А.А. Кадеев, О.Г. Перфильева

Домашняя работа по алгебре за 11 класс

к учебнику «Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов и др. — 11-е изд. — М.: Просвещение, 2003 г.»

VIII Глава.
Производная и ее геометрический смысл

§ 44 Производная

№ 776.

$s(t)=1+3t$; $v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$. Т.k. $s(t)=1+3t$, то $s(t+h)-st=$

$=1+3(t+h)-(1+3t)=1+3t+3h-1-3t=3h$, поэтому $v_{ср}=\frac{3h}{h}=3$. Проверим результат в случаях, приведенных в условии:

1) $h=4-1=3$, $s(t+h)=1+3\cdot4=13$, $s(t)=1+3\cdot1=4$, $v_{ср}=\frac{13-4}{3}=3$;

2) $h=1-0{,}8=0{,}2$, $s(t+h)=1+3\cdot1=4$, $s(t)=1+3\cdot0{,}8=3{,}4$, $v_{ср}=\frac{4-3{,}4}{0{,}2}=\frac{0{,}6}{0{,}2}=3$.

№ 777.

1) $s(t)=2t$; $v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{2(t+h)-2t}{h}=\frac{2h}{h}=2$

Проверим: $h=1{,}2-1=0{,}2$

$s(t+h)=2\cdot1{,}2=2{,}4$; $s(t)=2\cdot1=2$; $v_{ср}=\frac{2{,}4-2}{0{,}2}=\frac{0{,}4}{0{,}2}=2$

2) $s(t)=t^2$ $t=1$; $(t+h)=1{,}2$;

$v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{(t+h)^2-t^2}{h}=\frac{t^2+2th+h^2-t^2}{h}=$

$=2t+h=2\cdot1+(1{,}2-1)=2{,}2$.

№ 778.

1) $s(t)=2t+1$;

а) $s(t+h)-s(t)=2(t+h)+1-2t-1=2t+2h+1-2t-1=2h$;

б) $v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{2h}{h}=2$; в) $\lim\limits_{h\to0}v_{ср}=\lim\limits_{h\to0}2=2$;

2) $s(t)=2-3t$;

а) $s(t+h)-s(t)=2-3(t+h)-2+3t=2-3t-3h-2+3t=-3h$;

б) $v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=-\frac{3h}{h}=-3$; в) $\lim\limits_{h\to0}v_{ср}=\lim\limits_{h\to0}(-3)=-3$.

№ 779.

$s(t)=0{,}25t+2$

1) $h=8-4=4$;

$v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{0{,}25\cdot(4+4)+2-0{,}25\cdot4-2}{4}=\frac{2+2-1-2}{4}=0{,}25$

2) $v(t)=\lim\limits_{h\to0}v_{ср}=\lim\limits_{h\to0}0{,}25=0{,}25$.

№ 780.

1) $f(x)=3x+2$;

а) $\Delta f=f(x+h)-f(x)=3(x+h)+2-3x-2=3x+3h+2-3x-2=3h$;

б) $\dfrac{\Delta f}{h}=\dfrac{3h}{h}=3$; в) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f}{h}=3$, т.е. $f'(x)=3$

2) $f(x)=5x+7$;

а) $\Delta f=f(x+h)-f(x)=5(x+h)+7-5x-7=5x+5h+7-5x-7=5h$;

б) $\dfrac{\Delta f}{h}=\dfrac{5h}{h}=5$; в) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f}{h}=\lim\limits_{h\to 0}5=5$;

3) $f(x)=3x^2-5x$;

а) $\Delta f= f(x+h)-f(x)=3(x+h)^2-5(x+h)-3x^2+5x=$
$=3x^2+6xh+3h^2-5x-5h-3x^2+5x^2=6xh+3h^2-5h$;

б) $\dfrac{\Delta f}{h}=\dfrac{6xh+3h^2-5h}{h}=6x+3h-5$; в) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(6x+3h-5)=6x-5$;

4) $f(x)=-3x^2+2$;

а) $\Delta f=-3(x+h)^2+2+3x^2-2=-3x^2-6xh-3h^2+2+3x^2-2=-6xh-3h^2$;

б) $\dfrac{\Delta f}{h}=\dfrac{-6xh-3h^2}{h}=-6x-3h$; в) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-6x-3h)=-6x$.

№ 781.

1) $f'(x)=4$; 2) $f'(x)=-7$; 3) $f'(x)=-5$. (опечатка в ответе задачника).

№ 782.

1) $s(t)=\dfrac{3}{2}t^2$;

а) $s(t+h)-s(t)=\dfrac{3}{2}(t+h)^2-\dfrac{3}{2}t^2=\dfrac{3}{2}t^2+3th+\dfrac{3}{2}h^2-\dfrac{3}{2}t^2=3th+\dfrac{3}{2}h^2$;

б) $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{3th+\frac{3}{2}h^2}{h}=3t+\dfrac{3}{2}h$;

в) $v(t)=\lim\limits_{h\to 0}v_{ср}=\lim\limits_{h\to 0}(3t+\dfrac{3}{2}h)=3t$;

2) $s(t)=5t^2$;

а) $s(t+h)-s(t)=5(t+h)^2-5t^2=5t^2+10th+5h^2-5t^2=10th+5h^2$;

б) $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{10th+5h^2}{h}=10t+5h$;

в) $v(t)=\lim\limits_{h\to 0}v_{ср}=\lim\limits_{h\to 0}(10t+5h)=10t$;

№ 783.

$s(t)=t^2+2$ найдем $v(t)$:

а) $s(t+h)-s(t)=(t+h)^2+2-t^2-2=t^2+2th+h^2+2-t^2-2=2th+h^2$

б) $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{2th+h^2}{h}=2t+h$

в) $v(t)=\lim\limits_{h\to 0} v_{ср} = \lim\limits_{h\to 0} v_{ср} = \lim\limits_{h\to 0} 2t+h=2t$

1) t=5, $v(5)=2\cdot 5=10$; 2) t=10, $v(10)=2\cdot 10=20$.

№ 784.

1) на [0; 1] $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{1{,}5-0}{1}=1{,}5$;

2) на [1; 2] $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{2{,}5-1{,}5}{1}=1$;

3) на [2; 3] $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{3-2{,}5}{1}=0{,}5$.

№ 785.

1) на [0; 2] $v_{ср}=\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}=\dfrac{1-2}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$;

2) на [2; 3] $v_{ср}=\dfrac{3-1}{3-2}=2$; 3) на [3; 3,5] $v_{ср}=\dfrac{4-3}{3{,}5-3}=2$.

№ 786.

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$, т.к. $f(x)=2x+1$, то:

$|f(x)-3|=|2x-2|=2|x-1|<2\delta=\varepsilon$, где $|x-1|<\delta$, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. для $\forall\varepsilon$ существует

δ удовлетворяющее определению, значит равенство верно..

2) $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$, т.к. $f(x)=x^2$, то: $|f(x)-4|=|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|<\delta|x+2|$; $|x-2|<\delta$;

$\delta|x+2|=\delta|(x-2)+4|\le\delta(|x-2|+|4|)<\delta^2+4\delta=\varepsilon$, возьмем $\delta=2+\sqrt{4+\varepsilon}$.

§ 45 Производная степенной функции

№ 787.

1) $(x^6)'=6x^5$; 2) $(x^7)'=7x^6$; 3) $(x^{11})'=11x^{10}$; 4) $(x^{13})'=13x^{12}$

№ 788.

1) $(x^{-2})'=-2x^{-3}$; 2) $(x^{-3})'=-3x^{-4}$; 3) $(x^{-4})'=-4x^{-5}$; 4) $(x^{-7})'=-7x^{-8}$.

№ 789.

1) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $\left(x^{-\frac{2}{7}}\right)'=-\dfrac{2}{7}\cdot x^{-\frac{9}{7}}$;

2) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(x^{\sqrt{3}}\right)'=\sqrt{3}\cdot x^{\sqrt{3}-1}$.

(Опечатка в ответе задачника).

№ 790.

1) $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = \left(x^{-5}\right) = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$; 2) $\left(\frac{1}{x^9}\right)' = \left(x^{-9}\right) = -9x^{-10} = \frac{-9}{x^{10}}$;

3) $\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;

4) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

5) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-1\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$;

6) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}x^{-1\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^2}}$.

(Опечатка в ответе задачника).

№ 791.

1) $((4x-3)^2)'=2\cdot(4x-3)\cdot 4=8(4x-3)$;
2) $((5x+2)^{-3})'= -3(5x+2)^{-4}\cdot 5= -15(5x+2)^{-4}$;
3) $((1-2x)^{-6})'= -6(1-2x)^{-7}\cdot(-2)=12(1-2x)^{-7}$;
4) $((2-5x)4)'=4(2-5x)^3\cdot(-5)= -20(2-5x)^3$;
5) $((2x)^3)'=3\cdot(2x)^2\cdot 2=6\cdot(2x)^2=24x^2$;
6) $((-5x)^4)'=4\cdot(-5x)^3\cdot(-5)= -20\cdot(-5x)^3=2500x^3$;

№ 792.

1) $\left(\sqrt[3]{2x+7}\right)' = \left((2x+7)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x+7)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$;

2) $\left(\sqrt[4]{7-3x}\right)' = \left((7-3x)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(7-3x)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-3) = \frac{-3}{4\sqrt[4]{(7-3x)^3}}$;

3) $\left(\sqrt[4]{3x}\right)' = \left((3x)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(3x)^{-\frac{3}{4}}\cdot 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{27x^3}}$;

4) $\left(\sqrt[3]{5x}\right)' = \left((5x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(5x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5 = \frac{5}{3\sqrt[3]{25x^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

№ 793.

1) $f'(x)=(x^6)'=6x^5$; $f'(x_0)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

2) $f'(x)=(x^{-2})'=-2\cdot x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$ $\qquad$ $f'(x_0)=-\frac{2}{3^3}=-\frac{2}{27}$

3) $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

4) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad$ $f'(x_0)=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$

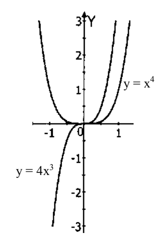
5) $f'(x)=\left(\sqrt{5-4x}\right)'=((5-4x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)=-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$

$f'(x_0)=-\frac{2}{\sqrt{5-4\cdot 1}}=-2$

6) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)'=\left((3x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3=-\frac{3}{2\sqrt{(3x+1)^3}}$

$f'(x_0)=-\frac{3}{2\sqrt{(3\cdot 1+1)^3}}=-\frac{3}{16}$.

№ 794.



№ 795.

1) $y'=(x^2)'=2x$, $y'(0)=2\cdot 0=0$, $y'(1)=2\cdot 1=2$, $y'(-1)=2\cdot(-1)=-2$ — не подходит

2) $y'=(x^3)'=3x^2$, $y'(0)=3\cdot 0=0$, $y'(1)=3\cdot 1=3$, $y'(-1)=3\cdot(-1)^2=3$ — подходит

3) $y'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $y'(0)$ не существует, не подходит.

№ 796.

1) $\left(\frac{1}{(2+3x)^2}\right)'=((2+3x)^{-2})'=-2(2+3x)^{-3}\cdot 3=-\frac{6}{(2+3x)^3}$

2) $\left(\frac{1}{(3-2x)^3}\right)'=((3-2x)^{-3})'=-3\cdot(3-2x)^{-4}\cdot(-2)=\frac{6}{(3-2x)^4}$.

3) $\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)'=\left((3x-2)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(3x-2)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3=\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$.

4) $\left(\sqrt[7]{(3-14x)^2}\right)'=\left((3-14x)^{\frac{2}{7}}\right)'=\frac{2}{7}(3-14x)^{-\frac{5}{7}}\cdot(-14)=\frac{-4}{\sqrt[7]{(3-14x)^5}}$.

5) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}\right)'=\left((3x-7)^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}(3x-7)^{-\frac{4}{3}}\cdot 3=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}}$.

6) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right)'=\left((1-2x)^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{2}{3}(1-2x)^{-\frac{5}{3}}\cdot(-2)=\frac{4}{3\sqrt[3]{(1-2x)^5}}$.

№ 797.

1) $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f'(x)=1 \Rightarrow 3x^2=1$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $f'(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $f'(x)=1 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=1$,

$\sqrt[3]{x}=\frac{2}{3}$ $x=\frac{8}{27}$.

№ 798.

$s(t)=\sqrt{t+1}$; $v(t)=(s(t))'=(\sqrt{t+1})'=\left((t+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$;

$v(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{4}$.

№ 799.

1) $f(x)=(2x-1)^2$;
$f'(x)=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)$;
$f(x)=f'(x) \Rightarrow (2x-1)^2=4(2x-1)$;
$(2x-1)(2x-1-4)=0$;
$(2x-1)(2x-5)=0$;

$\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ (2x-5)=0\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=\frac{5}{2}\end{array}$;

либо $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=(3x+2)^3$;
$f'(x)=3(3x+2)^2\cdot 3=9(3x+2)^2$;
$f(x)=f'(x) \Rightarrow (3x+2)^3=9(3x+2)^2$;
$(3x+2)^2(3x+2-9)=0$;
$(3x+2)^2(3x-7)=0$;

$\left[\begin{array}{l}3x+2=0\\ 3x-7=0=0\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}x=-\frac{2}{3}\\ x=\frac{7}{3}\end{array}$;

либо $3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$;

либо $(2x-5)=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{5}{2}$; либо $3x-7=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{7}{3}$.

№ 800.

а) Очевидно, что это парабола, следовательно, уравнение имеет вид $y=ax^2+bx+c$ $a>0$, т.к. ветви параболы направлены вверх.

Вершина параболы имеет абсциссу $x_b=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае

$x_b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow y=ax^2+c$.

Подставим известные точки:

$1=a\cdot(0)^2+c \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=ax^2+1$;

$2=a\cdot(1)^2+1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=x^2+1$;

б) Очевидно, что это парабола, имеющая уравнение в общем виде $y=ax^2+by+c$.

Т. к. ветви параболы направлены вниз, то $a<0$.

В общем виде вершина параболы имеет абсциссу $x_b=-\frac{b}{2a}$,

в нашем случае $x_b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow y=ax^2+c$.

Зная точки, подставим

$1=a\cdot(0)^2+c \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=ax^2+1$;

$0=a\cdot(1)^2+1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow y=-x^2+1 \Rightarrow y=1-x^2$.

№ 801.

$$y=\sqrt{3x-7}\ ;\quad y'=\left((3x-7)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(3x-7)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}\ ;$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}=\sqrt{3x-7}\ ;\quad \frac{3}{2}=3x-7\ ;\quad x=\frac{17}{6};\quad x=2\frac{5}{6}.$$

§ 46 Правила дифференцирования

№ 802.

1) $(x^2+x)'=2x+1$;
2) $(x^2-x)'=2x-1$;
3) $(3x^2)'=3\cdot2\cdot x=6x$;
4) $(-17x^2)'=-17\cdot2\cdot x=-34x$;
5) $(-4x^3)'=-4\cdot3\cdot x^2=-12x^2$;
6) $(0{,}5x^3)'=1{,}5x^2$;
7) $(13x^2+26)'=26x$;
8) $(8x^2-16)'=16x$.

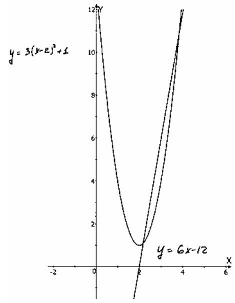
№ 803.

1) $(3x^2-5x+5)'=6x-5$;
2) $(5x^2+6x-7)'=10x+6$;
3) $(x^4+2x^2)'=4x^3+4x$;
4) $(x^5-3x^2)'=5x^4-6x$;
5) $(x^3+5x)'=3x^2+5$;
6) $(-2x^3+18x)'=-6x^2+18$;
7) $(2x^3-3x^2+6x+1)'=6x^2-6x+6$;
8) $(-3x^3+2x^2-x-5)'=-9x^2+4x-1$.

№ 804.

$y=3(x-2)^2+1=3x^2-12x+12+1=3x^2-12x+13$;

$y'=6x-12$.



№ 805.

1) $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)'=2x-\frac{3}{x^4}$; 2) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)'=3x^2-\frac{2}{x^3}$;

3) $\left(2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(3\sqrt[6]{x}-7\sqrt[14]{x}\right)'=3\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}+7\cdot\frac{1}{14}\cdot x^{-\frac{13}{14}}=\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}}+\frac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$.

№ 806.

1) $f'(x)=(x^2–2x+1)'=2x–2$; $f'(0)=2\cdot0–2=–2$; $f'(2)=2\cdot2–2=2$;
2) $f'(x)=(x^3–2x)'=3x^2–2$; $f'(0)=3\cdot(0)^2–2=–2$; $f'(2)=3\cdot2^2–2=12–2=10$;
3) $f'(x)=(–x^3+x^2)=–3x^2+2x$; $f'(0)=3\cdot0+2\cdot0=0$; $f'(2)=–3\cdot2^2+2\cdot2=–2+4=–8$;
4) $f'(x)=(x^2+x+1)'=2x+1$; $f'(0)=2\cdot0+1=1$; $f'(2)=2\cdot2+1=5$.

№ 807.

1) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$;

$f'(3)=\left(-\frac{1}{3^3}-\frac{2}{3^3}\right)=-\frac{5}{27}$; $f'(1)=–1–2=–3$;

2) $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$;

$f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{9}$; $f'(1)=\frac{1}{2}–1=-\frac{1}{2}$;

3) $f'(x)=\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\right)'=\left(3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}-2\cdot(-3)\cdot x^{-4}\right)=\left(-\frac{3}{2\sqrt{x^3}}+\frac{6}{x^4}\right)$

$f'(3)=-\frac{3}{3\cdot2\cdot\sqrt{3}}+\frac{2}{27}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}+\frac{2}{27}$; $f'(1)=-\frac{3}{2}+6=\frac{9}{2}$;

4) f ′(x)=$\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{3}{2\sqrt{x}\cdot x^2}\right)$;

f ′(3)=$\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{18\sqrt{3}}=\frac{27+1}{6\sqrt{3}}=\frac{28}{6\sqrt{3}}=\frac{14}{3\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{9}$; f ′(1)=$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$=3.

№ 808.

1) не дифференцируема, т.к. при x=1 функция y=$\frac{2}{x-1}$ не определена

2) не дифференцируема, т.к. при x=3 функция y=$\frac{3x-5}{(x-3)^2}$ не определена

3) $y'=\left(\sqrt{x+1}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$,

y ′(0)= $\frac{1}{2\sqrt{0+1}}=\frac{1}{2}$ дифференцируема;

4) $y'=\left(\sqrt{5-x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(5-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)=\frac{-1}{\sqrt{5-x}}$,

y ′(4)= $-\frac{1}{\sqrt{5-4}}=-1$ дифференцируема.

№ 809.

1) f′(x)=(x^3–2x)′=3x^2–2 f ′(x)=0; 3x^2–2=0; $x^2=\frac{2}{3}$; x= $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;

2) f′(x)=(–x^2+3x+1)′= –2x+3; f ′(x)=0; –2x+3=0; x=$\frac{3}{2}$.

3) f′(x)=(2x^3+3x^2–12x–3)′=6x^2+6x–12; f ′(x)=0; 6x^2+6x–12=0; x^2+x–2=0;

D=1+8=9; $x_1=\frac{-1+3}{2}$=1, $x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$;

4) f ′(x)=(x^3+2x^2–7x+1)′=3x^2+4x–7; f ′(x)=0; 3x^2+4x–7=0

$\frac{D}{4}$=4+21=25; $x_1=\frac{-2+5}{3}$=1, $x_2=\frac{-2-5}{3}=-\frac{7}{3}$.

5) f ′(x)=(3x^4–4x^3–12x^2)′=12x^3–12x^2–24x; f ′(x)=0;

12x^3–12x^2–24x=0 ⇒ x_1 =0 и x^2–x–2=0;

D=1+8=9; $x_2=\frac{1+3}{2}$=2, $x_3=\frac{1-3}{2}=-1$;

6) f ′(x)=(x^4+4x^3–8x^2–5)′=4x^3+12x^2–16x; f ′(x)=0;

4x^3+12x^2–16x =0 ⇒ x=0 и x^2+3x–4=0;

D=9+16=25; $x_2=\frac{-3+5}{2}$=1 $x_3=\frac{-3-5}{2}=-4$.

№ 810.

