наименьший, т.е.

$\cos x = -1$. Это значение функции равно $y = (\log_3 2)^{-1} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$.

Видно, что наибольшие значения двух данных функций равны.

Ответ: доказано.

128а) Если $f(x_0) = 0$, то выполняется уравнение $\frac{1}{\sqrt{4x_0 + 1}} - \sqrt{1 - x_0^2} = 0$. ОДЗ уравнения определяется условиями: $4x_0 + 1 > 0$ (откуда $x_0 > -\frac{1}{4}$) и $1 - x_0^2 \geq 0$ (тогда $-1 \leq x_0 \leq 1$). Находим ОДЗ:

$x_0 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right]$. Запишем уравнение в виде: $\frac{1}{\sqrt{4x_0 + 1}} = \sqrt{1 - x_0^2}$.

Возведем обе положительные части в квадрат: $\frac{1}{4x_0 + 1} = 1 - x_0^2$ или $1 = (1 - x_0^2)(4x_0 + 1)$ или $1 = 4x_0 - 4x_0^3 + 1 - x_0^2$ или $4x_0^3 + x_0^2 - 4x_0 = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $x_0(4x_0^2 + x_0 - 4) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а) $x_0 = 0$. Этот корень входит в ОДЗ уравнения.

б) $4x_0^2 + x_0 - 4 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$, причем в ОДЗ входит только корень $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{8}$.

Ответ: 0; $\frac{-1 + \sqrt{65}}{8}$.

129а) Найдем производную функции $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$. Получаем

$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \cdot \ln \frac{1}{3} \cdot (x+1)' = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \cdot \ln \frac{1}{3}$. Показательная функция $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 0$ при всех значениях x . Множитель $\ln \frac{1}{3} < 0$. Поэтому производная $f'(x) < 0$ при любых значениях x . Следовательно, функ-

ция $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ убывает на множестве R . Ответ: доказано.

§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

130а) Для решения линейного уравнения $3(x - 2) - 5 = 4 - (5x - 1)$ раскроем скобки в обеих частях $3x - 6 - 5 = 4 - 5x + 1$ и приведем подобные члены $3x - 11 = 5 - 5x$. Слагаемые, зависящие от x , перенесем в левую часть, не зависящие от x — в правую, изменяя их знаки на противоположные: $3x + 5x = 11 + 5$. Вновь приведем подобные члены $8x = 16$. Разделим обе части уравнения на число 8 и найдем $x = 2$. **Ответ:** 2.

131б) Так как $\left| \frac{x-3}{2} + 5 \right| = 4$, то выразим, находящееся под знаком модуля, равно ± 4 . Получаем два уравнения.

а) $\frac{x-3}{2} + 5 = 4$, тогда $\frac{x-3}{2} = -1$ или $x - 3 = -2$ и $x = 1$.

б) $\frac{x-3}{2} + 5 = -4$, тогда $\frac{x-3}{2} = -9$ или $x - 3 = -18$ и $x = -15$.

Ответ: 1; -15.

132а) Линейное уравнение $ax - 2x = 3(x - 1)$ запишем в виде: $ax - 2x = 3x - 3$ или $ax - 5x = -3$ или $x(a - 5) = -3$. Для нахождения неизвестного x надо разделить обе части уравнения на коэффициент $(a - 5)$. Разделить можно, если этот коэффициент не равен нулю, т.е. $a \neq 5$. Тогда уравнение имеет единственное решение $x = \frac{-3}{a-5} = \frac{3}{5-a}$. Выясним, какие решения имеет уравнение при $a = 5$. Подставим это значение в уравнение $x(a - 5) = -3$ и получим: $x \cdot 0 = -3$. Такое уравнение решений не имеет.

Ответ: при $a \neq 5$ — единственное решение, при $a = 5$ — не имеет решений.

133а) Умножим обе части линейного неравенства $\frac{x-1}{2} + x < 1,5x + 3,5$ на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется: $x - 1 + 2x < 3x + 7$. Члены, зависящие от x , перенесем в левую часть, не зависящие от x — в правую. Приведем подобные члены: $x + 2x - 3x < 7 + 1$ или $0 \cdot x < 8$. Это неравенство выполняется при любых значениях x . Поэтому решение данного неравенства $x \in (-\infty; \infty)$. **Ответ:** $(-\infty; \infty)$.

134в) Умножим обе части неравенства $\left| \frac{x-7}{3} \right| \leq 2$ на положительное число 3. Знак неравенства сохраняется и получаем: $|x - 7| \leq 6$. Это неравенство эквивалентно двойному линейному неравенству: $-6 \leq x - 7 \leq 6$. Прибавим ко всем частям неравенства

число 7 и получим: $-6 + 7 \leq x - 7 + 7 \leq 6 + 7$ или $1 \leq x \leq 13$, т.е. $x \in [1; 13]$. Ответ: $[1; 13]$.

135в) Очевидно, что число $x = \frac{5}{3}$ не является решением неравенства $(x - 4)|5 - 3x| < 0$. Разделим обе части на положительное выражение $|5 - 3x|$. При этом знак неравенства сохраняется и получаем линейное неравенство $x - 4 < 0$, откуда $x < 4$. Учтем, что $x \neq \frac{5}{3}$, и найдем решение данного неравенства $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 4\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 4\right)$.

136в) В уравнении $(x - 3)(x - 2) = 6(x - 3)$ последний член перенесем в левую часть и вынесем общий множитель $(x - 3)$ за скобки. Имеем: $(x - 3)(x - 2) - 6(x - 3) = 0$ или $(x - 3)(x - 2 - 6) = 0$ или $(x - 3)(x - 8) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x - 3 = 0$ (корень $x = 3$) и $x - 8 = 0$ (корень $x = 8$). Ответ: 3; 8.

137а) Пусть x_0 — общий корень двух данных уравнений. Тогда выполняются равенства: $x_0^2 - ax_0 = 0$ и $x_0^2 - x_0 - 3a = 0$. Вычтем из первого равенства второе: $x_0^2 - ax_0 - (x_0^2 - x_0 - 3a) = 0$ или $-ax_0 + x_0 + 3a = 0$ или $3a = x_0(a - 1)$, откуда $x_0 = \frac{3a}{a - 1}$ — общий корень.

Подставим это значение x_0 , например, в первое уравнение:

$$\left(\frac{3a}{a-1}\right)^2 - a\left(\frac{3a}{a-1}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{3a}{a-1}\right)\left(\frac{3a}{a-1} - a\right) = 0$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{3a}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{3a - a^2 + a}{a-1}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{3a^2(4-a)}{(a-1)^2} = 0. \quad \text{Дробь равна нулю,}$$

если ее числитель равен нулю, т.е. $3a^2(4-a) = 0$, откуда $a = 0$ и $a = 4$. Проверим найденные значения.

а) При $a = 0$ данные уравнения имеют вид: $x^2 = 0$ (корень $x = 0$) и $x^2 - x = 0$ (корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$). Поэтому уравнения имеют общий корень $x_0 = 0$.

б) При $a = 4$ данные уравнения имеют вид: $x^2 - 4x = 0$ (корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$) и $x^2 - x - 12 = 0$ (корни $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$). Видно, что уравнения имеют общий корень $x_0 = 4$.

Ответ: $a = 0, a = 4$.

138а) Рассмотрим уравнение $(k - 1)x^2 + (k + 4)x + k + 7 = 0$. Так как коэффициент при x^2 зависит от параметра k , то возможны два случая.

а) Если $k = 1$, то данное уравнение линейное: $5x + 8 = 0$ и имеет единственный корень $x = -\frac{8}{5}$.

б) Если $k \neq 1$, то данное уравнение квадратное. Квадратное уравнение имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю. Найдем $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = k^2 + 8k + 16 - 4k^2 - 24k + 28 = -3k^2 - 16k + 44$. Получаем уравнение: $3k^2 + 16k - 44 = 0$, корни которого $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{22}{3}$. При этих значениях k данное уравнение имеет единственный корень. Ответ: 1; 2; $-\frac{22}{3}$.

139) Для квадратного уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$ выполняются формулы Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$. Теперь найдем сумму квадратов корней: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{25}{9} + \frac{4}{3} = \frac{37}{9} = 4\frac{1}{3}$. Затем определим сумму кубов корней: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \times (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = \frac{5}{3} \left(\frac{37}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{43}{9} = \frac{215}{27}$.

Ответ: $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$, $x_1 x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{37}{9}$, $x_1^3 + x_2^3 = \frac{215}{27}$.

140в) В уравнении $\frac{2}{x^2+5x} + \frac{3}{2x-10} = \frac{15}{x^2-25}$ разложим знаменатели дробей на множители: $\frac{2}{x(x+5)} + \frac{3}{2(x-5)} = \frac{15}{(x+5)(x-5)}$. Умножим все члены уравнения на $2x(x+5)(x-5)$ и получим $2 \cdot 2(x-5) + 3x(x+5) = 15 \cdot 2x$ или $4x - 20 + 3x^2 + 15x = 30x$ или $3x^2 - 11x - 20 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -\frac{4}{3}$ и $x_2 = 5$. При $x = 5$ знаменатели дробей $x - 5$ равны нулю, поэтому этот корень не подходит. Ответ: $-\frac{4}{3}$.

141в) Для решения уравнения $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2 = 0$ введем новую неизвестную $t = \frac{x-1}{x}$ и получим квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем два уравнения.

а) $\frac{x-1}{x} = 1$ или $x - 1 = x$. Это уравнение корней не имеет.

б) $\frac{x-1}{x} = 2$ или $x - 1 = 2x$, откуда $x = -1$. Ответ: -1.

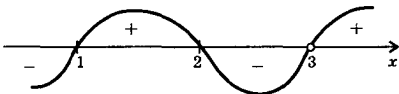
142в) В неравенстве $(3x-2)^2 - 4x(2x-3) \geq 0$ раскроем скобки и запишем неравенство в стандартном виде. Получаем: $9x^2 - 12x +$

$+4 - 8x^2 + 12x \geq 0$ или $x^2 + 4 \geq 0$. Это неравенство выполняется при всех значениях x . Поэтому решение данного неравенства $x \in (-\infty; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; \infty)$.

143а) Неравенство $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 0$ решим методом интервалов.

Найдем значения x , при которых обращаются в нуль числитель $(x-1)(x-2) = 0$ (корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$) и знаменатель $x-3 = 0$ (корень $x = 3$) дроби $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$. Отметим эти точки на координатной



оси. Они разбивают ось на четыре интервала. Определим знак выражения $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$, например, в последнем четвертом интервале.

Для точки $x = 4$ из этого промежутка получаем $\frac{(4-1)(4-2)}{4-3} > 0$.

При переходе к каждому следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков дроби $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$. Учтем, что $x \neq 3$ (т.к. делить на нуль нельзя). На основании диаграммы знаков получаем решение данного неравенства $x \in [1; 2] \cup (3; \infty)$.

Ответ: $[1; 2] \cup (3; \infty)$.

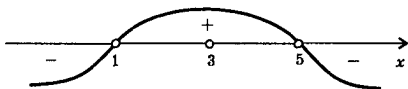
144в) Рациональное неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$ запишем в виде

$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0$ и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{(4-x)(1-x) - 1 \cdot (x-5)}{(x-5)(1-x)} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{4-4x-x+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)} > 0 \quad \text{или}$$

$\frac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0$ или $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$. Число $x = 3$ не является решением данного неравенства. При $x \neq 3$ выражение $(x-3)^2 > 0$ и данное неравенство эквивалентно квадратному неравенству $(x-5)(1-x) > 0$.

Решим это неравенство методом интервалов. Найдем значения x , при которых выражение $(x-5)(1-x)$ равно нулю: $x_1 = 5$ и $x_2 = 1$. Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на три интервала. Определим знак выражения $(x-5)(1-x)$, например, в последнем третьем промежутке. Для точки $x = 10$ из этого интервала получаем: $(10-5)(1-10) < 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения $(x-5)(1-x)$



меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков этого выражения. Учтем, что $x \neq 3$. На основании диаграммы запишем решение данного неравенства $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

Ответ: $(1; 3) \cup (3; 5)$.

145в) Для доказательства неравенства $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ найдем разность левой и правой частей. Получаем: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$, т.к. $a, b > 0$, то произведение $ab > 0$ и числитель $(a-b)^2 \geq 0$. Причем данное неравенство обращается в равенство только при $a = b$. **Ответ:** доказано.

146а) Так как левая часть уравнения $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$ неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т.е. $2x - 1 \geq 0$. Возведем обе неотрицательные части данного уравнения в квадрат: $x^2 + 2x + 10 = 4x^2 - 4x + 1$ или $0 = 3x^2 - 6x - 9$ или $0 = x^2 - 2x - 3$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Условию $2x - 1 \geq 0$ удовлетворяет только корень $x = 3$. **Ответ:** 3.

147а) Уравнение $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$ запишем в виде $\sqrt{x+17} = \sqrt{x-7} + 4$. Возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат: $x + 17 = x - 7 + 8\sqrt{x-7} + 16$ или $8 = 8\sqrt{x-7}$ или $1 = \sqrt{x-7}$. Вновь возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат: $1 = x - 7$, откуда $x = 8$. **Ответ:** 8.

147б) Для решения уравнения $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$ введем новую неизвестную $t = \sqrt[4]{x-1} \geq 0$. Получаем квадратное уравнение: $2t^2 + t = 3$ или $2t^2 + t - 3 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$ (не подходит, т.к. $t \geq 0$). Вернемся к старой неизвестной x и получим уравнение $\sqrt[4]{x-1} = 1$. Возведем обе части этого уравнения в четвертую степень: $x - 1 = 1$, откуда $x = 2$. **Ответ:** 2.

148а) Все члены уравнения $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$ умножим на $\sqrt{2+x}$. Получаем $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2+x} - 4 + 2 + x = 0$ или $\sqrt{2x+x^2} = 2-x$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x + x^2 = 4 - 4x + x^2$ или

$6x = 4$, откуда $x = \frac{2}{3}$. Легко проверить, что этот корень удовлетворяет данному уравнению. Ответ: $\frac{2}{3}$.

149а) Для решения уравнения $\sqrt{225 + x^2} = x^2 - 47$ введем новую неизвестную $t = \sqrt{225 + x^2}$. Тогда $t^2 = 225 + x^2$, откуда $x^2 = t^2 - 225$. Данное уравнение имеет вид: $t = t^2 - 225 - 47$ или $0 = t^2 - t - 272$. Корни этого уравнения $t_1 = 17$ и $t_2 = -16$ (не подходит, т.к. $t \geq 0$). Вернемся к старой неизвестно x и получим: $x^2 = t^2 - 225 = 17^2 - 225 = 289 - 225 = 64$, откуда $x = \pm 8$. Ответ: ± 8 .

150а) ОДЗ неравенства $\sqrt{x^2 - 5} \geq 2$ определяется условием $x^2 - 5 \geq 0$. Возведем обе неотрицательные части этого неравенства в квадрат: $x^2 - 5 \geq 4$ (тем более $x^2 - 5 \geq 0$) или $x^2 - 9 \geq 0$. Решая неравенство методом интервалов, найдем $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; \infty)$.

150б) Так как левая часть неравенства $\sqrt{(x-2)(1-2x)} > -1$ неотрицательна, а правая — отрицательна, то неравенство выполнено для всех x , входящих в ОДЗ. ОДЗ данного неравенства определяется условием $(x-2)(1-2x) \geq 0$. Решая это неравенство, например, методом интервалов, найдем $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

151а) В неравенстве $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 3$ подкоренное выражение является квадратом разности чисел. Поэтому данное неравенство эквивалентно неравенству $|x - 3| > 3$. С учетом свойств модуля числа это неравенство эквивалентно двум неравенствам: $x - 3 > 3$ (откуда $x > 6$) и $x - 3 < -3$ (откуда $x < 0$). Тогда $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$ — решение данного неравенства. Ответ: $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$.

151г) ОДЗ неравенства $\sqrt{2x - x^2 + 15} \cdot (3x - x^2 - 4) \leq 0$ определяется условием: $2x - x^2 + 15 \geq 0$ или $x^2 - 2x - 15 \leq 0$, решение которого $x \in [-3; 5]$. Значения $x = -3$ и $x = 5$ являются решениями данного неравенства. При $x \in (-3; 5)$ выражение $\sqrt{2x - x^2 + 15}$ положительно. Поэтому разделим обе части данного неравенства на это выражение (знак неравенства при этом сохраняется). Получим неравенство: $3x - x^2 - 4 \leq 0$ или $x^2 - 3x + 4 \geq 0$. Так как дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, то это неравенство выполняется для любых значений x . Следовательно, ОДЗ данного неравенства $x \in [-3; 5]$ является и его решением. Ответ: $[-3; 5]$.

152а) Для решения уравнения $\cos x + 2\cos 2x = 1$ используем формулу для косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Получаем: $\cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\cos x + \cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$ или $\cos x + \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$ или $4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \cos x$ и получим квадратное уравнение $4t^2 + t - 3 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{3}{4}$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем два уравнения: $\cos x = -1$ (решения $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$) и $\cos x = \frac{3}{4}$ (решения $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\pi + 2\pi k$; $\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

153а) Используем формулу для разности кубов чисел. Получаем: $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$ или $(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$ или $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 1 + \sin x \cos x$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и вынесем общий множитель за скобки: $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) - (1 + \sin x \cos x) = 0$ или $(1 + \sin x \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а) $1 + \sin x \cos x = 0$ или $1 + \frac{\sin 2x}{2} = 0$, откуда $\sin 2x = -2$. Это уравнение решений не имеет, т.к. $|\sin 2x| \leq 1$.

б) $\sin x - \cos x - 1 = 0$ или $\sin x - \cos x = 1$. Решим это уравнение методом введения вспомогательного угла. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$. Получаем: $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos \frac{\pi}{4} \times \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \times \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi l = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi l$ (где $n \in \mathbb{Z}$) и $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi l$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi l$, где $n \in \mathbb{Z}$.

153б) В уравнении $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ преобразуем левую часть в произведение: $2\cos \frac{\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4} + x}{2} = 1$

или $2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 1$ или $2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x = 1$, откуда $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

154а) Запишем уравнение $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ в виде $2\cos^2 x = 1 - \cos 4x$ и используем формулы понижения степени: $1 + \cos 2x = 2\sin^2 2x$ или $1 + \cos 2x = 2(1 - \cos^2 2x)$ или $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \cos 2x$ и получим квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем два уравнения: $\cos 2x = -1$ (откуда $2x = \pi + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\cos 2x = \frac{1}{2}$ (тогда $2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

155б) В уравнении $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ сгруппируем в левой части члены и разложим ее на множители: $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$ или $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$ или $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения: $\sin 2x = 0$ (тогда $2x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $2\cos x + 1 = 0$ (тогда $\cos x = -\frac{1}{2}$ и $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} n$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

156в) Для решения уравнения $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2\sin x$ введем новую неизвестную $t = \sin x$ и получим уравнение: $\frac{15}{t+1} = 11 - 2t$ или $15 = 11t + 11 - 2t^2 - 2t$ или $2t^2 - 9t + 4 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 4$ (не подходит, т.к. $t \leq 1$). Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$, решения которого $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

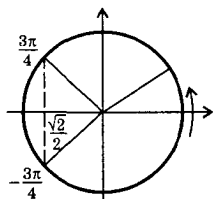
Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

157а) При решении уравнения $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$ запишем тангенсы через синусы и косинусы: $\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ или $\frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\cos 3x \cos x} = 0$ или $\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 0$ или $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 3x \cos x} = 0$ или $\frac{\sin x}{\cos 3x} = 0$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, т.е. $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$). Ответ: πn , где $n \in \mathbb{Z}$.

158а) Для решения уравнения $\arccos \frac{1+2x}{3} = \frac{2\pi}{3}$ используем определения арккосинуса и получим: $\frac{1+2x}{3} = \cos \frac{2\pi}{3}$ или $\frac{1+2x}{3} = -\frac{1}{2}$ или $2+4x = -3$ или $4x = -5$, откуда $x = -\frac{5}{4}$. Ответ: $-\frac{5}{4}$.

159а) При решении неравенства $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ используем формулу приведения и получим: $-\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Умножим обе части на отрицательное число (-1) . Знак неравенства меняется на

противоположный: $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решим это неравенство с помощью тригонометрического круга. На оси косинусов отложим значение $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и построим соответствующие углы $x = \pm \frac{3\pi}{4}$, для которых $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Видно, что решением неравенства будут значения $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Учтем периодичность функции косинус и

получим решение данного неравенства $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$,

где $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

160а) Для решения неравенства $2\sin^2 x \leq 1$ используем формулу понижения степени: $1 - \cos 2x \leq 1$ или $-\cos 2x \leq 0$. Умножим обе части на отрицательное число (-1) . При этом знак неравенства меняется на противоположный. Имеем $\cos 2x \geq 0$. Решая это неравенство, например, с помощью тригонометрического круга, получим

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi l \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi l$, откуда $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi l; \frac{\pi}{4} + \pi l\right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi l; \frac{\pi}{4} + \pi l\right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

161а) Неравенство $|\cos x - 1| \leq 0,5$ эквивалентно двойному неравенству $-0,5 \leq \cos x - 1 \leq 0,5$. Ко всем частям прибавим число 1 и получим неравенство $0,5 \leq \cos x \leq 1,5$. Правая часть неравенства выполняется при всех x . Поэтому двойное неравенство эквивалентно неравенству $\cos x \geq 0,5$. Решая это неравенство, получим $x \in$

$\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{\pi}{3} + 2\pi l\right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{\pi}{3} + 2\pi l\right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

162б) ОДЗ неравенства $\log_{0,5} \sin x > 1$ задается условием $\sin x > 0$. Запишем неравенство в виде $\log_{0,5} \sin x > \log_{0,5} 0,5$. Так как основные логарифмов 0,5 меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака $\sin x < 0,5$. Таким образом, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0 < \sin x < 0,5$. Решая это

неравенство, находим $x \in \left[2\pi l; \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi l; \pi + 2\pi l\right]$, где

$l \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\left[2\pi l; \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi l; \pi + 2\pi l\right]$, где $l \in \mathbb{Z}$.

163а) Используя свойства степеней, запишем правую часть уравнения $0,2^{x^2-16x-37,5} = 5\sqrt{5}$ в виде степени числа $\frac{1}{5} = 0,2$. Получаем: $0,2^{x^2-16x-37,5} = 5^{\frac{3}{2}} = 0,2^{-1,5}$. Так как равны степени (с одинаковым основанием 0,2), то равны и показатели степеней: $x^2 - 16x - 37,5 = -1,5$ или $x^2 - 16x - 36 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 18$ и $x_2 = -2$. Ответ: 18; -2.

164а) Для решения уравнения $5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 60$ в правой части вынесем множитель 5^{3x-2} за скобки: $5^{3x-2}(5^2 - 2 \cdot 5 - 3) = 60$ или $5^{3x-2} \cdot 12 = 60$ или $5^{3x-2} = 5$, откуда $3x - 2 = 1$ и $x = 1$.

Ответ: 1.

165б) Запишем уравнение $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} = 7 \cdot 5^x$ в виде $5 \cdot (5^x)^3 + 34 \cdot (5^x)^2 = 7 \cdot 5^x$ и введем новую неизвестную $t = 5^x > 0$. Получаем кубическое уравнение $5t^3 + 34t^2 = 7t$ или $5t^3 + 34t^2 - 7t = 0$. Так как $t \neq 0$, то разделим все члены на t и получим квадратное урав-

нение $5t^2 + 34t - 7 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = \frac{1}{5}$ и $t_2 = -7$ (не подходит, т.к. $t > 0$). Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение $5^x = \frac{1}{5}$, откуда $x = -1$. **Ответ:** -1 .

166г) Все члены уравнения $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ разделим на выражение $36^x \neq 0$. Получаем: $3 \cdot \left(\frac{16}{36}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{81}{36}\right)^x = 5$ или $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5$. Введем новую неизвестную $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$ и получим уравнение: $3t + \frac{2}{t} = 5$ или $3t^2 - 5t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ (откуда $x = 0$) и $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ (тогда $x = \frac{1}{2}$). **Ответ:** $0; \frac{1}{2}$.

167в) Используем основное тригонометрическое тождество и запишем уравнение $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$ в виде: $2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3$ или $2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 3$. Введем новую неизвестную $t = 2^{\sin^2 x} > 0$ и получим уравнение: $t + \frac{2}{t} = 3$ или $t^2 - 3t + 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения: $2^{\sin^2 x} = 1$ (тогда $\sin^2 x = 0$ или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $2^{\sin^2 x} = 2$ (тогда $\sin^2 x = 1$ или $\sin x = \pm 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$). Решения $x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ можно объединить формулой $x = \frac{\pi}{2} m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

168а) Для решения неравенства $\frac{16}{\sqrt{32}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$ запишем его левую часть в виде степени числа $\frac{1}{2}$: $\frac{16}{\sqrt{32}} = \frac{2^4}{\sqrt{2^5}} = \frac{2^4}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$. Тогда данное неравенство имеет вид: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$. Так как основание степеней $\frac{1}{2}$ меньше единицы (показательная функция убы-

вающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака: $-\frac{3}{2} \geq 3 + x$, откуда $x \geq -\frac{9}{2}$. Ответ: $\left[-\frac{9}{2}; \infty\right)$.