1) $((x^2-x)(x^3+x))'=(x^2-x)'(x^3+x)+(x^2-x)(x^3+x)'=(2x-1)(x^3+x)+(x^2-x)(3x^2+1)=$
$=2x^4+2x^2-x^3-x+3x^4+x^2-3x^3-x=5x^4-4x^3+3x^2-2x;$

2) $\left((x+2)\sqrt[3]{x}\right)'=(x+2)'\sqrt[3]{x}+(x+2)\left(\sqrt[3]{x}\right)'=1\cdot\sqrt[3]{x}+(x+2)\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=$

$=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4x+2}{3\sqrt[3]{x^2}};$

3) $\left((x-1)\sqrt{x}\right)'=(x-1)'\sqrt{x}+(x-1)\left(\sqrt{x}\right)'=1\cdot\sqrt{x}+(x-1)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=$

$=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}.$

№ 811.

1) $f'(x)=\left((x-1)^8(2-x)^7\right)'=\left((x-1)^8\right)'(2-x)^7+(x-1)^8\left((2-x)^7\right)'=$
$=8(x-1)^7\cdot(2-x)^7+(x-1)^8\cdot 7(2-x)^6\cdot(-1);$
$f'(1)=(1-1)^7(2-1)^7+(1-1)^8\cdot 7(2-1)^6(-1)=0.$

2) $f'(x)=\left((2x-1)^5(x+1)^4\right)'=\left((2x-1)^5\right)'(x+1)^4+(2x-1)^5\left((x+1)^4\right)'=$
$=5\cdot 2(2x-1)^4(1+x)^4+(2x-1)^5\cdot 4(1+x)^3=$
$=(2x-1)^4(1+x)^3(10x+10x+8x-4)=(2x-1)^4(1+x)^3(18x+6);$
$f'(1)=(2-1)^4(1+1)^3(18+6)=1\cdot 8\cdot 24=192.$

3) $f'(x)=\left(\left(\sqrt{2-x}\right)(3-2x)^8\right)'=\left(\sqrt{2-x}\right)'(3-2x)^8+\sqrt{2-x}\left((3-2x)^8\right)'=$

$=\frac{1}{2}\cdot(-1)(2-x)^{-\frac{1}{2}}(3-2x)^8+\sqrt{2-x}\cdot 8\cdot(3-2x)^7\cdot(-2);$

$f'=\frac{1}{2}(-1)(2-1)^{-\frac{1}{2}}(3-2\cdot 1)^8+\sqrt{2-1}\cdot 8(3-2\cdot 1)^7(-2)=-\frac{33}{2}.$

4) $f'(x)=\left((5x-4)^6\sqrt{3x-2}\right)'=\left((5x-4)^6\right)'\sqrt{3x-2}+(5x-4)^6\left(\sqrt{3x-2}\right)'=$

$=6\cdot 5(5x-4)^5\sqrt{3x-2}+(5x-4)^6\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}=$

$=\frac{3(5x-4)^5}{\sqrt{3x-2}}\left(10(3x-2)+\frac{(5x-4)}{2}\right)=\frac{3(5x-4)^5}{\sqrt{3x-2}}\cdot\left(\frac{65}{2}x-\frac{44}{2}\right)$

$f'(1)=\frac{3(5-4)^5}{\sqrt{3-2}}\cdot\left(\frac{65}{2}-\frac{44}{2}\right)=\frac{63}{2}.$

№ 812.

1) $y'=(x^3+2x^2-3x+4)'=3x^2+4x=3.$

Если пересекаются, то точки пересечения удовлетворяют уравнению:
$3x^2+4x-3=3x+1$, $3x^2+x-4=0$,

$D=1+48=49$ $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+7}{6}=1 \\ y_1=3\cdot 1+1=4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_2=\dfrac{-1-7}{6}=-\dfrac{4}{3} \\ y_2=3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)+1=-3 \end{array}\right.$.

Ответ: Пересекаются.

№ 813.

$$y'=\left((x-3)^5(2+5x)^6\right)'=\left((x-3)^5\right)'(2+5x)^6+(x-3)^5\left((2+5x)^6\right)'=$$
$$=5(x-3)^4(2+5x)^6+(x-3)^5\cdot 6\cdot 5(2+5x)^5=$$
$$=5(x-3)^4((2+5x))^5(2+5x+6x-18)=5(x-3)^4(2+5x)^5(11x-16)$$

$y'=0 \quad \Rightarrow \quad 5(x-3)^4(2+5x)^5(11x-16)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 2+5x=0 \\ 11x-16=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1=3, \quad x_2=-\frac{2}{5}, \quad x_3=\frac{16}{11}.$$

№ 814.

1) $$\left(\frac{x^5+x^3+x}{x+1}\right)'=\frac{\left(x^5+x^3+x\right)'(x+1)-\left(x^5+x^3+x\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{\left(5x^4+3x^2+1\right)(x+1)-\left(x^5+x^3+x\right)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{5x^5+3x^3+x+5x^4+3x^2+1-x^5-x^3-x}{(x+1)^2}=\frac{4x^5+5x^4+2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$$

2) $$\left(\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)'(x-1)-\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x\right)(x-1)-\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}+2x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x-\sqrt{x}-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{2x^2\sqrt{x}-4x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

№ 815.

1) $f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$;

$f'(1)=\frac{4\cdot 1}{(1+1)^2}=\frac{4}{4}=1.$

2) $f'(x)=\left(\frac{2x^2}{1-7x}\right)'=\frac{(2x^2)'(1-7x)-(2x^2)(1-7x)'}{(1-7x)^2}=$

$=\frac{4x(1-7x)-7(2x^2)}{(1-7x)^2}=\frac{4x-28x^2+14x^2}{(1-7x)^2}=\frac{4x-14x^2}{(1-7x)^2}$;

$f'(1)=\frac{4-14}{(1-7)^2}=\frac{-10}{36}=-\frac{5}{18}$.

№ 816.

1) $f(g)=g^{\frac{3}{2}}=(1-x)^{\frac{3}{2}}$; 2) $f(g)=\sqrt{g}=\sqrt{\ln x}$.

№ 817.

1) $g=2x^2-7$, $f(g)=\sqrt{g}$; 2) $g=(x^2+1)$, $f(g)=\sin g$.

№ 818.

1) $\left(\frac{x^3+x^2+16}{x}\right)'=\frac{(x^3+x^2+16)'x-(x^3+x^2+16)\cdot(x)'}{x^2}=$

$=\frac{(3x^2+2x)x-(x^3+x^2+16)\cdot 1}{x^2}=\frac{3x^3+2x^2-x^3-x^2-16}{x^2}=\frac{2x^3+x^2-16}{x^2}$

2) $\left(\frac{x\sqrt[3]{x}+3x+18}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac{(x\sqrt[3]{x}+3x+18)'(\sqrt[3]{x})-(x\sqrt[3]{x}+3x+18)\cdot(\sqrt[3]{x})'}{\sqrt[3]{x^2}}=$

$=\frac{\left(\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+3\right)\sqrt[3]{x}-(x\sqrt[3]{x}+3›+18)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}}=$

$=\frac{\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4x\sqrt[3]{x}+9x-x\sqrt[3]{x}-3x-18}{3\sqrt[3]{x^4}}=$

$=\frac{3x\sqrt[3]{x}+6x-18}{3\sqrt[3]{x^4}}=\frac{x\sqrt[3]{x}+2x-6}{x\sqrt[3]{x}}$. (Опечатка в ответе задачника).

№ 819.

1) $\left(\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\left(x^2-4\right)'\sqrt{x}-\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$

$= \dfrac{2x\sqrt{x}-\left(x^2-4\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{4x^2-x^2+4}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$;

2) $\left(\left(\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\right)' = \left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

(Опечатка в ответе задачника).

№ 820.

1) $\left((2x-3)^5\left(3x^2+2x+1\right)\right)' =$

$= \left((2x-3)^5\right)'\left(3x^2+2x+1\right)+(2x-3)^5\left(3x^2+2x+1\right)' =$

$= 5\cdot 2(2x-3)^4\left(3x^2+2x+1\right)+(2x-3)^5(6x+2) =$

$= (2x-3)^4\left(30x^2+20x+10+12x^2+4x-18x-6\right) = (2x-3)^4\left(42x^2+6x+4\right)$;

2) $\left((x-1)^4(x+1)^7\right)' = \left((x-1)^4\right)'(x+1)^7+(x-1)^4\left((x+1)^7\right)' =$

$= 4(x-1)^3(x+1)^7+7(x-1)^4(x+1)^6 = (x-1)^3(x+1)^6(4x+4+7x-7) =$

$= (x-1)^3(x+1)^6(11x-3)$;

3) $\left(\sqrt[4]{3x+2}(3x-1)^4\right)' = \left(\sqrt[4]{3x+2}\right)'(3x-1)^4+\sqrt[4]{3x+2}\left((3x-1)^4\right)' =$

$= \dfrac{3\cdot(3x-1)^4}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}}+\sqrt[4]{3x+2}\cdot 4\cdot 3\cdot(3x-1)^3 = \dfrac{3(3x-1)^4+48(3x+2)(3x-1)^3}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}} =$

$= \dfrac{(3x-1)^3}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}}(9x-3+144x+96) = \dfrac{3(3x-1)^3}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}}(51x+31)$;

4) $\left(\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3\right)' = \left(\sqrt[3]{2x+1}\right)'(2x-3)^3+\sqrt[3]{2x+1}\left((2x-3)^3\right)' =$

$= \dfrac{2(2x-3)^3}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}+\sqrt[3]{2x+1}\cdot 2\cdot 3(2x-3)^2 =$

$= \dfrac{2(2x-3)^2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}(2x-3+18x+9) = \dfrac{2(2x-3)^2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}(20x+6) =$

$= \dfrac{4(2x-3)^2(10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

№ 821.

1) $\left(\frac{2x^2-3x+1}{x+1}\right)'=\frac{\left(2x^2-3x+1\right)'(x+1)-\left(2x^2-3x+1\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\frac{(4x-3)(x+1)-\left(2x^2-3x+1\right)}{(x+1)^2}=$

$=\frac{4x^2+4x-3x-3-2x^2+3x-1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x-4}{(x+1)^2}$;

2) $\left(\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}\right)'=\frac{\left(3x^2+2x-1\right)'(2x+1)-\left(3x^2+2x-1\right)(2x+1)'}{(2x+1)^2}=$

$=\frac{(6x+2)(2x+1)-2\left(3x^2+2x-1\right)}{(2x+1)^2}=$

$=\frac{12x^2+6x+4x+2-6x^2-4x+2}{(2x+1)^2}=\frac{6x^2+6x+4}{(2x+1)^2}$;

3) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}=\frac{(2-x)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2}{(2-x)\sqrt{x}}=\frac{4-4x+x^2+x}{2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}=\frac{x^2-3x+4}{2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$

$\left(\frac{x^2-3x+4}{2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}\right)'==\frac{\left(x^2-3x+4\right)'\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)-\left(x^2-3x+4\right)\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)'}{\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)-\left(x^2-3x+4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\frac{4x\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x}-6\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{9}{2}x\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+6\sqrt{x}}{\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\frac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}+\frac{3}{2}x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-x^3+3x^2+6x-8}{2x\sqrt{x}\cdot(2-x)^2}$.

№ 822.

$f'(x)=(2x^3-3x^2-12x+1)'=6x^2-6x-12$; $f'(0)=6x^2-6x-12=0$; $x^2-x-2=0$;

$D=1+8=9$; $x_1=\frac{1+3}{2}=2$, $x_2=\frac{1-3}{2}=-1$.

№ 823.

$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)'=\frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$$= \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2};$$

$f'(x)=3 \Rightarrow (x+1)^2=1$; $x^2+x+1=1$; $x(x+2)=0$; $x_1=0$; $x_2=-2$.

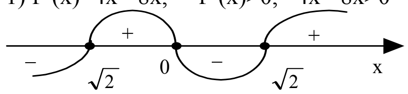
№ 824.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=(x^2-3x+2)(x-3)=x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6=x^3-6x^2+11x-6$

$f'(x)=3x^2-12x+11$, $f'(x)=11 \Rightarrow 3x^2-12x+11=11$; $x(3x-12)=0$; $x_1=0$, $x_2=4$.

№ 825.

1) $f'(x)=4x^3-8x$, $f'(x)>0$, $4x^3-8x>0$ $4x(x^2-2)>0$

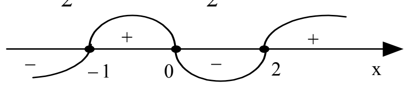


$x\in(-\sqrt{2}; 0)\cup(\sqrt{2}; +\infty)$

2) $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$ $f'(x)>0$, $12x(x^2-x-2)>0$

Решим уравнение: $x(x^2-x-2)=0$, $x=0$, $x^2-x-2=0$, $D=1+8=9$,

$x_1=\frac{1+3}{2}=2$, $x_2=\frac{1-3}{2}=-1$,

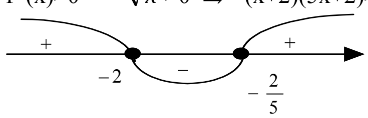


$x\in(-1; 0)\cup(2;+\infty)$.

3) $f'(x)=\left((x+2)^2\sqrt{x}\right)' = \left((x+2)^2\right)'\sqrt{x} + (x+2)^2\cdot\left(\sqrt{x}\right)' =$

$= 2(x+2)\sqrt{x} + (x+2)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x+2}{2\sqrt{x}}(4x+x+2) = \frac{(x+2)(5x+2)}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)>0$ $\sqrt{x}>0 \Rightarrow (x+2)(5x+2)>0$ $x>0$



учитывая, $x>0$ $x\in(0; +\infty)$;

4) $f'(x)=\left((x-3)\sqrt{x}\right)' = (x-3)'\sqrt{x} + (x-3)\cdot\left(\sqrt{x}\right)' =$

$= \sqrt{x} + (x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}};$

$2\sqrt{x}>0 \Rightarrow f'(x)>0$, если $3x-3>0$ $x>1$.

Учитывая, что $x>0$, получим $x\in(1; +\infty)$.

№ 826.

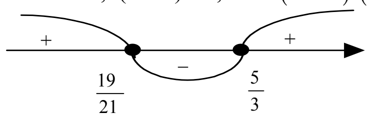
1) $f'(x)=\left((5-3x)^4(3x-1)^3\right)' = \left((5-3x)^4\right)'(3x-1)^3 + (5-3x)^4\left((3x-1)^3\right)' =$

$= 4\cdot(-3)(5-3x)^3(3x-1)^3 + 3\cdot 3(5-3x)^4(3x-1)^2 =$

$= 3(5-3x)^3(3x-1)^2(-12x+4+15-9x) = 3(5-3x)^3(3x-1)^2(19-21x)$

$f'(x)<0$ при $3(5-3x)^3(3x-1)^2(19-21x)<0$.

Т.к. $3>0$, $(3x-1)^2>0$, то $(5-3x)^3(19-21x)<0$.



Ответ: $x \in \left(\frac{19}{21}; \frac{5}{3}\right)$.

2) $f'(x)=\left((2x-3)^2(3-2x)^3\right)' = \left(-(2x-3)^2(2x-3)^3\right)' = \left(-(2x-3)^5\right)' =$
$= -5\cdot 2(2x-3)^4 = -10(2x-3)^4$,

$f'(0)<0$ при $-10(2x-3)^4<0 \Rightarrow (2x-3)^4>0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$.

Ответ: $x \neq \frac{3}{2}$.

3) $f'(x)=\left(\frac{3x^2-1}{1-2x}\right)' = \frac{(3x^2-1)'(1-2x)-(3x^2-1)(1-2x)'}{(1-2x)^2} =$
$= \frac{6x(1-2x)+2(3x^2-1)}{(1-2x)^2} = \frac{6x-12x^2+6x^2-2}{(1-2x)^2} = \frac{-6x^2+6x-2}{(1-2x)^2}$

$f'(x)<0$ при $-2(3x^2-3x+1)<0$, $3x^2-3x+1>0$. Решим соответствующее уравнение.

$D=9-12<0$ – нет решений, следовательно, $f'(x)<0$ при всех x, кроме $\frac{1}{2}$.

Ответ: $x \neq \frac{1}{2}$.

4) $f'(x)=\left(\frac{3x^3}{1-3x}\right)' = \frac{(3x^3)'(1-3x)-3x^3(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{9x^2(1-3x)+9x^3}{(1-3x)^2} =$
$= \frac{9x^2-27x^3+9x^3}{(1-3x)^2} = \frac{9x^2-18x^3}{(1-3x)^2}$,

$f'(x)<0$ если $9x^2(1-2x)<0$; $(1-2x)<0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

Ответ: $x > \frac{1}{2}$.

№ 827.

$v(t)=(\varphi(t))'=(0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2)'=0{,}2t-0{,}5$,
$v(20)=0{,}2\cdot 20-0{,}5=4-0{,}5=3{,}5$.

№ 828.

$v(t)=(s(t))'=(1-t+t^2)'=-1+2t$, $v(10)=-1+2\cdot 10=19$(м/с),

$\frac{mv^2}{2}=\frac{5\cdot(19)^2}{2}$ =902,5 Дж.

№ 829.

$\rho(l)=m'(l)=(2l^2+3l)'=4l+3$,

1) $\rho(3)=4\cdot 3+3=15$ (Г/см); 2) $\rho(25)=4\cdot 25+3=103$ (Г/см).

№ 830.

При x<2 и x>3 подкоренное выражение положительно.

$f'(x)=\left(\left(x^2-5x+6\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2-5x+6\right)^{-\frac{1}{2}}(2x-5)=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$.

§ 47 Производные некоторых элементарных функций

№ 831.

1) $(e^x+1)'=e^x$; 3) $\left(e^{2x}+\frac{1}{x}\right)'=\left(e^{2x}\right)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=2e^{2x}-\frac{1}{x^2}$;

2) $(e^x+x^2)'=e^x+2x$; 4) $\left(e^{-3x}+\sqrt{x}\right)'=\left(e^{-3x}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'=-3e^{-3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

№ 832.

1) $\left(e^{2x+1}+2x^3\right)'=\left(e^{2x+1}\right)'+\left(2x^3\right)'=2e^{2x+1}+6x^2$;

2) $\left(e^{\frac{1}{2}x-1}-\sqrt{x-1}\right)'=\left(e^{\frac{1}{2}x-1}\right)'-\left(\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

3) $\left(e^{0,3x+2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(e^{0,3x+2}\right)'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=0,3e^{0,3x+2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$;

4) $\left(e^{1-x}+x^{-3}\right)'=\left(e^{1-x}\right)'+\left(x^{-3}\right)'=-e^{1-x}-3x^{-4}$;

5) $\left(e^{x^2}\right)'=2x\cdot e^{x^2}$; 6) $\left(e^{2x^3}\right)'=6x^2\cdot e^{2x^3}$;

№ 833.

1) $(2^x+e^x)'=2^x\ln 2+e^x$

2) $(3^x-x^{-2})'=3^x\ln 3+2x^{-3}$ (опечатка в ответе задачника)

3) $(e^{2x}-x)'=2e^{2x}-1$; 4) $(e^{3x}+2x^2)'=3e^{3x}+4x$

5) $\left(3^{x^2+2}\right)'=\left(9\cdot 3^{x^2}\right)'=18x\cdot 3^{x^2}\cdot\ln 3=2x\cdot 3^{x^2+2}\cdot\ln 3$

(Опечатка в ответе задачника).

№ 834.

1) $\left(0{,}5^x+e^{3x}\right)'=0{,}5^x\ln 0{,}5+3e^{3x}$; 2) $\left(3^x-e^{2x}\right)'=3^x\ln 3-2e^{2x}$;

3) $\left(e^{2-x}+\sqrt[3]{x}\right)'=-e^{2-x}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $\left(e^{3-x}+\dfrac{1}{x^4}\right)'=-e^{3-x}-\dfrac{4}{x^5}$.

№ 835.

1) $(2\ \ln x+3^x)'=\dfrac{2}{x}+3^x\ln 3$; 2) $(3\ \ln x-2^x)'=\dfrac{3}{x}+2^x\ln 2$;

3) $\left(\log_2 x+\dfrac{1}{2x}\right)'=\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{1}{2x^2}$; 4) $\left(3x^{-3}-\log_3 x\right)'=-9x^{-4}\dfrac{1}{x\ln 3}$;

5) $\left(\ln\left(x^2-2x\right)\right)'=\dfrac{1\cdot\left(x^2-2x\right)}{x^2-2x}=\dfrac{2x-2}{x^2-2x}$;

6) $\left(\left(3x^2-2\right)\log_3 x\right)'=\left(3x^2-2\right)'\log_3 x+\left(3x^2-2\right)\left(\log_3 x\right)'=$

$=6x\log_3 x+\dfrac{3x^2-2}{x\ln 3}\cdot\dfrac{6x\ln x}{\ln 3}+\dfrac{3x^2-2}{x\ln 3}=\dfrac{3x^2\left(2\ln x+1\right)-2}{x\ln 3}=$

$=\dfrac{3x\left(2\ln x+1\right)}{\ln 3}-\dfrac{2}{x\ln 3}$.

№ 836.

1) $(\sin x+x^2)'=\cos x+2x$; 3) $(\cos x+e^x)'=-\sin x+e^x$;

2) $(\cos x-1)'=-\sin x+0=-\sin x$; 4) $(\sin x-2^x)'=\cos x-2^x\ln 2$.

№ 837.

1) $(\sin(2x-1))'=2\cos(2x-1)$ 3) $(\sin(3-x))'=-\cos(3-x)$;

2) $(\cos(x+2))'=-\sin(x+2)$ 4) $(\cos(x^3))'=3x^2\cdot(-\sin(x^3))=-3x^2\sin x^3$.

№ 838.

1) $(\cos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+e^{3x})'=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+3e^{3x}$

2) $(\sin\left(\dfrac{x}{3}+3\right)+2^x)'=\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}+3\right)+2^x\ln 2$

3) $(3\cos 4x-\dfrac{1}{2x})'=-12\sin 4x+\dfrac{1}{2x^2}$

№ 839.

1) $\left(\dfrac{\cos x}{e^x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'e^x-\cos x\cdot\left(e^x\right)'}{e^{2x}}=$

$=\dfrac{-\sin x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-\sin x-\cos x}{e^x}$;

2) $\left(\frac{3^x}{\sin x}\right)' = \frac{\left(3^x\right)' \sin x - 3^x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$

$= \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot \sin x - 3^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3^x(\ln 3 \cdot \sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$;

3) $(\ln x \cdot \cos 3x)' = (\ln x)' \cos 3x + \ln x \cdot (\cos 3x)' = \frac{\cos 3x}{x} + \ln x \cdot 3(-\sin 3x) =$

$= \frac{\cos 3x}{x} - 3 \ln x \cdot \sin 3x$;

4) $(\log_2 x \cdot \sin 2x)' = (\log_3 x)' \sin 2x + \log_3 x (\sin 2x)' =$

$= \frac{1}{x \ln 3} + \sin 2x + \log_3 \cdot 2 \cos 2x = \frac{\sin 2x}{x \ln 3} + 2 \log_3 x \cos 2x$.

№ 840.

1) $f'(x) = \left(e^{2x-4} + 2\ln x\right)' = 2e^{2x-4} + \frac{2}{x}$, $f'(2) = 2e^{2\cdot 2-4} + \frac{2}{2} = 2+1=3$;

2) $f'(x) = \left(e^{3x-2} - \ln(3x-1)\right)' = 3e^{3x-2} - \frac{3}{3x-1}$,

$f'(\frac{2}{3}) = 3e^{3\cdot\frac{2}{3}-2} - \frac{3}{3\frac{2}{3}-1} = 3-3=0$;

3) $f'(x) = (2^x - \log_2 x)' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 2}$,

$f'(1) = 2^1 \ln 2 - \frac{1}{1 \cdot \ln 2} = 2\ln 2 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{2\ln^2 2 - 1}{\ln 2}$;

4) $f'(x) = \left(\log_{0,5} x - 3^x\right)' = \frac{1}{x \ln 0,5} - 3^x \ln 3$,

$f'(1) = \frac{1}{\ln 0,5} - 3^1 \ln 3 = \frac{1}{\ln 0,5} - 3\ln 3$.

№ 841.

1) $f'(x) = (x - \cos x)' = 1 + \sin x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1$,

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $f'(x) = (\frac{1}{2}x - \sin x)' = \frac{1}{2} - \cos x$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0$, $\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$, откуда

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

3) $f'(x)=(2\ln(x+3)-x)'=\dfrac{2}{x+3}-1=\dfrac{2-x-3}{x+3}=\dfrac{-x-1}{x+3}$,

$f'(x)=0 \Rightarrow -(x+1)=0, \Rightarrow x=-1$;

4) $f'(x)<(\ln(x+1)-2x)'=\dfrac{1}{x+1}-2$,

$f'(x)=0$ при $\dfrac{1}{x+1}-2=0$, т.е. $x+1=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$;

5) $f'(x)=(x^2+2x-12\ln x)'=2x+2-\dfrac{12}{x}$, $f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2-\dfrac{12}{x}=0 \quad x\neq 0$,

$2x^2+2x-12=0$; $x^2+x-6=0$, $D=1+24=25$, $x_1=\dfrac{-1+5}{2}=2$, $x_2=\dfrac{-1-5}{2}=-3$.

Т.к. $x>0 \Rightarrow x=2$.

6) $f'(x)=(x^2-6x-8\cdot\ln x)'=2x-6-\dfrac{8}{x}$, $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6-\dfrac{8}{x}=0$, $x\neq 0$,

$2x^2-6x-8=0$; $x^2-3x-4=0$; $D=9+16=25$, $x_1=\dfrac{3+5}{2}=4$, $x_2=\dfrac{3-5}{2}=-1$,

$x>0 \Rightarrow x=4$.

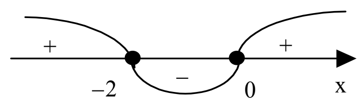
№ 842.

1) $f'(x)=(e^x-x)'=e^x-1$, $f'(x)>0$ при $e^x-1>0$, т.е. $e^x>1$ или $e^x>e^0$, откуда $x>0$;

2) $f'(x)=(x\ln 2-2^x)'=\ln 2-2^x\ln 2$, $f'(x)>0$ при $\ln 2(1-2^x)>0$, т.к. $\ln 2>0$, то $1-2^x>0$ или $2^x<1$, $2^x<2^0$, откуда $x<0$;

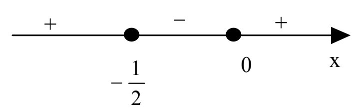
3) $f'(x)=(e^x\cdot x^2)'=e^x\cdot x^2+2xe^x$,

$f'(x)>0$ при $e^x(x^2+2x)>0$, $e^x>0$, $x(x+2)>0$



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

4) $f'(x)=\left(e^x\sqrt{x}\right)'=e^x\sqrt{x}+\dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}$



$f'(x)>0$ при $e^x\sqrt{x}\,(1+\dfrac{1}{2x})>0$),

т.к. $e^x\sqrt{x}>0$, то $1+\dfrac{1}{2x}>0 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$ $f'(x)>0$ и $x>0$. Ответ: $x>0$.

№ 843.

1) $\left(\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}+\ln\dfrac{2x+3}{5}\right)'=\dfrac{1\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2x-1}}+\dfrac{2\cdot 5}{5(2x+3)}=\dfrac{1}{\sqrt{6x-3}}+\dfrac{2}{2x+3}$

2) $\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{6}}-2\ln\dfrac{2-5x}{3}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{2\cdot 3\cdot(-5)}{(2-5x)\cdot 3}=-\dfrac{\sqrt{6}}{12\sqrt{1-x}}+\dfrac{10}{2-5x}$.

3) $\left(2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\frac{1-x}{2}\right)'=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{\frac{1-x}{3}}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\sin\frac{1-x}{2}\right)=$

$=-\frac{2}{3}e^{\frac{1-x}{3}}+\frac{3}{2}\sin\frac{1-x}{2}$.

4) $\left(3e^{\frac{2-x}{3}}-2\sin\frac{1+x}{4}\right)'=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{\frac{2-x}{3}}-2\cdot\frac{1}{4}\cos\frac{1+x}{4}=-e^{\frac{2-x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}$.

№ 844.

1) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}}-3\cos\frac{x-2}{3}\right)'=\left(\sqrt[3]{3}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{3}}-3\cos\frac{x-2}{3}\right)=$

$=\sqrt[3]{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)\cdot(2-x)^{-\frac{4}{3}}-3\cdot\frac{1}{3}\left(-\sin\frac{x-2}{3}\right)=\frac{1}{(2-x)\sqrt[3]{(2-x)\cdot 9}}+\sin\frac{x-2}{3}$.

2) $\left(2\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}\right)'=\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)(x+2)^{-\frac{7}{4}}-5\cdot\frac{1}{5}\cdot e^{\frac{x-4}{5}}\right)=$

$=-\frac{3}{2}(x+2)^{-\frac{7}{4}}-e^{\frac{x-4}{5}}$.

№ 845.

1) $\left(0{,}5^x\cdot\cos 2x\right)'=\left(0{,}5^x\right)'\cos 2x+0{,}5^x(\cos 2x)'=$

$=0{,}5^x\ln 0{,}5\cos 2x+0{,}5^x\cdot 2\cdot(-\sin 2x)=0{,}5^x(\ln 0{,}5\cos 2x-2\sin 2x)$.

2) $\left(5\sqrt{x}\cdot e^{-x}\right)'=5\left(\left(\sqrt{x}\right)'e^{-x}+\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)'\right)=$

$=5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}-\sqrt{x}\cdot e^{-x}\right)=5e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\frac{5e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$.

3) $(e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x))'=(e^{3-2x})'\cos(3-2x)+e^{3-2x}(\cos(3-2x))'=$
$=-2e^{3-2x}\cos(3-2x)-2e^{3-2x}\cdot(-\sin(3-2x))=$
$=-2e^{3-2x}(\cos(3-2x)-\sin(3-2x))=2e^{3-2x}(\sin(3-2x)-\cos(3-2x))$.

№ 846.

1) $\left(\ln\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2(x-1)}$.

2) $\left(e^{\sqrt{3+x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}e^{\sqrt{3+x}}$ (опечатка в ответе задачника).

3) $(\ln(\cos x))'=\frac{1}{\cos x}\cdot$ (–sin x)= –tg x. 4) $(\ln(\sin x))'=\frac{1}{\sin x}\cdot$ cos x =ctg x.

№ 847.

1) $\left(2^{\cos x+1}\right)' = 2^{\cos x+1}\cdot\ln 2\cdot(-\sin x)$. 2) $\left(0{,}5^{1+\sin x}\right)' = 0{,}5^{1+\sin x}\cdot\ln 0{,}5\cdot\cos x$.

3) $\left(\cos\sqrt[3]{x+2}\right)' = -\sin\sqrt[3]{x+2}\cdot\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sin\sqrt[3]{x+2}}{3\sqrt[3]{\left(x+2^2\right)}}$.

4) $(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{cox(\ln x)}{x}$.

№ 848.

1) $\left(\sqrt{x^2+2x-1}\right)' = \frac{(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

2) $\left(\sqrt[3]{\sin x}\right)' = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 3) $\left(\sqrt[4]{\cos x}\right)' = \frac{1\cdot(-\sin x)}{4\sqrt[4]{\cos x}} = -\frac{\sin x}{4\sqrt[4]{\cos x}}$.

4) $\left(\sqrt{\log_2 x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\log_2 x}\cdot x\ln 2} = \frac{1}{2x\ln 2\cdot\sqrt{\log_2 x}}$

№ 849.

1) $\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(1+\cos x)'\sin x-(1+\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$

$= \frac{-\sin x\cdot\sin x-(1+\cos x)\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x-\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$

2) $\left(\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}\right)' = \frac{\left(\sqrt{3x}\right)'\left(3^x+1\right)-\sqrt{3x}\left(3^x+1\right)'}{\left(3^x+1\right)^2} =$

$= \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}\left(3^x+1\right)-\sqrt{3x}\left(3^x\ln 3\right)}{\left(3^x+1\right)^2} =$

$= \frac{3\cdot 3^x+3-2\cdot 3x\cdot 3^x\ln 3}{2\sqrt{3x}\left(3^x+1\right)^2} = \frac{3^{x+1}(1-2x\ln 3)+3}{2\sqrt{3x}\left(3^x+1\right)^2}$.

3) $\left(\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5}\right)' = \frac{\left(e^{0,5x}\right)'(\cos 2x-5)-e^{0,5x}(\cos 2x-5)'}{(\cos 2x-5)^2} =$

$= \frac{0{,}5e^{0,5x}(\cos 2x-5)+2e^{0,5x}\sin 2x}{(\cos 2x-5)^2} = \frac{0{,}5e^{0,5x}(\cos 2x-5+4\sin 2x)}{(\cos 2x-5)^2}$.

4) $\left(\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}\right)' = \frac{\left(5^{2x}\right)'(\sin 3x+7)-\left(5^{2x}\right)(\sin 3x+7)'}{(\sin 3x+7)^2} =$

$= \frac{2\cdot 5^{2x}\cdot\ln 5(\sin 3x+7)-5^{2x}\cdot 3\cdot\cos 3x}{(\sin 3x+7)^2} = \frac{5^{2x}(2\cdot\ln 5\cdot\sin 3x+14\ln 5-3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$

№ 850.

1) $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)'=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'x-\left(e^x-e^{-x}\right)(x)'}{x^2}=$

$=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot x-\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x\cdot x+e^{-x}\cdot x-e^x+e^{-x}}{x^2}=\frac{e^x(x-1)+e^x(x+1)}{x^2}$;

2) $\left(\frac{2^x-\log_2 x}{\ln 2\cdot x}\right)'=\frac{\left(2^x-\log_2 x\right)'\cdot\ln 2\cdot x-\left(2^x-\log_2 x\right)(\ln 2\cdot x)'}{x^2\cdot\ln^2 2}=$

$=\frac{\left(2^x\ln 2-\frac{1}{x\ln 2}\right)\cdot\ln 2\cdot x-\left(2^x-\log_2 x\right)\cdot\ln 2}{\ln^2 2\cdot x^2}=\frac{x\cdot 2^x\ln 2-\frac{1}{\ln 2}-2^x+\log_2 x}{x^2\cdot\ln^2 2}$.

№ 851.

1) $\left(\frac{\sin x-\cos x}{x}\right)'=\frac{(\sin x-\cos x)'\cdot x-(\sin x-\cos x)\cdot(x)'}{x^2}=$

$=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot x-(\sin x-\cos x)\cdot 1}{x^2}=$

$=\frac{\cos x\cdot x+\sin x\cdot x-\sin x+\cos x}{x^2}=\frac{\cos x(x+1)+\sin x(x-1)}{x^2}$

2) $\left(\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\right)'=\left(\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}\right)'=(\sin x-\cos x)'=\cos x+\sin x$.

№ 852.

1) $f'(x)=\left(5(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\cos 5x\right)'=$

$=5(\cos x+\sin x)+\sqrt{2}\cdot 5\cdot(-\sin 5x)=5\left(\cos x+\sin x-\sqrt{2}\sin 5x\right)=$

$=5\left(\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{2}\sin 5x\right)=$

$=5\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin 5x\right)=5\sqrt{2}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin 5x\right)=$

$=5\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}-5x}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}-5x}{2}=10\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+3x\right)$

f′(x)=0 при $\sin\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+3x\right)=0$,

Откуда: $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{8}-2x=\pi n\\ \frac{\pi}{8}+3x=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{3}k,\quad k\in Z\end{array}\right.$

2) $f'((x) = \left(1 - 5\cos 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2x\right)' =$

$= 10\sin 2x + 2(\cos x + \sin x) - 2 = 10\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2(\cos x + \sin x) - 2 =$

$= 10\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) + 2(\cos x + \sin x) - 2 =$

$= 10\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 =$

$= 20\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 12$

$f'(x)=0$, если $20\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 12 = 0$

$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = t$, $20t^2 + 2\sqrt{2}\,t - 12 = 0$ или $10t^2 + \sqrt{2}\,t - 6 = 0$ $\quad D = 2 + 240 = 242 = 2\cdot 121$

$t_1 = \frac{-\sqrt{2} + 11\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{-\sqrt{2} - 11\sqrt{2}}{20} = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\frac{3\sqrt{2}}{5} \vee 1;\quad \frac{9\cdot 2}{25} \vee 1;\quad 18 < 25 \Rightarrow \left|\frac{3\sqrt{2}}{5}\right| < 1$

Следовательно, $-\frac{3\sqrt{2}}{5} > -1$. $\frac{\pi}{4} - x_1 = \pm\arccos(-\frac{3\sqrt{2}}{5}) + 2\pi n$,

$n \in Z \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right) + 2\pi n,\quad n \in Z$

$\frac{\pi}{4} - x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z \Rightarrow x_2 = 2\pi k,\ k \in Z,\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$

№ 853.

1) $f'(x) = \left(e^{2x}\ln(2x-1)\right)' = \left(e^{2x}\right)'\cdot\ln(2x-1) + e^{2x}\left(\ln(2x-1)\right)' =$

$= 2e^{2x}\ln(2x-1) + \frac{2e^{2x}}{2x-1} = 2e^{2x}\left(\ln(2x-1) + \frac{1}{2x-1}\right)$,

$f(x)=0 \Rightarrow e^{2x}\ln(2x-1)=0$, $e^{2x}>0$, так что $\ln(2x-1)=0$, $\ln(2x-1)=\ln 1$;

$2x-1=1$; $x=1$, $f'(1) = 2e^{2\cdot 1}\left(\ln(2\cdot 1 - 1) + \frac{1}{2\cdot 1 - 1}\right) = 2e^2\cdot(0+1) = 2e^2$.

2) $f'(x) = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\right)' = = \frac{(\sin x - \cos x)'\sin x - (\sin x - \cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$

$= \dfrac{(\cos x + \sin x)\sin x - (\sin x - \cos x)\cos x}{\sin^2 x} =$

$= \dfrac{\cos x \cdot \sin x + \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

f(x)=0 $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x}\right) = 0$

Область определения функции sin x≠0 x≠πn, n∈Z

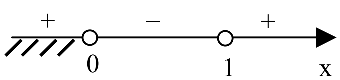
1–ctg x=0 ctg x=1 x=$\dfrac{\pi}{4}$+πn, n∈Z ; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Т.к. в f ′(x) sin входит в квадрате, то f ′(x) во всех точках $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, будет иметь одно и то же значение.

№ 854.

f ′(x)=(x sin 2x)′=(x)′sin 2x+x(sin 2x)′=sin 2x+2x cos 2x
y(x)=f ′(x)+f(x)+2=sin 2x+2x cos 2x+x sin 2x+2
y(π)=sin 2π+2π cos 2π+π sin 2π+2=0+2π+0+2=2(1+π).

№ 855.

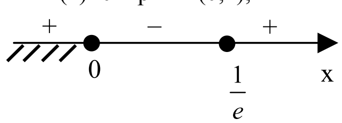


1) f ′(x)=(x– ln x)=1–$\dfrac{1}{x}$, x>0

f ′(x)=0 при x=1; f ′(x)>0,

$\dfrac{x-1}{x}$>0, x(x–1)>0 ⇒ x∈(1;+∞);

f ′(x)<0 при x∈(0;1);

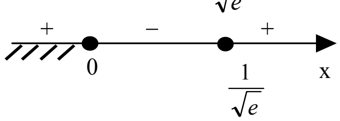


2) f ′(x)=(x lnx)′= lnx+1, x>0
f ′(x)=0, lnx+1=0, lnx = –1,
lnx=lne^{-1}, x=e^{-1}.
f ′(x)>0, lnx+1>0; lnx>–1=ln e^{-1};
x>e^{-1} x∈(e^{-1};+∞); f ′(x)<0 при x∈(0;e^{-1});
3) f ′(x)=(x^2 lnx)′=2xlnx+x x>0

f ′(x)=0 x(2lnx+1)=0 x=0 и lnx=$-\dfrac{1}{2}$=ln $e^{-\frac{1}{2}}$ x=$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

f ′(x)>0 x(2 ln x+1)>0 при x∈($\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; +∞)

f ′(x)<0 при x∈(0; $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$) x>0

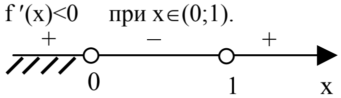


4) $f'(x)=(x^3-3\ln x)'=3x^2-\frac{3}{x}$

$f'(x)=0$, $3x^2-\frac{3}{x}=0$, $3x^3-3=0$, $x^3=1$, $x=1$; $f'(x)>0$, $3x^2-\frac{3}{x}>0$, $\frac{3x^3-3}{x}>0$

$3x(x^3-1)>0$ при $x\in(1;+\infty)$;

$f'(x)<0$ при $x\in(0;1)$.