169а) Неравенство $0,04^x - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0$ запишем в виде $(0,2^x)^2 - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0$ и введем новую неизвестную $t = 0,2^x$. Получаем квадратное неравенство $t^2 - 26t + 25 \leq 0$, решение которого $1 \leq t \leq 25$. Вернемся к старой неизвестной x и получим неравенство: $1 \leq 0,2^x \leq 25$ или $5^0 \leq 5^{-x} \leq 5^2$. Так как основание степеней 5 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $0 \leq -x \leq 2$. Умножим все части неравенства на отрицательное число (-1) . При этом знак неравенства меняется на противоположный: $0 \geq x \geq -2$.

Ответ: $[-2; 0]$.

170а) Так как $3^x > 0$ при любых значениях x , то разделим все члены неравенства $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$ на выражение 3^x . Знак неравенства сохраняется, и получаем квадратное неравенство $x^2 - 3 \leq 0$, решение которого $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. Ответ: $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

170г) Для решения неравенства $2^{x^2-2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x-1} - 5^{x+2}$ разложим его части на множители: $2^{x^2-2}(1 - 2 - 2^2) > 5^{x-1}(1 - 5)$ или $2^{x^2-2}(-5) > 5^{x-1}(-4)$. Умножим обе части на отрицательное число (-1) . Знак неравенства меняется на противоположный $2^{x^2-2} \cdot 5 < 5^{x-1} \cdot 4$. Разделим обе части на положительное число $2^2 \cdot 5$ и получим: $\frac{2^{x^2-2} \cdot 5}{2^2 \cdot 5} < \frac{5^{x-1} \cdot 4}{2^2 \cdot 5}$ или $2^x < 5^x$. Разделим обе части на по-

ложительное выражение 5^x . Имеем: $\frac{2^x}{5^x} < 1$ или $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$. Так как основание степеней $\frac{2}{5}$ меньше единицы (показательная функция убывающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака: $x > 0$. Ответ: $(0; \infty)$.

171а) При решении уравнения $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$ введем новую неизвестную $t = \log_3 x$ и получим квадратное уравнение: $t^2 = 4 - 3t$ или $t^2 + 3t - 4 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = -4$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения: $\log_3 x = 1$ (тогда по определению $x = 3^1 = 3$) и $\log_3 x = -4$ (тогда $x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$).

Ответ: $3; \frac{1}{81}$.

171в) ОДЗ уравнения $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$ определяется условиями: $x - 5 > 0$ и $2x - 3 > 0$, откуда $x > 5$. Используя свойства

логарифма, получаем: $\log_3(\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3}) = 1$ или $\sqrt{(x-5)(2x-3)} = 3$. Возведем в квадрат обе части этого уравнения: $(x-5)(2x-3) = 9$ или $2x^2 - 13x + 6 = 0$. Корни квадратного уравнения $x_1 = 6$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ (не входит в ОДЗ). **Ответ:** 6.

1726) Уравнение $\lg(3^x + x - 17) = x \lg 30 - x$ запишем в виде: $\lg(3^x + x - 17) = \lg 30^x - \lg 10^x$ или $\lg(3^x + x - 17) = \lg \frac{30^x}{10^x}$ или $\lg(3^x + x - 17) = \lg 3^x$, откуда $3^x + x - 17 = 3^x$ и $x = 17$. **Ответ:** 17.

1736) В уравнении $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ вычислим $\log_{\sqrt{x}} x = 2$ и перейдем к основанию 3. Получаем: $\log_3 x + 2 - \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 6$ или $\log_3 x + 2 + \log_3 x = 6$ или $2\log_3 x = 4$ или $\log_3 x = 2$. Тогда по определению логарифма $x = 3^2 = 9$. **Ответ:** 9.

1746) Прологарифмируем обе части уравнения $x^{\log_5 x} = 125x^2$ по основанию 5. Получаем: $\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5(125x^2)$ или $\log_5 x \cdot \log_5 x = \log_5 125 + \log_5 x^2$ или $\log_5^2 x = 3 + 2\log_5 x$. Введем новую неизвестную $t = \log_5 x$ и получим квадратное уравнение: $t^2 = 3 + 2t$ или $t^2 - 2t - 3 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения: $\log_5 x = -1$ (тогда $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$) и $\log_5 x = 3$ (откуда $x = 5^3 = 125$). **Ответ:** $\frac{1}{5}$; 125.

175а) Для решения уравнения $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$ используем формулу понижения степени и свойства логарифмов. Получаем: $3\log_2^2 \sin x + \log_2(2\sin^2 x) = 2$ или $3\log_2^2 \sin x + \log_2 2 + \log_2 \sin^2 x = 2$ или $3\log_2^2 \sin x + 1 + 2\log_2 \sin x = 2$ или $3\log_2^2 \sin x + 2\log_2 \sin x - 1 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \log_2 \sin x$ и получим квадратное уравнение $3t^2 + 2t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем два уравнения.

а) $\log_2 \sin x = -1$, тогда $\sin x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ и $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

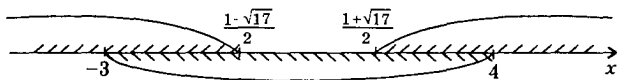
б) $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$, тогда $\sin x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Это уравнение решений не имеет, т.к. $\sin x \leq 1$.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

176а) ОДЗ неравенства $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$ определяется условием $x^2 - x - 4 > 0$. Запишем неравенство в виде $\log_2(x^2 - x - 4) < \log_2 8$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака $x^2 - x - 4 < 8$. Таким образом, данное неравенство эквивалентно системе квадратных неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 4 > 0 \\ x^2 - x - 4 < 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - x - 4 > 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}. \text{ Решение первого неравенства}$$

$x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$ изображено на диаграмме сверху.



Решение второго неравенства $x \in (-3; 4)$ изображено снизу. Видно, что система неравенств (а, следовательно, и данное неравенство) выполняется при $x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$.

$$\text{полняется при } x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$.

177б) ОДЗ неравенства $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geq -1$ задается условиями: $10 - x > 0$ и $x - 3 > 0$, откуда $x \in (3; 10)$. Используя свойства логарифмов, запишем неравенство в виде $\log_{\frac{1}{6}}((10 - x) \times (x - 3)) \geq \log_{\frac{1}{6}} 6$. Так как основание логарифмов $\frac{1}{6}$ меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака: $(10 - x)(x - 3) \leq 6$ или $10x - 30 - x^2 + 3x \leq 6$ или $0 \leq x^2 - 13x + 36$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (-\infty; 4] \cup [9; \infty)$. С учетом ОДЗ получаем решение данного неравенства $x \in (3; 4] \cup [9; 10)$.

Ответ: $(3; 4] \cup [9; 10)$.

180а) Систему линейных неравенств $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ решим методом подстановки. Из первого уравнения выразим $y = \frac{-1 - 2x}{3}$ и

подставим во второе: $5x + 4 \cdot \frac{-1 - 2x}{3} = 1$. Умножим все члены

уравнения на 3 и получим: $15x - 4 - 8x = 3$ или $7x = 7$, откуда $x = 1$.

Теперь найдем $y = \frac{-1 - 2x}{3} = \frac{-1 - 2 \cdot 1}{3} = -1$. **Ответ:** (1; -1).

181a) В системе уравнений $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$ сначала упростим пер-

вое уравнение. Для этого введем новую неизвестную $t = \frac{y}{x}$ и полу-

чим уравнение: $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$ или $6t^2 - 13t + 6 = 0$. Корни этого урав-

нения $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Вернемся к старым неизвестным. Имеем две системы уравнений.

а) $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ x + y = 5 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во

второе: $x + \frac{3}{2}x = 5$ или $\frac{5}{2}x = 5$, откуда $x = 2$. Тогда $y = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

б) $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \\ x + y = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x + y = 5 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во

второе: $x + \frac{2}{3}x = 5$ или $\frac{5}{3}x = 5$, откуда $x = 3$. Тогда $y = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

Таким образом, система имеет два решения (2; 3) и (3; 2).

Ответ: (2; 3), (3; 2).

182б) Разложим левые части уравнений системы

$$\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4 \end{cases} \text{ на множители} \quad \begin{cases} x^2y^2(y+x) = 12 \\ x^2y^2(y-x) = 4 \end{cases} \text{ и разделим}$$

уравнения почленно друг на друга: $\frac{x^2y^2(y+x)}{x^2y^2(y-x)} = \frac{12}{4}$ или $\frac{y+x}{y-x} = 3$

или $y+x = 3y-3x$ или $4x = 2y$, откуда $y = 2x$. Подставим это соотношение, например, в первое уравнение: $x^2 \cdot (2x)^3 + x^3(2x)^2 = 12$ или $8x^5 + 4x^5 = 12$, откуда $x^5 = 1$ и $x = 1$. Тогда $y = 2x = 2 \cdot 1 = 2$.

Ответ: (1; 2).

183а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \end{cases}$ введем но-

вые неизвестные $t = x^3$ и $z = y^3$. Получаем систему $\begin{cases} t + z = 7 \\ tz = -8 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $z = 7 - t$ и подставим во второе: $t(7 - t) = -8$ или $0 = t^2 - 7t - 8$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = -1$ (тогда $z_1 = 8$) и $t_2 = 8$ (тогда $z_2 = -1$). Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем две системы уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x^3 = -1 \\ y^3 = 8 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = \sqrt[3]{-1} = -1 \\ y = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^3 = 8 \\ y^3 = -1 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x = \sqrt[3]{8} = 2 \\ y = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1; 2)$, $(2; -1)$.

184а) Для решения системы линейных уравнений $\begin{cases} x - 5y = 7 \\ ax - y = -3 \end{cases}$

из первого уравнения выразим $x = 5y + 7$ и подставим во второе: $a(5y + 7) - y = -3$ или $5ay + 7a - y = -3$ или $y(5a - 1) = -7a - 3$.

Если коэффициент при y не равен нулю (т.е. $5a - 1 \neq 0$ или $a \neq \frac{1}{5}$), то уравнение (следовательно, и данная система) имеет единственное

решение. Если $a = \frac{1}{5}$, то подставим это значение в уравнение и получим $y \cdot 0 = -\frac{7}{5} - 3$. Очевидно, что это уравнение (и данная система) решений не имеет.

Ответ: при $a \neq \frac{1}{5}$ — единственное решение, при $a = \frac{1}{5}$ — решений нет.

185а) Для решения системы неравенств $\begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x - 2}{11} \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x - 7) < \frac{3x - 20}{9} \end{cases}$

решим каждое из неравенств и найдем значения x , удовлетворяющие сразу обоим неравенствам. Умножим первое неравенство на положительное число 11, второе неравенство — на положительное число 18. При этом знаки неравенств сохраняются. Получаем:

$$\begin{cases} 22x > 33 - 13x + 2 \\ 3x + 12x - 84 < 6x - 40 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 35x > 35 \\ 9x < 44 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{44}{9} = 4\frac{8}{9} \end{cases}. \text{ Тог-}$$

да решение системы неравенств $x \in \left(1; 4\frac{8}{9}\right)$. Ответ: $\left(1; 4\frac{8}{9}\right)$

187а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$ введем новые неизвестные $z = \sqrt{x}$ и $t = \sqrt{y}$ (тогда $z^2 = x$ и $t^2 = y$). Получаем систему уравнений $\begin{cases} z^2t + zt^2 = 30 \\ z + t = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} zt(z+t) = 30 \\ z + t = 5 \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе: $\frac{zt(z+t)}{z+t} = \frac{30}{5}$ или $zt = 6$. Теперь

имеем систему уравнений $\begin{cases} zt = 6 \\ z + t = 5 \end{cases}$. Из второго уравнения выразим $z = 5 - t$ и подставим в первое: $(5 - t)t = 6$ или $0 = t^2 - 5t + 6$. Корни этого уравнения $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, тогда $z_1 = 5 - t_1 = 3$ и $z_2 = 2$. Вернемся к старым неизвестным x и y и получим две системы.

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x = 3^2 = 9 \\ y = 2^2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}.$$

Ответ: (9; 4), (4; 9).

189а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25 \\ \sin y \cos x = 0,75 \end{cases}$ сложим и вычтем уравнения системы. Получаем:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -0,5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - y = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases}. \text{ Сложим и вычтем уравнения этой системы}$$

$$\text{мы } \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n - (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} k \end{cases}, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k; \frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} k\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

189г) Сложим уравнения системы $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \sin y \end{cases}$ и получим: $\sin^2 x + \cos^2 x = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ или $1 = \cos(x - y)$, откуда $x - y = 2\pi n$. Выразим $x = y + 2\pi n$ и подставим в первое уравнение: $\sin^2(y + 2\pi n) = \cos(y + 2\pi n) \cos y$ или $\sin^2 y = \cos^2 y$ или $0 = \cos^2 y - \sin^2 y$ или $0 = \cos 2y$. Решения этого уравнения $2y = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$. Тогда $x = y + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k + 2\pi n$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} k + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

190б) Из первого уравнения системы $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2} \\ \sin x + \cos 2y = -1 \end{cases}$ выразим $x = \frac{5\pi}{2} - y$ и подставим во второе: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - y\right) + \cos 2y = -1$ или $\cos y + 1 + \cos 2y = 0$ или $\cos y + 2\cos^2 y = 0$ или $\cos y(1 + 2\cos y) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем две системы уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ \cos y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 2\pi - \pi n \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ 1 + 2\cos y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(2\pi - \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \left(\frac{5\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} - 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

191а) Систему уравнений $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ запишем в виде

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3 \\ 3^{x-y-1} = 3^0, \text{ откуда } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \end{cases} \text{ Сложим и вычтем}$$

эти линейные уравнения и получим: $2x = 4$ (тогда $x = 2$) и $2y = 2$ (откуда $y = 1$). Ответ: (2; 1).

191г) Из второго уравнения системы $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ x - y = 3 \end{cases}$ выразим $x = y + 3$ и подставим в первое: $3^{y+3} + 3^y = 28$ или $3^y(3^3 + 1) = 28$ или $3^y \cdot 28 = 28$ или $3^y = 1$, откуда $y = 0$. Тогда $x = y + 3 = 3$.

Ответ: (3; 0).

192б) Для решения системы уравнений $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 5 \end{cases}$. Введем новые неизвестные $z = 2^x$

и $t = 3^y$. Тогда система имеет вид $\begin{cases} z + t = 17 \\ 4z - 3t = 5 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $z = 17 - t$ и подставим во второе: $4(17 - t) - 3t = 5$ или $68 - 4t - 3t = 5$ или $63 = 7t$, откуда $t = 9$. Тогда $z = 17 - 9 = 8$. Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем систему уравнений:

$\begin{cases} 2^x = 8 \\ 3^y = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^x = 2^3 \\ 3^y = 3^2 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$. Ответ: (3; 2).

194а) При решении системы уравнений $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases}$ введем новые неизвестные $z = \lg x$ и $t = \lg y$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} z - t = 1 \\ z^2 + t^2 = 5 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $z = t + 1$ и подставим во второе: $(t + 1)^2 + t^2 = 5$ или $t^2 + 2t + 1 + t^2 = 5$ или $t^2 + t - 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 1$ (тогда $z_1 = t_1 + 1 = 2$) и $t_2 = -2$ (тогда $z_2 = t_2 + 1 = -1$). Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем две системы уравнений.

а) $\begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg y = 1 \end{cases}$, откуда по определению логарифма $\begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ y = 10^1 = 10 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} \lg x = -2 \\ \lg y = -1 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} x = 10^{-2} = \frac{1}{100} \\ y = 10^{-1} = \frac{1}{10} \end{cases}$.

Ответ: (100; 10), $\left(\frac{1}{100}; \frac{1}{10}\right)$.

1946) Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения

системы $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$. Получаем: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^5 \\ \frac{2\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 y = 4 \text{ или} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \text{ или} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ \log_2(xy) = 4 \text{ или} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ xy = 16 \end{cases}$. Умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем из первого. Имеем:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ 2xy = 32 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ xy = 16 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 16 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y = 0 \\ xy = 16 \end{cases}$.

Из первого уравнения выразим $y = x$ и подставим во второе: $x \cdot x = 16$ или $x^2 = 16$. Учтем, что $x > 0$, и найдем $x = 4$ (тогда $y = 4$).

Ответ: (4; 4).

1956) Преобразуем уравнения системы

$\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)} = 15 \\ \log_3(x^2-y^2) - \log_3(x-y) = 0 \end{cases}$. Получаем $\begin{cases} 3^1 \cdot 3^{\log_3(x^2+y^2)} = 15 \\ \log_3(x^2-y^2) = \log_3(x-y) \end{cases}$

или $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = x - y \end{cases}$. Так как $x - y \neq 0$, то разделим обе части второго уравнения на выражение $(x - y)$. Имеем систему уравнений

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Из второго уравнения выразим $y = 1 - x$ и подставим

в первое: $x^2 + (1 - x)^2 = 5$ или $x^2 - x - 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -1$ (тогда $y_1 = 1 - x_1 = 2$) и $x_2 = 2$ (тогда $y_2 = -1$). Очевидно, что решение $(-1; 2)$ не подходит, т.к. $x - y < 0$. Таким образом, система имеет единственное решение $(2; -1)$. Ответ: (2; -1).

197) Пусть x (км/ч) — скорость автобуса по старому расписанию. Тогда расстояние 325 км он проходит за время $\frac{325}{x}$ часов. По новому расписанию скорость автобуса на 10 км/ч больше, т.е. $x + 10$ (км/ч). Тогда это же расстояние он проходит за время $\frac{325}{x + 10}$ часов. По условию время движения по новому расписанию стало на 40 минут ($\frac{2}{3}$ часа) меньше. Поэтому получаем уравнение:

$\frac{325}{x + 10} = \frac{325}{x} - \frac{2}{3}$. Умножим все члены на выражение $3x(x + 10)$.

Имеем: $325 \cdot 3x = 325 \cdot 3(x + 10) - 2x(x + 10)$ или $975x = 975x + 9750 - 2x^2 - 20x$ или $x^2 + 10x - 4875 = 0$. Корни этого квадратного урав-

нения $x_1 = 65$ и $x_2 = -75$ (не подходит). Тогда скорость автобуса по новому расписанию $65 + 10 = 75$ (км/ч). Ответ: 75 км/ч.



200) Теплоходы движутся по перпендикулярным направлениям. Пусть скорость одного x (км/ч), другого — $x + 6$ (км/ч) и A — место встречи теплоходов. Тогда за 2 часа после встречи один теплоход прошел расстояние $AB = 2x$, другой — расстояние $AC = 2(x + 6)$. По условию расстояние между теплоходами $BC = 60$ (км). Для $\triangle ABC$ запишем теорему Пифагора: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ или $60^2 = 4x^2 + 4(x + 6)^2$ или $900 = x^2 + x^2 + 12x + 36$ или $0 = x^2 + 6x - 432$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 18$ и $x_2 = -24$ (не подходит). Тогда скорость другого теплохода $18 + 6 = 24$ (км/ч).

Ответ: 18 и 24 км/ч.

203) Пусть надо посадить A деревьев, первая бригада ежедневно сажала x деревьев, вторая — y деревьев. Так как две бригады за 4 дня посадили все деревья, то имеем первое уравнение: $4x + 4y = A$. Первая бригада может посадить все деревья за $\frac{A}{x}$ дней, вторая бригада — за $\frac{A}{y}$ дней. Известно, что первая бригада затратит на посадку деревьев на 6 дней меньше. Получаем второе уравнение: $\frac{A}{x} = \frac{A}{y} - 6$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} 4x + 4y = A \\ \frac{A}{x} = \frac{A}{y} - 6 \end{cases}$. Подставим первое

уравнение во второе: $\frac{4x + 4y}{x} = \frac{4x + 4y}{y} - 6$ или $4 + 4\frac{y}{x} = 4\frac{x}{y} + 4 - 6$

или $0 = 2\frac{x}{y} - 2\frac{y}{x} - 3$. Введем новую неизвестную $t = \frac{x}{y}$ и получим

уравнение: $0 = 2t - 2 \cdot \frac{1}{t} - 3$ или $0 = 2t^2 - 3t - 2$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 2$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$ (не подходит). Итак, $\frac{x}{y} = 2$, откуда

$x = 2y$. Подставим эту величину в первое уравнение: $4 \cdot 2y + 4y = A$, откуда $A = 12y$. Тогда вторая бригада может посадить все деревья за $\frac{A}{y} = \frac{12y}{y} = 12$ дней, а первая — на 6 дней быстрее, т.е.

$12 - 6 = 6$ дней. Ответ: 6 дней и 12 дней.

205) Пусть первый кусок латуни весит x (кг) и содержит 5 кг чистой меди. Тогда процентное содержание меди в этом куске $\frac{5}{x} \cdot 100$. Второй кусок латуни весит $30 - x$ (кг) и содержит 4 кг чистой меди. Процентное содержание меди в этом куске $\frac{4}{30 - x} \cdot 100$. Процентное содержание меди во втором куске на 15% больше, чем в первом. Получаем уравнение: $\frac{400}{30 - x} = \frac{500}{x} + 15$ или $\frac{80}{30 - x} = \frac{100}{x} + 3$. Умножим все члены уравнения на выражение $x(30 - x)$. Имеем: $80x = 100(30 - x) + 3x(30 - x)$ или $80x = 3000 - 100x + 90x - 3x^2$ или $x^2 + 30x - 1000 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 20$ и $x_2 = -50$ (не подходит). Теперь найдем процентное содержание меди в первом куске: $\frac{5}{20} \cdot 100 = 25\%$. **Ответ:** 25%.

208) Пусть v (м/с) — скорость поезда, L (м) — его длина. Так как поезд проходит мимо наблюдателя за 7 с, то получаем первое уравнение: $L = 7 \cdot v$. Мимо платформы длиной 378 м поезд проезжает за 25 с. Имеем второе уравнение: $L + 378 = 25 \cdot v$. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} L = 7v \\ L + 378 = 25v \end{cases}$. Из второго уравнения вычтем первое: $378 = 18v$, откуда $v = 21$ (м/с). Из первого уравнения найдем длину поезда $L = 7 \cdot 21 = 147$ (м).

Ответ: 21 м/с, 147 м.

210) Пусть изготовлено x двигателей типа A и y двигателей типа B . Тогда на двигатели A затрачено $2x$ (кг) меди, а на двигатели B — $3y$ (кг) меди. Так как всего было израсходовано 130 кг меди, то получаем первое уравнение: $2x + 3y = 130$. На двигатели A затрачено x (кг) свинца, а на двигатели B — $2y$ (кг) свинца. Так как было израсходовано 80 кг свинца, то имеем второе уравнение: $x + 2y = 80$. Получили систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 130 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \quad \text{Из второго уравнения выразим } x = 80 - 2y \text{ и под-}$$

ставим в первое: $2(80 - 2y) + 3y = 130$ или $160 - 4y + 3y = 130$, откуда $y = 30$. Тогда найдем $x = 80 - 2y = 20$. **Ответ:** 20; 30.

211) Пусть объем всего задания A (деталей). Для определенности будем считать, что изготавливаются детали. Пусть ежедневно первый рабочий делает x (деталей), второй рабочий — y (деталей). За 12 дней рабочие сделают $12x + 12y$ деталей. Получаем первое уравнение: $12x + 12y = A$. Если половину задания делает первый

рабочий, то он затратит $\frac{A}{2x}$ дней. На вторую половину задания второй рабочий затратит $\frac{A}{2y}$ дней. Тогда задание будет выполнено за 25 дней. Имеем второе уравнение: $\frac{A}{2x} + \frac{A}{2y} = 25$. Получили

систему уравнений
$$\begin{cases} 12x + 12y = A \\ \frac{A}{2x} + \frac{A}{2y} = 25 \end{cases}$$
. Подставим первое уравнение во второе:

$\frac{12x + 12y}{2x} + \frac{12x + 12y}{2y} = 25$ или $6 + 6\frac{y}{x} + 6\frac{x}{y} + 6 = 25$ или $6\frac{y}{x} + 6\frac{x}{y} - 13 = 0$. Введем новую переменную $t = \frac{y}{x}$. Тогда уравнение имеет вид: $6t + \frac{6}{t} - 13 = 0$ или $6t^2 - 13t + 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Рассмотрим два случая.