№ 856.

При $x<2$ и $x>3$ выражение под знаком логарифма положительно

$(\ln(x^2-5x+6))'=\frac{1}{x^2-5x+6}\cdot(2x-5)$.

§ 48 Геометрический смысл производной

№ 857.

1) $k=\text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$, $x_0=2$ $y_0=-3$, т.е. $-3=1\cdot 2+b$ $b=-5$;

2) $k=\text{tg}$, $\alpha=\text{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$, $x_0=-3$ $y_0=2$, т.е. $2=1\cdot(-3)+b$ $b=5$;

3) $k=\text{tg}$, $\alpha=\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$, $x_0=1$, $y_0=1$, т.е. $1=-\sqrt{3}\cdot 1+b$, $b=1+\sqrt{3}$;

4) $k=\text{tg}$, $\alpha=\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_0=-1$, $y_0=-1$, т.е. $-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-1)+b$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{3}-1$

№ 858.

1) $f'(x)=3x^2$; $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=3\cdot 1^2=3$;

2) $f'(x)=\cos x$; $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $f'(x)=\frac{1}{x}$; $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=\frac{1}{1}=1$;

4) $f'(x)=e^x$; $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=e^{\ln 3}=3$.

№ 859.

1) $f'(x)=x^2$; $\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=1^2=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$; $\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=-\frac{1}{1^2}=-1 \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{4}$;

3) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $f'(x)=-\frac{9}{x\sqrt{x}}$; $\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=-\frac{9}{3\sqrt{3}}=-\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}$;

5) $f'(x)=\frac{3}{2}e^{\frac{3x+1}{2}}$; $\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=\frac{3}{2}\sqrt{e} \Rightarrow \alpha=\text{arctg}\left(\frac{3}{2}\sqrt{e}\right)$;

6) $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$; $\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=\frac{2}{2\cdot 2+1}=\frac{2}{5} \Rightarrow \alpha=\text{arctg}\,\frac{2}{5}$.

№ 860.

1) $f(x_0)=1^2+1+1=3$, $f'(x)=2x+1$, $f'(x_0)=2\cdot 1+1=3$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,
$y=3+3(x-1)$, $y=3+3x-3$, $y=3x$;

2) $f(x_0)=2-3\cdot 2^2=-10$, $f'(x)=1-6x$, $f'(x_0)=1-6\cdot 2=-11$,
$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,
$y=-10-11(x-2)$, $y=-10-11x+22$, $y=12-11x$.

3) $f(x_0)=\frac{1}{3}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'(x_0)=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$y=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-3)$ $y=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$ $y=\underline{-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}}$;

4) $f(x_0)=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$, $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$, $f'(x_0)=-\frac{2}{(-2)^3}=\frac{1}{4}$,

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(x+2)$ $y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, $y=\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}$;

5) $f(x_0)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(x)=\cos x$, $f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}}$;

6) $f(x_0)=e^0=1$, $f'(x)=e^x$, $f'(x_0)=e^0=1$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,
$y=1+1(x-0)$, $y=x+1$;

7) $f(x_0)=\ln 1=0$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x_0)=\frac{1}{1}=1$,

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $y=0+1(x-1)$, $y=x-1$;

8) $f(x_0)=\sqrt{1}=1$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$,

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $y=1+\frac{1}{2}(x-1)$, $y=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

№ 861.

1) $f'(x)>0 \Rightarrow$ tg $\alpha>0 \Rightarrow \alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ tg $\alpha<0 \Rightarrow \alpha\in[-\frac{\pi}{2};0]$,

$f'(x)=0 \Rightarrow$ tg $\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$;

рис. а; а) $f'(x)>0$: A, B, E; б) $f'(x)<0$: D, G; в) $f'(x)=0$: C, F.

рис. б; а) $f'(x)>0$: C, G; б) $f'(x)<0$: A, E; в) $f'(x)=0$: B, D, F.

№ 862.

1) $f(0)=0+\frac{1}{0+1}=1$, $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(0)=1-\frac{1}{(0+1)^2}=0$,

$y=1+0\cdot(x-0)$, $\underline{y=1.}$

2) $f(0)=\sin 0-\ln 1=0$

$f'(x)=2\cos 2x-\frac{1}{x+1}$, $f'(0)=2\cos 0-\frac{1}{1}=1$,

$y=0+1\cdot(x-0)$, $\underline{y=x.}$

№ 863.

1) $f'(x)=1-e^x$, $f'(0)=1-e^0=0$, tg $\alpha=f'(x_0)=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=90°-\alpha=90°$;

2) $f'(x)=-\sin x$, $f'(0)=-\sin 0=0$, tg $\alpha=f'(x_0) \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=90°-\alpha=90°$;

3) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+0\cdot e^2=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$,

tg $\alpha=f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\text{arctg}\,\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=90°-\alpha=90°-\text{arctg}\,\frac{1}{2}$.

№ 864.

1) а) Абсцисса точки пересечения графиков:

$8-x=4\sqrt{x+4}$; $64-16x+x^2=16x+64$; $x^2-32x=0$; $x(x-32)=0$

$x_1=0$ $x_2=32$ – посторонний корень, т.к. $8-x\geq 0$; $x=0$.

б) угол наклона первой касательной в точке $x=0$

tg $\alpha_1=f'(x_0)=(8-x)'=-1$, $\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$.

в) угол наклона второй касательной:

tg $\alpha_2=f'(x_0)=\frac{4}{2\sqrt{x_0+4}}=\frac{2}{\sqrt{x_0+4}}=\frac{2}{2}=1$, $\alpha_2=\frac{\pi}{4}$

г) $\beta=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

2) а) Абсцисса точки пересечения графиков:

$\frac{1}{2}(x+1)^2=\frac{1}{2}(x-1)^2$; $\frac{1}{2}(x^2+2x+1-x^2+2x-1)=0$; $2x=0$, $\underline{x=0;}$

б) угол наклона первой касательной при $x=0$:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1=f'(x_0)=\frac{1}{2}\cdot 2(x_0+1)=(x_0+1)=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\frac{\pi}{4}$;

в) угол наклона касательной к $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ при $x = 0$:

$\mathrm{tg}\,\alpha_2=f'(x_0)=\frac{1}{2}\cdot 2(x_0-1)=x_0-1=-1 \Rightarrow\quad \alpha_2=\frac{3\pi}{4}$;

г) $\beta=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

3. а) Абсцисса точек пересечения графиков:

$\ln(1+x)=\ln(1-x) \Rightarrow 1+x=1-x,\quad 2x=0,\quad \underline{x=0}$

б) угол наклона касательной к $y=\ln(1+x)$ при $x = 0$:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1=f'(x_0)=\frac{1}{1+x_0}\cdot=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\frac{\pi}{4}$

в) угол наклона касательной к $y=\ln(1-x)$ при $x = 0$:

$\mathrm{tg}\,\alpha_2=f'(x_0)=\frac{-1}{1-x_0}=-1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_2=\frac{3\pi}{4}$;

г) $\beta=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

4) а) Абсцисса точек пересечения :

$e^x=e^{-x} \Rightarrow x=-x,\qquad \underline{x=0}$

б) угол наклона касательной к $y=e^x$ при $x = 0$:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1=f'(x_0)=e^x=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\frac{\pi}{4}$

в) угол наклона касательной к $y=e^{-x}$

$\mathrm{tg}\,\alpha_2=f'(x_0)=--e^{x_0}=-1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_2=\frac{3\pi}{4}$

г) $\beta=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

№ 865.

1. а) Точка пересечения: $x^4=x^6+2x^2,\quad x^2(x^4-x^2+2)=0,\ x_1=0,$

$D=1-8<0 \Rightarrow (0;\,0)$ — единственная общая точка

б) Уравнение касательной к $y=x^4$ в точке $(0;\,0)$:

$f(x_0)=0^4=0,\qquad f'(x)=4x^3,\ f'(x_0)=4\cdot 0^3=0,\quad y=0+0(x-0)=0,\ y=0;$

в) Уравнение касательной к $y=x^6+2x^2$ в точке $(0;\,0)$:

$f(x_0)=0+0=0,\quad f'(x)=6x^5+4x,\ f'(x_0)=6\cdot 0+4\cdot 0=0,\ y=0+0(x-0)=0,\ y=0.$

Общая касательная $y=0$.

2) а) Точка пересечения: $x^4=x^3-3x^2,\ x^2(x^2-x+3)=0,\ x_1=0,$

$D=1-12<0 \Rightarrow (0;\,0)$ — единственная общая точка;

б) Уравнение касательной к $y=x^4$ в точке $(0;\,0)$:

$f'(x_0)=0,\quad f'(x)=4x^3,\quad f'(x_0)=0,\quad y=0+0(x-0)=0,\quad y=0;$

в) Уравнение касательной к $y=x^3-3x^2$ в точке $(0;\,0)$:

$f(x_0)=0$, $f'(x)=3x^2-6x$, $f'(x_0)=3\cdot0-6\cdot0=0$, $y=0+0(x-0)=0$, $y=0$.
Общая касательная: $y=0$.
3) а) Точка пересечения:
$(x+2)^2=2-x^2$, $x^2+4x+4-2+x^2=0$, $2x^2+4x+2=0$, $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$ $x=-1$ $(-1; 1)$ – единственная общая точка
б) Уравнение касательной к $y=(x+2)^2$ в точке $(-1; 1)$:
$f(x_0)=1$, $f'(x)=2(x+2)$, $f'(x_0)=2\cdot(-1+2)=2$, $y=1+2(x+1)=0$, $y=2x+3$;
в) Уравнение касательной к $y=2-x^2$ в точке $(-1; 1)$:
$f(x_0)=1$, $f'(x)=-2x$, $f'(x_0)=-2\cdot(-1)=2$, $y=1+2(x+1)$, $y=2x+3$.
Общая касательная: $y=2x+3$
4) а) Точка пересечения: $x(2+x)=x(2-x)$, $2x+x^2-2x+x^2=0$, $2x^2=0$, $x=0$
$(0; 0)$ — единственная общая точка
б) Уравнение касательной к $y=x(2+x)$ в точке $(0; 0)$:
$f(x_0)=0$, $f'(x)=(2+x)+x=2+2x$, $f'(x_0)=2$, $y=0+2(x-0)=0$, $y=2x$
в) Уравнение касательной к $y=x(2-x)$ в точке $(0; 0)$:
$f(x_0)=0$, $f'(x)=(2-x)-x=2-2x$, $f'(x_0)=2$, $y=0+2(x-0)$, $y=2x$.
Общая касательная: $y=2x$.

№ 866.

1) $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x)$; $f'(x)=e^x-e^{-x}$, $f'(x)=\frac{3}{2}$, т.е. $e^x-e^{-x}=\frac{3}{2}$,
$2e^{2x}-3e^x-2=0$ это квадратное уравнение относительно e^x, $D=9+16=25$;
$e^x=\frac{3+5}{4}=2 \Rightarrow x=\ln2$, $e^x=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$, но $e^x>0$,
$f(\ln 2)=e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}=2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$, $\underline{x=\ln2}$ искомая точка: $(\ln2;\ 2\frac{1}{2})$;
2) $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x)$;
$f'(x)=\frac{1\cdot3}{2\sqrt{3x+1}}$ $f'(x)=\frac{3}{4}$, т.е. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{3x+1}=2$,
$3x+1=4$, $x=1$ $f(1)=\sqrt{3\cdot1+1}=2$ искомая точка (1,2).
3) $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x)$, $f'(x)=2\cos 2x$, $f'(x)=2$, тогда $2\cos 2x=2$,
$\cos 2x=1 \Rightarrow 2x=2\pi n$, $n\in Z$. $x=\pi n$, $n\in Z$, $\sin(2\pi n)=0$,
искомая точка: $(\pi n; 0)$, $n\in Z$.
4) $k=\text{tg}\,\alpha=f'(x)$, $f'(x)=1+\cos x$, $f'(x)=0$, т.е. $1+\cos x=0$,
$\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$; $f(\pi+2\pi n)=\pi+2\pi n+\sin(\pi+2\pi n)=\pi+2\pi n$, $n\in Z$;
искомая точка $(\pi+2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in Z$.

№ 867.

$f'(x)=\frac{(x+2)'(x-2)-(x-2)'(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-2}{(x-2)^2}=-\frac{4}{(x-2)^2}$;
$f'(x)=\text{tg}\,(-\frac{\pi}{4})=-1$, тогда $-\frac{4}{(x-2)^2}=-1$, откуда $(x-2)^2=4$,

$x^2–4x+4–4=0 \Rightarrow x(x–4)=0$

$x_1=0$, $y_1=–1$; $x_2=4$, $y_2=3$; искомые точки (0,–1), (4,3).

№ 868.

Касательные параллельны, значит их углы наклона к Ох равны, т.е.

$\text{tg}\,\alpha=f'(x_0)=g'(x_0)$,

$f'(x)=3x^2–1$, $g'(x)=6x–4$, $3x^2–1=6x–4$, $3x^2–6x+3=0$, $3(x–1)^2=0 \Rightarrow x=1$,

уравнение касательной к $y(x)=x^3–x–1$ при $x = 1$:

$f(x_0)=1^3–1–1=–1$, $f'(x_0)=3\cdot 1^2–1=2$, $y=–1+2(x–1)$, $y=2x–3$,

уравнение касательной к $g(x)=3x^2-4x+1$ при $x = 1$: $g(x_0)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+1=0$,

$g'(x)=6\cdot 1–4=2$, $y=0+2(x–1)$, $y=2x–2$, искомые точки (1, –1) и (1, 0).

№ 869.

1) $(2x^4–x^3+3x+4)'=8x^3–3x^2+3$; 2) $(–x^5+2x^3–3x^2–1)'=–5x^4+6x^2–6x$;

3) $\left(6\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)'=6\cdot\dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-3}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{x^3}$;

4) $\left(\dfrac{2}{x^3}-8\sqrt[4]{x}\right)'=2\cdot(-3)\cdot x^{-4}-8\cdot\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=-\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$;

5) $((2x+3)^8)'=8\cdot 2(2x+3)^7=16(2x+3)^7$;

6) $((4–3x)^7)'=7\cdot(–3)\cdot(4–3x)^6=–21(4–3x)^6$; 7) $\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)'=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(3x-2)^2}}$;

8) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)'=-\dfrac{1\cdot(-4)}{2(1-4x)\sqrt{1-4x}}=\dfrac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}$.

№ 870.

1) $(e^x–\sin x)'=e^x–\cos x$; 2) $(\cos x–\ln x)'=–\sin x–\dfrac{1}{x}$;

3) $(\sin x–\sqrt[3]{x})'=\cos x–\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $(6x^4–9e^x)'=24x^3–9e^x$;

5) $\left(\dfrac{5}{x}+4e^x\right)'=-\dfrac{5}{x^2}+4e^x$; 6) $\left(\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{2}\ln x\right)'=-\dfrac{3}{3x^4}+\dfrac{1}{2x}=-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{2x}$.

№ 871.

1) $(\sin 5x+\cos(2x–3))'=5\cos 5x–2\sin(2x–3)$; 2) $(e^{2x}–\ln 3x)'=2e^{2x}–\dfrac{1}{x}$;

3) $(\sin(x–3)–\ln(1–2x))'=\cos(x–3)+\dfrac{2}{1-2x}$; 4) $\left(6\sin\dfrac{2x}{3}–e^{1–3x}\right)'=4\cos\dfrac{2x}{3}+3e^{1–3x}$.

№ 872.

1) $(x^2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'=2x\cos x–x^2\sin x$;

2) $(x^3\ln x)'=3x^2\ln x+\dfrac{x^3}{x}=3x^2\ln x+x^2$;

3) $(5x\,e^x)'=5e^x+5xe^x$; 4) $(x\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$;

5) $(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$;

6) $(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x\cdot=e^x(\cos x-\sin x)$;

№ 873.

1) $\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{3x^2(x^2+1)-(x^3+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$;

2) $\left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)'=\dfrac{2x(x^3+1)-x^2\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\dfrac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2}=\dfrac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$;

3) $\left(\dfrac{\sin x}{x+1}\right)'=\dfrac{\cos(x+1)-\sin x}{(x+1)^2}$;

4) $\left(\dfrac{\ln x}{1-x}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$.

№ 874.

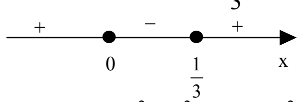
1) $(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x$; 2) $(8^{\cos x})'=8^{\cos x}\ln 8\cdot(-\sin x)=-8^{\cos x}\ln 8\cdot\sin x$;

3) $(\cos^4 x)'=4\cos^3 x\cdot(-\sin x)=-4\cos^3 x\sin x$; 4) $(\ln(x^3))'=\dfrac{1}{x^3}\cdot 3x^2=\dfrac{3}{x}$.

№ 875.

1) $f'(x)=(2x^3-x^2)'=6x^2-2x$, $f'(x)=0$, $2x(3x-1)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{3}$,

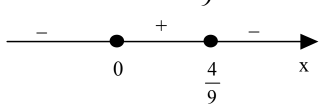
$f'(x)>0$ при $x<0$, $x>\dfrac{1}{3}$, $f'(x)<0$ при $0<x<\dfrac{1}{3}$,



2) $f'(x)=(-3x^2+2x^2+4)'=-9x^2+4x$,

$f'(x)=0$, $x(-9x+4)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=\dfrac{4}{9}$;

$f'(x)>0$ при $0<x<\dfrac{4}{9}$, $f'(x)<0$ при $x<0$, $x>\dfrac{4}{9}$;

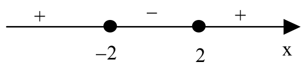


3) $f'(x)=(x^5-5x^3-20x)'=5x^4-15x^2-20$,

$f'(x)=0$, $5(x^4-3x^2-4)=0$, $D=9+16=25$

$x^2=\frac{3+5}{2}=4$, $x_{1,2}=\pm 2$, $x^2=\frac{3-5}{2}=-1<0$ — не существует корней

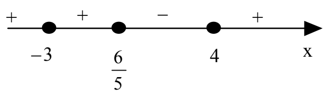
$f'(x)>0$ при $x<-2$ и $x>2$, $f'(x)<0$ при $-2<x<2$



4) $f'(x)=\left((x+3)^3(x-4)^2\right)'=3(x+3)^2(x-4)^2+2(x+3)^3(x-4)=$
$=(x+3)^2(x-4)(3x-12+2x+6)=(x+3)^2(x-4)(5x-6)$,

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-3$, $x_2=4$, $x_3=\frac{6}{5}$.

$f'(x)>0$ при $x<-3$, $-3<x<\frac{6}{5}$, $x>4$, $f'(x)<0$ при $\frac{6}{5}<x<4$

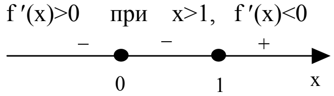


5) $f'(x)=\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)'=\frac{3(x-2)-3x-1}{(x-2)^2}=\frac{-7}{(x-2)^2}$ $x\neq 2$

$f'(x)=0$ таких x не существует; $f'(x)>0$ таких x не существует
$f'(x)<0$ при всех x, кроме $x=2$

6) $f'(x)=(x^2+\frac{2}{x})'=2x-\frac{2}{x^2}$, $x\neq 0$, $f'(x)=0$, $2x^3-2=0$, $x^3=1$, $x=1$.

$f'(x)>0$ при $x>1$, $f'(x)<0$ при $x<0$ и $0<x<1$.



№ 876.

1) $f(x)=\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$,

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos 2x=\cos 2x$, $f'(x_0)=\cos 2\cdot\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=e^x\ln x$, $f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$, $f'(1)=e^1\ln 1+\frac{e^1}{1}=0+e=e$;

3) $f'(x)=\left(\frac{2\cos x}{\sin x}\right)'=(2ctgx)'=-\frac{2}{\sin^2 x}$, $f'(\frac{\pi}{4})=-\frac{2}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=-2\cdot 2=-4$;

4) $f'(x)=\left(\frac{x}{1+e^x}\right)'=\frac{1+e^x-x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}$, $f'(0)=\frac{1+e^0-0\cdot e^0}{(1+e^0)^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$.

№ 877.

1) y(3)=3^2–2·3=9–6=3, y ′(x)=2x–2, y′(3)=6–2=4, y=3+4(x–3), y=4x–9;

2) y(3)=27+9=36, y ′(x)=$3x^2$+3, y′(3)=27+3=30, y=36+30(x–3), y=30x–54;

3) y($\frac{\pi}{6}$)=sin $\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, y ′(x)=cos x, y′($\frac{\pi}{6}$)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

y=$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})$, y=$\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}}$.

4) y($\frac{\pi}{3}$)=cos $\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, y ′(x)= –sin x, y′($\frac{\pi}{3}$)=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

y=$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})$, y=$\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}$.

№ 878.

s(4)=0,5·4^2+3·4+2=8+12+2=22(м), v(t)=s′(t)=0,5·2t+3=t+3, v(4)=4+3=7 (м/с).

№ 879.

1) y′=($\cos^2$ 3x)′=2cos 3x·3(–sin 3x)= –3sin 6x;

2) y=(sin x cos x +x)′=$\cos^2$x–$\sin^2$x+1=cos 2x+1;

3) y′=((x^3+1)cos 2x)+1)′=$3x^2$·cos 2x +(x^3+1)·2·(–sin 2x)=
=$3x^2$cos 2x–2(x^3+1)sin 2x;

4) y′=($\sin^2\frac{x}{2}$)′=2 sin $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$·cos $\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ sin x;

5) y′=$\left((x+1)\sqrt[3]{x^2}\right)'=\sqrt[3]{x^2}+(x+1)\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{3x+2x+1}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=\frac{5x+1}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$;

6) y′=$\left(\sqrt[3]{x-1}\left(x^4-1\right)\right)'=\frac{x^4-1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x-1^2\right)}}+\sqrt[3]{x-1}\cdot 4x^3=$

$=\frac{x^4-1+12x^3(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x-1^2\right)}}=\frac{13x^4-12x^3-1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x-1^2\right)}}$.

№ 880.

1) y′=$\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)'=\frac{-2(-\sin 2x)(1+\cos 2x)-(1-\cos 2x)2(-\sin 2x)}{(1+\cos 2\text{x})^2}=$

$=\frac{2\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x+2\sin 2x-2\sin 2x\cos 2x}{(1+\cos 2\text{x})^2}=$

$=\frac{4\sin 2x}{(1+\cos\ 2x)^2}=\frac{4\sin 2x}{(2\cos\ ^2x)^2}=\frac{\sin 2x}{\cos\ ^4x}$;

2) $y' = \left(\frac{\sqrt{4+x}}{x} \right)' = \frac{\frac{1 \cdot 4x}{2\sqrt{4+x}} - 4\sqrt{4+x}}{16x^2} = \frac{4x - 8x - 32}{2 \cdot 16x^2 \sqrt{4+x}} =$

$= \frac{-4x - 32}{2 \cdot 16x^2 \sqrt{4+x}} = \frac{-x-8}{8x^2 \sqrt{4+x}}$;

3) $y'=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\right)'=\dfrac{\sqrt{x+2}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}=\dfrac{2x+4-x}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\dfrac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$

4) $y'=\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)'=$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x}{1-\sin 2x}=$$

$$=\frac{-2}{1-\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x-1}.$$

№ 881.

1) $\left(\log_2\left(x^3-x^2-1\right)\right)'=\dfrac{3x^3-2x}{\left(x^3-x^2+1\right)\ln 2}$;

2) $\left((\log_2 x)^3\right)'=\dfrac{3\cdot(\log_2 x)^2}{x\ln 2}=\dfrac{3\ln^2 x}{x\ln^3 2}$;

3) $\left(\sin(\log_3 x)\right)'=\dfrac{\cos(\log_3 x)}{x\ln 3}$; 4) $(\cos\ 3^x)'=-\sin 3^x\cdot 3^x\cdot\ln 3$.

№ 882.

$y'=(e^{-x})=-e^{-x}$ график г) $y=\psi(x)$;

$y'=(\ln(-x))'=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$ график а) $y=f(x)$;

$y'=(\sin 2x)=2\cos 2x$ график в) $y=\varphi(x)$;

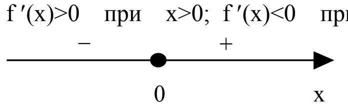
$y'=(2\cos x)'=-2\sin x$ график б) $y=g(x)$.

№ 883.

1) $f'(x)=(2^x+2^{-x})'=2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2$,

$f'(x)=0$, $\ln 2(2^x-2^{-x})=0$, $\ln 2\neq 0$, $2^x-2^{-x}=0$, $2^x=2^{-x}\Rightarrow x=-x$, $x=0$,

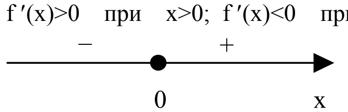
$f'(x)>0$ при $x>0$; $f'(x)<0$ при $x<0$;



2) $f'(x)=(3^{2x}-2x\ln 3)'=2\cdot 3^{2x}\ln 3-2\ln 3$

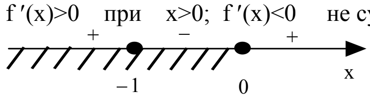
$f'(x)=0$, $\ln 3(3^{2x}-1)=0$, $2\ln 3\neq 0$, $3^{2x}-1=0\Rightarrow 3^{2x}=1\Rightarrow 3^{2x}=3^0\Rightarrow 2x=0$, $x=0$.

$f'(x)>0$ при $x>0$; $f'(x)<0$ при $x<0$;



3) $f'(x)=(x+\ln 2x)'=1+\dfrac{2}{2x}=1+\dfrac{1}{x}$, $x>0$, $f'(x)=0$, $1+\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow x=-1$,

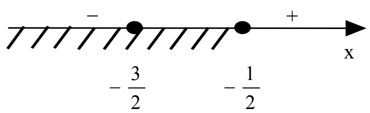
$f'(x)>0$ при $x>0$; $f'(x)<0$ не существует;



4) $f'(x)=(x+\ln(2x+1))'=1+\dfrac{2}{2x+1}$, $2x+1>0$

$f'(x)=0$, $1+\dfrac{2}{2x+1}=0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{2x+1}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

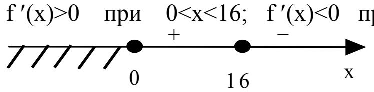
$f'(x)>0$ при $x>-\dfrac{1}{2}$; $f'(x)<0$ не существует



5) $f'(x)=(6x-x\sqrt{x})'=6-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $x>0$,

$f'(x)=0$, $6-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}=0$, $\sqrt{x}=4$, $x=16$,

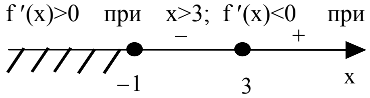
$f'(x)>0$ при $0<x<16$; $f'(x)<0$ при $x<16$;



6) $f'(x)=((x+1)\sqrt{x+1}-3x)'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}-3$, $x>-1$,

$f'(x)=0$, $3\sqrt{x+1}-6=0 \Rightarrow \sqrt{x+1}=2 \Rightarrow x+1=4$, $x=3$,

$f'(x)>0$ при $x>3$; $f'(x)<0$ при $-1<x<3$.



№ 884.

$f'(x)=3x^2+6x+a$, $f'(x)\geq 0$,

$3x^2+6x+a\geq 0$, $f'(x)\geq 0$ при всех x, если $\dfrac{D}{4}=9-3a\leq 0$, откуда $3a\geq 9$.

Ответ: $a\geq 3$.

№ 885.

$f'(x)=3ax^2-12x-1$, $f'(x)\leq 0$ при всех x, если $3ax^2-12x-1\leq 0$,

т.е. при $\begin{cases} 3a<0 \\ \dfrac{D}{4}=36+3a\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ 3a\leq -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ a\leq -12 \end{cases}$.

Ответ: $a \le -12$.

№ 886.

1) $f'(x)=2ax+\frac{2}{x^3}$, $f'(x)=0$, $x\ne 0$, $ax+\frac{1}{x^3}=0$, $ax^4=1$, $x^4=-\frac{1}{a}$,

уравнение не имеет действительных корней, если $a\ge 0$;

2) $f'(x)=a-\frac{1}{x^2}$, $f'(x)=0$, $x\ne 0$, $a-\frac{1}{x^2}=0$, $ax^2=1$, $x^2=\frac{1}{a}$,

уравнение не имеет действительных корней, если $a\le 0$;

3) $f'(x)=3ax^2+6x+6$ $f'(x)=0$, $3ax^2+6x+6=0$, $ax^2+2x+2=0$,

уравнение не имеет действительных корней, если $\frac{D}{4}=1-2a<0 \Rightarrow a>\frac{1}{2}$;

4) $f'(x)=3x^2+12x+a$ $f'(x)=0$, $3x^2+12x+a=0$,

уравнение не имеет действительных корней, если

$\frac{D}{4}=36-3a<0 \Rightarrow 3a>36$, $a>12$.

№ 887.

1) $f'(x)=7ax^6+3x^2$, $f'(x)<0$, $7ax^6+3x^2<0 \Rightarrow x^2(7ax^4+3)<0$, $x^2>0$,

$7ax^4$-$3<0$, $7ax^4<-3$, $ax^4<-\frac{3}{7}$,

если $a>0$, $x^4<\frac{3}{7a}$ — не имеет решений при $a\ge 0$,

если $a<0$, $x^4>\frac{3}{7a}$ — решения существуют.

2) $f'(x)=5x^4+3ax^2$, $f'(x)<0$, $x^2(5x^2+3a)<0$, $x^2\ge 0 \Rightarrow 5x^2+3a<0 \Rightarrow 5x^2<-3a$,

$x^2<-\frac{3a}{5}$ – неравенство не имеет действительных корней при $a\ge 0$;

3) $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x+a}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+a}{2\sqrt{x}}$, $f'(x)<0$; $x>0$, $\frac{3x+a}{2\sqrt{x}}<0$,

$2\sqrt{x}>0 \Rightarrow 3x+a<0 \Rightarrow x<\begin{cases} x<-\frac{a}{3} \\ x>0 \end{cases}$ – система не имеет решения при $a\ge 0$;

4) $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}$, $f'(x)<0$, $\frac{x^2-a}{x^2}<0$,

$x^2>0 \Rightarrow x^2-a<0 \Rightarrow x^2<a$ – неравенство не имеет решения при $a\le 0$.

№ 888.

1) Точка пересечений графиков:

$2\sqrt{x} = 2\sqrt{6-x} \Rightarrow$ x=6–x, 2x=6, $x=\frac{6}{2}=3$, $y'=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$\operatorname{tg}\alpha_1=f'(x_0)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha_1=\frac{\pi}{6}$,

$y=2\sqrt{6-x}$; $y'=-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$; $\operatorname{tg}\alpha_2=f'(x_0)=-\frac{1}{\sqrt{6-3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha_2=\frac{5\pi}{6}$,

$\beta=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$;

2) Точка пересечения графиков:

$\sqrt{2x+1}=1 \Rightarrow 2x+1=1 \Rightarrow x=0$, $y=\sqrt{2x+1}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$,

$\operatorname{tg}\alpha_1=f'(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 0+1}}=1 \Rightarrow \alpha_1=\frac{\pi}{4}$,

y=1, $y'(x)=0$, $\operatorname{tg}\alpha_2=f'(x_0)=0 \Rightarrow \alpha_2=0$, $\beta=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

№ 889.

1) $y(x_0)=2\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, $y'(x)=\cos\frac{x}{2}$, $y'(x_0)=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$, $\underline{y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}+\frac{3\pi\cdot\sqrt{2}}{4};}$

2) $y(x_0)=2^{-2}-2^{-4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$, $y'(x)=-2^{-x}\ln 2+2\cdot 2^{-2x}\ln 2$,

$y'(x_0)=\ln 2\cdot(2\cdot 2^{-4}-2^{-2})=\ln 2\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}\ln 2$,

$y=\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\ln 2(x-2)$, $y=-\frac{1}{8}\ln 2\cdot x+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\ln 2$;

3) $y(x_0)=\frac{2+2}{3-2}=4$, $y'(x)=\frac{(3-x)+(x+2)}{(3-x)^2}=\frac{5}{(3-x)^2}$, $y'(x_0)=\frac{5}{(3-2)^2}=5$,

y=4+5(x–2), $\underline{y=5x-6;}$

4) $y(x_0)=e+\ln e=e+1$, $y'(x)=1+\frac{1}{x}$, $y'(x_0)=1+e^{-1}$,

$y=e+1+(1+\frac{1}{e})(x-e)$, $y=(1+\frac{1}{e})x+1-1+e-e$, $y=\frac{(e+1)x}{e}$.

№ 890.

$y'(x)=x^2-5x$, $y_2'=6$,

$x^2-5x=6 \Rightarrow x^2-5x-6=0$,

$D=25+24=49$, $x_1=\frac{5+7}{2}=6$, $x_2=\frac{5-7}{2}=-1$;

1) $x=6$, $y(6)=\frac{216}{3}-\frac{5\cdot 36}{2}=72-90=-18$, $y'(6)=36-30=6$,

$y=-18+6(x-6)$, $\underline{y=6x-54;}$

2) $x=-1$, $y(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)-\frac{5}{2}\cdot 1=-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}=-\frac{17}{6}$,

$y'(-1)=1+5=6$, $y=-\frac{17}{6}+6(x+1)$, $y=6x+\frac{19}{6}$.

№ 891.

$y'=-\frac{4}{x^2}$, $y(1)=4$, $y'(1)=-4$, $y=4-4(x-1)$, $y=-4x+8$.

Касательная пересекается с осями в точках A (0,8) и B(2,0).

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OB\cdot OA=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2=8$ (кв. ед.).

№ 892.

$y'=-\frac{k}{x^2}$, $y(x_0)=\frac{k}{x_0}$, $y'(x_0)=-\frac{k}{x_0^2}$, $y_{кас}=\frac{k}{x_0}-\frac{k}{x_0^2}(x-x_0)$,

$y_{кас}=-\frac{k}{x_0^2}x+\frac{2k}{x_0}$;

1) Точки пересечения с осями координат: A $(0, \frac{2k}{x_0})$, $B(2x_0,0)$,

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{x_0}\cdot 2x_0=2k$ – не зависит от x_0;

2) Подставим точки $(x_0, \frac{k}{x_0})$ и $(2x_0, 0)$ в уравнение касательной

$\frac{k}{x_0}=y=-\frac{k}{x_0^2}\cdot x_0+\frac{2k}{x_0}=\frac{k}{x_0}$ – подходит, значит, принадлежит касательной

$0=y=-\frac{k}{x_0^2}\cdot 2x_0+\frac{2k}{x_0}=0$ – подходит, значит, эта точка принадлежит касательной.

№ 893.

$y(1)=1-p$ $y'(x)=3x^2-p$, $y'(1)=3-p$, $y=1-p+(3-p)(x-1)$,
$y=(3-p)x+1-p-3+p$, $y=(3-p)x-2$.
Координаты точки M должны удовлетворять этому уравнению.

$3=(3-p)=2-2 \Rightarrow 3-p=\frac{5}{2} \Rightarrow p=\frac{1}{2}$.

№ 894.

$y'=\frac{4^x \ln 4 - 2^{x+1}\ln 2}{\ln 4}=\frac{4^x \ln 4 - 2^{x+1}\cdot \frac{1}{2}\ln 4}{\ln 4}=2^{2x}-2^{\ x}$

$y'=2$, т.е. $2^{2x}-2^{\ x}=2$, $2^{2x}-2^{\ x}-2=0$ — это квадратное уравнение относительно 2^x

$D=1+8=9$, $2^{\ x}=\frac{1+3}{2}=2^1$, $x=1$; $2^x=\frac{1-3}{2}=-1<0$ – нет корней;

$y(1)=\frac{4^1-2^2}{\ln 4}=0$.

Ответ: искомая точка (1,0).

№ 895.

$y'=\ln x+1$, $x>0$, $y'=0$, $\ln x+1=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}$,

$y(e^{-1})=\frac{\ln\frac{1}{e}}{e}=\frac{-1}{e}=-\frac{1}{e}$.

Расстояние от касательной до оси абцисс: $l=0-y=0+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$.

№ 896.

Пусть x_0 – точка касания, тогда $y(x_0)=1+\ln x_0$, $y'(x)=\frac{1}{x}$, $y'(x_0)=\frac{1}{x_0}$,

$y=1+\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$, $y=\frac{x}{x_0}+1+\ln x_0-1$, $y=\frac{x}{x_0}+\ln x_0$.

Учитывая, что $y=ax-2$, получаем систему:

$$\begin{cases} a=\frac{1}{x_0} \\ -2=\ln x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=e^{-2} \\ a=e^2 \end{cases}.$$

Ответ: $a=e^2$.

№ 897.

Пусть x_1 – точка касания графика функции f(x), тогда

$f(x_1)=x_1^2-4x_1+3$, $f'(x)=2x-4$, $f'(x_1)=2x_1-4$,

$y=x_1^2-4x_1+3+(2x_1-4)(x-x_1)$,

$y=(2x_1-4)(x)+x_1^2-4x_1+3-2x_1^2+4x_1$ $y=(2x_1-4)x+(3-x_1^2)$.

Пусть x_2 – точка касания графика функции g(x)

$g(x_2)=-x_2^2-+6x_2-10$, $g'(x)=-2x+6$, $g'(x_2)=-2x_2+6$,

$y=-x_2^2+6x_2-10+(6-2x_2)(x-x_2)$

$y=(6-2x_2)x-x^2+6x_2-10-6x_2+2x_2^2$ $y=(6-2x_2)x+(x_2^2-10)$

Т.к. это одна и та же касательная, то

$$\begin{cases} x_2^2-10=3-x_1^2 \\ 2x_1-4=6-2x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2^2-10=3-x_1^2 \\ x_1=5-x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=5-x_2 \\ x_2^2-10=3-25+10x_2-x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=5-x_2 \\ x_2^2-10x_2+12=0 \end{cases}$$

$x_2^2–5x_2+6=0$, $D=25–24=1$, $x_2=\dfrac{5\pm1}{2}=3$, $x_2=2$; $x_2=3$,

$y=–1$ и $y=–6+2x$ – две общие касательные.

№ 898.

Пусть x_1 – точка касания, тогда $y(x_1)=x_1^3–6$, $y'(x)=3x^2$, $y'(x_1)=3x_1^2$,
$y=x_1^3–6+3x_1^2(x–x_1)$, $y=3x_1^2\cdot x+(–2x_1^3–6)$.

Точки пересечения с осями координат: $A(0, –2x_1^3–6)$, $B\left(\dfrac{2}{3}\dfrac{\left(x_1^3+3\right)}{x_1^2}, 0\right)$,

$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot(–2x_1^3–6)\cdot\dfrac{2}{3}\dfrac{\left(x_1^3+3\right)}{x_1^2}=-\dfrac{2}{3x_1^2}(x_1^3+3)^2$.

Но те же рассуждения можно провести для x_2 – второй точки касания.

$y=3x_2^2\cdot x+(–2x_2^3–6)$, $S_{COD}=-\dfrac{2}{3x_2^2}(x_2^3+3)^2$.

Эти касательные параллельны, так что коэффициенты при x должны быть равны, т.е. $3x_1^2=3x_2^2$, $x_1^2=x_2^2$

либо $x_1=x_2$ – тогда точки совпадают, но у нас две разные прямые
либо $x_1=–x_2$
$4S_{AOB}=S_{COD}$

$$\begin{cases} \dfrac{-4\cdot2}{3x_1^2}(x_1^3+3)=-\dfrac{2}{3x_2^2}(x_2^3+3)^2 \\ x_1=-x_2 \end{cases}$$

$4(x_1^3+3)^2=(–x_1^3+3)^2$, $\quad 4x_1^6+24x_1^3+36=9–6x_1^3+x_1^6$
$3x_1^6+30x_1^3+27=0$, $\quad x_1^6+10x_1^3+9=0$

$\dfrac{D}{4}=25–9=16$, $x_1^3=–5+4=–1$, $x_1=–1$, $x_1^3=–5–4=–9$, $x_1=\sqrt[3]{-9}$,

$S_{AOB}=\left|-\dfrac{2}{3\cdot1}\left(-1+3\right)^2\right|=\left|-\dfrac{8}{3}\right|=\dfrac{8}{3}$,

$S_{AOB}=\left|-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{9^2}}\cdot\left(-9+3\right)^2\right|=\dfrac{2\cdot36}{9\sqrt[3]{3}}=\dfrac{8}{\sqrt[3]{3}}$.