а) $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ или $y = \frac{3}{2}x$. Подставим это соотношение в первое уравнение: $12x + 12 \cdot \frac{3}{2}x = A$ или $30x = A$. Тогда первый рабочий сделает работу за $\frac{A}{x} = \frac{30x}{x} = 30$ дней. Так как производительность второго рабочего в $\frac{3}{2}$ раза больше, то он сделает работу за $\frac{30}{3/2} = 20$ дней.

б) $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ или $y = \frac{2}{3}x$. Подставим это соотношение в первое уравнение: $12x + 12 \cdot \frac{2}{3}x = A$ или $20x = A$. Тогда первый рабочий сделает задание за $\frac{A}{x} = \frac{20x}{x} = 20$ дней. Так как производительность второго рабочего составляет $\frac{2}{3}$ производительности первого, то он затратит $\frac{20}{2/3} = 30$ дней. **Ответ:** 20 и 30 дней.

215) Пусть дано двузначное число $10x + y$ (где x — цифра десятков, y — цифра единиц). Так как сумма квадратов цифр равна 13, то получаем первое уравнение $x^2 + y^2 = 13$. Если из данного числа $10x + y$ вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, т.е. $10y + x$. Имеем второе уравнение: $10x + y - 9 = 10y + x$.

Получили систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 10x + y - 9 = 10y + x \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - 1 = y \end{cases}$$
. Подставим второе уравнение в первое: $x^2 - (x-1)^2 = 13$

или $x^2 + x^2 - 2x + 1 = 13$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$ (не подходит). Тогда $y = x - 1 = 2$. Итак, данное число — 23. Ответ: 23.

§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения

218а) Пусть аргумент функции $f(x) = 1 - 4x$ изменился на Δx и стал равен $x = x_0 + \Delta x = 3 + \Delta x$. Найдем изменение функции $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 1 - 4 \cdot (3 + \Delta x) - (1 - 4 \cdot 3) = 1 - 12 - 4\Delta x - 1 + 12 = -4\Delta x$.

Отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4$ величина постоянная и не зависит от Δx . Тогда иско-
мая производная равна (-4). Ответ: -4.

219в) Используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем: $f'(x) = ((x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2))' = (x^2 + 5)' \times (x^3 - 2x + 2) + (x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2)' = 2x(x^3 - 2x + 2) + (x^2 + 5)(3x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2 + 4x + 3x^4 - 2x^2 + 15x^2 - 10 = 5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$.

Ответ: $5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$.

220в) Используем правило нахождения производной для частного функций. Получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 - 3x}{1 - 2x} \right)' = \frac{(x^3 - 3x)'(1 - 2x) - (x^3 - 3x)(1 - 2x)'}{(1 - 2x)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - 3)(1 - 2x) - (x^3 - 3x)(-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{3x^2 - 6x^3 - 3 + 6x + 2x^3 - 6x}{(1 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-4x^3 + 3x^2 - 3}{(1 - 2x)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{-4x^3 + 3x^2 - 3}{(1 - 2x)^2}. \end{aligned}$$

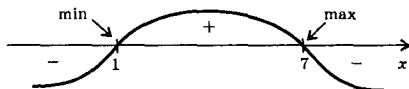
222б) Функцию $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2} + \frac{1}{(2x - 1)^3}$ запишем в виде $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{4}} + (2x - 1)^{-3}$. Используем правило нахождения производной сложной функции. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (1 + x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (1 + x^2)' - 3 \cdot (2x - 1)^{-4} \cdot (2x - 1)' = \frac{1}{4} (1 + x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x - 3(2x - 1)^{-4} \cdot 2 = \frac{x}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}} - \frac{6}{(2x-1)^4}$. Ответ: $\frac{x}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}} - \frac{6}{(2x-1)^4}$.

223б) Сначала найдем производную функции $f(x) = 1,5\sin 2x - 5\sin x - x$. Получаем: $f'(x) = 1,5\cos 2x \cdot 2 - 5\cos x - 1 = 3\cos 2x - 5\cos x - 1$. Приравняем производную нулю. Имеем тригонометрическое уравнение $3\cos 2x - 5\cos x - 1 = 0$. Для решения уравнения используем формулу понижения степени $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, откуда $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Тогда уравнение имеет вид: $3(2\cos^2 x - 1) - 5\cos x - 1 = 0$ или $6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \cos x$ и получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t - 4 = 0$, корни которого $t_1 = -\frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{4}{3}$ (не подходит, т.к. $\cos x \leq 1$). Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

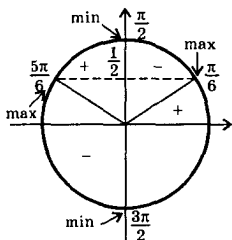
230а) Найдем производную функции $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$.

Получаем: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 7 = -x^2 + 8x - 7$. Приравняем производную нулю и найдем критические точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$. На координатной оси отметим эти точки и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что функция $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[7; \infty)$ и возрастает на промежутке $[1; 7]$. Точка



$x = 1$ — точка минимума, точка $x = 7$ — точка максимума функции $f(x)$.

Ответ: промежутки убывания $(-\infty; 1]$ и $[7; \infty)$; промежуток возрастания $[1; 7]$, $x = 1$ — точка минимума, $x = 7$ — точка максимума.

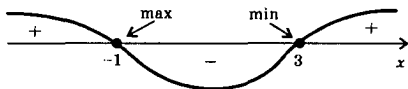


231в) Найдем производную функции $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. Получаем: $f'(x) = 2\cos x - \sin 2x \cdot 2 = 2\cos x - 4\sin x \cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$. Приравняем производную нулю и найдем критические точки сначала на промежутке $[0; 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$. Определим, например, знак производной $f'(x)$ при $x = 0$:

$f'(0) = 2\cos 0 \cdot (1 - 2\sin 0) = 2 > 0$. Тогда легко изобразить знаки производной и точки максимума и минимума. Учтем, что функции $f(x)$ и $f'(x)$ периодические с периодом 2π . Из рисунка видно, что промежутки возрастания $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right]$, промежутки убывания $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right]$ и $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi l\right]$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ — точки максимума, $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$ — точки минимума. **Ответ:** см. решение.

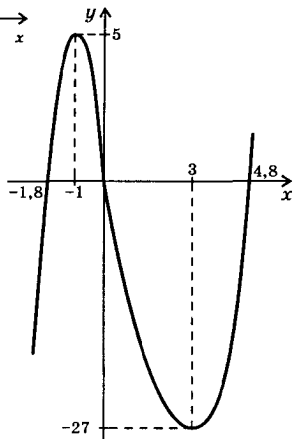
232в) Область определения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, $D(f) = R$. Область значений этой функции $E(f) = R$. График функции $f(x)$ проходит через начало координат. Найдем также точки пересечения графика функции с осью абсцисс. Положим $f(x) = 0$ и получим кубическое уравнение: $0 = x(x^2 - 3x - 9)$. Случай $x = 0$ уже был рассмотрен. Решим квадратное уравнение $0 = x^2 - 3x - 9$, его корни $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3 \pm 6,6}{2}$, т.е. $x_1 \approx 4,8$ и $x_2 \approx -1,8$.

Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции $f(x)$: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Отложим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что



функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[3; \infty)$, убывает на промежутке $[-1; 3]$. В точке $x = -1$ данная функция достигает максимума и его значение $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 5$. В точке $x = 3$ функция имеет минимум и его значение $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = -27$. Отметив характерные точки, построим график данной функции.

Ответ: см. решение.



232г) Область определения функции $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, область значений функции $E(f) = (-\infty; +\infty)$. График функции проходит через начало координат. Функция имеет вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 2$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

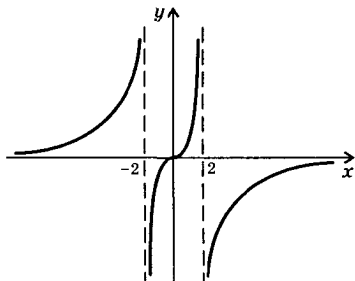
$$\text{Найдем производную функции } f'(x) = \frac{(x)(4-x^2) - x(4-x^2)'}{(4-x^2)^2} = \frac{1 \cdot (4-x^2) + x \cdot 2x}{(4-x^2)^2} = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}.$$

Видно, что в области определения

$f'(x) > 0$. Поэтому функция возрастает в области $D(f)$. Функция не имеет критических точек (поэтому не имеет максимума и минимума). Учтем, что функция $f(x)$ — не-

четная, т.к. $f(-x) = \frac{-x}{4-(-x)^2} = -\frac{x}{4-x^2} = -f(x)$. Учитывая особенности функции, построим ее график.

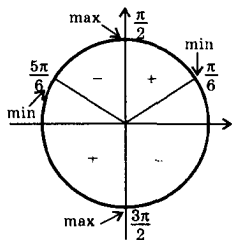
Ответ: см. решение.



233г) Область определения функции $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ $D(f) = R$. График функции проходит через начало координат. Найдем точки пересечения графика с осью абсцисс. Получаем уравнение: $0 = \sin^2 x - \sin x$ или $0 = \sin x (\sin x - 1)$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Имеем уравнения: $\sin x = 0$ (решения $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) и $\sin x - 1 = 0$ (решения $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$). Учтем, что функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π .

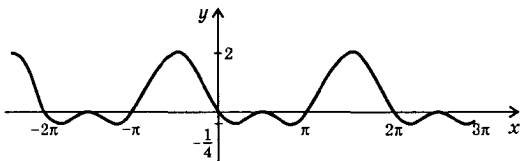
Найдем производную $f'(x) = 2\sin x \cos x - \cos x = \cos x (2\sin x - 1)$.

Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции. Имеем уравнения. $\cos x = 0$ (его решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$) и $2\sin x - 1 = 0$ (решения $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$). Отметим эти точки на тригонометрическом круге для промежутка $[0; 2\pi]$. Определим знак производной, например, для



$x = 0$. Имеем: $f'(0) = \cos 0 \cdot (2 \sin 0 - 1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$. Тогда легко определить промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.

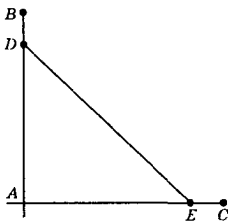
Найдем $f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ и $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = 1^2 - 1 = 0$ и $f_{\max} = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^2 - (-1) = 2$. Отметим характерные точки и построим график данной функции.



Ответ: см. решение.

236) Пусть первое неотрицательное слагаемое x (где $0 \leq x \leq 10$), тогда второе — $(10 - x)$. Найдем сумму кубов этих слагаемых: $f(x) = x^3 + (10 - x)^3 = x^3 + 10^3 - 3 \cdot 10^2 \cdot x + 3 \cdot 10 \cdot x^2 - x^3 = 30x^2 - 300x + 1000$. Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке $[0; 10]$. Вычислим $f'(x) = 60x - 300$. Критическая точка $x = 5$ — точка минимума. Так как график функции $f(x)$ парабола симметричен относительно прямой $x = 5$, то наибольшее значение функция принимает на концах промежутка, т.е. при $x = 0$ и при $x = 10$. **Ответ:** а) $0 + 10$ или $10 + 0$, б) $5 + 5$.

239) Пусть дороги пересекаются в точке A под прямым углом. Первоначально машины находятся в точках B и C , так что $AB = 2$ км и $AC = 3$ км. Через время t (часов) машины находятся в точках D и E , так что $AD = 2 - 40 \cdot t$ (км) и $AE = 3 - 50 \cdot t$ (км). Из $\triangle ADE$ по теореме Пифагора найдем расстояние $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} =$

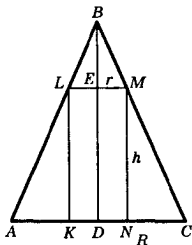


$$= \sqrt{(2 - 40 \cdot t)^2 + (3 - 50 \cdot t)^2} = \sqrt{4 - 160t + 1600t^2 + 9 - 300t + 2500t^2} = \sqrt{4100t^2 - 460t + 13}.$$

Подкоренное выражение является квадратичной функцией и имеет минимум в точке $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-460}{2 \cdot 4100} = \frac{23}{410}$ (ч). **Ответ:** $\frac{23}{410}$ ч.

242) Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$, где R — радиус основания, h — высота цилиндра. По условию $V = 16\pi$ м³, поэтому: $16\pi = \pi R^2 h$ или $16 = R^2 h$. Выразим из этого соотношения $h = \frac{16}{R^2}$. Площадь полной поверхности цилиндра $S = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{16}{R^2} = 2\pi R^2 + 32\pi R^{-1}$. Найдем наименьшее значение функции $S(R)$. Вычислим производную $S'(R) = 4\pi R - 32\pi R^{-2} = 4\pi R - \frac{32\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 32\pi}{R^2} = \frac{4\pi(R^3 - 8)}{R^2}$. Критическая точка функции $S(R)$ $R = 2$. Легко проверить, что эта точка минимума. Теперь найдем $h = \frac{16}{R^2} = \frac{16}{2^2} = 4$. Видно, что $h = 2R$, т.е. высота цилиндра должна равняться диаметру основания.

Ответ: $h = 2R$.



244) Рассмотрим осевое сечение конуса ABC и вписанного в него цилиндра $KLMN$. Высота конуса $BD = H$ и радиус основания $AD = DC = R$. Пусть высота цилиндра $LK = h$ и радиус основания $KD = DN = r$. Найдем связь между переменными h и r .

Рассмотрим подобные треугольники BEM и BDC : $\frac{BE}{BD} = \frac{EM}{DC}$ или $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$. Используя свойство пропорции, получим: $HR - hR = rH$ или $H(R - r) = hR$, откуда $h = \frac{H(R - r)}{R}$. Пло-

щадь полной поверхности цилиндра $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{H(R - r)}{R}$. Найдем производную $S'(r) = 4\pi r + \frac{2\pi H}{R} (R - 2r) = \frac{2\pi(2rR + HR - 2rH)}{R}$. Критическая точка определяется условием:

$2rR + HR - 2rH = 0$ или $HR = 2r(H - R)$, откуда $r = \frac{HR}{2(H - R)}$ (очевидно, при $H > R$).

Ответ: $r = \frac{HR}{2(H - R)}$ при $H > R$.

249) Пусть окно имеет изображенную на рисунке форму, состоящую из прямоугольника (с размерами $2R$ и h) и полукруга (радиуса R). Периметр окна $p = 2h + 2R + \pi R$, откуда $h = \frac{p - (2 + \pi)R}{2}$. Пло-

щадь окна $S = 2Rh + \frac{\pi R^2}{2} = 2R \frac{p - (2 + \pi)R}{2} + \frac{\pi R^2}{2} = Rp - (2 + \pi)R^2 +$

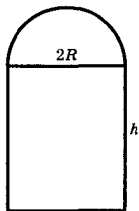
$+\frac{\pi R^2}{2} = Rp - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)R^2$. Найдем производную функ-

ции $S'(R) = p - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2R = p - (4 + \pi) \cdot R$. Функция

$S(R)$ имеет критическую точку $R = \frac{p}{4 + \pi}$. Найдем $h =$

$$= \frac{p - (2 + \pi)R}{2} = \frac{p - \frac{(2 + \pi)p}{4 + \pi}}{2} = p \frac{4 + \pi - (2 + \pi)}{2(4 + \pi)} = \frac{p}{4 + \pi}.$$

Ответ: $R = h = \frac{p}{4 + \pi}$.

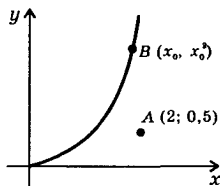


252) Пусть искомая точка параболы $y = x^2$ имеет координаты $B(x_0, x_0^2)$. Запишем расстояние $AB = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$. Найдем

производную функции $AB'(x_0) =$

$$= \frac{2(x_0 - 2) + 2\left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2x_0}{2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{x_0 - 2 + 2x_0^3 - x_0}{2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2(x_0^3 - 1)}{2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}}.$$



Видно, что $x_0 = 1$ — точка минимума. Тогда координаты точки $B(1; 1)$. **Ответ:** $(1; 1)$.

254б) Учтем, что скорость тела — производная перемещения $x(t)$ от времени. Для перемещений тел $x_1(t) = 9t^2 + 1$ и $x_2(t) = t^3$ найдем скорости $v_1 = 18t$ и $v_2 = 3t^2$. Известно, что скорость первой точки меньше скорости второй. Поэтому имеем неравенство: $18t < 3t^2$ или $0 < 3t(t - 6)$. Решение этого неравенства $t > 6$.

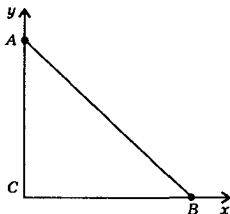
Ответ: $(6; \infty)$.

259) Рассмотрим положение лестницы AB в момент времени t . Расстояние $BC = 2t$, тогда по теореме Пифагора из $\triangle ABC$:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - (2t)^2} =$$

$$= \sqrt{25 - 4t^2}. \text{ Координата } y(t) = \sqrt{25 - 4t^2}.$$

Учтем, что скорость точки A — производная координаты $y(t)$. Получаем: $v = y'(t) =$



$= \frac{-8t}{2\sqrt{25-4t^2}} = \frac{-4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ (знак минус показывает, что направление скорости противоположно направлению оси ординат).

Известно, что ускорение — производная от скорости $v(t)$. Найдем

$$\text{ускорение: } a = v'(t) = -4 \left(\frac{t}{\sqrt{25-4t^2}} \right)' = -4 \frac{1 \cdot \sqrt{25-4t^2} - t \cdot \frac{-8t}{2\sqrt{25-4t^2}}}{25-4t^2} =$$

$$= -4 \frac{25-4t^2+4t^2}{\sqrt{25-4t^2}} = -\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$$
 (знак минус также показывает, что направление ускорения противоположно направлению оси ординат).

Ответ: $v = \frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ (м/с), $a = -\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$ (м/с²).

263 Известно, что угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции $y(x)$ равен производной $y'(x)$ в точке касания. Найдем производную функции $y(x) = -\frac{x^2}{2} - 1$. Получаем: $y'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x$.

а) Если угол наклона касательной 45° , то $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и получаем уравнение: $-x = 1$, откуда $x = -1$ и $y(-1) = -\frac{(-1)^2}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. Тогда координаты точки касания $A(-1; -1,5)$.

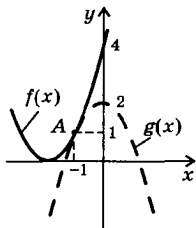
б) Если угол наклона касательной 135° , $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$ и получаем уравнение: $-x = -1$, откуда $x = 1$ и $y(1) = -\frac{1^2}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. Координаты точки касания $B(1; -1,5)$.

Ответ: а) $A(-1; -1,5)$, б) $B(1; -1,5)$.

266 Учтем, что угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции $f(x)$ равен производной $f'(x)$ в точке касания. Найдем производную функции $f(x) = x^5 + 2x - 7$. Получаем: $f'(x) = 5x^4 + 2$. Видно, что при всех x производная положительна, т.е. $\operatorname{tg} \alpha > 0$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, где α — угол наклона касательной к оси абсцисс. Ответ: доказано.

267 На рисунке изображены графики функций $f(x) = (x+2)^2$ и $g(x) = 2 - x^2$. Найдем общую точку графиков этих функций: $(x+2)^2 = 2 - x^2$ или $x^2 + 4x + 4 = 2 - x^2$ или $x^2 + 2x + 1 = 0$ или $(x+1)^2 = 0$, откуда $x = -1$. Найдем угловые коэффициенты каса-

тельных k_1 и k_2 , проведенных в этой точке к графикам функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Получаем: $k_1 = f'(x) = 2(x+2)$ и $k_2 = g'(x) = -2x$, в точке $x = -1$ имеем: $k_1 = 2(-1+2) = 2$ и $k_2 = -2 \cdot (-1) = 2$. Видно, что $k_1 = k_2$. Так как касательные имеют одинаковые угловые коэффициенты и проходят через точку A , то эти касательные совпадают. Следовательно, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют общую точку A и общую касательную, проходящую через эту точку. Ответ: доказано.



268а) Используя правила нахождения и таблицу первообразных, для функции $f(x) = 4\sin x + \cos 3x$ найдем первообразную $F(x) = -4\cos x + \frac{\sin 3x}{3} + c = -4\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x + c$.

Ответ: $-4\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x + c$.

269б) Используя правила нахождения и таблицу первообразных, для функции $f(x) = x^{-2} + \cos x$ найдем первообразную $F(x) = -\frac{x^{-1}}{-1} + \sin x + c = -\frac{1}{x} + \sin x + c$. Так как график первообразной проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{2}{\pi}\right)$, то для определения c получаем уравнение: $-\frac{2}{\pi} = -\frac{1}{\pi/2} + \sin \frac{\pi}{2} + c$ или $-\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} + 1 + c$, откуда $c = -1$. Тогда искомая первообразная $F(x) = -\frac{1}{x} + \sin x + c$.

Ответ: $-\frac{1}{x} + \sin x + c$.

271) Так как угловой коэффициент касательной равен $3x^2$ (т.е. $F'(x) = 3x^2$), то найдем функцию $F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$. Известно, что эта кривая проходит через точку $A(2; 3)$. Получаем уравнение: $3 = 2^3 + c$, откуда $c = -5$. Тогда функция имеет вид $F(x) = x^3 - 5$.

Ответ: $F(x) = x^3 - 5$.

273б) При вычислении данного интеграла используем правила нахождения и таблицу первообразных. Получаем:

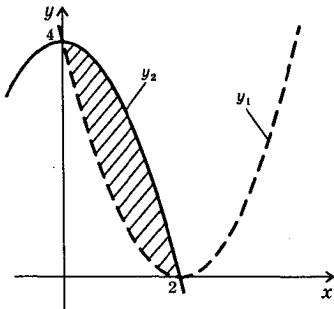
$$\int_1^2 (x^{-2} + x^2) dx = \left(\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2^3}{3} \right) - \left(-\frac{1}{1} + \frac{1^3}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{8}{3} \right) + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{20-3}{6} = \frac{17}{6}. \quad \text{Ответ: } \frac{17}{6}.$$

2746) Сначала вычислим данный интеграл: $\int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx =$

$$= \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{a+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sin(2a + \pi) - \sin 0) = -\frac{1}{2} \sin 2a.$$

Учтем ограниченность функции синус. Тогда наибольшее значение интеграла $\frac{1}{2}$, наименьшее значение $-\left(-\frac{1}{2}\right)$. Ответ: $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

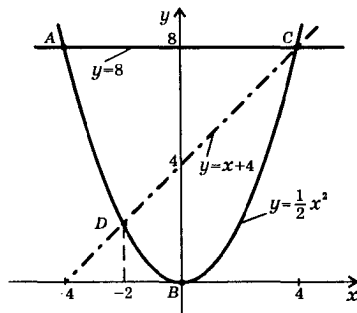
2756) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = (x-2)^2$ и $y_2 = 4 - x^2$. Точки пересечения графиков функций y_1 и y_2 : $x=0$ и $x=2$. Тогда площадь фигуры



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (y_2 - y_1) \, dx = \int_0^2 (4 - x^2 - \\ &- (x-2)^2) \, dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) \, dx = \\ &= \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3}\right) - \\ &- 0 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

276) Прежде всего построим фигуру ABC, ограниченную линиями



$y = \frac{1}{2} x^2$ и $y = 8$. Также проведем прямую $y = x + 4$, разбивающую фигуру на две части ADC и DCB. Сначала найдем координаты точек A и C. Получаем уравнение:

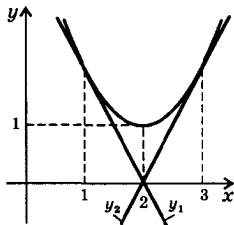
$\frac{1}{2} x^2 = 8$ или $x^2 = 16$, откуда $x = \pm 4$. Также найдем координаты точки D. Имеем

уравнение: $\frac{1}{2} x^2 = x + 4$ или $x^2 - 2x - 8 = 0$, корни которого

$x_1 = -2$ и $x_2 = 4$ (точка C). Тогда $y = x + 4 = -2 + 4 = 2$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Запишем площади искоемых фигур } S_{ADC} = \int_{-4}^{-2} \left(8 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + \\
 & + \int_{-2}^4 (8 - x - 4) dx = \left(8x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-4}^{-2} + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^4 = \left(-16 + \frac{8}{6} \right) - \left(-32 + \frac{64}{6} \right) + \\
 & + \left(16 - \frac{16}{2} \right) - \left(-8 - \frac{4}{2} \right) = \frac{74}{3} \text{ и } S_{DCB} = \int_{-2}^4 \left(x + 4 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \\
 & = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^4 = \left(\frac{16}{2} + 16 - \frac{64}{6} \right) - \left(\frac{4}{2} - 8 + \frac{8}{6} \right) = 18. \\
 & \text{Ответ: } \frac{74}{3} \text{ и } 18.
 \end{aligned}$$

278) Построим параболу $y = x^2 - 4x + 5$ и касательные к ней, проведенными через точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$. Найдем уравнения этих касательных. Производная данной функции $y' = 2x - 4$. Пусть x_0 — точка касания. Тогда уравнение касательной: $y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 5 = (2x_0 - 4)x - 2x_0^2 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 5 = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 5$, т.е. $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 5$. Подставляя значение $x_0 = 1$, получим уравнение первой касательной $y_1 = -2x + 4$. Подставляя значение $x_0 = 3$, найдем уравнение второй касательной $y_2 = 2x - 4$. Легко проверить, что касательные y_1 и y_2 пересекаются в точке с координатами $(2; 0)$.



$$\begin{aligned}
 & \text{Запишем площадь искомой фигуры} \\
 S = & \int_1^2 (y - y_1) dx + \int_2^3 (y - y_2) dx = \int_1^2 (x^2 - 4x + 5 + 2x - 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4x + \\
 & + 5 - 2x + 4) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_1^2 (x - 1)^2 dx + \\
 & + \int_2^3 (x - 3)^2 dx = \frac{(x - 1)^3}{3} \Big|_1^2 + \frac{(x - 3)^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{(2 - 1)^3}{3} - \frac{(1 - 1)^3}{3} + \frac{(3 - 3)^3}{3} - \\
 & - \frac{(2 - 3)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

281) Для функции $f(x) = a \sin \pi x + b$ запишем условия задачи. Найдем производную $f'(x) = a \cos \pi x \cdot \pi = a\pi \cos \pi x$. Так как $f'(2) = 2$, то имеем уравнение: $a\pi \cos 2\pi = 2$ или $a\pi = 2$, откуда $a = \frac{2}{\pi}$.