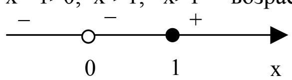
IX глава. Применение производной и исследованию функций

§ 49 Возрастание и убывание функции

№ 899.

$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$, $x\neq0$, $f'(x)>0$, $2(x-\frac{1}{x^2})>0$, $x^2>0$,

$x^3-1>0$, $x^3>1$, $x>1$ – возрастает; $f'(x)<0$, $x<0$, $0<x<1$ – убывает;



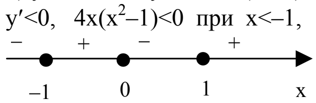
№ 900.

1) $y'=2x-1$, $y'>0$, $2x-1>0$, $>\frac{1}{2}$ – возрастает; $y'<0$, $2x-1<0$, $x<\frac{1}{2}$ – убывает;

2) $y'=10x-3$, $y'>0$, $10x-3>0$, $x>\frac{3}{10}$ – возрастает;

$y'<0$, $10x-3<0$, $x<\frac{3}{10}$ – убывает;

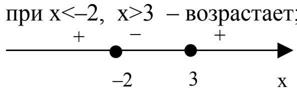
3) $y'=2x+2$, $y'>0$, $2x+2>0$, $x>-1$ – возрастает;
$y'<0$, $2x+2<0$, $x<-1$ – убывает;
4) $y'=2x+12$, $y'>0$, $2x+12>0$, $x>-6$ – возрастает;
$y'<0$, $2x+12<0$, $x<-6$ – убывает;
5) $y'=3x^2-3$, $y'>0$, $3x^2-3>0$, $x^2>1$, $x<-1$, $x>1$ – возрастает;
$y'<0$, $3x^2-3<0$, $x^2<1$, $-1<x<1$ – убывает;
6) $y'=4x^3-4x$, $y'>0$, $4x(x^2-1)>0$ при $-1<x<0$, $x>1$ – возрастает;
$y'<0$, $4x(x^2-1)<0$ при $x<-1$, $0<x<1$ – убывает;



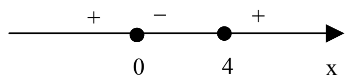
7) $y'=6x^2-6x-36$, $y'>0$, $x^2-x-6>0$.

Решим уравнение $x^2-x-6=0$: $D=1+24=25$, $x_1=\frac{1+5}{2}=3$, $x_2=\frac{1-5}{2}=-2$.

при $x<-2$, $x>3$ – возрастает; $y'<0$ при $-2<x<3$ – убывает;

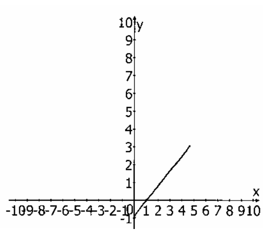


8) $y'=3x^2-12x$, $y'>0$ $3x(x-4)>0$ при $x<0$, $x>4$ –возрастает;
$y'<0$ при $0<x<4$ – убывает;

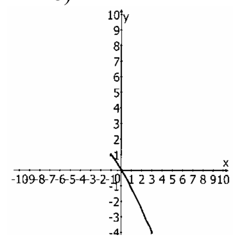

+
−
+
0
4
x

№ 901.

а)



б)



№ 902.

1) $y'=-\frac{1}{(x+2)^2}$ $x\neq-2$, $y'>0$: $-\frac{1}{(x+2)^2}>0$ – не выполняется ни при каких $x\in R$, т.к. $(x+2)^2>0$,

$y'<0$: $-\frac{1}{(x+2)^2}<0$ выполняется при всех $x\in R$, исключая $x=-2$

функция убывает при $x<-2$, $x>-2$

2) $y'=-\frac{2}{x^2}$, $x\neq0$,

$y'>0$, $-\frac{2}{x^2}>0$ не выполняется ни при каких $x\in R$, т.к. $x^2>0$,

$y'<0$, $-\frac{2}{x^2}<0$ выполняется при всех $x\in R$, исключая $x=0$,

функция убывает при $x<0$, $x>0$

3) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$, $x>3$, $y'>0$: $-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}>0$ не выполняется ни при каких $x\in R$, т.к. $\sqrt{x-3}>0$;

$y'<0$: $-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}<0$ выполняется при всех $x>3$,

функция убывает при $x>3$;

4) $y'=\frac{3}{2\sqrt{x-5}}$, $x>5$, $y'>0$: $\frac{3}{2\sqrt{x-5}}>0$ выполняется при всех $x>5$,

$y'<0$: $\frac{3}{2\sqrt{x-5}}<0$ не выполняется ни при каких $x\in R$, т.к. $\sqrt{x-5}>0$

функция возрастает при $x>5$.

№ 903.

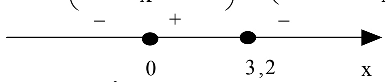
1) $y'=\frac{3x^2(x^2+3)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{x^4+9x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$,

$y'>0$: $\dfrac{x^4+9x^2}{\left(x^2+3\right)^2}>0$ верно при всех $x\in R$;

$y'<0$: $\dfrac{x^4+9x^2}{\left(x^2+3\right)^2}<0$ не верно ни при каких $x\in R$.

Функция возрастает при всех $x\in R$.

2) $y'=\left(\dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}\right)'=\left(-1+\dfrac{10}{x}-\dfrac{16}{x^2}\right)'=-\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{32}{x^3}=\dfrac{32-10x}{x^3}$;



$y'>0$ при $x^3(32-10x)>0$, $0<x<3{,}2$ – возрастает; $y'>0$, $x<0$, $x>3{,}2$ – убывает.

3) $y'=e^{3x}+3e^{3x}(x-1)=3e^{3x}\cdot x-2e^{3x}(3x-2)$,

$y'>0$: $e^{3x}(3x-2)>0 \Rightarrow e^{3x}>0$ и $3x-2>0 \Rightarrow$ при $x>\dfrac{2}{3}$ функция возрастает;

$y'<0$: $e^{3x}(3x-2)<0 \Rightarrow e^{3x}>0$ и $3x-2<0 \Rightarrow$ при $x<\dfrac{2}{3}$ функция убывает;

4) $y'=e^{-3x}-3xe^{-3x}=e^{-3x}\cdot(1-3x)$

$y'>0$: $e^{-3x}(1-3x)>0 \Rightarrow e^{-3x}>0$ и $1-3x>0 \Rightarrow$ при $x<\dfrac{1}{3}$ функция возрастает

$y'<0$: $e^{-3x}(1+3x)<0 \Rightarrow e^{-3x}>0$ и $(1-3x)<0 \Rightarrow$ при $x>\dfrac{1}{3}$ функция убывает.

№ 904.

1) $y'=(2x+3)\,e^{x^2+3x}$;

$y'>0$: $2x+3)\,e^{x^2+3x}>0 \Rightarrow e^{x^2+3x}>0$ и $2x+3>0 \Rightarrow$ при $x>-\dfrac{3}{2}$ – функция возрастает;

$y'<0$: $(2x+3)\,e^{x^2+3x}<0 \Rightarrow e^{x^2+3x}>0$ и $2x+3<0 \Rightarrow$ при $x<-\dfrac{3}{2}$ – функция убывает;

2) $y'=(2x-1)\,3^{x^2-x}\ln 3$;

$y'>0$: $(2x-1)\,3^{x^2-x}\cdot\ln 3>0 \Rightarrow 3^{x^2-x}\ln 3>0$ и $2x-1>0 \Rightarrow$ при $x>\dfrac{1}{2}$ – функция возрастает;

$y'<0$: $(2x-1)\,3^{x^2-x}\cdot\ln 3<0 \Rightarrow 3^{x^2-x}\ln 3>0$ и $2x-1<0 \Rightarrow$ при $x>\dfrac{1}{2}$ – функция убывает.

№ 905.

1) $y'=1-2\cos 2x$, $y'>0$: $1-2\cos 2x>0 \Rightarrow \cos 2x<\dfrac{1}{2}$,

$\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n \Rightarrow \frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$ – функция возрастает;

$y'<0$: $1-2\cos 2x<0 \Rightarrow \cos 2x>\frac{1}{2}$,

$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n \Rightarrow -\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$ – функция убывает;

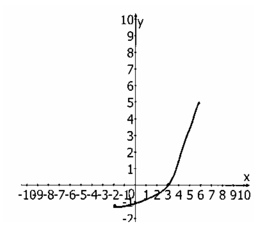
2) $y'=3-6\sin 3x$, $y'>0$: $3-6\sin 3x>0 \Rightarrow \sin 3x<\frac{1}{2}$;

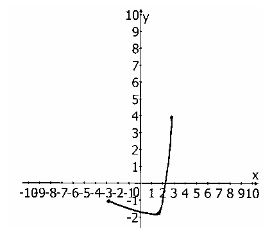
$\frac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<\frac{13\pi}{6}+2\pi n \Rightarrow \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{13\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$ – функция возрастает;

$y'<0$: $3-6\sin 3x<0 \Rightarrow \sin 3x>\frac{1}{2}$;

$\frac{\pi}{6}+2\pi n<3x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n \Rightarrow \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$ – функция убывает

№ 906.





№ 907.

1) $y'= 3x^2-a$ возрастает, значит $y'>0$ при всех $x \in R$

$y'>0$, $3x^2-a>0$, $x^2>\frac{a}{3}$, $a<0$;

2) $y'=a-\cos x$, $y'>0$, $a-\cos x>0$, $\cos x <a$, $a>1$.

№ 908.

$y'=3x^2-4x+a$ функция возрастает на R, если $y'>0$ при всех x
$3x^2-4x+a>0$ неравенство выполняется при любых x, если

$\frac{D}{4}=4-3a<0$, $a>\frac{4}{3}$. (Опечатка в ответе задачника).

№ 909.

$y'=3ax^2+6x-2$ функция убывает на R, если $y'<0$ при всех x
$3ax^2+6x-2<0$ неравенство выполняется при любых x, если

$\begin{cases} 3a<0 \\ \frac{D}{4}=9+6a<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ a<-\frac{3}{2} \end{cases}$ отсюда $a<-\frac{3}{2}$.

§ 50 Экстремумы функции

№ 910.

$x_{\max_1} = -5,\quad x_{\max_2} = 5;\qquad x_{\min_1} = -2,\quad x_{\min_2} = 3.$

№ 911.

$x_1=-7,\quad x_2=-4,\quad x_3=-3,\quad x_4=-2,\quad x_5=-1,\quad x_6=1,\qquad x_7=3,\qquad x_8=4.$

№ 912.

1) $y'=\left(\frac{x}{2}+\frac{8}{x}\right)'=\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}$, $y'=\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{8}{x^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x_{1,2}=\pm4;$

2) $y'=6x^2-30x+36,\ y'=0 \Rightarrow 6(x^2-5x+6)=0,$

$D=25-24=1,\qquad x_1=\frac{5+1}{2}=3,\qquad x_2=\frac{5-1}{2}=2;$

3) $y'=2e^{2x}-2e^x,\ y'=0,\ 2e^x(e^x-1)=0 \Rightarrow 2e^x>0$ и $e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow e^x=e^0 \Rightarrow x=0.$

4) $y'=\cos x+\sin x,\ y'=0 \Rightarrow \cos x+\sin x=0,$

$\sqrt{2}\,(\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\frac{\sqrt{2}}{2})=0 \Rightarrow \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=0,$

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\quad x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

№ 913.

1) $y'=\left(\frac{2}{x}+x\right)'=-\frac{2}{x^2}+1,\ \frac{2}{x^2}=1,\ x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2};$

2) $y'=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2x}\right)'=\frac{1}{2}-\frac{3}{2x^2}$, $y'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{2x^2} \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3};$

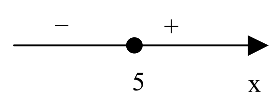
3) $y'=2x\cdot e^{x^2-1}$, $y'=0 \Rightarrow 2x\cdot e^{x^2-1}=0 \Rightarrow e^{x^2-1}>0$ и $2x=0 \Rightarrow x=0;$

4) $y'=2^{x^2+x}\cdot\ln 2\cdot(2x+1),$

$y'=0 \Rightarrow 2^{x^2+x}\cdot\ln 2\cdot(2x+1)=0 \Rightarrow 2^{x^2+x}\cdot\ln 2>0$ и $2x+1=0,\ x=-\frac{1}{2}.$

№ 914.

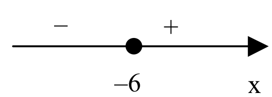
1) $y'=4x-20\qquad y'=0$ при $x=5$ – стационарная точка. При переходе через $x=5$ y' меняет знак с ‘–’ на ‘+‘.



$x=5$ – точка минимума

2) $y'=6x+36\qquad y'=0$ при $x=-6$

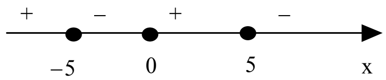
При переходе через $x=-6$ y' меняет знак с ‘–’ на ‘+‘.



Следовательно $x=-6$ – точка минимума

3) $y'=\frac{1}{5}-\frac{5}{x^2}$, $y'=0$, $\frac{1}{5}=\frac{5}{x^2}$, $x\neq0$, $x^2=25$, $x=\pm5$.

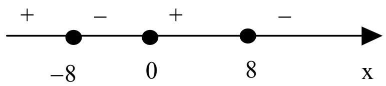
При переходе через точку $x=-5$ y' меняет знак с '+' на' ' , значит $x=-5$ – точка максимума, а через $x=5$ - с'–' на '+', значит $x=5$ - точка минимума.



4) $y'=-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{16}$, $y'=0$, $\frac{1}{16}=\frac{4}{x^2}$, $x\neq0$, $x^2=64$, $x=\pm8$.

При переходе через точку $x=-8$

y' меняет знак с '+' на '–' , значит $x=-8$ – точка максимума, а через $x=8$ с'–' на '+', значит $x=8$ - точка минимума.

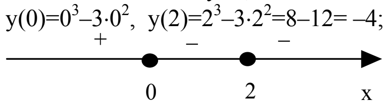


№ 915.

1) $y'=3x^2-6x$, $y'=0$, $3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$,

$x=0$ – точка максимума; $x=2$ – точка минимума;

$y(0)=0^3-3\cdot0^2$, $y(2)=2^3-3\cdot2^2=8-12=-4$;



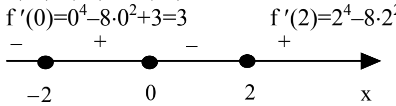
2) $y'=4x^3-16x$, $y'=0$, $4x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0$, $x=2$, $x=-2$,

$x=-2$ – точка минимума;

$x=0$ – точка максимума; $x=2$ – точка минимума;

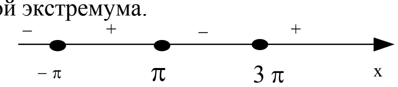
$f(-2)=(-2)^4-8\cdot(-2)^2+3=16-32+3=-13$,

$f'(0)=0^4-8\cdot0^2+3=3$ $\qquad f'(2)=2^4-8\cdot2^2+3=16-32+3=-13$;

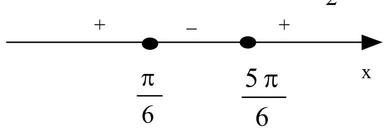


3) $y'=1+\cos x$, $y'=0$, $\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

При переходе через $x=\pi$ y' не меняет знак, значит, $x=\pi$ не является точкой экстремума.



4) $y'=-2\sin x+1$, $y'=0$, $\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$;



$x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$ – точка максимума;

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ – точка минимума;

$y(\frac{\pi}{6}+2\pi n)=2\cos\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+2\pi n=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}+2\pi n,$

$y(\frac{5\pi}{6}+2\pi n)=2\cos\ (\frac{5\pi}{6}+2\pi n)+\frac{5\pi}{6}+2\pi n=-\sqrt{3}+\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

№ 916.

1) $y'=2,\ 2\neq 0 \Rightarrow$ нет точек экстремума;

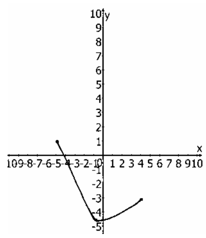
2) $y'=-5,\ -5\neq 0 \Rightarrow$ нет точек экстремума;

3) $y'=3x^2+2,\ y'=0 \Rightarrow 3x^2+2=0\quad x^2=-\frac{2}{3}$ – нет точек экстремума;

4) $y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2},\ y'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2}\quad x^2=-2$ – не существует точек экстремума. (Опечатка в ответе задачника).

№ 917.

1)



№ 918.

1) $y'=\frac{1\cdot 6x}{2\sqrt{2-3x^2}},\ 2-3x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\ y'=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0;$

2) $y'=\frac{1(3x^2-3)}{2\sqrt{x^3-3x}},\ x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0,\quad x=\pm\sqrt{3},$

$y'=0 \Rightarrow 3x^3-3x=0 \Rightarrow 3(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1;$

3) $y'=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x<1\end{cases}$, $x=1$ – точка минимума;

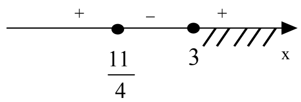
4) $y'=0,$

$y'=\begin{cases}2x-1 & x>0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}\quad y'=0 \Rightarrow \quad \begin{cases}2x=1\\ 2x=-1\end{cases}\quad \begin{matrix}x_1=\frac{1}{2}\\ x_2=-\frac{1}{2}\end{matrix},$

$x=0$ –также является критической точкой.

№ 919.

1) $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$, $y'=0$, $x<3$, $\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=1 \Rightarrow \sqrt{3-x}=\frac{1}{2} \Rightarrow 3-x=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{11}{4}$,

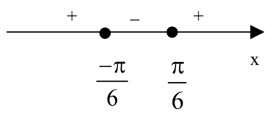


$x=\frac{11}{4}$ – точка максимума;

2) $y'=\frac{6\cdot 1}{7\sqrt{x-1}}$, $x>1$

$y'=0$ – нет решений

3) $y'=1-2\cos 2x$, $y'=0$, $\cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$;



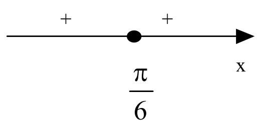
$x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$;

$x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ – точки максимума;

$x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$ – точки минимума;

4) $y'=-3\sin 3x-3$,

$y'=0 \Rightarrow -3(\sin 3x+1)=0 \Rightarrow \sin 3x=-1 \Rightarrow 3x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$



$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$;

$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$ – стационарная точка.

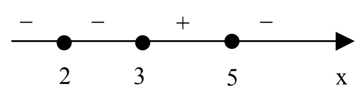
№ 920.

1) $y'=\frac{-3(2-x)^2(3-x)^2+2(3-x)(2-x)^3}{(3-x)^4}=$

$=\frac{(2-x)^2(3-x)(-9+3x+4-2x)}{(3-x)^4}=\frac{(2-x)^2(x-5)}{(3-x)^3}$

$y'=0$, $\frac{(2-x)^2(x-5)}{(3-x)^3}=0 \Rightarrow x=2$, $x=5$

$x=2$ – стационарная точка;
$x=5$ – точка максимума;



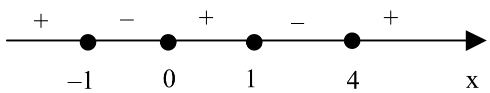
$y(5)=\frac{(2-5)^3}{(3-5)}=\frac{-27}{4}=-\frac{27}{4}$;

2) $y' = \dfrac{(3x^2+4x)(x-1)^2 - (x^3+2x^2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$ $\qquad x \neq 1$

$= \dfrac{(x-1)(3x^3+x^2-4x-2x^3-4x^2)}{(x-1)^4} = \dfrac{x^3-3x^2-4x}{(x-1)^3}$,

$y'=0 \quad x(x^2-3x-4)=0$, $x=-1$ – точка минимума; $x=0$ – точка максимума; $x=4$ – точка минимума;

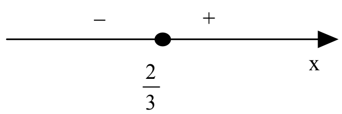
$y(-1) = \dfrac{-1+2}{(-2)^2} = \dfrac{1}{4}$, $y(0) = \dfrac{0+0}{(-1)^2} = 0$, $y(4) = \dfrac{64+32}{3^2} = \dfrac{96}{9} = \dfrac{32}{3}$;



3) $y' = e^{3x} + 3(x-1)e^{3x} = e^{3x}(1+3x-3) = e^{3x}(3x-2)$,

$y'=0$, $e^{3x}(3x-2)=0 \Rightarrow e^{3x}>0$ и $3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$,

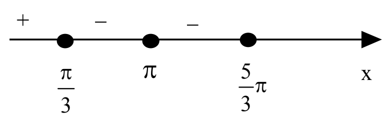
$x=\dfrac{2}{3}$ – точка минимума, $y(\dfrac{2}{3}) = -\dfrac{1}{3}\cdot e^2 = -\dfrac{e^2}{3}$;



4) $y' = \cos x + \cos 2x$, $y'=0$, $\cos x + \cos 2x = 0$,
$\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$,

$D=1+8=9$, $\qquad \cos x = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$\cos x = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$,



$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$ – точка максимума,

x

$x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$ – точка минимума,

$y(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n) = \sin(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n) + \dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi n) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$,

$y(\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n) = \sin(\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n) + \dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{10\pi}{3} + 4\pi n) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}\, e^{\sqrt{3-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}\, e^{\sqrt{3-x^2}}$;

$y' = 0$ при $-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} e^{\sqrt{3-x^2}} = 0$, поскольку

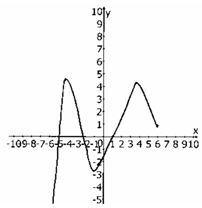
$e^{\sqrt{3-x^2}} > 0$, ищем $-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} = 0$, откуда x=0;

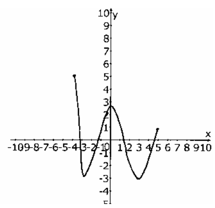
При переходе через точку 0 производная y' меняет свой знак на отрицательный, значит, x=0 – точка минимума, $y(0) = e^{\sqrt{3-0}} = e^{\sqrt{3}}$;

6). $y' = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}$; $y' = 0$ при $\frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}} = 0$;

$e^x - 1 = 0; e^x = 1; e^x = e^0; x = 0$ при переходе через точку 0 производная y' меняет свой знак с отрицательного на положительный, значит, x=0 – точка минимума, $y(0) = \sqrt{e^0 - 0} = 1$.

№ 921

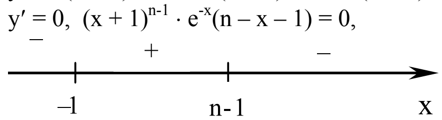




№ 922

$y' = n(x + 1)^{n-1} \cdot e^{-x} – (x + 1)^n \cdot e^{-x} = (x + 1)^{n-1} \cdot e^{-x}(n – x – 1)$,

$y' = 0$, $(x + 1)^{n-1} \cdot e^{-x}(n – x – 1) = 0$,



n = 2k,

x = -1 – точка минимума, x = n – 1 – точка максимума

n = 2k + 1, (x + 1)n-1 = (x + 1)2k+1-1 = (x + 1)2k ≥ 0,

x = n – 1 – точка максимума.

§ 51 Применение производной к построению графиков функции

№ 923

1) область определения: -7 ≤ x ≤ 7,

множество значений: -2 ≤ f(x) ≤ 2;

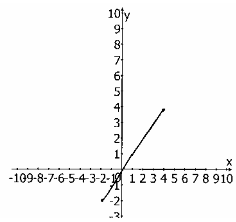
2) y(x) = 0 при $x_1 = -6$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 6$;

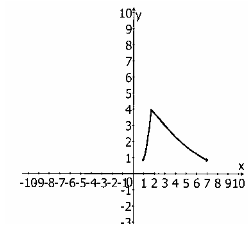
3) функция возрастает при -5 < x < -2, 2 < x < 5,

функция убывает при -7 < x < -5, -2 < x < 2, 5 < x < 7;

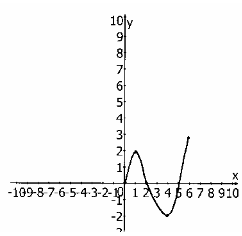
4) $f(x) > 0$ при $-7 < x < -6$, $-4 < x < 0$, $4 < x < 6$,
$f(x) < 0$ при $-6 < x < -4$, $0 < x < 4$, $6 < x < 7$;
5) $x_{max} = -7$, $x_{max} = -2$, $x_{max} = 5$, $x_{min} = -5$, $x_{min} = 2$.

№ 924

1) 

2) 

№ 925



№ 926

1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;

1.область определения – множество R;   2. $y' = 3x^2 - 6x$;

3. $y' = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

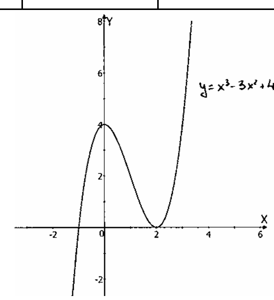
4. $y' > 0$, $x < 0$, $x > 2$ – возрастает; $y' < 0$, $0 < x < 2$ – убывает;

5. $x = 0$ – точка max, т.к. при переходе через нее меняется знак y’ с «+» на «-».

$y(0) = 4$, $x = 2$ – точка min, т.к. при переходе через нее меняется знак y’ с «-» на «+».

$y(2) = 8 - 12 + 4 = 0$.

x	x < 0	0	0 < x < 2	2	x < 2
F’(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	4	↘	0	↗



2) $y = 2 + 3x - x^3$

1. область определения – множество R;   2. $y' = 3 - 3x^2$

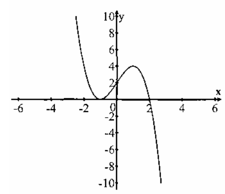
3. $y' = 0$ $3(1 - x^2)=0$; $x^2 - 1=0$; $x = 1$, $x = -1$

4. $y' > 0$; $x^2 < 1$; $-1 < x < 1$, $y' > 0$; $x^2 > 1$; $x < -1$; $x > 1$;

5. $x = -1$ – точка минимума $f(-1) = 2 - 3 + 1 = 0$,

$x = 1$ – точка максимума $f(1) = 2 + 3 - 1 = 4$;

x	x < -1	x = -1	-1 < x < 1	1	x > 1
$F'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	4	↗	0	↘



3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$;

1. область определения – R; 2. $y' = -3x^2 + 8x - 4$;

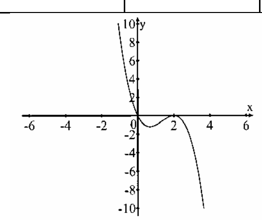
3. $y' = 0$; $3x^2 - 8x + 4 = 0$ $D = 16 - 12 = 4$;

$x_1 = \frac{4+2}{3} = 2$, $x_2 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$;

4. $y' > 0$; $3x^2 - 8x + 4 < 0$, $\frac{2}{3} < x < 2$,

$y' < 0$; $3x^2 - 8x + 4 > 0$, $\frac{2}{3} < x < 2$ $x > 2$.

x	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$	2	x > 2
$F'(x)$	–	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	0	↘



5. $x=\frac{2}{3}$ - точка min $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}=-\frac{32}{27}$,

x = 2 – точка max $f(2) = -8 + 16 - 8 = 0$;

4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

1. область определения – R; 2. $y' = 3x^2 + 12x + 9$;

3. $y'=0$; $x^2+4x+3=0$, $D=4-3=1$, $x_1 = -2 - 1 = -3$, $x_2 = -2 + 1 = -1$;

4. $y'>0$; $x^2+4x+3>0$, $x>-3$, $x>-1$, $y' < 0$; $x^2 + 4x + 3 < 0$, $-3 < x < -1$;

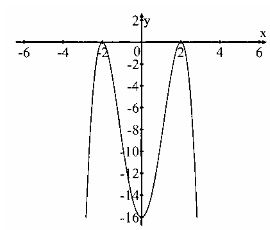
x	x < -3	-3	-3 < x < -1	-1	x > -1
$F'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

5. x = -3 – точка max; $f(-3) = -27 + 54 - 27 = 0$,

x = -1 – точка min; $f(-1) = -1 + 6 - 9 = -4$.

№ 927

1) $y = x^4 + 8x^2 - 16$



1. область определения – R;

2. $y' = -4x^3 + 16x$;

3. $y' = 0$; $-4x(x^2 - 4) = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$;

4. $y' > 0$; $x(x - 2)(x + 2) < 0$,

– + – +

-2 0 2

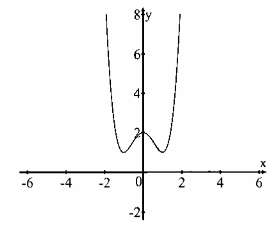
$x < -2$, $0 < x < 2$, $y' < 0$ $x(x - 2)(x + 2) > 0$ $-2 < x < 0$ и $x > 2$.

X	x < -2	-2	-2<x<0	0	0<x<2	2	x>2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	0	↘	-16	↗	0	↘

5. x = -2 – точка max; $f(-2) = -16 + 32 - 16 = 0$,

x = 0 – точка min, $f(0) = -16$; x = 2 – точка max, $f(2) = -16 + 32 - 16 = 0$;

2) $y = x^4 - 2x^2 + 2$



1. область определения – R; 2. $y' = 4x^2 - 4x$;
3. $y' = 0$; $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 1$; 4. $y' > 0$; $x(x^2 - 1) > 0$

– + – +

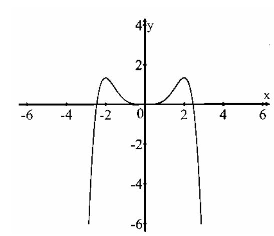
–1 0 1

$-1 < x < 0$, $x > 1$, $y' < 0$; $x(x2 - 1) < 0$ $x < -1$ $0 < x < 1$

X	x < -1	-1	-1<x<0	0	0<x<1	1	x>1
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘	1	↗

x = -1 – точка min, $f(-1) = 1 - 2 + 2 = 1$; x = 0 – точка max,
$f(0) = 0 + 0 + 2 = 2$; x = 1 – точка min, $f(1) = 1 - 2 + 2 = 1$

3) $y = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{24} \cdot x^6$



1. Область определения – R; 2. $y' = x^3 - \frac{1}{4}x^5$;

3. $y' = 0$; $x^3\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 2$;

4. $y' > 0$; $\frac{1}{4}x^3\left(4 - x^2\right) > 0$,

+ – + –

-2 0 2

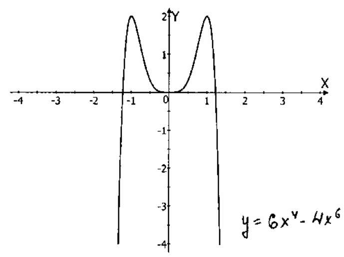
$x < -2,\ 0 < x < 2,\ y' < 0;\quad \frac{1}{4}x^3\left(4-x^2\right) < 0,\quad -2 < x < 0,\ x > 2;$

X	x < -2	-2	-2<x<0	0	0<x<2	2	x>2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘

5. x = -2 – точка max; $f(-2) = \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{24}\cdot 64 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$,

x = 0 - точка min; $f(0) = 0 + 0 = 0$, x = 2 – точка max; $f(2) = \frac{4}{3}$;

4) $y = 6x^4 - 4x^6$



1. Область определения – R

2. $y(-x) = 6(-x)^4 - 4(-x)^6 = 6x^4 - 4x^6 = y(x)$ – четная, график симметричен относительно 0у. Исследуем на $(0; +\infty)$

3. $y' = 24x^3 - 24x^5$

4. y' = 0, $24x^3(1 - x^2) = 0$, x = 0, x = ±1

5.

x	0	(0, 1)	1	(1; +∞)
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	0	↗	2	↘

x = 0 – точка min $f(0) = 0$

x = ±1 – точка max $f(1) = f(-1) = 6 - 4 = 2$

№ 928

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

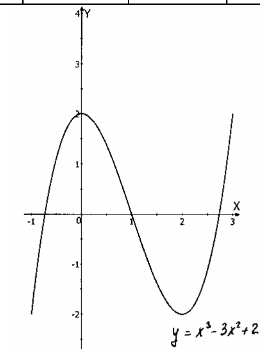
1. Область определения [-1; 3] – по условию

2. $y' = 3x^2 - 6x$

3. y' = 0; $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, x = 0, x = 2

4.

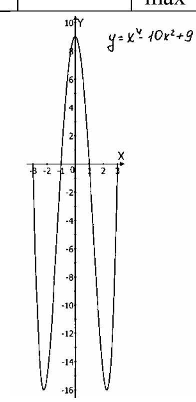
X	-1	(-1; 0)	0	(0; 2)	2	(2; 3)	3
y'	+	+	0	-	0	+	+
y	-2	↗	2	↘	-2	↗	2
			max		min		



2) $y = x4 - 10x + 9$ на [-3, 3];

1. Область определения [-3, 3];
2. $y' = 4x^3 - 20x$;
3. $y' = 4x(x^2 - 5) = 0$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{5}$;

x	-3	$(-3; -\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}; 0)$	0	$(0; \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}; 3)$	3
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	0	↘	-16	↗	9	↘	-16	↗	0
			min		max		min		



№ 929

$x_{max} = -3, 4$; $x_{min} = -6, 1, 6$.

№ 930

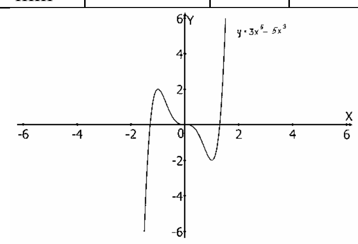
1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$

1. Область определения – R

2. $y' = 15x^2 - 15x^4$

$y' = 0$; $15x^2(1 - x^2) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 1$

X	x<-1	-1	-1<x<0	0	0<x<1	1	x>1
y’	-	0	+	0	+	0	-
y	↘	0	↗	2	↗	4	↘
		min				max	



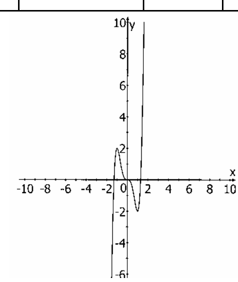
2) $y = 3x^5 - 5x^3$

1. Область определения – IR

2. $y' = 15x^4 - 15x^2$

$y' = 0$; $15x^2(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 1$

X	x<-1	-1	-1<x<0	0	0<x<1	1	x>1
y’	+	0	-	0	-	0	+
y	↗	2	↘	0	↘	-2	↗
		max				min	

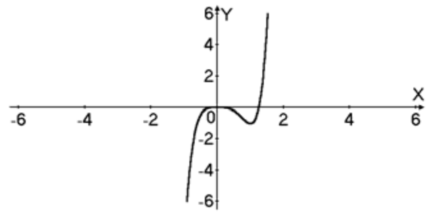


3) $y = 4x^5 - 5x^4$

1. Область определения – IR; 2. $y' = 20x^4 - 20x^3$

$y' = 0$; $20x^3(x – 1) = 0$, $x = 0$, $x = 1$

x	x < 0	0	0 < x < 8	1	x > 1
y’	+	0	-	0	+
y	↗	0	↘	-1	↗
		max		min	



4) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$;

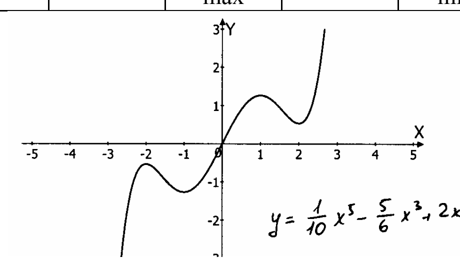
1. Область определения – R;

2. $y' = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 2$, $y' = 0$; $x^4 – 5x^2 + 4 = 0$, $D = 25 – 16 = 9$,

$x^2 = \frac{5+3}{2} = 4$, $x = \pm 2$, $x^2 = \frac{5-3}{2} = 1$, $x = \pm 1$,

$y(-x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x = -y(x)$- нечетная функция, симметричная относительно 0. Продолжим рассуждение на (0; +∞)

x	0	(0;1)	1	(1;2)	2	(2;+∞)
y’	0	+	0	-	0	+
y	0	↗	$\frac{19}{15}$	↘	$\frac{8}{15}$	↗
			max		min	



№ 931

1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$;

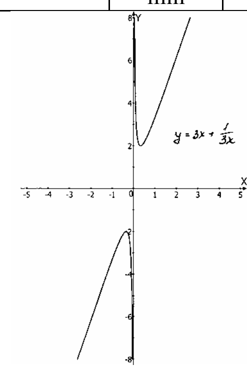
1. Область определения – R при x ≠ 0

2. $y(-x) = -3x - \frac{1}{3x} = -y(x)$ - функция нечетная, график симметричен относительно 0. Рассмотрим его на (0; +∞)

3. $y' = 3 - \frac{1}{3x^2}$;

4. y′ = 0; $9x^2 - 1 = 0$, $x = \pm\frac{1}{3}$;

x	$\left(0;\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
y’	-	0	+
y	↘	2	↗
		min	



2) $y = \frac{4}{x} - x$;

1. Область определения x ≠ 0;

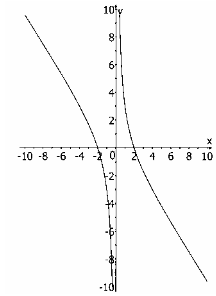
2. $y(-x) = -\frac{4}{x} + x = -y(x)$ - функция нечетна и ее график симметричен относительно 0. Рассмотрим его на (0; +∞);

3. $y' = -\frac{4}{x^2} - 1$; 4. y′ = 0 $4 + x^2 = 0$ – не существует стационарных точек;

5. пересечение с 0x: $0 = \frac{4}{x} - x$; $x^2 = 4$,   x = ±2;

6. если x → ∞, то y → -x, если x → 0, то y → ∞;

7. y > 0, $\frac{4}{x} - x > 0$ $\frac{4 - x^2}{x} > 0$ при 0 < x < 2;



3) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$;

1. Область определения x > 0; 2. $y' = 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$;

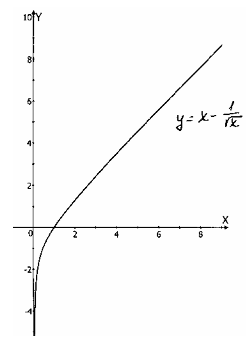
3. y′ = 0; $1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$ $2x\sqrt{x} + 1 = 0$,

$\sqrt{x^3} = -\frac{1}{2}$ — нет стационарных точек;

4. y = 0 при $x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\sqrt{x^3} = 1$, x = 1;

5. если x → 0, то y → -∞, если x → ∞, то y → x;

6. y > 0; $x - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ $\sqrt{x^3} > 1$, x > 1;



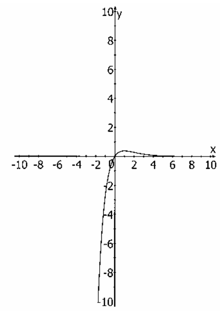
№ 932

1) y = xe^{-x}

1. Область определения R; 2. y′ = e^{-x} – xe^{-x} = e^{-x}(1 – x);

3. $y' = 0$; $e^{-x}(1 - x) = 0$, $e^{-x} > 0$, $x = 1$, $y' > 0$; $1 - x > 0$, $x < 1$;

X	x < 1	1	x > 1
y’	+	0	-
Y	↗	$\frac{1}{e}$	↘

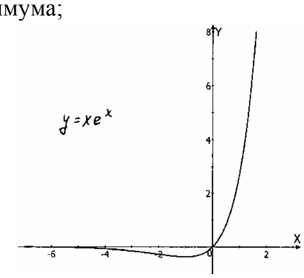


2) $y = xe^x$

1. Область определения R;
2. $y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$;
3. $y' = 0$; $e^x(1 + x) = 0$, $x = -1$;

X	x < -1	-1	x > -1
y’	-	0	+
Y	↘	$-\frac{1}{e}$	↗
		min	

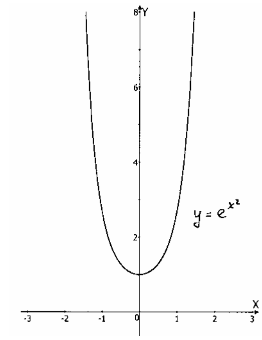
$x = -1$ – точка минимума;



3) $y = e^{x^2}$;

1. Область определения R:
2. $y' = 2xe^{x^2}$; 3. $y' = 0$; $2xe^{x^2} = 0$, $x = 0$;