Теперь вычислим $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (a \sin \pi x + b) dx =$
 $= \left(-\frac{a \cos \pi x}{\pi} + bx \right) \Big|_0^2 = \left(-\frac{a \cos 2\pi}{\pi} + 2b \right) - \left(-\frac{a \cos 0}{\pi} + b \cdot 0 \right) = 2b$. По условию этот интеграл равен 4. Имеем уравнение: $2b = 4$, откуда $b = 2$.

Ответ: $a = \frac{2}{\pi}$, $b = 2$.

Глава VI. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. Числа и преобразования выражений

1а) Если число p простое и $p > 3$, то число p можно представить в виде $p = 3n + 1$ или в виде $p = 3n + 2$ (где $n \in \mathbb{N}$). Рассмотрим эти случаи.

а) Пусть $p = 3n + 1$. Чтобы число p было простым, надо чтобы число n было четным, т.е. $n = 2m$. Тогда число p имеет вид $p = 6m + 1$. Запишем число $a = p^2 - 1 = (6m + 1)^2 - 1^2 = 6m(6m + 2) = 12m(3m + 1)$. Очевидно, что это число без остатка делится на 24. Разумеется, число a без остатка делится на 12. Если число m четное, то число a делится еще и на 2. Если число m нечетное, то на 2 делится число $3m + 1$.

б) Пусть $p = 3n + 2$. Чтобы число p было простым, надо чтобы число n было нечетным, т.е. $n = 2m + 1$. Тогда число p имеет вид $p = 3(2m + 1) + 2 = 6m + 5$. Запишем число $a = p^2 - 1 = (6m + 5)^2 - 1^2 = (6m + 5 + 1)(6m + 5 - 1) = (6m + 6)(6m + 4) = 6(m + 1) \cdot 2(3m + 2) = 12(m + 1)(3m + 2)$. Число a без остатка делится на 12. Если число m четное, то число $(3m + 2)$ делится еще и на 2. Если число m нечетное, то число $m + 1$ четное и делится на 2. Следовательно, число a без остатка делится на 24.

Итак, если p — простое число и $p > 3$, то $p^2 - 1$ без остатка делится на 24. Ответ: доказано.

2) Квадратное уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет корни, если его дискриминант $D = a^2 - 24 \geq 0$. Пусть уравнение имеет целые корни x_1 и x_2 . Запишем формулы Виета для корней уравнения: $x_1 + x_2 = -a$ и $x_1 x_2 = 6$. Так как x_1 и x_2 целые числа, то они являются делителями свободного члена (числа 6): $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Поэтому возможны варианты.

а) $x_1 = \pm 1$ и $x_2 = \pm 6$ (или наоборот), тогда $a = -(x_1 + x_2) = \mp 7$.

б) $x_1 = \pm 2$ и $x_2 = \pm 3$ (или наоборот), тогда $a = \mp 5$.

При всех найденных значениях a дискриминант уравнения $D > 0$. Ответ: $\pm 5; \pm 7$.

5а) Сначала найдем остатки от деления квадратов натуральных чисел на 3. Числа n можно записать в виде: $n = 3m$ или $n = 3m + 1$ или $n = 3m + 2$ (где $m \in \mathbb{N}$). Рассмотрим эти случаи.

а) Если $n = 3m$, то $n^2 = (3m)^2 = 9m^2 = 3 \cdot (3m^2)$ — это число без остатка делится на 3.

б) Если $n = 3m + 1$, то $n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3 \cdot (3m^2 + 2m) + 1$ — это число при делении на 3 дает остаток 1.

в) Если $n = 3m + 2$, то $n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = (9m^2 + 12m + 3) + 1 = 3 \cdot (3m^2 + 4m + 1) + 1$ — это число при делении на 3 также дает остаток 1.

Таким образом, при делении на 3 возможны остатки 0 и 1.

Теперь найдем остатки от деления квадратов натуральных чисел на 4. Числа n можно в этом случае записать в виде: $n = 4m$ или $n = 4m + 1$ или $n = 4m + 2$ или $n = 4m + 3$. Рассмотрим эти случаи.

а) Если $n = 4m$, то $n^2 = (4m)^2 = 16m^2 = 4 \cdot (4m^2)$ — это число без остатка делится на 4.

б) Если $n = 4m + 1$, то $n^2 = (4m + 1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 4 \cdot (4m^2 + 2m) + 1$ — это число при делении на 4 дает остаток 1.

в) Если $n = 4m + 2$, то $n^2 = (4m + 2)^2 = 16m^2 + 16m + 4 = 4 \cdot (4m^2 + 4m + 1)$ — это число без остатка делится на 4.

г) Если $n = 4m + 3$, то $n^2 = (4m + 3)^2 = 16m^2 + 24m + 9 = (16m^2 + 24m + 8) + 1 = 4 \cdot (4m^2 + 6m + 2) + 1$ — это число при делении на 4 дает остаток 1.

Таким образом, и при делении на 4 возможны остатки 0 и 1.

Ответ: 0 и 1.

7б,в) Докажем признаки делимости на 3 и 9: если сумма цифр числа делится на 3 и 9, то и само число делится на 3 и 9. Для определенности рассмотрим трехзначное число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ (где a — число сотен, b — число десятков и c — число единиц). Выделим в этом числе число, которое без остатка делится на 3 и 9: $100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) = 9(11a + b) + (a + b + c)$. В этой сумме первое слагаемое делится на 3 и 9. Поэтому, чтобы на 3 и 9 делилось данное число \overline{abc} , надо, чтобы на 3 и 9 делилась сумма его цифр $a + b + c$. **Ответ:** доказано.

8б) Уравнение $2^x - 1 = y^2$ запишем в виде $2^x = y^2 + 1$. При всех значениях y правая часть уравнения $y^2 + 1 \geq 1$. Поэтому и левая часть $2^x \geq 1$, откуда $x \geq 0$. Отдельно рассмотрим случай $x = 0$. Тогда уравнение имеет вид: $1 = y^2 + 1$, откуда $y = 0$. Получили целое решение $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$.

Пусть теперь $x > 0$. Тогда левая часть уравнения 2^x четная. Поэтому y может быть только нечетным числом, т.е. $y = 2m + 1$ (где $m \in \mathbb{Z}$). Данное уравнение имеет вид: $2^x = (2m + 1)^2 + 1$ или

$2^x = 4m^2 + 4m + 2$ или $2^{x-1} = 2m(m+1) + 1$. Видно, что при $x > 1$ левая часть уравнения четное число, а при $m \neq 0, m \neq -1$ правая часть уравнения — нечетное число. Поэтому возможны только варианты $x = 1$ и $m = 0$ (тогда $y = 2m + 1 = 1$) или $m = -1$ (тогда $y = 2m + 1 = -1$). Следовательно, существуют еще два целых решения: $x_2 = 1, y_2 = 1$ и $x_3 = 1, y_3 = -1$. Таким образом, данное уравнение имеет три целых решения. Ответ: (0; 0), (1; 1), (1; -1).

9а) Уравнение $13x - 7y = 6$ запишем в виде $13x = 7y + 6$, откуда $x = \frac{7y+6}{13}$. Легко угадать одно целое число $y = 1$, для которого число x также целое. Так как числа 7, 6 и 13 взаимно простые, то все остальные целые числа y можно записать в виде $y = 13k + 1$ (где $k \in \mathbb{Z}$). Теперь найдем $x = \frac{7y+6}{13} = \frac{7(13k+1)+6}{13} = \frac{91k+13}{13} = 7k+1$ — целое число. Таким образом, целые решения данного уравнения $x = 7k+1, y = 13k+1$ (где $k \in \mathbb{Z}$). Ответ: $(7k+1; 13k+1), k \in \mathbb{Z}$.

10) Пусть числитель и знаменатель дроби $\frac{5l+6}{5l-1}$ (где l — целое число) имеют общий целый делитель k , т.е. выполняются равенства $\begin{cases} 5l+6 = kn \\ 3l+1 = km \end{cases}$ (где целые числа n и m не имеют общих делителей). Исключим из этой системы переменную l . Для этого умножим первое уравнение на 3, второе — на 5 и вычтем из первого уравнения второе. Имеем: $\begin{cases} 15l+18 = 3kn \\ 15l+5 = 5km \end{cases}$, откуда $13 = k(3n-5m)$. Видно, что число k должно быть делителем числа 13. Но число 13 простое, поэтому $k = 13$. Таким образом, дробь можно сократить на число 13. Ответ: 13.

12а) Докажем равенство $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ методом математической индукции.

а) При $n = 1$ левая часть равенства состоит из одного слагаемого 1^2 . Проверим равенство: $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$ — верно.

б) Пусть при $n = k$ данное равенство выполняется, т.е. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

в) При $n = k+1$ в левой части равенства добавляется еще одно слагаемое $(k+1)^2$. Учтем результат предыдущего пункта и преобразуем левую часть: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} +$

$$\begin{aligned}
 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \\
 &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \text{ Видно, что это выражение} \\
 \text{совпадает с выражением } &\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ при } n = k+1.
 \end{aligned}$$

Ответ: доказано.

13а) Докажем методом математической индукции равенство

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}.$$

а) При $n = 1$ левая часть равенства содержит один член $\frac{1}{4 \cdot 5}$.

Проверим равенство: $\frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot (1+4)}$ — верно.

б) Пусть при $n = k$ данное равенство выполняется, т.е.

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{k}{4(k+4)}.$$

в) При $n = k+1$ в левой части равенства добавляется еще одно слагаемое $\frac{1}{(k+1+3)(k+1+4)} = \frac{1}{(k+4)(k+5)}$. Учтем результат пре-

$$\begin{aligned}
 \text{дыдущего пункта и преобразуем левую часть: } &\left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(k+3)(k+4)} \right) + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{k}{4(k+4)} + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \\
 &= \frac{k(k+5) + 4}{4(k+4)(k+5)} = \frac{k^2 + 5k + 4}{4(k+4)(k+5)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+4)(k+5)} = \frac{k+1}{4(k+5)}.
 \end{aligned}$$

Видно, что это выражение совпадает с выражением $\frac{n}{4(n+4)}$ при $n = k+1$. **Ответ:** доказано.

15а) Докажем методом математической индукции, что для любого натурального n выражение $6^{2n-1} + 1$ кратно 7.

а) При $n = 1$ величина $6^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 6^1 + 1 = 7$ и кратна 7.

б) Пусть при $n = k$ выражение $6^{2k-1} + 1$ кратно 7.

в) Рассмотрим данное выражение при $n = k+1$. Имеем: $6^{2(k+1)-1} + 1 = 6^{2k+1} + 1$. Запишем это выражение таким образом, чтобы выделить выражение предыдущего пункта (кратное 7). Получаем: $6^{2k+1} + 1 = 6^2 \cdot 6^{2k-1} + 1 = (36 \cdot 6^{2k-1} + 36) + (1 - 36) = 36(6^{2k-1} + 1) - 35$. В этой сумме первое слагаемое кратно 7, т.к. выражение $6^{2k-1} + 1$ кратно 7 (по предыдущему пункту), число 35 также кратно 7. Поэтому и вся сумма кратна 7. **Ответ:** доказано.

20а) Предположим, что число $\sqrt{3}$ рациональное, т.е. его можно записать в виде $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ (где m и n взаимно простые натуральные числа, т.е. числа, не имеющие общих делителей). Возведем это равенство в квадрат $3 = \frac{m^2}{n^2}$, откуда $m^2 = 3n^2$. Так как числа m и n взаимно простые, то число m кратно 3, т.е. $m = 3k$ (где $k \in \mathbb{N}$). Подставим это выражение в соотношение $m^2 = 3n^2$ и получим: $(3k)^2 = 3n^2$ или $9k^2 = 3n^2$ или $3k^2 = n^2$. Из такого выражения делаем вывод, что n кратно 3. Таким образом, получили противоречие: числа m и n кратны 3, т.е. имеют общий множитель, что противоречит исходной предпосылке. **Ответ:** доказано.

20г) Очевидно, что число $\log_2 9 > 1$. Предположим, что это число рациональное. Тогда его можно записать в виде $\log_2 9 = \frac{m}{n}$ (где m и n взаимно простые натуральные числа). По определению логарифма получаем: $2^{\frac{m}{n}} = 9$ или $2^m = 9^n$. Но число 2 в любой натуральной степени m четное, а число 9 в любой натуральной степени n нечетное. Получаем противоречие. **Ответ:** доказано.

21б) Предположим, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ рациональное, т.е. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = a$. Возведем это равенство в квадрат: $2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 = a^2$, откуда $\sqrt{6} = \frac{a^2 - 5}{2}$. Если a рациональное число, то и величина $\frac{a^2 - 5}{2}$ также является рациональным числом. Но число $\sqrt{6}$ — иррациональное. Получаем противоречие. **Ответ:** доказано.

23б) В подкоренном выражении радикала $\sqrt{129 - 56\sqrt{5}}$ выделим полный квадрат разности двух чисел. Предположим, что $129 - 56\sqrt{5} = (a\sqrt{5} - b)^2$, где a и b — натуральные числа. В этом равенстве возведем правую часть в квадрат: $129 - 56\sqrt{5} = 5a^2 - 2ab\sqrt{5} + b^2$. Сравнивая левые и правые части равенства, получаем систему уравнений $\begin{cases} 5a^2 + b^2 = 129 \\ 2ab = 56 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5a^2 + b^2 = 129 \\ ab = 28 \end{cases}$. Из второго уравнения следует, что числа a и b делители числа 28. Подберем такие делители $a = 4$ и $b = 7$, которые удовлетворяют и первому уравнению.

Итак, получили $129 - 56\sqrt{5} = (4\sqrt{5} - 7)^2$. Тогда данное выражение $\sqrt{129 - 56\sqrt{5}} = \sqrt{(4\sqrt{5} - 7)^2} = 4\sqrt{5} - 7$. **Ответ:** $4\sqrt{5} - 7$.

27) Напомним еще одну формулу для возведения суммы чисел в куб: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Обозначим данное число

$$x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \quad \text{и возведем его в куб:}$$

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} \right)^3 + \left(\sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \right)^3 + 3 \sqrt[3]{\left(6 + \sqrt{\frac{847}{27}}\right) \left(6 - \sqrt{\frac{847}{27}}\right)} \cdot x$$

$$\text{или } x^3 = 6 + \sqrt{\frac{847}{27}} + 6 - \sqrt{\frac{847}{27}} + 3 \sqrt[3]{6^2 - \frac{847}{27}} \quad \text{или } x^3 = 12 + 3 \sqrt[3]{\frac{125}{27}} x \quad \text{или}$$

$$x^3 = 12 + 3 \cdot \frac{5}{3} x \quad \text{или } x^3 - 5x - 12 = 0. \quad \text{Найдем корень этого кубическо-$$

$$\text{го уравнения: } (x^3 - 27) - (5x - 15) = 0 \quad \text{или } (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 5(x - 3) = 0$$

$$\text{или } (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 5) = 0 \quad \text{или } (x - 3)(x^2 + 3x + 4) = 0.$$

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $x - 3 = 0$ (откуда $x = 3$) и $x^2 + 3x + 4 = 0$ (это уравнение корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицательный). Следовательно, данное число $x = 3$ — число натуральное, т.е. рациональное. **Ответ:** доказано.

29б) В многочлене $x^4 + x^2 + 1$ выделим квадрат суммы двух чисел: $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. **Ответ:** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

30) Для доказательства тождества $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ преобразуем его левую и правую части, раскрывая скобки. Левая часть: $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$. Правая часть: $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + b^2x^2$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. **Ответ:** доказано.

32а) Для доказательства тождества $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ преобразуем его левую и правую части. По условию $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, откуда $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Тогда левая часть: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \times 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(-\frac{\beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$. Правая часть: $4 \cos \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

33а) Для доказательства тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для любого $x \in [-1; 1]$ вспомним определение обратных тригонометрических функций. Угол $\alpha = \arcsin x$ такой, что выполнены два условия: $\sin \alpha = x$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Сразу найдем $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$ (учтено, что α принадлежит I или IV четвертям и $\cos \alpha \geq 0$). Угол $\beta = \arccos x$ такой, что выполнены два условия: $\cos \beta = x$ и $\beta \in [0; \pi]$. Найдем $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2}$ (учтено, что β принадлежит I или II четвертям и $\sin \beta \geq 0$). Тогда надо доказать, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Найдем, например, синус от суммы двух углов: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$. Так как $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \beta \leq \pi$, то сложим почленно эти неравенства: $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}$. На этом промежутке уравнение $\sin(\alpha + \beta) = 1$ имеет только одно решение $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

Ответ: доказано.

34а) Преобразуем данное выражение, используя формулы приведения и метод вспомогательного угла. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ} &= \frac{1}{\cos(270^\circ + 20^\circ)} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin(270^\circ - 20^\circ)} = \frac{1}{\sin 20^\circ} - \\ - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} &= \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \\ &= \frac{4(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ)}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin(60^\circ - 20^\circ)}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

34б) Преобразуем выражение $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, разложив его как сумму кубов: $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = (\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$. Таким

образом, надо найти $\sin 2\alpha$. Для этого возведем в квадрат равенство $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Имеем: $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2$ или $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$ или $1 + \sin 2\alpha = m^2$, откуда $\sin 2\alpha = m^2 - 1$. Тогда $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4}(m^2 - 1)^2$.

Ответ: $1 - \frac{3}{4}(m^2 - 1)^2$.

35а) Пусть угол $\alpha = \arcsin(\sin 10)$. Этот угол удовлетворяет двум условиям: $\sin \alpha = \sin 10$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Учитывая формулы приведения, подберем такой угол $\alpha = 3\pi - 10$. Проверим условия: $\sin \alpha = \sin(3\pi - 10) = \sin(\pi - 10) = \sin 10$ (выполнено). Для оценок можно принять $\pi \approx 3,14$ и $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$. Тогда $\alpha = 3\pi - 10 \approx 3 \cdot 3,14 - 10 = 9,42 - 10 = -0,58$. Следовательно, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ: $3\pi - 10$.

39а) Во всех логарифмах перейдем к одинаковому основанию u .

Получаем: $\log_x u = \frac{\log_u u}{\log_u x} = \frac{1}{\log_u x} = a$, откуда $\log_u x = \frac{1}{a}$. Аналогично имеем: $\log_u y = \frac{1}{b}$ и $\log_u z = \frac{1}{c}$. Тогда $\log_{xyz} u = \frac{\log_u u}{\log_u (xyz)} = \frac{1}{\log_u x + \log_u y + \log_u z} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{abc}{bc + ac + ab}$.

Ответ: $\frac{abc}{bc + ac + ab}$.

40б) Используем основное логарифмическое тождество и перейдем в основаниях степеней и логарифмов к числу 2. Получаем:

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - \left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 2^{\log_2 3 \cdot \sqrt{\frac{\log_2 2}{\log_2 3}}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 2^{\sqrt{\frac{\log_2 2}{\log_2 3}} \cdot \log_2 3} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}} = 0$$

(было учтено, что $\log_2 3 > 0$ и $\log_3 2 > 0$). Ответ: 0.

42) Преобразуем левую часть равенства, т.к. она является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -\operatorname{tg} \varphi$ (т.к. $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, то $\operatorname{tg} \varphi \in (0; 1)$ и $|q| < 1$). Получаем: $1 - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi + \dots = \frac{b_1}{1 - q} =$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \varphi \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)}. \text{ Видно, что левая}$$

часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Ответ: доказано.

46) Если числа x, y, z (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде: $y = xq$ и $z = xq^2$ (где q — знаменатель прогрессии). Так как числа $x + y, y + z, z + x$ образуют арифметическую прогрессию, то выполняется ее свойство: удвоенный средний член равен сумме соседних с ним членов, т.е. $2(y + z) = (x + y) + (z + x)$ или $2y + 2z = 2x + y + z$ или $y + z = 2x$. Подставим выражения для y и z и получим: $xq + xq^2 = 2x$ или $q^2 + q - 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения: $q = 1$ и $q = -2$.

Ответ: 1; -2.

47) Используем формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии. Из условия $S_m = S_n$ получаем равенство:

$$\frac{2a_1 + d(m-1)}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad \text{или} \quad 2a_1 m + dm^2 - dm = 2a_1 n + dn^2 - dn.$$

Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители: $(2a_1 m - 2a_1 n) + (dm^2 - dn^2) - (dm - dn) = 0$ или $2a_1(m-n) + d(m-n)(m+n) - d(m-n) = 0$ или $(m-n)(2a_1 + d(m+n)) - d = 0$. Так как $m \neq n$ (т.е. $m-n \neq 0$), то получаем $2a_1 + d(m+n-1) = 0$. Теперь найдем сумму $S_{m+n} = \frac{2a_1 + d(m+n-1)}{2} \cdot (m+n) = \frac{0}{2} \cdot (m+n) = 0$.

Ответ: 0.

50а) Запишем данную сумму в виде:

$$1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n = \frac{1}{9} \left(9 + 99 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n \right) = \frac{1}{9} \left(10 - 1 + 10^2 - 1 + \dots + 10^n - 1 \right) = \frac{1}{9} \left((10 + 10^2 + \dots + 10^n) - n \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}. \quad \text{Ответ: } \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

50б) Обозначим искомую сумму $S = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$. Умножим эту сумму на x : $Sx = x^2 + 2x^3 + \dots + (n-1)x^n + nx^{n+1}$. Вычтем из первого равенства второе: $S - Sx = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) - nx^{n+1}$ или

$$S(1-x) = \frac{x(x^n-1)}{x-1} - nx^{n+1} = \frac{x^{n+1}-x-nx^{n+2}+nx^{n+1}}{x-1} = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{1-x}.$$

Разделив на $(1-x)$, найдем сумму $S = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} =$
 $= \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}$. Ответ: $S = \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}$.

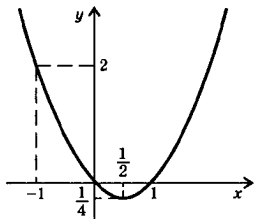
§ 2. Элементарные функции и их свойства

51а) Область определения функции $y = \frac{\sqrt{|x| - x}}{\operatorname{tg} 2x}$ задается условиями: $\begin{cases} |x| - x \geq 0 \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases}$. Решения первого неравенства — любые значения x . Из второго неравенства получаем $2x \neq \frac{\pi}{2}n$ (где $n \in \mathbb{Z}$), откуда $x \neq \frac{\pi}{4}n$. Ответ: $x \neq \frac{\pi}{4}n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

51в) Область определения функции $y = \frac{\arcsin 0,5x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ задается условиями $\begin{cases} -1 \leq 0,5x \leq 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$. Решая эти неравенства, получаем:
 $\begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \end{cases}$, откуда $x \in [-2; -1) \cup (1; 2]$.
Ответ: $[-2; -1) \cup (1; 2]$.

51д) Область определения функции $y = \log_{2\sin x} \cos x$ задается условиями $\begin{cases} \cos x > 0 \\ 2\sin x > 0 \text{ или} \\ 2\sin x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. Первым двум неравенствам соответствуют углы x , расположенные в первой четверти, т.е. $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В этом промежутке $\sin x = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$. Учтем периодичность функций синус и косинус. Получаем область определения $D(y) = \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

52б) Так как область определения функции $y = f(x)$ — отрезок $[-1; 2]$, то область определения функции $y = f(x+1)$ задается условием: $-1 \leq x+1 \leq 2$. Вычитая из всех частей неравенства число 1, найдем: $-2 \leq x \leq 1$. **Ответ:** $[-2; 1]$.



53а) Для нахождения области значений функции $y = \cos^2 x - \cos x$ обозначим $z = \cos x$, где $z \in [-1; 1]$. Тогда функция имеет вид $y = z^2 - z$. Схематично изобразим график этой функции (парабола). Видно, что при изменении z в промежутке $[-1; 1]$ функция y меняется в промежутке $[-\frac{1}{4}; 2]$, что и яв-

ляется областью значений данной функции. **Ответ:** $[-\frac{1}{4}; 2]$.

53в) Для нахождения области значений функции $y = 3\cos x - 4\sin x - 1$ преобразуем ее, используя метод вспомогательного угла.

Получаем: $y = 5\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right) - 1 = 5(\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x) - 1 = 5\cos(x + \varphi) - 1$. Так как $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, то выполняется основное тригонометрическое тождество.

Очевидно, что $-1 \leq \cos(x + \varphi) \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 5. При этом знак неравенства сохраняется: $-5 \leq 5\cos(x + \varphi) \leq 5$. От всех частей вычтем число 1 и получим: $-6 \leq 5\cos(x + \varphi) - 1 \leq 4$ или $-6 \leq y \leq 4$, что и является областью значений $E(y)$. **Ответ:** $[-6; 4]$.

55б) Найдем область определения функции $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Она задается условием $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$. Решая это неравенство, получим $x \in \mathbb{R}$ — симметричное множество. Найдем

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a\left(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right) = \log_a\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \\ &= \log_a \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \log_a \frac{x^2 + 1 - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{-1} = \\ &= -\log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, получили $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ нечетная (по определению).

Ответ: нечетная.

60в) Докажем, что функция $f(x) = \sin x^2$ не является периодической. Предположим, что эта функция периодическая с периодом T . Тогда должно выполняться равенство $f(x+T) = f(x)$ или $\sin(x+T)^2 = \sin x^2$. Перенесем член в левую часть $\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0$ и

$$\text{преобразуем ее в произведение: } 2 \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = 0.$$

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Рассмотрим эти случаи.

а) $\sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 0$, откуда $\frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = \pi l$ или $T(2x+T) = 2\pi l$ или $T^2 + 2xT - 2\pi l = 0$. Решая это квадратное уравнение, найдем $T = -x \pm \sqrt{x^2 + 2\pi l}$. Видно, что T не является числом (зависит от x) и не может быть периодом.

б) $\cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = 0$, откуда $\frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $(x+T)^2 + x^2 = \pi(2n+1)$ или $(x+T)^2 = \pi(2n+1) - x^2$ и $T = -x \pm \sqrt{\pi(2n+1) - x^2}$. Видно, что T не является числом и не может быть периодом.

Таким образом, данная функция не является периодической.

Ответ: доказано.

63а) Сравним числа $\log_2 3$ и $\log_5 8$. Для этого сначала сравним числа с числом $\frac{3}{2}$. Получаем: $3 > 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ и $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$; $8 < 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}$ и $\log_5 8 < \log_5 5\sqrt{5} = \frac{3}{2}$. Имеем: $\log_2 3 > \frac{3}{2} > \log_5 8$. **Ответ:** $\log_2 3 > \log_5 8$.

63б) Для сравнения чисел $\log_9 10$ и $\lg 11$ учтем, что эти числа положительные и найдем их отношение $\frac{\lg 11}{\log_9 10} = \lg 11 \cdot \lg 9$. Для оценки этого произведения используем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел: $\sqrt{\lg 11 \cdot \lg 9} < \frac{\lg 11 + \lg 9}{2} = \frac{\lg(11 \cdot 9)}{2} = \frac{\lg 99}{2} < \frac{\lg 100}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Так как $\sqrt{\lg 11 \cdot \lg 9} < 1$,

то и $\lg 11 \cdot \lg 9 < 1$, т.е. $\frac{\lg 11}{\log_9 10} < 1$, откуда $\lg 11 < \log_9 10$.

Ответ: $\lg 11 < \log_9 10$.

65) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает, т.е. если $x_2 > x_1$, то и $f(x_2) > f(x_1)$. Рассмотрим функцию $y(x) = kf(x)$ в точках x_2 и x_1 . Разность значений функции в этих точках: $y(x_1) - y(x_2) = kf(x_2) -$

$-kf(x_1) = k(f(x_2) - f(x_1))$. Второй множитель $f(x_2) - f(x_1) > 0$, поэтому знак произведения определяется знаком k : при $k > 0$ функция $y = kf(x)$ возрастает, при $k < 0$ — убывает.

Ответ: при $k > 0$ возрастающая, при $k < 0$ убывающая функция.

68а) Для функции $f(x) = ax + b$ найдем $f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1)$. По условию задачи $f(f(x)) = f(x)$ для любого x , т.е. $a^2x + b(a + 1) = ax + b$. Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при x и свободные члены

были равны. Получим уравнения:
$$\begin{cases} a^2 = a \\ b(a + 1) = b \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a(a - 1) = 0 \\ ab = 0 \end{cases}.$$

Такая система имеет два решения: $a = 0$, $b \in R$ (тогда $f(x) = b$) и $a = 1$, $b = 0$ (тогда $f(x) = x$). **Ответ:** $f(x) = b$ и $f(x) = x$.

69а) Для функции $f(x) = 3 - x$ найдем $f_2(x) = f(f(x)) = f(3 - x) = 3 - (3 - x) = x$; $f_3(x) = f(f(f(x))) = f(x) = 3 - x$ и т.д. Таким образом

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ x, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Область определения функции $D(f_n) = R$.

Ответ: $f_n(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ x, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases} \quad D(f_n) = R.$

70а) Найдем функцию, обратную функции $y = \frac{1}{ax + b}$. Выразим

из этого равенства x . Получаем: $axy + by = 1$, откуда $x = \frac{1 - by}{ay}$.

Введем привычные обозначения для аргумента и самой функции

и получим обратную функцию $y = \frac{1 - bx}{ax}$. По условию функция

$y = \frac{1}{ax + b}$ совпадает с обратной $y = \frac{1 - bx}{ax}$. Получаем уравнение:

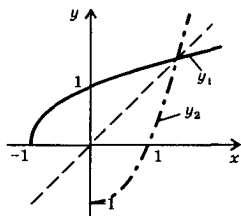
$$\frac{1}{ax + b} = \frac{1 - bx}{ax} \text{ или } ax = (ax + b)(1 - bx) \text{ или } ax = ax - abx^2 + b - b^2x$$

или $abx^2 + b^2x - b = 0$. Это равенство должно выполняться при любом значении x , поэтому все коэффициенты такого квадратного уравнения должны равняться нулю: $ab = 0$, $b^2 = 0$, $b = 0$. Решение этой системы: $a \neq 0$, $b = 0$. Поэтому искомая функция имеет вид

$$y = \frac{1}{ax}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{ax} \quad (a \neq 0).$$

72а) Для функции $y = \sqrt{x + 1}$ ($x \geq -1$) найдем обратную. Выразим из этого равенства x . Получаем: $y^2 = x + 1$, откуда $x = y^2 - 1$. Введем привычные обозначения для аргумента и самой функции и получим обратную функцию $y = x^2 - 1$. Построим графики функ-

ций $y_1 = \sqrt{x+1}$ (сплошная линия) и $y_2 = x^2 - 1$ ($x \geq 0$) (штрих-пунктирная линия). Видно, что графики функций y_1 и y_2 симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

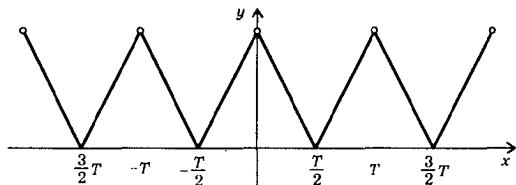


Ответ: см. решение.

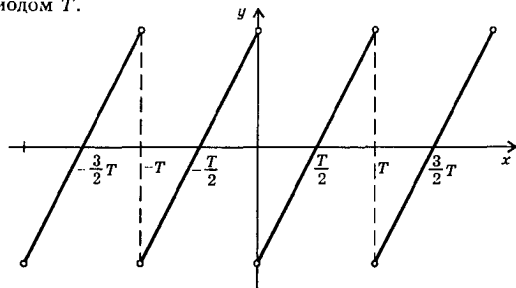
74а) Пусть функция $f(x)$ четная. Рассмотрим значения функции в двух симметричных точках $(-x_0)$ и x_0 : $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$. Таким образом, точки с координатами $(-x_0; y_0)$ и $(x_0; y_0)$ принадлежат графику функции. Эти точки имеют одну и ту же ординату и противоположные по знаку абсциссы. Следовательно, эти точки симметричны относительно оси ординат. То же можно сказать и про остальные точки графика. Поэтому график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Ответ: доказано.

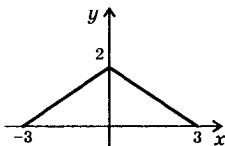
75в) Учтем, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Получим график четной периодической функции с периодом T .



Учтем, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Получим график нечетной периодической функции с периодом T .



Ответ: см. решение.



776) Для построения графика функции $y = f(|x|)$ по заданному графику функции $y = f(x)$ надо сохранить часть этого графика при $x \geq 0$ и зеркально отразить ее влево относительно оси ординат.

Ответ: см. решение.

81а) Запишем данную функцию $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x$ в виде $f(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x = 2\cos^2 x - \sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 2 - 3\sin^2 x$. Теперь найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции. Учитывая ограниченность функции синус, имеем: $0 \leq \sin^2 x \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на отрицательное число (-3) . Знак неравенства меняется на противоположный: $0 \geq -3\sin^2 x \geq -3$. Ко всем частям неравенства прибавим число 2. Имеем: $2 \geq 2 - 3\sin^2 x \geq -1$, т.е. $-1 \leq f(x) \leq 2$. Поэтому наибольшее значение функции равно 2, наименьшее значение равно (-1) .

Ответ: $\min f(x) = -1$, $\max f(x) = 2$.

83а) Асимптотой называется прямая линия, к которой график функции приближается сколь угодно близко. Функция $y = \frac{x}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, т.к. при $x \rightarrow 2$ числитель дроби $\frac{x}{x-2}$ стремится к числу 2, а знаменатель стремится к числу 0. Так как знаменатель становится очень малым, то функция $y \rightarrow \pm \infty$.

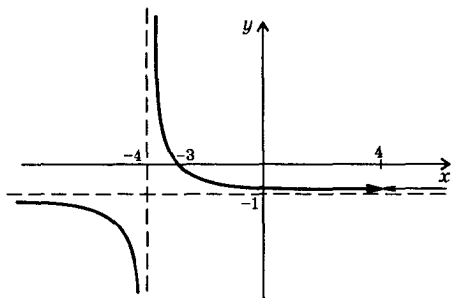
Функция $y = \frac{x}{x-2}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$, т.к. при $x \rightarrow \infty$ функция $y \approx \frac{x}{x} = 1$ (т.е. можно при больших x пренебречь числом 2 в знаменателе дроби $\frac{x}{x-2}$).

Ответ: $x = 2$ — вертикальная асимптота, $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

846) Преобразуем данную функцию. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем:

$$y = \frac{12 + x - x^2}{x^2 - 16} = \frac{-(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+4)} = -\frac{x+3}{x+4}$$
 Таким образом, построим график функции $y = -\frac{x+3}{x+4}$. Этот график пересекает ось абсцисс в

точке $x = -3$ и ось ординат — в точке $y = -\frac{3}{4}$. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = -4$ и горизонтальную асимпто-

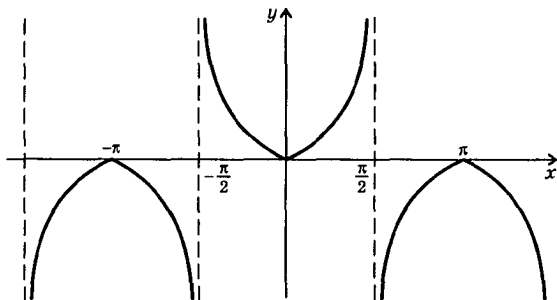


ту $y = -1$. Кроме того, данная функция в точке $x = 4$ не определена (эта точка на графике отмечена стрелочками).

Ответ: см. решение.

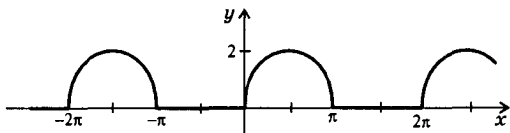
84в) Функцию $y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$ запишем в виде $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x}$. Используя определение модуля, получим

$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } \sin x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & \text{если } \sin x < 0 \end{cases}$. Построим график этой функции, учитывая ограничения на знак $\sin x$.



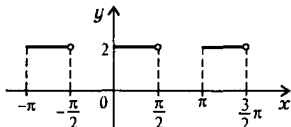
Ответ: см. решение.

85б) Функцию $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x$ запишем в виде $y = \sqrt{\sin^2 x} + \sin x = |\sin x| + \sin x = \begin{cases} 2 \sin x, & \text{если } \sin x \geq 0 \\ 0, & \text{если } \sin x < 0 \end{cases}$. Теперь (учитывая ограничения) легко построить график этой функции.



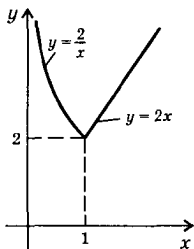
Ответ: см. решение.

85в) Очевидно, что функция $y = \sin^2(\sqrt{\operatorname{tg} x}) + \cos^2(\sqrt{\operatorname{tg} x})$ может быть записана в виде $y = 1$ при условии $\operatorname{tg} x \geq 0$. Теперь легко изобразить график этой функции. В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$) функция $\operatorname{tg} x$, а следовательно, и данная функция не определена.



Ответ: см. решение.

86в) В функции $y = 2^{|\log_2 x|+1}$ раскроем знак модуля. Если $x \in (0; 1)$, то $\log_2 x < 0$ и функция $y = 2^{-\log_2 x + 1} = (2^{\log_2 x})^{-1} \cdot 2 = x^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{x}$.



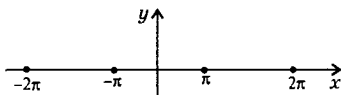
Если $x \in [1; \infty)$, то $\log_2 x \geq 0$ и функция $y = 2^{\log_2 x + 1} = 2^{\log_2 x} \cdot 2 = x \cdot 2 = 2x$. Таким образом, данная функция имеет вид:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x \in (0; 1) \text{ — гипербола,} \\ 2x, & \text{если } x \in [1; \infty) \text{ — прямая.} \end{cases}$$

Теперь с учетом ограничений построим график данной функции.

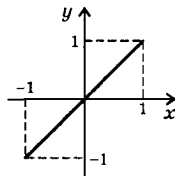
Ответ: см. решение.

88б) Область определения функции $y = \sqrt{\log_{2000} \cos^{2000} x}$ задается условием: $\log_{2000} \cos^{2000} x \geq 0$ или $\log_{2000} \cos^{2000} x \geq \log_{2000} 1$, откуда $\cos^{2000} x \geq 1$. Такое неравенство выполняется только при $\cos x = -1$, откуда $x = \pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$). В этих точках значение функции $y=0$. Итак, график данной функции состоит из отдельных точек с координатами $(\pi n; 0)$.



Ответ: см. решение.

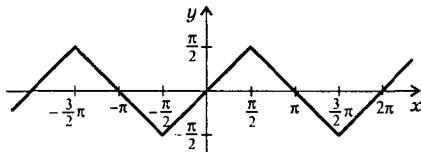
89а) Область определения функции $y = \sin(\arcsin x)$ такая же, как у функции $\arcsin x$, т.е. $D(y) = [-1; 1]$. Учтем, что функции синус и арксинус взаимно обратные. Поэтому данную функцию можно записать в виде $y = x$. Построим график этой функции.



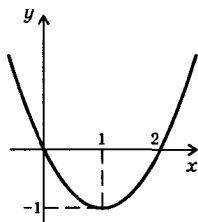
Ответ: см. решение.

89б) Область определения функции $y = \arcsin(\sin x)$ такая же как у функции $\sin x$, т.е. $D(y) = R$. Данная функция периодическая с периодом 2π . На промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функции синус и арксинус взаимно обратные и данную функцию можно записать в виде $y = x$. Поэтому на этом промежутке график построить просто. Учтем, что график функции $\sin x$ (а, следовательно, и данной функции) симметричен относительно $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому график легко построить и на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Далее учитываем периодичность данной функции и строим график далее.

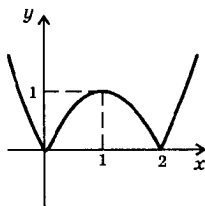
Ответ: см. решение.



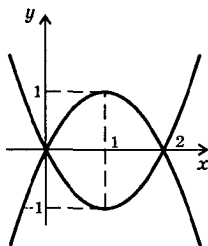
92б) Сначала построим график функции $y = x^2 - 2x$ (парабола). Чтобы построить график функции $y = |x^2 - 2x|$, надо сохранить те части графика $y = x^2 - 2x$, для которых $y \geq 0$, а те части, для которых $y < 0$, надо зеркально отразить вверх относительно оси абсцисс. Наконец, чтобы построить окончательный график $|y| = |x^2 - 2x|$, надо предыдущий график $y = |x^2 - 2x|$ сохранить и еще зеркально отразить вниз относительно оси абсцисс.



$$y = x^2 - 2x$$

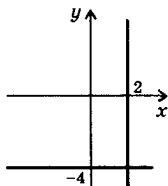


$$y = |x^2 - 2x|$$

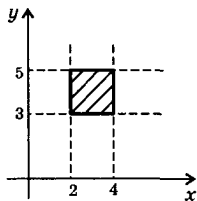


$$|y| = |x^2 - 2x|$$

Ответ: см. решение.



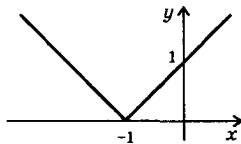
92в) Произведение $(x - 2)(y + 4) = 0$, если хотя бы один из множителей равен нулю. Получаем уравнения: $x - 2 = 0$ (откуда $x = 2$) и $y + 4 = 0$ (откуда $y = -4$). Таким образом, график состоит из двух прямых линий $x = 2$ и $y = -4$. **Ответ:** см. решение.



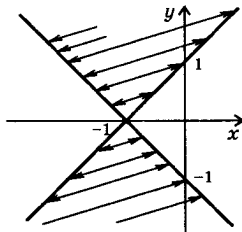
93б) Запишем данные неравенства $|x - 3| \leq 1$, $|y - 4| \leq 1$ в виде двойных неравенств: $-1 \leq x - 3 \leq 1$, $-1 \leq y - 4 \leq 1$ или $2 \leq x \leq 4$, $3 \leq y \leq 5$. Эти неравенства определяют внутренние точки и границы квадрата со стороной 2.

Ответ: см. решение.

93в) Сначала построим границу данного множества точек $|y| = |x + 1|$. Построим график функции $y = |x + 1|$. Чтобы получить график $|y| = |x + 1|$, надо сохранить график $y = |x + 1|$ и зеркально отразить его вниз относительно оси абсцисс. Построенные линии



$$y = |x + 1|$$



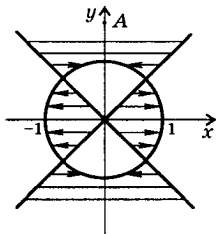
$$|y| > |x + 1|$$

разбили плоскость на четыре сектора. Определим, какие точки удовлетворяют неравенству $|y| > |x + 1|$. Для этого из каждого сектора выберем по контрольной точке. Например, для точки $x = -1$, $y = 1$ неравенство выполнено: $|1| > |-1 + 1|$. Следовательно, все точки этого же сектора удовлетворяют неравенству.

Множество искомых точек показано штриховкой. Стрелки показывают, что данное неравенство строгое и границы в множество точек не входят. **Ответ:** см. решение.

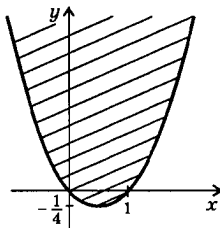
94а) Для построения множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$, используем метод интервалов. Числитель этой дроби обращается в нуль, если $x^2 - y^2 = 0$, откуда $y = \pm x$ (биссектрисы координатных углов). Знаменатель равен нулю, если $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (окружность радиуса 1 с центром в начале координат). Построим эти линии. Линии разбили координатную плоскость на ряд областей. Легко проверить, что координаты точки $A(0; 2)$ удовлетворяют неравенству $\frac{0^2 - 2^2}{0^2 + 2^2 - 1} \leq 0$.

Далее используем метод интервалов: при переходе в каждую соседнюю область знак выражения $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1}$ меняется на противоположный. Штриховкой показаны искомые точки. При этом точки окружности не входят, т.к. знаменатель дроби не должен равняться нулю. **Ответ:** см. решение.



94в) Так как обе части неравенства $\sqrt{x+y} \geq |x|$ неотрицательны, то возведем их в квадрат. При этом знак неравенства не меняется: $x+y \geq |x|^2$. Учтем, что $|x|^2 = x^2$. Тогда получаем: $y \geq x^2 - x$. Построим множество таких точек.

Ответ: см. решение.

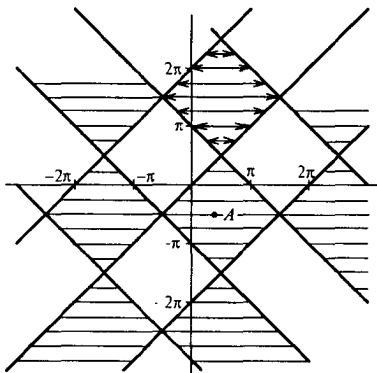


96е) Сначала вместо неравенства $\sin x > \sin y$ рассмотрим равенство $\sin x = \sin y$ и найдем более простую связь между переменными x и y . Перенесем все члены в правую часть и преобразуем ее в произведение. Получаем: $0 = \sin y - \sin x$ или $2\sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2} = 0$. Рассмотрим два случая:

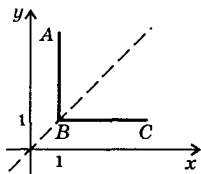
а) $\sin \frac{y-x}{2} = 0$, тогда $\frac{y-x}{2} = \pi n$, откуда $y = x + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

б) $\cos \frac{y+x}{2} = 0$, тогда $\frac{y+x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $y = -x + \pi(2k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Построим прямые $y = x + 2\pi n$ и $y = -x + \pi(2k+1)$. Эти прямые разбили координатную плоскость на отдельные квадраты. Например, координаты точки $A \left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right)$ удовлетворяют неравенству $\sin x > \sin y$. Поэтому все точки этого квадрата также удовлетворяют неравенству. Учтем метод интервалов: при пересечении границ знак неравенства меняется на противоположный. Искомые точки отмечены штриховкой. Так как неравенство строгое, то границы в требуемое множество точек не входят.



Ответ: см. решение.



96ж) Для равенства $\min(x; y) = 1$ рассмотрим два случая.

а) Если $x \leq y$, то наименьшее из чисел x и y число x и оно равно 1, т.е. $x = 1$.

б) Если $x > y$, то наименьшее из чисел x и y число y и оно равно 1, т.е. $y = 1$.

Таким образом, надо построить прямую $x = 1$ (если $x \leq y$ или $1 \leq y$) и прямую $y = 1$ (если $x > y$ или $x > 1$). Итак, множество точек угла ABC удовлетворяют равенству $\min(x; y) = 1$.

Ответ: см. решение.

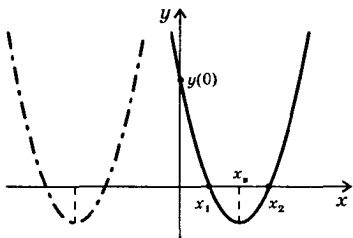
§ 3. Уравнения, неравенства и системы

97а) Чтобы квадратное уравнение $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ имело решение, надо чтобы его дискриминант $D = 4(a-1)^2 - 4(2a+1) = 4(a^2 - 4a) = 4a(a-4)$ был неотрицательным. Решая это неравенство, находим $a \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

По формулам Виета произведение корней уравнения равно свободному члену $2a + 1$. Если корни имеют разные знаки, то $2a + 1 < 0$,

т.е. $a < -\frac{1}{2}$.

Теперь найдем значения a , при которых оба корня данного уравнения положительны. Рассмотрим квадратичную функцию $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх. Если точки пересечения (корни уравнения) x_1



и x_2 положительны, то выполняются два условия: значение функции при $x = 0$ положительно (т.е. $y(0) > 0$) и абсцисса вершины параболы положительна (т.е. $x_p > 0$). Запишем эти условия через коэффициенты уравнения: $2a + 1 > 0$ и $a - 1 > 0$, откуда $a > 1$. Учитывая, что уравнение имеет корни при $a \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$, находим $a \geq 4$. Аналогично находим, что при $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ корни уравнения отрицательны.

Ответ: имеет решения при $a \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$; корни имеют разные знаки при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; корни положительны при $a \in [4; \infty)$ и отрицательны при $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.

100а) Пусть x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + p = 0$. По условию $x_1^2 + x_2^2 = 16$. По формулам Виета: $x_1 + x_2 = 4$ и $x_1 x_2 = p$. Поэтому для нахождения параметра p надо найти произведение корней. Равенство $x_1 + x_2 = 4$ возведем в квадрат: $x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 16$ или $(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1 x_2 = 16$ и используем условие $x_1^2 + x_2^2 = 16$. Тогда получаем: $16 + 2x_1 x_2 = 16$, откуда $x_1 x_2 = 0 = p$.

Ответ: $p = 0$.

101) Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней, то выражение $ax^2 + bx + c$ имеет один и тот же знак при всех значениях x . Определим этот знак. Выражение $a + b + c =$

значение выражения $ax^2 + bx + c$ при $x = 1$. Так как по условию $a + b + c < 0$, то и величина $ax^2 + bx + c < 0$ при всех x . Так как c — значение выражения $ax^2 + bx + c$ при $x = 0$, то $c < 0$.

Ответ: $c < 0$.

104а) Если кубическое уравнение $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, то p — делитель свободного члена 1 и q — делитель старшего коэффициента 2. Поэтому корни уравнения надо искать среди чисел $\pm 1; \pm \frac{1}{2}$. Проверим, что $x_0 = -\frac{1}{2}$ — корень уравнения: $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$ — верное равенство.

Разделим уголком многочлен $2x^3 - x^2 + x + 1$ на двучлен $x + \frac{1}{2}$ (т.е. на $x - x_0$). Получаем:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 1 & x + \frac{1}{2} \\ \hline 2x^3 + x^2 & 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline -2x^2 + x & \\ -2x^2 - x & \\ \hline 2x + 1 & \\ 2x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, левую часть данного уравнения можно разложить на множители: $2x^3 - x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x + 2)$. Теперь надо решить квадратное уравнение $2x^2 - 2x + 2 = 0$. Оно корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицательный. Поэтому данное кубическое уравнение имеет один корень $x = -\frac{1}{2}$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}$.

105а) Для решения уравнения $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$ изменим порядок умножения скобок: $(x + 1)(x + 5)(x + 2)(x + 4) = 40$. Перемножим первые две и последние две скобки: $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40$. Введем новую неизвестную $t = x^2 + 6x$ и получим уравнение: $(t + 5)(t + 8) = 40$ или $t^2 + 13t + 40 = 40$ или $t(t + 13) = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 0$ и $t_2 = -13$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем два уравнения.

а) $x^2 + 6x = 0$ или $x(x + 6) = 0$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = -6$.

6) $x^2 + 6x = -13$ или $x^2 + 6x + 13 = 0$. Это квадратное уравнение корней не имеет, т.к. дискриминант отрицательный.

Ответ: 0; -6.

1056) При решении уравнения $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1)$ введем новую неизвестную $t = x+1$. Получаем уравнение: $(t-2)^5 + (t+2)^5 = 242t$. Используя бином Ньютона, возведем двучлены в левой части в пятую степень и приведем подобные члены. Имеем уравнение: $2(t^5 + 10t^3 \cdot 2^2 + 5t \cdot 2^4) = 242t$ или $t^5 + 40t^3 + 80t = 121t$ или $t(t^4 + 40t^2 - 41) = 0$. Одно решение очевидно $t_1 = 0$. Решая биквадратное уравнение $t^4 + 40t^2 - 41 = 0$, найдем $t^2 = 1$ (корни $t_{2,3} = \pm 1$) и $t^2 = -4$ (решений нет).

Вернемся к старой неизвестной x . Имеем три уравнения: $x+1 = 0$ (откуда $x_1 = -1$), $x+1 = 1$ (тогда $x_2 = 0$) и $x+1 = -1$ (откуда $x_3 = -2$). Итак, уравнение имеет три корня. Ответ: -1; 0; -2.

1076) Легко проверить, что значение $x = 0$ не является корнем уравнения $\frac{6x}{x^2 + 2x + 3} + \frac{11x}{x^2 + 7x + 3} = 2$. Разделим числитель и знаменатель дробей на x . Имеем: $\frac{6}{x+2+\frac{3}{x}} + \frac{11}{x+7+\frac{3}{x}} = 2$. Введем новую

неизвестную $t = x + \frac{3}{x}$ и получим уравнение: $\frac{6}{t+2} + \frac{11}{t+7} = 2$ или $6(t+7) + 11(t+2) = 2(t+2)(t+7)$ или $17t + 64 = 2t^2 + 18t + 28$ или $0 = 2t^2 + t - 36$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 4$ и $t_2 = -\frac{9}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем два уравнения.

а) $x + \frac{3}{x} = 4$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

б) $x + \frac{3}{x} = -\frac{9}{2}$ или $2x^2 + 9x + 6 = 0$, откуда $x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Ответ: 1; 3; $\frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}$.

1086) Убедимся, что значение $x = 0$ не является корнем уравнения $2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$. Разделим все члены на x^2 и сгруппируем члены: $2x^2 + x - 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$ или $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$. Введем новую неизвестную $t = x + \frac{1}{x}$ и возведем ее в квадрат: $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Тогда уравнение имеет вид: $2(t^2 - 2) + t - 3 = 0$ или $2t^2 + t - 7 = 0$. Корни этого уравнения $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{4}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравне-

ние: $t = x + \frac{1}{x}$ или $0 = x^2 - tx + 1$, корни которого $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 1}}{2}$.

Подставив значения t , найдем: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$, т.е. $x_{1,2} =$
 $= \frac{-1 + \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$ и $x_{3,4} = \frac{-1 - \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$.

Ответ: $\frac{-1 + \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$; $\frac{-1 - \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$.

110а) В уравнении $x^4 + 4x - 1 = 0$ разложим левую часть на множители, используя формулу для разности квадратов: $(x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 - 4x + 2) = 0$ или $(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 = 0$ или $(x^2 + 1 + \sqrt{2}x - \sqrt{2})(x^2 + 1 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем два квадратных уравнения.

$$\text{а) } x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0, \quad \text{корни } x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4(1 - \sqrt{2})}}{2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

б) $x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$, корней не имеет, т.к. дискриминант отрицательный.

Ответ: $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$.

112а) Уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7$ запишем в виде $x^2 + \left(\frac{3x}{3+x}\right)^2 = 7$ и в левой части выделим полный квадрат разности выражений:

$$\left(x^2 - 2x \cdot \frac{3x}{3+x} + \left(\frac{3x}{3+x}\right)^2\right) + \frac{6x^2}{3+x} = 7 \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{3x}{3+x}\right)^2 + \frac{6x^2}{3+x} = 7 \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{x^2}{3+x}\right)^2 + 6\frac{x^2}{3+x} - 7 = 0. \quad \text{Введем новую неизвестную } t = \frac{x^2}{3-x} \quad \text{и}$$

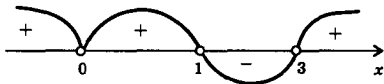
получим квадратное уравнение $t^2 + 6t - 7 = 0$, корни которого $t_1 = -7$ и $t_2 = 1$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения.

а) $\frac{x^2}{3+x} = -7$ или $x^2 + 7x + 21 = 0$. Это уравнение корней не имеет, т.к. дискриминант отрицательный.

6) $\frac{x^2}{3+x} = 1$ или $x^2 - x - 3 = 0$ Корни этого уравнения $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. **Ответ:** $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

1136) В левой части уравнения $x^2 - 2x - 3 = |3x - 3|$ выделим квадрат разности чисел. Запишем уравнение в виде: $(x^2 - 2x + 1) - 4 = 3|x - 1|$ или $(x - 1)^2 - 4 = 3|x - 1|$. Учтем, что $a^2 = |a|^2$. Тогда получим: $|x - 1|^2 - 3|x - 1| - 4 = 0$. Введем новую неизвестную $t = |x - 1|$. Имеем квадратное уравнение $t^2 - 3t - 4 = 0$, корни которого $t_1 = 4$ и $t_2 = -1$ (не подходит, т.к. $t \geq 0$). Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнение: $|x - 1| = 4$, откуда $x - 1 = \pm 4$ и $x_1 = 5, x_2 = -3$. **Ответ:** 5; -3.

118а) Так как левая часть неравенства $|x^2 - 2x| < x$ неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной (т.е. $x \geq 0$). Возведем обе неотрицательные части в квадрат. При этом знак неравенства не меняется: $(x^2 - 2x)^2 < x^2$. Запишем неравенство в виде $(x^2 - 2x)^2 - x^2 < 0$ и разложим левую часть на множители: $(x^2 - 2x + x)(x^2 - 2x - x) < 0$ или $(x^2 - 3x) < 0$ или $x^2(x - 1) \times (x - 3) < 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Получаем $x \in (1; 3)$.



Ответ: (1; 3).

120а) Для доказательства неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$). Получаем: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = |ab| \geq ab$. Имеем: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc, \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$. По-членно сложим эти три неравенства одного знака: $\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ab + bc + ac$ или $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$. Причем неравенство становится равенством только при $a = b = c$.

Ответ: доказано.

1256) Запишем систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases}$ в виде

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \text{ Умножим первое уравнение на 5, второе — на 7.}$$

Имеем: $\begin{cases} 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105 \\ 7y^2 - 14xy = -105 \end{cases}$. Сложим уравнения системы: $5x^2 - 5xy + 5y^2 + 7y^2 - 14xy = 0$ или $5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$. Решим это однородное квадратное уравнение, считая величину y постоянной: $x = \frac{19y \pm \sqrt{361y^2 - 240y^2}}{10} = \frac{19y \pm 11y}{10}$, т.е. $x = 3y$ и $x = \frac{4}{5}y$. Подставим эти величины во второе уравнение данной системы.

а) Если $x = 3y$, то получаем: $y^2 - 2 \cdot 3y \cdot y + 15 = 0$ или $y^2 = 3$ и $y_{1,2} = \pm \sqrt{3}$ и $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$.

б) Если $x = \frac{4}{5}y$, то имеем: $y^2 - 2 \cdot \frac{4}{5}y \cdot y + 15 = 0$ или $-\frac{3}{5}y^2 + 15 = 0$ или $y^2 = 25$ и $y_{3,4} = \pm 5$ и $y_{3,4} = \pm 4$.

Ответ: $(3\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (4; 5), (-4; -5)$.

1266) Из первого уравнения системы $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 \\ y + |x-1| = 3 \end{cases}$ выч-

тем второе: $|y-2| - y = -2$ или $|y-2| = y-2$. Очевидно, что решение этого уравнения $y-2 \geq 0$, т.е. $y \geq 2$. Из второго уравнения $|x-1| = 3-y$. Так как левая часть неотрицательна, то и правая часть неотрицательна, т.е. $3-y \geq 0$, откуда $y \leq 3$. Пусть $y = t$, решим уравнение $|x-1| = 3-t$. Получаем: $x-1 = \pm(3-t)$, откуда $x = 1 \pm (3-t)$ или $x = 4-t$ и $x = t-2$.

Итак, решения системы: $(4-t; t), (t-2; t)$, где $t \in [2; 3]$.

Ответ: $(4-t; t), (t-2; t)$, где $t \in [2; 3]$.

1286) Для решения симметричной системы уравнений

$\begin{cases} x + y + xy = 0 \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 = 12 \end{cases}$ введем новые неизвестные $a = x + y$, $b = xy$ и учтем, что $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3ba$. Тогда система

имеет вид $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^3 - 3ab + b^3 = 12 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $b = -a$ и подставим во второе уравнение: $a^3 - 3a(-a) + (-a)^3 = 12$ или $3a^2 = 12$, откуда $a = \pm 2$. Теперь найдем $b = \pm 2$. Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем системы уравнений.

а) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -2 \end{cases}$ Из первого уравнения $y = 2 - x$ и подставим во второе: $x(2-x) = -2$ или $0 = x^2 - 2x - 2$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, тогда $y_{1,2} = 2 - x = 2 - (1 \pm \sqrt{3}) = 1 \mp \sqrt{3}$.

б) $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 2 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $y = -2 - x$ и под-

ставим во второе: $x(-2-x) = 2$ или $0 = x^2 + 2x + 2$. Это квадратное уравнение (и система) решений не имеет.

Ответ: $(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$, $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

1296) В первом уравнении системы
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x - y)(xy + 1) = -3 \end{cases}$$
 рас-

кроем скобки:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1 = 10 \\ (x - y)(xy + 1) = -3 \end{cases}$$
. Введем новые неизвестные $a = x - y$, $b = xy + 1$. Учтем, то $xy = b - 1$ и $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = a^2 + 2(b - 1) = a^2 + 2b - 2$. Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} a^2 + 2b - 2 + (b - 1)^2 + 1 = 10 \\ ab = -3 \end{cases}$$
 или
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ ab = -3 \end{cases}$$
. Умножим второе

уравнение на 2:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$
. Сложим и вычтем уравнения систе-

мы:
$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 4 \\ a^2 - 2ab + b^2 = 16 \end{cases}$$
 или
$$\begin{cases} (a + b)^2 = 4 \\ (a - b)^2 = 16 \end{cases}$$
, откуда
$$\begin{cases} a + b = \pm 2 \\ a - b = \pm 4 \end{cases}$$
. Далее надо рассмотреть четыре случая.

а)
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$
, откуда $a = 3$, $b = -1$. Получаем:
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy + 1 = -1 \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим $x = y + 3$ и подставим во второе: $(y + 3)y = -2$ или $y^2 + 3y + 2 = 0$, откуда $y_1 = -1$ ($x_1 = 2$) и $y_2 = -2$ ($x_2 = 1$).

б)
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -4 \end{cases}$$
, откуда $a = -1$, $b = 3$. Получаем:
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ xy + 1 = 3 \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим $x = y - 1$ и подставим во второе: $(y - 1)y = 2$ или $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_3 = -1$ ($x_3 = -2$) и $y_4 = 2$ ($x_4 = 1$).

в)
$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$
, откуда $a = 1$, $b = -3$. Получаем:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy + 1 = -3 \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = -4 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим $x = y + 1$ и подставим во второе: $(y + 1)y = -4$ или $y^2 + y + 4 = 0$. Это уравнение корней не имеет.

$$\text{г) } \begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases}, \text{ откуда } a = -3, b = 1. \text{ Получаем: } \begin{cases} x - y = -3 \\ xy + 1 = 1 \end{cases} \text{ или}$$

$\begin{cases} x - y = -3 \\ xy = 0 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $x = y - 3$ и подставим во второе: $(y - 3)y = 0$, откуда $y_5 = 3$ ($x_5 = 0$) и $y_6 = 0$ ($x_6 = -3$).

Итак, данная система уравнений имеет шесть решений.

Ответ: (2; -1), (1; -2), (-2; -1), (1; 2), (0; 3), (-3; 0).

$$1336) \text{ Систему } \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \\ xz = 3 \\ x + z = 4 \\ zy = 2 \\ z + y = 3 \end{cases} \text{ запишем в виде } \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \\ x + z = 4 \\ xz = 3 \\ z + y = 3 \\ zy = 2 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Введем новые неизвестные } a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \text{ и полу-}$$

$$\text{чим систему } \begin{cases} a + b = \frac{5}{6} \\ a + c = \frac{4}{3} \\ b + c = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Сложим все три уравнения системы:}$$

$$2a + 2b + 2c = \frac{22}{6}, \text{ откуда } a + b + c = \frac{11}{6}. \text{ Из этого равенства вычтем}$$

первое уравнение: $c = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1$, тогда $z = \frac{1}{c} = 1$. Аналогично, вы-

читая второе и третье уравнения, найдем $b = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ и

$y = \frac{1}{b} = 2$; $a = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{a} = 3$. Итак, система имеет единственное решение (3; 2; 1). Ответ: (3; 2; 1).

136) Пусть дано трехзначное число $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ (где x — цифра сотен, y — цифра десятков, z — цифра единиц). Так как сумма цифр числа равна 17, то получаем первое уравнение $x + y + z = 17$. Сумма квадратов цифр равна 109, поэтому имеем второе уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 109$. Если из данного числа вычесть

495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, $zyx = 100z + 10y + x$. Тогда имеем третье уравнение: $100x + 10y + z - 495 = 100z + 10y + x$ или $99x - 99z = 495$ или $x - z = 5$.

Получаем систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 109 \\ x - z = 5 \end{cases}$$
. Из третьего

уравнения выразим $x = z + 5$ и подставим в первое уравнение: $z + 5 + y + z = 17$ или $y + 2z = 12$, откуда $y = 12 - 2z$. Подставим $x = z + 5$ и $y = 12 - 2z$ во второе уравнение системы: $(z + 5)^2 + (12 - 2z)^2 + z^2 = 109$ или $z^2 + 10z + 25 + 144 - 48z + 4z^2 + z^2 = 109$ или $6z^2 - 38z + 60 = 0$ или $3z^2 - 19z + 30 = 0$. Корни этого уравнения $z_1 = 3$ и $z_2 = \frac{10}{3}$ (не подходит, т.к. z — цифра). Теперь найдем $x = z + 5 = 8$ и $y = 12 - 2z = 6$. Итак, данное число 863.

Ответ: 863.

137) Пусть l (м) — длина эскалатора, x (м/с) — скорость пассажира относительно эскалатора, y (м/с) — скорость эскалатора. Так как пассажир спускается по движущемуся эскалатору за 24 с, то получаем первое уравнение: $l = 24(x + y)$. По неподвижному эскалатору пассажир спускается за 42 с. Поэтому имеем второе уравнение $l = 42x$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} l = 24(x + y) \\ l = 42x \end{cases}$$
. Время, за которое пассажир спустится, стоя на движущемся эскалаторе,

равно $t = \frac{l}{y}$. Поэтому из системы исключим переменную x . Для этого первое уравнение умножим на 7, второе — на 4:

$$\begin{cases} 7l = 168x + 168y \\ 4l = 168x \end{cases}$$
. Вычтем из первого уравнения второе: $3l = 168y$,

откуда $\frac{l}{y} = \frac{168}{3} = 56$ (с). **Ответ:** 56 с.

140) Пусть портфель стоил x р., авторучка y р. и книга z р.

Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле $\left(\frac{x}{5}\right)$, авторучка — в 2 раза дешевле $\left(\frac{y}{2}\right)$ и книга — в 2,5 раза дешевле $\left(\frac{z}{2,5}\right)$, то покупка стоила бы 80 р. Получаем первое уравнение: $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 80$ или $2x + 5y + 4z = 800$. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле $\left(\frac{x}{2}\right)$, книга —

в 3 раза дешевле $\left(\frac{z}{3}\right)$, авторучка — в 4 раза дешевле $\left(\frac{y}{4}\right)$, то по-

купка стоила бы 120 р. Имеем второе уравнение: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 120$

или $6x + 3y + 4z = 1440$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 800 \\ 6x + 3y + 4z = 1440 \end{cases}$$
 в которой неизвестных больше, чем уравнений.

Найдем стоимость всей покупки, т.е. $x + y + z$. Для этого сложим уравнения системы: $8x + 8y + 8z = 2240$, откуда $x + y + z = \frac{2240}{8} = 280$ (р.) Теперь надо определить, что стоит дороже: портфель или авторучка (x или y). Для этого исключим переменную z . Из второго уравнения вычтем первое: $4x - 2y = 640$ или $2x - y = 320$. Запишем это равенство в виде: $x - y = 320 - x$. Так как стоимость всей покупки 280 р., то очевидно $x < 280$. Поэтому величина $320 - x > 0$, следовательно, $x - y > 0$ или $x > y$, т.е. портфель дороже авторучки.

Ответ: 280 р., портфель дороже авторучки.

144а) Так как левая часть уравнения $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$ неотрицательна, то и правая часть неотрицательна, т.е. $x - 1 \geq 0$ или $x \geq 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1$ или $\sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2$ или $x\sqrt{x^2 - 1} = x(2 - x)$. Было учтено, что $x > 1$ и $|x| = x$. Так как $x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на x : $\sqrt{x^2 - 1} = 2 - x$. Левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому правая часть также неотрицательна, т.е. $2 - x \geq 0$, откуда $x \leq 2$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $x^2 - 1 = 4 - 4x + x^2$ или $4x = 5$, откуда $x = \frac{5}{4}$. Корень $x = \frac{5}{4}$ входит в промежуток $1 \leq x \leq 2$ и поэтому является решением данного уравнения.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

145б) Для решения уравнения $\sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{3 - x} = 1$ введем новые неизвестные $a = \sqrt[3]{10 - x}$ и $b = \sqrt[3]{3 - x}$. Получаем первое уравнение $a - b = 1$. Возведем величины a и b в куб: $a^3 = 10 - x$ и $b^3 = 3 - x$. Вычтем из первого равенства второе. Получим второе уравнение: $a^3 - b^3 = 7$. Итак, имеем систему уравнений
$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^3 = 7 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $a = b + 1$ и подставим во второе: $(b + 1)^3 - b^3 = 7$ или $(b + 1 - b)((b + 1)^2 + (b + 1)b + b^2) = 7$ или $3b^2 + 3b + 1 = 7$ или $b^2 + b - 2 = 0$. Корни этого уравнения $b_1 = 1$ и $b_2 = -2$. Используя равенство $b^3 = 3 - x$, найдем $x = 3 - b^3$. Получаем: $x_1 = 3 - 1 = 2$ и $x_2 = 3 - (-2)^3 = 11$. **Ответ:** 2; 11.

1466) Так как левая часть уравнения $\sqrt{1 - 2\cos x} = \sin x$ неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т.е. $\sin x \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $1 - 2\cos x = \sin^2 x$ или $1 - 2\cos x = 1 - \cos^2 x$ или $\cos^2 x - 2\cos x = 0$ или $\cos x \times (\cos x - 2) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения: $\cos x = 0$ и $\cos x - 2 = 0$ (или $\cos x = 2$ и это уравнение решений не имеет). Решая уравнение $\cos x = 0$ с дополнительным условием $\sin x \geq 0$, получаем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$).

147а) Для решения уравнения $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}} = 2$ введем новую неизвестную $t = \sqrt{x - 2} \geq 0$. Тогда $t^2 = x - 2$, откуда $x = t^2 + 2$. Получаем уравнение: $\sqrt{t^2 + 2 - 1 - 2t} + \sqrt{t^2 + 2 + 7 - 6t} = 2$ или $\sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 2$ или $|t - 1| + |t - 3| = 2$. Решением этого уравнения является промежуток $1 \leq t \leq 3$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем: $1 \leq \sqrt{x - 2} \leq 3$. Возведем все неотрицательные части неравенства в квадрат. Знак неравенства при этом сохраняется: $1 \leq x - 2 \leq 9$. Ко всем частям неравенства прибавим число 2 и получим: $3 \leq x \leq 11$.

Ответ: [3; 11].

1486) ОДЗ уравнения $\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2$ задается условиями: $\begin{cases} x(2-x) \geq 0 \\ (x-2)(x+1)x^2 \geq 0 \end{cases}$, т.к. подкоренные выражения радикалов четной степени должны быть неотрицательными. Решение первого неравенства $0 \leq x \leq 2$, решение второго неравенства: $x \leq -1$, $x = 0$, $x \geq 2$. Таким образом, ОДЗ уравнения состоит из двух точек: $x = 0$ и $x = 2$. Теперь проверим, являются ли эти точки решением данного уравнения. При $x = 0$ получаем: $\sqrt[4]{0} + \sqrt[3]{0} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[5]{2 \cdot 6} = 2$ (не

верное равенство), поэтому $x = 0$ не корень уравнения. Для $x = 2$ имеем: $\sqrt[4]{0} - \sqrt[3]{0} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[5]{4 \cdot 8} = 2$ (верное равенство). Следовательно, $x = 2$ — единственное решение данного уравнения.

Ответ: 2.

149а) Легко проверить, что $x = 1$ не является корнем уравнения $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} = 8\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Поэтому разделим все члены

уравнения на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Получим: $\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} + 2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 8 = 0$ и введем новую неизвестную $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

Имеем квадратное уравнение $t^2 + 2t - 8 = 0$, корни которого $t_1 = 2$ и $t_2 = -4$. Вернемся к неизвестной x . Получаем уравнения.

$$\text{а) } \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \text{ или } \frac{x+1}{x-1} = 8 \text{ или } x+1 = 8x-8, \text{ откуда } x = \frac{9}{7}.$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = -4 \text{ или } \frac{x+1}{x-1} = -64 \text{ или } x+1 = -64x+64, \text{ откуда } x = \frac{63}{65}.$$

Ответ: $\frac{9}{7}, \frac{63}{65}$.

151а) В левой части уравнения $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$ при-

ведем дроби к общему знаменателю: $\frac{\sqrt[7]{12+x}(12+x)}{12x} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$ или

$\sqrt[7]{12+x}(12+x) = 256x\sqrt[7]{x}$ или $(12+x)^{\frac{8}{7}} = 256x^{\frac{8}{7}}$. Возведем обе част-

ти уравнения в степень $\frac{7}{8}$. Имеем: $|12+x| = 256^{\frac{1}{8}}|x|$ или $|12+x| =$

$= 128|x|$, тогда $12+x = 128x$ (откуда $x = \frac{12}{127}$) и $12+x = -128x$ (от-

куда $x = -\frac{12}{129} = -\frac{4}{43}$). Ответ: $\frac{12}{127}, -\frac{4}{43}$.

154а) ОДЗ неравенства $\sqrt{x^2-3x+2} > 2x-5$ задается условием $x^2-3x+2 \geq 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty)$. Теперь надо рассмотреть два случая.

а) Если $2x-5 < 0$ (т.е. $x < 2,5$), то левая часть неравенства отрицательна, а правая отрицательна. Поэтому данное неравенство выполняется. С учетом ОДЗ решение неравенства в этом случае $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 2,5)$.

б) Если $2x - 5 \geq 0$ (т.е. $x \geq 2,5$), то обе части данного неравенства неотрицательны. Поэтому возведем обе части в квадрат. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $x^2 - 3x + 2 > 4x^2 - 20x + 25$

или $0 > 3x^2 - 17x + 23$. Решение этого неравенства $x \in \left(\frac{17 - \sqrt{13}}{6}; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$. С учетом ОДЗ и рассматриваемого промежутка $x \geq 2,5$

решение в этом случае $x \in \left[2,5; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$.

Объединяя решения двух рассмотренных случаев $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 2,5)$ и $x \in \left[2,5; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$, найдем $x \in (-\infty; 1] \cup \left[2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \left[2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$.

154б) ОДЗ неравенства $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$ задается условием $3x - x^2 \geq 0$, откуда $x \in [0; 3]$. При таких значениях x правая часть $4 - x$ неотрицательна. Поэтому возведем обе части в квадрат. Знак неравенства сохраняется. Получаем: $3x - x^2 < 16 - 8x + x^2$ или $0 < 2x^2 - 11x + 16$. Это неравенство выполняется при всех значениях x . Следовательно, ОДЗ $x \in [0; 3]$ является решением данного неравенства. Ответ: $[0; 3]$.

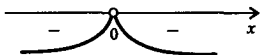
155а) ОДЗ неравенства $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3$ задается условиями:

$1 - 4x^2 \geq 0$ и $x \neq 0$, откуда $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{1}{2} \right]$. Запишем неравенство в виде:

$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} - 3 < 0$ или $\frac{1 - 3x - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 0$. Для его решения используем метод интервалов. Найдем значения x , при которых числитель дроби равен нулю. Решим уравнение: $1 - 3x - \sqrt{1 - 4x^2} = 0$ или $1 - 3x = \sqrt{1 - 4x^2}$. Учтем, что $1 - 3x \geq 0$, и возведем обе части в квадрат: $1 - 6x + 9x^2 = 1 - 4x^2$ или $13x^2 - 6x = 0$

или $x(13x - 6) = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{6}{13}$ (не подходит, т.к. не выполняется условие $1 - 3x \geq 0$). Знаменатель выражения обращается в нуль также при $x = 0$. Определим знак дроби

$\frac{1 - 3x - \sqrt{1 - 4x^2}}{x}$, например, при $x = \frac{1}{2}$. Получаем: $\frac{1 - \frac{3}{2} - \sqrt{0}}{\frac{1}{2}} < 0$.



Поэтому имеем диаграмму знаков этого выражения. Видно, что решение данного неравенства совпадает с его ОДЗ $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

160а) Для решения системы $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ введем

новые неизвестные $a = \sqrt[3]{x+2y}$ и $b = \sqrt[3]{x-y+2}$. Тогда первое уравнение имеет вид $a+b=3$. Возведем переменные a и b в куб: $a^3 = x+2y$ и $b^3 = x-y+2$ и сложим эти равенства: $a^3 + b^3 = 2x + y + 2$, откуда $2x+y = a^3 + b^3 - 2$. Тогда второе уравнение имеет вид: $a^3 + b^3 - 2 = 7$ или $a^3 + b^3 = 9$. Данная система принимает вид

$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $b = 3 - a$ и подставим во второе: $a^3 + (3-a)^3 = 9$ или $a^3 + 27 - 27a + 9a^2 - a^3 = 9$ или $9a^2 - 27a + 18 = 0$ или $a^2 - 3a + 2 = 0$. Корни этого уравнения $a_1 = 1$ (тогда $b_1 = 3 - a = 2$) и $a_2 = 2$ (тогда $b_2 = 1$). Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем две системы, используя соотношения $x+2y = a^3$ и $x-y+2 = b^3$.

а) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y+2=8 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=6 \end{cases}$. Вычтем уравнения и полу-

чим: $3y = -5$, откуда $y = -\frac{5}{3}$ и $x = y + 6 = \frac{13}{3}$.

б) $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y+2=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$. Вычтем уравнения и найдем:

$3y = 9$, откуда $y = 3$ и $x = y - 1 = 3 - 1 = 2$.

Ответ: $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right), (2; 3)$.

161б) В системе $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2} \\ xy - x - y = 0 \end{cases}$ сначала рассмотрим пер-

вое уравнение. Введем неизвестную $t = \sqrt{\frac{6x}{x+y}}$ и запишем уравне-

ние в виде: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ или $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Корни этого уравнения

$t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Вернемся к старым неизвестным x и y . Получаем:

$\sqrt{\frac{6x}{x+y}} = 2$ или $\frac{6x}{x+y} = 4$ или $x = 2y$ и $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} = \frac{1}{2}$ или $\frac{6x}{x+y} = \frac{1}{4}$ или $y = 23x$. Имеем две системы уравнений.

а) $\begin{cases} x = 2y \\ xy - x - y = 0 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во второе: $2y^2 - 2y - y = 0$ или $y(2y - 3) = 0$, откуда $y_1 = 0$ (тогда $x_1 = 0$) и $y_2 = \frac{3}{2}$ (тогда $x_2 = 3$). Однако решение $x = 0$ $y = 0$ не подходит по ОДЗ (деление на нуль).

б) $\begin{cases} y = 23x \\ xy - x - y = 0 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во второе: $23x^2 - x - 23x = 0$ или $x(23x - 24) = 0$, откуда $x_3 = 0$ (не подходит) и $x_4 = \frac{24}{23}$ (тогда $y_4 = 24$).

Ответ: $\left(3; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{24}{23}; 24\right)$.

163а) При решении уравнения $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ от функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ перейдем к функциям $\sin x$ и $\cos x$. Получаем:

$3 + 2\sin 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$ или $3 + 2\sin 2x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ или $3 + 2\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$. Введем новую неизвестную $t = \sin 2x$. Имеем уравнение:

$3 + 2t = \frac{2}{t}$ или $2t^2 + 3t - 2 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = -2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнения:

$\sin 2x = -2$ (решений не имеет) и $\sin 2x = \frac{1}{2}$ (решения $2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

164а) В уравнении $|x| \sin x + x = 0$ раскроем модуль, рассмотрев два случая.

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и уравнение имеет вид: $x \sin x + x = 0$ или $x(\sin x + 1) = 0$, откуда $x = 0$ и $\sin x + 1 = 0$ (или $\sin x = -1$). Решим это уравнение: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Учтем, что $x \geq 0$, поэтому $n \in \mathbb{N}$.

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и уравнение имеет вид: $-x \sin x + x = 0$. Так как $x \neq 0$, то разделим все члены уравнения на x : $-\sin x + 1 = 0$

или $\sin x = 1$. Решения этого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Учтем, что $x < 0$, поэтому решение запишем в виде $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $0; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} - 2\pi n$, где $n \in \mathbb{N}$.

164г) ОДЗ уравнения $\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin \frac{x}{2}$ задается условиями: $x \geq 0$ и $-x \geq 0$, откуда $x = 0$. ОДЗ данного уравнения состоит из единственной точки $x = 0$. Легко проверить, что $x = 0$ — корень данного уравнения. Ответ: 0 .

165в) Для решения уравнения $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$ используем формулу понижения степени: $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^2 x) = 2$ или $3(\log_2 \sin x)^2 + 1 + 2\log_2 \sin x = 2$ или $3(\log_2 \sin x)^2 + 2\log_2 \sin x - 1 = 0$. Введем новую неизвестную $t = \log_2 \sin x$. Получаем квадратное уравнение $3t^2 + 2t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнения.

а) $\log_2 \sin x = -1$, тогда $\sin x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, его решения $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$, тогда $\sin x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} > 1$ и это уравнение решений не имеет.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

166б) Используем формулу для косинуса двойного аргумента:

$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Имеем $\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: доказано.

167а) Для решения уравнения $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$ используем результаты задачи 166а. Получаем: $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2$ или $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x = 2 + 2\operatorname{tg}^2 x$ или $\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$. Введем новую неиз-

вестную $t = \operatorname{tg} x$ и получим кубическое уравнение: $t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0$. Разложим его левую часть на множители: $(t^3 - 2t^2 + t) + (2t - 2) = 0$ или $t(t-1)^2 + 2(t-1) = 0$ или $(t-1)(t^2 - t + 2) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения $t-1=0$ (корень $t=1$) и $t^2-t+2=0$ (решений нет). Вернемся к старой неизвестной x . Получаем уравнение: $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ (где $n \in \mathbb{Z}$). Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

168) Выражение $a \sin x + b \cos x$ умножим и разделим на $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\text{Получаем: } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Обозначим $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$. Очевидно, это можно сделать, т.к. выполнено основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1. \text{ Тогда данное выражение}$$

$$\text{имеет вид: } \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) =$$

$$= A \sin(x + \varphi), \text{ где } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ и } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ответ: доказано.

170) Уравнение $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ запишем в виде:

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \text{ или } \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Для решения этого симметричного уравнения введем новую неизвестную $t = \sin x + \cos x$. Возведем эту величину в квадрат: $t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$ или $t^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x$ или $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$, откуда $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Тогда уравнение имеет

$$\text{вид: } \sqrt{2}t = \frac{2}{t^2 - 1} \text{ или } \sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t - 2 = 0. \text{ Разложим левую часть}$$

кубического уравнения на множители: $(\sqrt{2}t^3 - 2\sqrt{2}t) + (\sqrt{2}t - 2) = 0$ или $\sqrt{2}t(t^2 - 2) + \sqrt{2}(t - \sqrt{2}) = 0$ или $\sqrt{2}t(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}) + \sqrt{2}(t - \sqrt{2}) = 0$ или $\sqrt{2}(t - \sqrt{2})(t^2 + t\sqrt{2} + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем уравнения: $t - \sqrt{2} = 0$ (корень $t = \sqrt{2}$) и $t^2 + t\sqrt{2} + 1 = 0$ (решений нет).

Вернемся к старой неизвестной x . Имеем: $2 \sin x \cos x = \sin 2x = t^2 - 1 = 2 - 1 = 1$. Решим уравнение $\sin 2x = 1$, откуда $2x = \frac{\pi}{2} +$

$+ 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Так как находилось t^2 (использовалось возведе-

ние в квадрат), то возможны посторонние решения. Проверка показывает, что n должно быть четным числом, т.е. $n = 2m$. Тогда решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

172б) Для решения уравнения $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$ выполним оценки $\sin^{100} x \leq \sin^2 x$ (равенство имеет место только при $\sin x = 0; \pm 1$) и $\cos^{100} x \leq \cos^2 x$ (равенство будет только при $\cos x = 0; \pm 1$). Сложим неравенства одного знака. Получаем неравенство того же знака: $\sin^{100} x + \cos^{100} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\sin^{100} x + \cos^{100} x \leq 1$. При этом неравенство совпадает с уравнением $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$ только при $\sin x = 0, \cos x = \pm 1$ или $\sin x = \pm 1, \cos x = 0$. Решая эти уравнения, найдем $x = \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

174) Проверим, что $x = 0$ не является решением уравнения $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$. Выразим величину $\sin(xy) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$. Оценим правую часть этого уравнения $\left(-\frac{x^2 + 1}{2x}\right)$. Пусть $x > 0$, запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим чисел: $\frac{x^2 + 1}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot 1}$ или $\frac{x^2 + 1}{2} \geq x$ (равенство имеет место, если числа x и 1 равны, т.е. $x = 1$), откуда $\frac{x^2 + 1}{2x} \geq 1$ и $-\frac{x^2 + 1}{2x} \leq -1$. Учтем, что функция $-\frac{x^2 + 1}{2x}$ нечетная. Область значений этой функции $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$. Поэтому уравнение $\sin(xy) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$ эквивалентно двум системам.

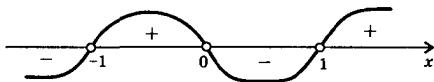
$$\text{а) } \begin{cases} x = 1 \\ \sin(xy) = -1, \text{ откуда } x = 1, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ (где } n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = -1 \\ \sin(xy) = 1, \text{ откуда } x = -1, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

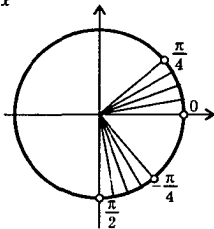
Ответ: $\left(1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \left(-1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

177в) Для решения неравенства $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$ введем новую неизвестную $t = \operatorname{tg} x$ и получим рациональное неравенство $\frac{2}{t + 1} < 2 - t$. Решим его методом интервалов: $\frac{2}{t + 1} + t - 2 < 0$ или

$\frac{2+t^2+t-2t-2}{t+1} < 0$ или $\frac{t(t-1)}{t+1} < 0$. Диаграмма знаков дроби $\frac{t(t-1)}{t+1}$ приведена на рисунке. Из диаграммы получаем: $t < -1$ и $0 < t < 1$.



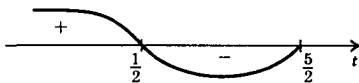
Вернемся к старой неизвестной x . Имеем неравенства: $\operatorname{tg} x < -1$ и $0 < \operatorname{tg} x < 1$. Их удобно решить с помощью тригонометрического круга (области углов, удовлетворяющих неравенствам, заштрихованы). Учтем периодичность функции тангенс. Получаем



$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$

181) При решении неравенства $\sqrt{5-2\sin x} \geq 6\sin x - 1$ введем новую неизвестную $t = \sin x$ и получим иррациональное неравенство $\sqrt{5-2t} \geq 6t - 1$. Сначала решим это неравенство. Для разнообразия используем метод интервалов. Найдём корни уравнения $\sqrt{5-2t} = 6t - 1$. Возведём обе части в квадрат: $5-2t = 36t^2 - 12t + 1$ или $0 = 36t^2 - 10t - 4$ или $0 = 18t^2 - 5t - 2$. Корни этого уравнения $t_1 = -\frac{2}{9}$ (не подходит, т.к. $6t - 1 \geq 0$) и $t_2 = \frac{1}{2}$. Учтём ОДЗ неравенства $5-2t \geq 0$ (т.е. $t \leq \frac{5}{2}$) и запишем неравенство в виде $\sqrt{5-2t} - 6t + 1 \geq 0$. Определим знак выражения, например, при $t = 0$. Полу-



чаем $\sqrt{5} + 1 > 0$ и построим диаграмму знаков выражения. Видно, что решение неравенства $t \leq \frac{1}{2}$. Вернемся к неизвестной x . Имеем

неравенство $\sin x \leq \frac{1}{2}$. Его решение $x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \text{ где}$

$n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$

187а) Для решения уравнения $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x + (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 10$

найдем связь между основаниями. Получаем: $\sqrt{5+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{5-\sqrt{24}} =$
 $= \sqrt{(5+\sqrt{24})(5-\sqrt{24})} = \sqrt{5^2-24} = \sqrt{1} = 1$, тогда $\sqrt{5-\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}} =$
 $= (\sqrt{5+\sqrt{24}})^{-1}$. Тогда уравнение имеет вид $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x +$
 $+ (\sqrt{5+\sqrt{24}})^{-x} = 10$. Введем новую неизвестную $t = (\sqrt{5+\sqrt{24}})^x$.
 Получаем уравнение: $t + t^{-1} = 10$ или $t^2 - 10t + 1 = 0$. Корни этого
 уравнения $t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем
 уравнения: $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x = 5 + \sqrt{24}$ (откуда $x = 2$) и $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x =$
 $= 5 - \sqrt{24} = (5 + \sqrt{24})^{-1}$ (тогда $x = -2$). Ответ: ± 2 .

188а) При решении уравнения $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$ надо рассмотреть два случая.

а) $|x-3| = 1$, тогда $x-3 = \pm 1$ и $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Очевидно, что если $|x-3| = 1$, то число 1 в любой степени равно 1.

б) $3x^2 - 10x + 3 = 0$, тогда $x_3 = \frac{1}{3}$ и $x_4 = 3$. Проверим эти решения подстановкой. При $x = \frac{1}{3}$ получаем: $|\frac{1}{3} - 3|^0 = (\frac{2}{3})^0 = 1$ — верное равенство. При $x = 3$ имеем: $|3 - 3|^0 = 0^0$ — это выражение не имеет смысла.

Ответ: 4; 2; $\frac{1}{3}$.

191а) В неравенстве $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$ раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и получаем неравенство $2^x + 2^x \geq 2\sqrt{2}$ или $2^x \geq \sqrt{2}$, откуда $x \geq \frac{1}{2}$.

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и имеем неравенство $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2}$. Введем новую неизвестную $t = 2^x$ и получим неравенство $t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{2}$ или $t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 \geq 0$ (учтено, что $t > 0$). Решение этого неравенства $t \in (-\infty; \sqrt{2} - 1] \cup [\sqrt{2} + 1; \infty)$. Вернемся к старой неиз-

вестной x . Имеем неравенства $2^x \leq \sqrt{2} - 1$ (откуда $x \leq \log_2(\sqrt{2} - 1)$) и $2^x \geq \sqrt{2} + 1$ (тогда $x \geq \log_2(\sqrt{2} + 1)$). Но так как $\log_2(\sqrt{2} + 1) > 0$, то решение $x \geq \log_2(\sqrt{2} + 1)$ в рассматриваемый промежуток $x < 0$ не входит.

Объединяя полученные решения в этих случаях $x \geq \frac{1}{2}$ и $x \leq \log_2(\sqrt{2} - 1)$, найдем окончательное решение данного неравенства $x \in (-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $(-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

194в) Для решения системы уравнений
$$\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$$
 сначала

ла решим второе уравнение. Получаем $\cos x + \frac{1}{\cos y} = 2$, откуда $\frac{1}{\cos y} = 2 - \cos x$. Подставим это равенство в первое уравнение: $2^{\cos x} + 2^{2 - \cos x} = 5$ или $2^{\cos x} + \frac{4}{2^{\cos x}} = 5$. Введем новую неизвестную $t = 2^{\cos x}$ и получим уравнение: $t + \frac{4}{t} = 5$ или $t^2 - 5t + 4 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем: $2^{\cos x} = 1$ (тогда $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\cos y = \frac{1}{2 - \cos x} = \frac{1}{2}$ и $y = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$) и $2^{\cos x} = 4$ (тогда $\cos x = 2$ и это уравнение решений не имеет).

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

197а) ОДЗ уравнения $\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arcctg} x) = a$ задается условиями: $\operatorname{arctg} x > 0$ и $\operatorname{arcctg} x > 0$. Первое неравенство выполнено при $x > 0$, второе — при всех x . Поэтому ОДЗ: $x > 0$. Используем свойства логарифмов и учтем, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Имеем уравнение: $\lg(\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x) = a$, тогда $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = 10^a$ или $\operatorname{arctg} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 10^a$. Введем новую неизвестную $t = \operatorname{arctg} x$ и получим уравнение: $t\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 10^a$ или $0 = t^2 - \frac{\pi}{2}t + 10^a$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = \frac{\pi^2}{4} - 4 \cdot 10^a \geq 0$, от-

куда $\frac{\pi^2}{16} \geq 10^a$, тогда $\lg \frac{\pi^2}{16} \geq a$ или $a \leq 2 \lg \frac{\pi}{4}$. Корни уравнения

$t = \frac{\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 4 \cdot 10^a}}{2} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$. Легко проверить, что эти корни положительные. Вернемся к старой неизвестной x . Имеем уравнение: $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$, откуда $x_{1,2} = \operatorname{tg} \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; 2 \lg \frac{\pi}{4}\right]$ $x_{1,2} = \operatorname{tg} \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$, при $a \in \left(2 \lg \frac{\pi}{4}; \infty\right)$ $x \in \emptyset$.

201а) Неравенство $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) < 1$ запишем в виде $\log_2(1 - 2\log_9 x) < \log_2 2$. ОДЗ неравенства задается условием $0 < 1 - 2\log_9 x$. Решение неравенства приводит к неравенству $1 - 2\log_9 x < 2$. Итак, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0 < 1 - 2\log_9 x < 2$. Из всех частей вычтем число 1: $-1 < -2\log_9 x < 1$. Разделим все части неравенства на отрицательное число (-2) . Знак неравенства меняется на противоположный: $\frac{1}{2} > \log_9 x > -\frac{1}{2}$. Запишем неравенство в виде: $\log_9 9^{\frac{1}{2}} > \log_9 x > \log_9 9^{-\frac{1}{2}}$ или $\log_9 3 > \log_9 x > \log_9 \frac{1}{3}$, откуда $3 > x > \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

203а) ОДЗ неравенства $\log_{x-3}(x-4) < 2$ задается условиями: $x-4 > 0$, $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$, решение которых дает $x > 4$. Данное неравенство запишем в виде $\log_{x-3}(x-4) < \log_{x-3}(x-3)^2$. Так как при $x > 4$ основание логарифмов $x-3 > 1$ (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака. Получаем: $x-4 < (x-3)^2$ или $x-4 < x^2 - 6x + 9$ или $0 < x^2 - 7x + 13$. Это неравенство выполнено при всех x . Поэтому ОДЗ неравенства является и его решением $x \in (4; \infty)$.

Ответ: $(4; \infty)$.

205а) Используя определение логарифма запишем систему

$$\begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y+23) = 3 \end{cases} \text{ в виде } \begin{cases} y = x^2 \\ y + 23 = (x+1)^3 \end{cases}$$
. Подставим первое уравнение во второе: $x^2 + 23 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ или $0 = x^3 + 2x^2 + 3x - 22$. Разложим правую часть этого кубического уравнения на множители $(x-2)(x^2 + 4x + 11) = 0$. Произведение множителей

равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $x - 2 = 0$ (тогда $x = 2$) и $x^2 + 4x + 11 = 0$ (корней нет, т.к. дискриминант отрицательный). Найдем $y = x^2 = 2^2 = 4$. Система имеет единственное решение (2; 4). **Ответ:** (2; 4).

§ 4. Начала анализа

214а) Функции синус и арксинус являются взаимнообратными, поэтому выполняется равенство $\sin(\arcsin x) = x$. Найдем производную от обеих частей равенства $\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1$, тогда

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Теперь надо найти $\cos(\arcsin x)$. Пусть угол $\varphi = \arcsin x$, тогда по определению функции арксинус выполнены два условия: $\sin \varphi = x$ и $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдем $\cos(\arcsin x) =$

$$= \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{учтено, что } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \cos \varphi \geq 0).$$

Тогда $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. **Ответ:** доказано.

215а) Функцию $y = x^x$ запишем в виде $y = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$. Найдем производную этой показательной функции $y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \times$

$$\times (x \ln x)' = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1). \quad \text{Ответ: } x^x (\ln x + 1).$$

221а) Функция $f(x) = \frac{a^2 - 1}{3} x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 5$ определена на \mathbb{R} . Найдем производную $f'(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$. Функция $f(x)$ возрастает на \mathbb{R} по условию. Поэтому при всех x должно выполняться неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$. Так как старший коэффициент многочлена зависит от a , то надо рассмотреть два случая.

а) $a^2 - 1 = 0$, т.е. $a = \pm 1$. При $a = 1$ имеем неравенство $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2 > 0$, которое выполнено при всех x . Для $a = -1$ получаем неравенство $0 \cdot x^2 - 4x + 2 > 0$, которое выполнено только при $x < \frac{1}{2}$. Поэтому такое значение $a = -1$ не подходит.

б) $a^2 - 1 \neq 0$, т.е. $a \neq \pm 1$. Квадратное неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ выполняется при всех x , если:

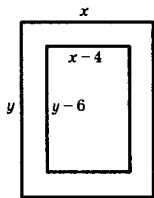
$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ D = 4(a - 1)^2 - 8(a^2 - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a + 1)(a - 1) > 0 \\ (a - 1)(-a - 3) < 0 \end{cases}$$

или $\begin{cases} (a+1)(a-1) > 0 \\ (a-1)(a+3) > 0 \end{cases}$. Решение этой системы $a \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

Объединяя полученные решения, получим $a \in (-\infty; -3) \cup [1; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup [1; \infty)$.

222а) Уравнение $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ запишем в виде $\cos x + x = \frac{\pi}{2}$ и рассмотрим функцию $f(x) = \cos x + x$. Ее производная $f'(x) = -\sin x + 1$. Величина $f'(x) \geq 0$ при всех x . Поэтому функция $f(x)$ возрастает на R и каждое свое значение принимает только один раз. Следовательно, уравнение $\cos x + x = \frac{\pi}{2}$ имеет единственное решение. Ответ: доказано.



230) Пусть страница имеет размеры x и y (см). Тогда текст занимает размеры $x-4$ и $y-6$ (см). Так как площадь текста 384 см^2 , то получаем равенство $(x-4)(y-6) = 384$, откуда $y-6 = \frac{384}{x-4}$ и $y = \frac{384}{x-4} + 6 = \frac{6x+360}{x-4} = 6 \frac{x+60}{x-4}$. Площадь страницы $S = xy = 6x \frac{x+60}{x-4} = 6 \frac{x^2+60x}{x-4}$ должна быть наименьшей. Найдем производную

$$S' = 6 \frac{(2x+60)(x-4) - (x^2+60x) \cdot 1}{(x-4)^2} = 6 \frac{x^2 - 8x - 240}{(x-4)^2}. \text{ Приравняем про}$$

изводную нулю, тогда $x^2 - 8x - 240 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -12$ и $x_2 = 20$. Легко проверить, что $x = 20$ — точка минимума.

Найдем $y = 6 \frac{x+60}{x-4} = 6 \frac{20+60}{20-4} = 6 \cdot 5 = 30$.

Ответ: ширина страницы 20 см, длина — 30 см.

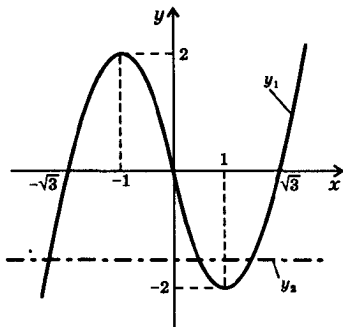
233а) Для сравнения чисел $3^{\sqrt{2}}$ и $2^{\sqrt{3}}$ сначала сравним их логарифмы по основанию 3, т.е. $\sqrt{2}$ и $\log_3 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \log_3 2$. Оценим $\log_3 2$: очевидно, что $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9}$, тогда $\log_3 8^{\frac{1}{3}} < \log_3 3^{\frac{2}{3}}$ или $\log_3 2 < \frac{2}{3}$. Умножим обе части этого неравенства на $\sqrt{3}$ и получим

$\sqrt{3} \log_3 2 < \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} < \sqrt{2}$. Таким образом, проведя ряд оценок, мы показали, что $\sqrt{2} > \sqrt{3} \cdot \log_3 2$. Тогда имеем: $3^{\sqrt{2}} > 3^{\sqrt{3} \log_3 2}$ или $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$, т.е. первое число больше. Ответ: первое число больше.

235а) Неравенство $e^x > 1 + x$ запишем в виде $e^x - x > 1$ и рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x$. Найдем производную $f'(x) = e^x - 1$. При $x > 0$ величина $f'(x) > 0$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает. Следовательно при $x > 0$ имеем неравенство $f(x) > f(0)$ или $e^x - x > e^0 - 0$, т.е. $e^x - x > 1$. **Ответ:** доказано.

237а) Исследуем уравнение $x^3 - 3x = a$ графически. Построим график функции $y_1 = x^3 - 3x$. Найдем производную $y_1' = 3x^2 - 3$. Критические точки функции y_1 — точки $x = \pm 1$. Найдем значения $y_1(\pm 1) = (\pm 1)^3 - 3(\pm 1) = \pm 2$. Учтем, что функция $y_1(x)$ нечетная. Графиком функции $y_2 = a$ является прямая, параллельная оси абсцисс. Видно, что при $|a| > 2$ есть одна точка пересечения графиков функций y_1 и y_2 (одно решение уравнения). При $|a| = 2$ имеются две точки пересечения (два решения). Для $|a| < 2$ есть три точки пересечения (три решения).

Ответ: при $|a| > 2$ — одно решение, при $|a| = 2$ — два решения, при $|a| < 2$ — три решения.



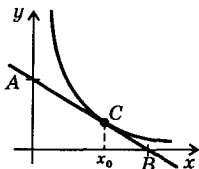
242) Прежде всего найдем точку пересечения графиков функций $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x + 4}$. Получаем уравнение: $8 - x = 4\sqrt{x + 4}$ или $64 - 16x + x^2 = 16x + 64$ или $x^2 - 32x = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 32$ (не является корнем, т.к. $8 - x \geq 0$). Угловым коэффициентом функции $y = 8 - x$ равен $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = -1$ и угол наклона этой прямой к оси абсцисс $\varphi_1 = 135^\circ$.

Найдем угловой коэффициент k_2 касательной к графику функции $y = 4\sqrt{x + 4} = 4(x + 4)^{1/2}$. Вычислим производную $y' = 4 \cdot \frac{1}{2} (x + 4)^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{x + 4}}$. При $x = 0$ имеем $k = \operatorname{tg} \varphi_2 = y'(0) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. Поэтому угол наклона касательной $\varphi_2 = 45^\circ$. Разность углов наклона $\varphi_1 - \varphi_2 = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Поэтому графики данных функций пересекаются под углом 90° . **Ответ:** 90° .

243б) Найдем производную функции $f(x) = x^2 - 4x + 1$ и получим $f'(x) = 2x - 4$. Пусть касательная проведена в точке с абсциссой x_0 . Запишем ее уравнение: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ или $y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 1$ или $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 1$. Известно, что касательная проходит через точку $M(-1; -3)$. Поэтому коор-

динаты этой точки удовлетворяют уравнению касательной: $-3 = -(2x_0 - 4) - x_0^2 + 1$ или $x_0^2 + 2x_0 - 8 = 0$. Корни этого уравнения: $x_0 = -4$ и $x_0 = 2$. Подставим такие значения в уравнение касательной. При $x_0 = -4$ получаем: $y = (2 \cdot (-4) - 4)x - (-4)^2 + 1$ или $y = -12x - 15$. Для $x_0 = 2$ имеем: $y = (2 \cdot 2 - 4)x - 2^2 + 1$ или $y = -3$.

Ответ: $y = -12x - 15$ и $y = -3$.



245) Пусть к гиперболе $y = \frac{a}{x}$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная. Тогда уравнение касательной: $y = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{a}{x_0}$

или $y = -\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}$. Найдем точки пересечения этой прямой с осями координат. При

$x = 0$ получаем $y = \frac{2a}{x_0}$, поэтому координаты точки $A \left(0; \frac{2a}{x_0}\right)$. Для

$y = 0$ имеем линейное уравнение: $-\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0} = 0$, откуда $x = 2x_0$.

Поэтому координаты точки $B(2x_0, 0)$. Найдем координаты середины отрезка AB : $x = \frac{0 + 2x_0}{2} = x_0$ и $y = \frac{\frac{2a}{x_0} + 0}{2} = \frac{a}{x_0}$. Видно, что эти

координаты совпадают с координатами точки касания $C \left(x_0; \frac{a}{x_0}\right)$.

Следовательно, отрезок касательной к данной гиперболе, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

Ответ: доказано.

248) Так как парабола $y = ax^2 + bx + 1$ проходит через точку $A(1; 5)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы: $5 = a + b + 1$, откуда $b = 4 - a$. Тогда уравнение параболы имеет вид: $y = ax^2 + (4 - a)x + 1$. Производная этой функции $y' = 2ax + 4 - a$. Уравнение касательной в точке $A(1; 5)$: $y = (2a + 4 - a)(x - 1) + a + (4 - a) + 1$ или $y = (a + 4)(x - 1) + 5$ или $y = (a + 4)x + 1 - a$. По условию уравнение касательной $y = 7x - 2$. Следовательно, угловые коэффициенты и свободные члены двух прямых должны быть одинаковыми, т.е. $a + 4 = 7$ и $1 - a = -2$. Решение этих уравнений $a = 3$. Теперь найдем $b = 4 - a = 4 - 3 = 1$.

Ответ: $a = 3, b = 1$.

252а) Подберем первообразную для функции $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

Предположим, что $F(x) = a(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$, где a и c — постоянные ве-

личины. Найдем $F'(x) = a \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' = a \cdot \frac{3}{2} \sqrt{1+x^2} \cdot 2x = 3ax\sqrt{1+x^2}$. Так как $F'(x) = f(x)$, то получаем $3a = 1$, откуда $a = \frac{1}{3}$. Тогда первообразная имеет вид $F(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$.

252в) Запишем функцию $f(x) = \operatorname{ctg} x$ в виде $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Теперь подберем первообразную для функции $f(x)$. Получим $F(x) = \ln \sin x + c$. Найдем $F'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$. Видно, что $F'(x) = f(x)$. **Ответ:** $F(x) = \ln \sin x + c$.

260) Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения уравнения $x''(t) = -\omega^2 x(t)$. Это означает, что справедливы равенства $x_1'' = -\omega^2 x_1$ и $x_2'' = -\omega^2 x_2$. Рассмотрим функцию $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Проверим, является ли эта функция решением данного уравнения, используя свойства производных: $(x_1 - x_2)'' = x_1'' - x_2'' = -\omega^2 x_1 - (-\omega^2 x_2) = -\omega^2(x_1 - x_2)$. Получили: $(x_1 - x_2)'' = -\omega^2(x_1 - x_2)$, т.е. $x_1 - x_2$ также решение данного уравнения.

Теперь рассмотрим функцию $x(t) = kx_1(t)$. Имеем: $(kx_1)'' = kx_1'' = k(-\omega^2 x_1) = -k\omega^2 x_1 = -\omega^2(kx_1)$. Получили: $(kx_1)'' = -\omega^2(kx_1)$, т.е. kx_1 также решение данного уравнения. **Ответ:** доказано.

265) Предположим, что первообразная для функций $e^x \sin x$ и $e^x \cos x$ имеет вид $F(x) = e^x(a \sin x + b \cos x) + c$, где a, b, c — некоторые постоянные. Найдем производную $F' = (e^x)(a \sin x + b \cos x) + e^x(a \sin x + b \cos x) = e^x(a \sin x + b \cos x) + e^x(a \cos x - b \sin x) = e^x((a-b) \sin x + (a+b) \cos x)$.

Для определения a и b сравним F' с функциями $e^x \sin x$ и $e^x \cos x$. Чтобы $F(x)$ была первообразной для функции $e^x \sin x$, надо выполнить условия: $a - b = 1$ и $a + b = 0$. Решение этой системы $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{1}{2}$. Поэтому первообразная для функции $e^x \sin x$:

$$F(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

Чтобы $F(x)$ была первообразной для функции $e^x \cos x$, надо выполнить условия: $a - b = 0$ и $a + b = 1$. Решение этой системы $a = b = \frac{1}{2}$. Поэтому первообразная для функции $e^x \cos x$: $F(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$.

Ответ: $\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$; $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$.

272а) Используем формулу понижения степени и вычислим

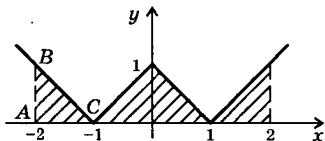
$$\begin{aligned} \text{интеграл: } \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{\sin 4\pi n}{2n} \right) - \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sin 0}{2n} \right) = \pi. \quad \text{Ответ: } \pi. \end{aligned}$$

272г) Преобразуем произведение функций в их сумму и вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 3x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin(3x - 5x) + \sin(3x + 5x)) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (-\sin 2x + \sin 8x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2\pi}{2} - \frac{\cos 8\pi}{8} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 0}{2} - \frac{\cos 0}{8} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = 0. \quad \text{Ответ: } 0. \end{aligned}$$

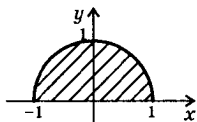
273а) Построим график функции $y = ||x| - 1|$. Тогда

$\int_{-2}^2 ||x| - 1| \, dx$ равен площади S заштрихованной фигуры. Как вид-



но из рисунка, эта площадь в 4 раза больше площади $\triangle ABC$, т.е.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2. \quad \text{Ответ: } 2.$$

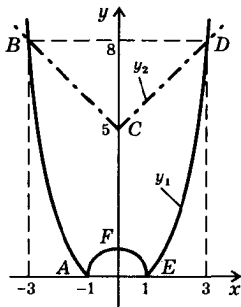


273б) Построим график функции $y = \sqrt{1 - x^2}$. Очевидно, что $y \geq 0$. Возведем это равенство в квадрат: $y^2 = 1 - x^2$ или $x^2 + y^2 = 1$ (уравнение окружности). Тогда графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат. Тогда

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx \text{ равен площади } S \text{ полукруга: } S = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

276а) Построим графики функций $y_1 = |x^2 - 1|$ и $y_2 = 5 + |x|$. Графики функций y_1 и y_2 пересекаются в точках $B(-3; 8)$ и $D(3; 8)$. Легко проверить, что искомая фигура $ABCDEF$ симметрична относительно оси ординат. Поэтому сначала найдем площадь фигуры $CDEF$. Эта



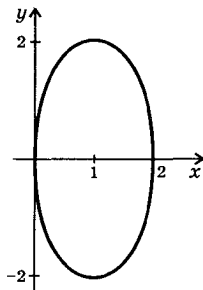
$$\begin{aligned} \text{площадь } S &= \int_0^1 (5 + x + x^2 - 1) dx + \\ &+ \int_1^3 (5 + x - x^2 + 1) dx = \int_0^1 (x^2 + x + 4) dx + \\ &+ \int_1^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 \right) + \\ &+ \left(-\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6 \right) = 4\frac{5}{6} + 13\frac{1}{2} - 6\frac{1}{6} = 12\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Было учтено, что при $x \in [0; 3]$ функция $y_2 = 5 + x$, при $x \in [0; 1]$ функция $y_1 = 1 - x^2$, а при $x \in [1; 3]$ функция $y_1 = x^2 - 1$. Тогда искомая площадь $S = 2 \cdot 12\frac{1}{6} = 24\frac{1}{3}$. Ответ: $24\frac{1}{3}$.

276б) Построим фигуру, ограниченную линиями $|y| = 2x - x^2$. Эта фигура симметрична относительно оси абсцисс. Верхняя часть фигуры описывается функцией $y = 2x - x^2$. Тогда площадь искомой фигуры

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 (2x - x^2) dx = 2 \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2 \left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

АЛГЕБРА (7—9 классы)

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для решения многих задач из различных разделов математики необходимо выполнять алгебраические преобразования. Цель этих преобразований — замена сложных и громоздких выражений более простыми и наглядными. Напомним основные приемы и способы преобразований.

Свойства степеней с действительными показателями

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \\ a^x : a^y &= a^{x-y} & \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

Формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Нахождение корней многочлена

Многочлен одной переменной $A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (где a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 — некоторые коэффициенты) легко разложить на множители, если известны все корни x_1, x_2, \dots, x_n этого многочлена, по формуле $A = a_n (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$.

Свойства модуля числа (выражения)

1) $|a| \geq 0$; 2) $|-a| = |a|$; 3) $|a|^2 = a^2$; 4) $|ab| = |a| \cdot |b|$; 5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
($b \neq 0$).

Корень n -й степени и его свойства

Для любых $a \geq 0$, $b \geq 0$, натурального n ($n \geq 2$) и целого k выполняются равенства:

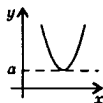
$$\begin{aligned} 1) \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & 4) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \\ 2) \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \quad (k > 0); & 5) \sqrt[n]{a^k} &= \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^k}} \quad (k > 0). \\ 3) \sqrt[n]{a^k} &= (\sqrt[n]{a})^k; \end{aligned}$$

II. ФУНКЦИИ И ЕЕ СВОЙСТВА

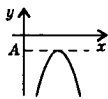
Пусть даны два множества действительных чисел X и Y и указан закон f , по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$. Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ или $y(x)$ с областью определения (О.О.) X и областью изменения (О.И.) Y . При этом величину x называют независимой переменной (или аргументом функции), величину y — зависимой переменной (или значением функции).

Точка пересечения с осью Oy равна значению функции $y(x)$ при $x = 0$, т.е. $y(0)$. Точки пересечения с осью Ox (их еще называют нулями функции) являются корнями уравнения $y(x) = 0$.

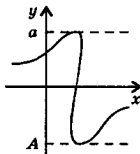
Функция называется *ограниченной снизу*, если все значения функции не меньше некоторого числа a , т.е. $y(x) \geq a$. Функция называется *ограниченной сверху*, если все значения функции не больше некоторого числа A , т.е. $y(x) \leq A$. Если функция ограничена и снизу и сверху, то она называется *ограниченной*.



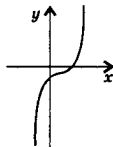
Ограничена
снизу



Ограничена
сверху



Ограничена



Не ограничена

Монотонность — возрастание или убывание функции. Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (т.е. если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) > y(x_1)$). Функция называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т.е. если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) < y(x_1)$).

Область определения функции называется *симметричной*, если функция определена и в точке x_0 и в точке $(-x_0)$ (т.е. в точке симметричной точке x_0 относительно начала числовой оси).

Функция называется *четной*, если при изменении знака аргумента, значение функции не меняется, т.е. $y(-x) = y(x)$. График четной функции всегда симметричен относительно оси ординат. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т.е. $y(-x) = -y(x)$.

Функция $y = kx + b$ (где k и b — заданные числа) называется *линейной функцией*.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ (где a, b, c — числа, $a \neq 0$) называется **квадратичной функцией**.

Пересечение графика квадратичной функции с осью абсцисс определяется знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$: 1) если $D > 0$, то график пересекает ось Ox в двух точках; если $D = 0$, то график имеет только одну точку, принадлежащую оси Ox , т.е. касается оси абсцисс; если $D < 0$, то график не пересекает оси Ox .

Функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ (где a, b, c, d — некоторые числа, $c \neq 0$) называется **дробно-линейной функцией**.

Функция $y = ax^n$ (где a, n — некоторые числа; $a \neq 0$; n — целое или рациональное число) называется **степенной**. Примеры: $y = ax^2$ ($n = 2$ — квадратичная функция, график — парабола), $y = \frac{a}{x}$ ($n = -1$, обратная пропорциональная зависимость, график — гиперболо).

III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Соотношение вида $y(x) \vee 0$ (где $y(x)$ — некоторая функция переменной x , а \vee — символ сравнения, который может совпадать с одним из пяти знаков: $>$, $<$, \geq , \leq , $=$) называется **уравнением**, если символ \vee совпадает со знаком $=$, и **неравенством**, если символ \vee совпадает с одним из знаков: $>$, $<$, \geq , \leq . **Решением уравнения** или **неравенства** $y(x) \vee 0$ называется любое значение x_0 , при котором соотношение $y(x) \vee 0$ является верным. Решить уравнение или неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений нет. **Областью допустимых значений (ОДЗ)** уравнения или неравенства $y(x) \vee 0$ называется область определения функции $y(x)$, т.е. те значения x , при которых выполнены все операции с выражениями, входящими в функцию $y(x)$. Два уравнения (или неравенства) называются **эквивалентными** (или **равносильными**), если все их решения совпадают или они не имеют решений. Эквивалентность уравнений (неравенств) обозначают символом: \Leftrightarrow .

Возможные преобразования, которые приводят к **равносильному** уравнению (неравенству):

- 1) любой член уравнения (неравенства) можно перенести в другую часть, изменив знак этого члена на противоположный;
- 2) обе части уравнения можно умножить или разделить на любое число (или выражение), не равное нулю;
- 3) обе части неравенства можно умножить или разделить на любое положительное число (или выражение), знак неравенства при этом сохраняется;
- 4) обе части неравенства можно умножить или разделить на любое отрицательное число (или выражение), знак неравенства при этом меняется на противоположный.

Уравнения

Уравнение вида $ax + b = 0$ (где a и b — некоторые числа) называется **линейным** уравнением с переменной x .

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (где a, b, c — числа; x — неизвестная) называется **квадратным**. Корни находятся по формулам:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант. Если $D > 0$, то

уравнение имеет два корня ($x_1 \neq x_2$); если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

если $D < 0$, то уравнение корней не имеет. Соотношения между корнями (формулы Виета): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

АЛГЕБРА (10—11 классы)

I. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Таблица 1

Аргумент α	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ = 0$	0	1	0	—
$30^\circ = \pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$60^\circ = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$90^\circ = \pi/2$	1	0	—	0

Таблица 2

Свойства функции $y(x)$	Функция $y(x)$			
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область определения	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$	$x \neq \pi l$
Область изменения	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$	$y \in (-\infty; +\infty)$	$y \in (-\infty; +\infty)$
Ограниченность	ограничена	ограничена	не ограничена	не ограничена
Четность	нечетная $\sin(-x) = -\sin x$	четная $\cos(-x) = \cos x$	нечетная $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	нечетная $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
Периодичность	$T = 2\pi$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$	$T = 2\pi$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$	$T = \pi$ $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$	$T = \pi$ $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$
Нули функции ($y = 0$)	$x = \pi l$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$	$x = \pi l$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$

Связь между функциями одного угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n)$$

Функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

Преобразование суммы функций в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Функции кратных углов (формулы двойных углов)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Обратные тригонометрические функции

Функция	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arccctg} x$
Определение	1) $\sin y = x$	1) $\cos y = x$	1) $\operatorname{tg} y = x$	1) $\operatorname{ctg} y = x$
	2) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$	2) $y \in [0; \pi]$	2) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$	2) $y \in [0; \pi]$

Тригонометрические уравнения

$$\sin x = a \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \quad (|a| \leq 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k \quad (|a| \leq 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad x = \operatorname{arccctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

II. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА**Основные свойства логарифмов**

Для положительных M, N ; $a > 0, a \neq 1, b < 0, b \neq 1$ и действительных α :

- $a^{\log_a M} = M$ — основное логарифмическое тождество;
- $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$;

$$3) \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$4) \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M;$$

$$5) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \text{ — переход к новому основанию.}$$

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

1) Если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$.

2) Если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$.

3) Если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $\begin{cases} f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x), & \text{если } a > 1 \end{cases}$

4) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, то $\begin{cases} f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x), & \text{если } a > 1 \end{cases}$

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

I. Производная

Правила вычисления производных

1) $(f + g)' = f' + g'$; 2) $(cf)' = cf'$ (где c — постоянная);

3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$; 4) $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

5) $f'(g(x)) = f'_g(g) \cdot g'_x(x)$ (производная сложной функции).

II. Первообразная и интеграл

Правила вычисления первообразных

1) Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для функции $f(x) + g(x)$.

2) Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ и c — постоянная, то $cF(x)$ — первообразная для функции $cf(x)$.

3) Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ и k, b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ — первообразная для функции $f(kx + b)$.

Первообразные основных функций

Функция $f(x)$	c	x^n	$\frac{1}{k}$	a^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
Первообразная $F(x)$	cx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	$\frac{a^x}{\ln a}$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$

ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)**Многогранники****Призма**

Площадь боковой поверхности $S = P_1 \cdot l$ (P_1 — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра).

Объем $V = S_{\perp} \cdot l$ (S_{\perp} — площадь перпендикулярного сечения);
 $V = S \cdot h$ (S — площадь основания, h — высота призмы)

Пирамида. Усеченная пирамида

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ (S — площадь основания, h — высота пирамиды).

Объем усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ (h — высота, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды).

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды $S = \frac{1}{2} PH$
 (P — периметр основания, H — апофема).

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды
 $S = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (P_1 \text{ и } P_2 \text{ — периметры оснований пирамиды}).$

Круглые тела**Цилиндр**

Объем $V = \pi R^2 h$ (R — радиус основания, h — высота цилиндра).

Площадь боковой поверхности $S_6 = 2\pi Rh$.

Площадь полной поверхности $S_n = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Конус

Объем $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ (R — радиус основания, h — высота конуса).

Площадь боковой поверхности $S_6 = \pi Rl$ (l — образующая конуса).

Площадь полной поверхности $S_n = \pi Rl + \pi R^2$.

Усеченный конус

Объем $V = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$ (h — высота, R_1 и R_2 — радиусы оснований усеченного конуса).

Площадь боковой поверхности $S_6 = \pi (R_1 + R_2) l$ (l — образующая усеченного конуса).

Сфера. Шар

Объем шара $V = \frac{1}{3} \pi R^3$ (R — радиус шара).

Площадь сферы $S = 4\pi R^2$ (R — радиус сферы).