X	x < 0	0	x > 0
y’	-	0	+
Y	↘	1	↗



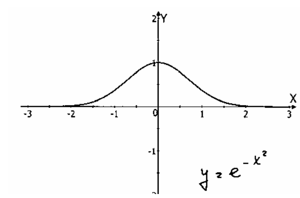
4) $y = e^{-x^2}$

1. Область определения – R:

2. $y' = -2x \cdot e^{x^2}$

3. y′ = 0; $-2x \cdot e^{x^2} = 0$, x = 0

X	x < 0	0	x > 0
y’	+	0	-
Y	↗	1	↘
		max	



№ 933

1) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

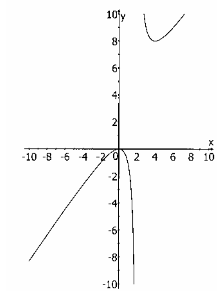
1. Область определения: x ≠ 2

2. $y' = \dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

3. y′ = 0 при $\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$, x = 0, x = 4

1)

X	(-∞;0)	0	(0;2)	2	(2;4)	4	(4;+∞)
y’	+	0	-		-	0	+
Y	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	8	$\nearrow$
		max				min	



2) $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}=-x+3-\dfrac{1}{x}$;

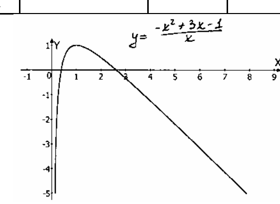
1. Область определения x ≠ 0;

2. $y'=-1+\dfrac{1}{x}$;

3. y′= 0; $\dfrac{-x^2+1}{x^2}=0$, x = ±1, y = 0; $x^2-3x+1=0$, D = 9 – 4 = 5,

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

X	(-∞;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;1)	1	(1;+∞)
y’	-	0	+		+	0	-
Y	$\searrow$	5	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$
		min				max	



3) $y=\dfrac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{4+x-2x^2}{x^2-4x+4}$; 1. Область определения x = 2;

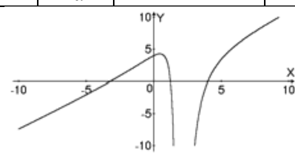
2. $y'=\dfrac{(1-4x)(x^2-4x+4)-2(x-2)(4+x-2x^2)}{(x-2)^4}=$

$=\dfrac{x-4x^2-2+8x-8-2x+4x^2}{(x-2)^3}=\dfrac{7x-10}{(x-2)^3}$;

3. $y'=0$; $\dfrac{7x-10}{(x-2)^3}=0$ $\quad x=\dfrac{10}{7}$;

4. $y=0$; $4+x-2x^2=0$, $2x^2-x-4=0$, $D=1+32=33$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$;

X	$\left(-\infty;\frac{10}{7}\right)$	$\frac{10}{7}$	$\left(\frac{10}{7};2\right)$	2	$(2;+\infty)$
y’	+	0	-		+
Y	↗	$\frac{33}{8}$	↘		↗
		max			



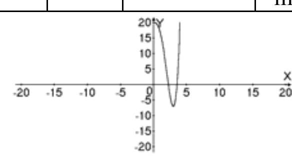
№ 934

1) Рассмотрим график функции $y=x^4-4x^3+20$. Его пересечение с $y=0$ даст количество действительных корней исходного уравнения

1 Область определения R: 2. $y'=4x^3-12x^2$;

3. $y'=0$; $4x^2(x-3)=0$, $x=0$, $x=3$

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
y’	-	0	-	0	+
Y	↘	20	↘	-7	↗
				min	



Ответ: два корня.

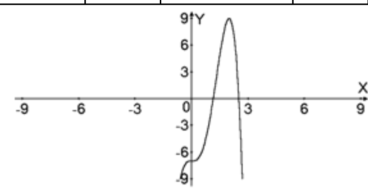
2) $y = 8x^3 - 3x^4 - 7 = 0$

1. Область определения R:

2. $y' = 24x^2 - 12x^3$

3. $y' = 0$; $12x^2(2 - x) = 0$, $x = 0$, $x = 2$

X	(-∞;0)	0	(0;2)	2	(2;+∞)
y’	+	0	+	0	-
Y	$\nearrow$	-7	$\nearrow$	9	$\searrow$
				max	



Ответ: два корня.

№ 935

$$y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3};$$

1) Область определения $x \neq 1$;

2) $y' = \dfrac{3x^2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3-4)}{(x-1)^6} = \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3 + 12}{(x-1)^4} = \dfrac{3(4-x^2)}{(x-1)^4}$

3) $y' = 0$, $\dfrac{3(4-x^2)}{(x-1)^4} = 0$, $x = \pm 2$;

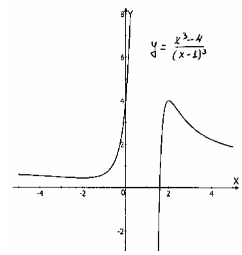
4)

X	(-∞;-2)	-2	(-2;1)	(3;2)	2	(2;+∞)
y’	-	0	+	+	0	-
Y	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\nearrow$	4	$\searrow$
		min			max	

5) $y = 0$, $x^3 = 4$, $x = \sqrt[3]{4}$, $x = 0$, $y = 4$;

6) $\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3} = \dfrac{(x-1)^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x-1)^3} = 1 + \dfrac{3x^2 - 3x - 3}{(x-1)^3}$,

$x \to \infty$ $y \to 1$. Т.к. $(0{,}9) > 0$ $y(1{,}1) < 0$, то слева от $x = 0$ $y \to +\infty$, а справа растет от $-\infty$



7) Рассмотрим график;

$c < \frac{4}{9}$ имеем один корень; $c = \frac{4}{9}$ два корня;

$\frac{4}{9} < c < 1$ три корня; с = 1 два корня; $1 < c < 4$ три корня;

с = 4 два корня; с > 4 один корень.

§ 52 Наибольшее и наименьшее значения функции

№ 936

а) $x_{экстр} = -3; 0$	$y_{наиб} = 2$	$y_{наим} = -3$
б) $x_{экстр} = 0$	$y_{наиб} = 3$	$y_{наим} = -3$
в) $x_{экстр} = -2; 2$	$y_{наиб} = 3$	$y_{наим} = -3$
г) $x_{экстр} = -2; 1$	$y_{наиб} = 4$	$y_{наим} = -2$

№ 937

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на $[-4; 3]$;

1. $y(-4) = 2 \cdot (-64) + 3 \cdot 16 - 36 \cdot (-4) = 64$,

$y(3) = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 - 36 \cdot 3 = -27$;

2. $y' = 6x^2 + 6x - 36$, $y' = 0$; $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 + 24 = 25$,

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$, $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$;

3. $2 \in [-4; 3]$, $-3 \in [-4; 3]$, $y(-3) = 2 \cdot (-27) + 3 \cdot 9 - 36(-3) = 81$,

$y(2) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 36 \cdot 2 = -44$,

$\max\limits_{[-4;3]} y(x) = y(-3) = 81$, $\min\limits_{[-4;3]} y(x) = y(2) = -44$;

2) на $[-2; 1]$;

а) $f(-2) = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 - 36(-2) = 68$, $f(1) = 2 + 3 - 36 = -31$;

б) $2 \notin [-2; 1]$, $-3 \notin [-2; 1]$, значит $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 68$, $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = -31$.

№ 938

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на $[-3; 2]$;

1. $f(-3) = 81 - 8 \cdot 9 + 5 = 14$, $f(2) = 16 - 8 \cdot 4 + 5 = -11$;

2. $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $f'(x) = 0$; $4x(x^2 - 4) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 2$;

3. $D \in [-3; 2]$, $-2 \in [-3; 2]$, $2 \in [-3; 2]$, $f(0) = 5$, $f(-2) = -11$, $f(2) = -11$,

$\max\limits_{[-3;2]} f(-3)=14$, $\min\limits_{[-3;2]} f(x)=f(2)=f(-2)=-11$;

2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$;

1. $f(-2)=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$;

2. $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $f'(x)=0$, $x^2-1=0$, $x=\pm1$;

3. $-1\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$ $1\notin\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$, $f(-1)=-1-1=-2$,

$\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(-1)=-2$, $\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(-2)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\frac{1}{2}$;

3) $f(x)=\sin x+\cos x$ $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$;

1. $f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=0-1=-1$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=-1+0=-1$;

2. $f'(x)=\cos x-\sin x$, $f'(x)=0$; $\cos x-\sin x=0$, $\cos x\neq0$,

$1-\text{tg}x=0$, $\text{tg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$;

3. $\frac{5\pi}{4}\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$,

$\max\limits_{\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f(\pi)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, $\min\limits_{\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$.

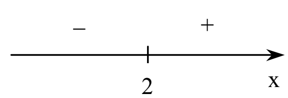
№ 939

1) $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$, $x>0$;

1. Область определения: $x>0$, $f'(x)=2x-\frac{32}{x^3}$,

$f'(x)=0$; $\frac{2x^4-32}{x^3}=0$, $2(x^4-16)=0$, $x=\pm2$;

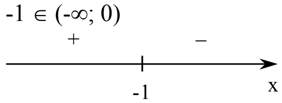
$2\in(0;+\infty)$ $-2\notin(0;+\infty)$, $x=2$ – точка минимума, $f(2)=4+\frac{16}{4}=8$;



2) $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$, x < 0. Область определения x < 0;

1. $f'(x)=-\frac{2}{x^2}-2x$, $f'(x)=0$, $\frac{-2(1+x^3)}{x^2}=0$, $x^3=-1$, x = -1,

-1 ∈ (-∞; 0)



$f(-1)=-\frac{2}{1}-1=-3$, x = -1 – точка максимума,

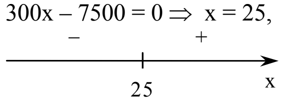
$\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1)=-3$.

№ 940

Пусть одно число x, тогда второе (50 – x). Надо найти наименьшее значение суммы их кубов, т.е.: $f(x)=x^3+(50-x)^3$,

$f'(x)=3x^2-3(50-x)^2=3x^2-7500+300x-3x^2=300x-7500$, $f'(x)=0$,

$300x-7500=0 \Rightarrow x=25$,



x = 25 – точка минимума, x = 25; (50 – x) = 25, 50 = 25 + 25.

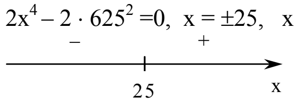
№ 941

Пусть одно число x, тогда второе $\left(\frac{625}{x}\right)$, но числа эти такие, что сумма их квадратов наименьшая

$f(x)=x^2+\left(\frac{625}{x}\right)^2$, x < 0,

$f'(x)=2x-\frac{2\cdot 625^2}{x^3}$, $f'(x)=0$; $2x-\frac{2\cdot 625^2}{x^3}=0$,

$2x^4-2\cdot 625^2=0$, $x=\pm 25$, $x=25\in(0;+\infty)$, $x=-25\notin(0;+\infty)$,

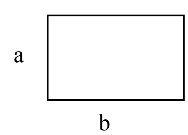


x = 25 – точка минимума, значит x = 25, $\frac{625}{x}=25$.

Ответ: 625 = 25 · 25

№ 942

Пусть стороны прямоугольника равны a и b, тогда p = 2(a + b). Положим, a = x, тогда x > 0



$b=\frac{p}{2}-a=\frac{p}{2}-x$.

Площадь этого прямоугольника находим как:

$S = f(x) = a \cdot b = x \cdot \left(\frac{p}{2} - x\right)$ – найдем max этой функции.

$f'(x) = \frac{p}{2} - x - x = \frac{p}{2} - 2x$, $f'(x) = 0$; $\frac{p-4x}{2} = 0$ $x = \frac{p}{4}$,

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & \frac{p}{4} & \quad x \end{array}$$

точка $x = \frac{p}{4}$ – точка max, значит, прямоугольник имеет стороны

$a = \frac{p}{4}$ $b = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$ — это квадрат.

№ 943

Пусть стороны прямоугольника равны a и b.
S = 9 = a · b.

Пусть a = x, тогда $b = \frac{9}{x}$, $p = f(x) = 2(a+b) = 2\left(x + \frac{9}{x}\right)$ $x > 0$.

Найдем минимум этой функции $f'(x) = 2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)$,

$f'(x) = 0$; $2\frac{(x^2-9)}{x^2} = 0$, $x = \pm 3$,

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 3 & \end{array}$$

$3 \in (0; +\infty)$ $-3 \notin (0; +\infty)$

x = 3 – точка min; a = 3, $b = \frac{9}{3} = 3$.

Ответ: Это квадрат со стороной 3.

№ 944

1) $f(x) = \ln x - x$, $\left[\frac{1}{2};3\right]$, $x > 0$; 1. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 0$, $f(3) = \ln 3 - 3 < 0$;

2. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$, $f'(x) = 0$; $\frac{1-x}{x} = 0$, $x = 1$; 3. $1 \in \left[\frac{1}{2};3\right]$, $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$.

Выясним, что больше. Допустим, $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(3)$

$\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} > \ln 3 - 3$, $\ln\frac{1}{2} - \ln 3 > -\frac{5}{2}$, $\ln\frac{1}{6} > \ln e^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{e^{5/2}}$

$e^{5/2} > 6$ – что верно

Допустим $f(3) < f(1)$, т.е. $\ln 3 - 3 > -1$, $\ln 3 > 2$, $\ln 3 > \ln e^2$,
$3 > e^2$ – не верно, значит $f(1) > f(3)$.

Допустим $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$, т.е. $\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} > -1$, $\ln\frac{1}{2} > \ln e^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{e}}$,

$\sqrt{e} > 2$, $e > 4$ – не верно, значит $f(1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

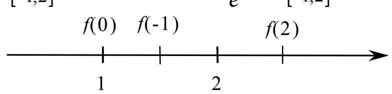
Итак, $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} f(x) = f(1) = -1$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} f(x) = f(3) = \ln 3 - 3$;

2) $f(x) = x + e^{-x}$, $[-1; 2]$;

1. $f(-1) = -1 + e = e - 1 < 2$, $2 < e < 3$, $1 < e - 1 < 2$, $f(2) = 2 + \frac{1}{e^2} > 2$;

2. $f'(x) = 1 - e^{-x}$, $f'(x) = 0$; $1 - e^{-x} = 0$, $e^{-x} = 1 = e^0$, $x = 0$, $f(0) = 0 + e^0 = 1$,

$\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2 + \frac{1}{e^2}$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 1$;



3) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, $[0; \pi]$;
1. $f(0) = 2\cos 0 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$, $f(\pi) = 2\cos\pi - \cos 2\pi = -2 - 1 = -3$;
2. $f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x$, $f'(x) = 0$; $-2\sin x(1 - 2\cos x) = 0$,

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$, $\cos x = +\frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

3. $0 \in [0; \pi]$, $\pi \in [0; \pi]$, $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = +1 + \frac{1}{2} = +\frac{3}{2}$,

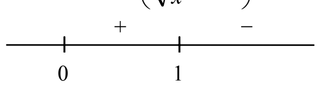
$\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = f(\pi) = -3$.

№ 945

1) $f(x) = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$, $x > 0$;

1. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}$,

$f'(x) = 0$; $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = 0$ $\frac{1-x}{\sqrt{x}} = 0$, $x = 1$



$x = 1$ – точка max, $f(1) = 3 - 1 = 2$;

2. $f(x)=3x-2x\sqrt{x}$, x > 0, $f'(x)=3-3\sqrt{x}$,

$f'(x)=0$; $3(1-\sqrt{x})=0$, $\sqrt{x}=1$, x = 1, x = 1, точка max.

3. $1 \in (0; +\infty)$, $f(1) = 3 - 2 = 1$.

$+ \quad\quad -$

$\xrightarrow{\quad\quad 1 \quad\quad}$

№ 946

1) $f(x) = e^{3x} - 3x$ на (-1; 1), $f'(x) = 3e^{3x} - 3$,

$f'(x) = 0$, $3(e^{3x} - 1) = 0$, $e^{3x} = 1 - e^0$, x = 0, x = 0 – точка min, $0 \in (-1; 1)$,

$f(0) = e^{3\cdot 0} - 3 \cdot 3 = 1$;

$- \quad\quad +$

$\xrightarrow{\quad\quad 0 \quad\quad}$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ на (0; 2), $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$, $f'(x) = 0$, $\frac{x-1}{x^2}=0$,

x = 1, x = 1 – точка min, $1 \in (0;2)$, $f(1)=\frac{1}{1}+\ln 1=1$.

$- \quad\quad +$

$\xrightarrow{\quad\quad 1 \quad\quad}$

№ 947

1) $f(x)=x\sqrt[4]{5-x}$ на (0; 5),

$$f'(x)=\sqrt[4]{5-x}+\frac{x\cdot(-1)}{4\sqrt[4]{(5-x)^3}}=\frac{4(5-x)-x}{4\sqrt[4]{(5-x)^3}}=\frac{20-5x}{4\sqrt[4]{(5-x)^3}},$$

$f'(x) = 0$, $\frac{20-5x}{4\sqrt[4]{(5-x)^3}}=0$, x = 4, x = 4 – точка max, $4 \in (0; 5)$,

$f(4)=4\cdot\sqrt[4]{5-4}=4$;

$+ \quad\quad -$

$\xrightarrow{\quad\quad 4 \quad\quad}$

2) $f(x)=x\sqrt[3]{4-x}$, (0; 4), $f'(x)=\sqrt[3]{4-x}+\frac{x\cdot(-1)}{3\sqrt[3]{(4-x)^2}}=\frac{12-4x}{3\sqrt[3]{(4-x)^2}}$,

$f'(x) = 0$, $\frac{12-4x}{3\sqrt[3]{(4-x)^2}}=0$, x = 3, x = 3 – точка max, $3 \in (0; 4)$,

$f(3)=3\cdot\sqrt[3]{4-3}=3$;

$+ \quad\quad -$

$\xrightarrow{\quad\quad 3 \quad\quad} x$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x)}$, (0; 1),

$$f'(x)=\frac{1\left(2x(1-x)+x^2\cdot(-1)\right)}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}}=\frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}}=\frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}}$$

$f'(x)=0$, $\frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}}=0$, $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}$ – точка max, $\frac{2}{3}\in(0;1)$,

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3};$$

+ –

3 x

4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x+5}$, (-1; 5), $f'(x)=\frac{1\cdot(2x-4)}{3\sqrt{\left(x^2-4x+5\right)^2}}$,

$f'(x)=0$; $\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{\left(x^2-4x+5\right)^2}}=0$, x = 2, x = 2 – точка min., 2 ∈ (-1; 5),

$$f(2)=\sqrt[3]{4-8+5}=1.$$

– +

2 x

№ 948

Пусть мы вырежем квадраты со стороной x, тогда высота и есть x. Запишем в таком случае объем

$f(x) = V = (a - 2x)(a - 2x)\cdot x = (a - 2x)^2\cdot x = a^2x - 4a^2x + 4x^3$

$f'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$;

$f'(x) = 0$: $12x^2 - 8ax + a^2 = 0$, $D = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2$,

$$x_1=\frac{4a+2a}{12}=\frac{a}{2},\quad x_2=\frac{4a-2a}{12}=\frac{a}{6},$$

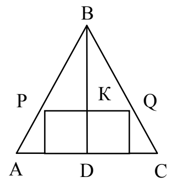
$$f\left(\frac{a}{2}\right)=(a-a)(a-a)\cdot\frac{a}{2}=0,$$

$$f\left(\frac{a}{6}\right)=\left(a-\frac{a}{3}\right)\left(a-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{a}{6}=\frac{4}{9}a^2\cdot\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27},$$

$$\max f(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}.$$

Ответ: высота коробки должна быть $\frac{a}{6}$.

№ 949



Пусть BK = x, тогда высота треугольника BD=a + x. Найдем основание AC. Треугольники ABC и PQB – подобны с коэффициентом $\frac{x+a}{x}$, значит $\frac{AC}{PQ}=\frac{x+a}{x}$,

$$AC=\frac{(x+a)\cdot PQ}{x}=\frac{(x+a)\cdot a}{x}.$$

Площадь:

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\frac{(x+a)a}{x}\cdot(a+x)=\frac{(x+a)^2\cdot a}{2x},$$

$$f'(x)=\frac{2}{a}\cdot\left(x+2a+\frac{a^2}{x}\right)'=\frac{2}{a}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right),$$

f′(x) = 0; $\frac{2}{a}\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right)=0$, x = ±a, x > 0, x = a,

$$f(a)=\frac{(a+a)^2\cdot a}{2a}=2a^2.$$

Ответ: наименьшая площадь при BK = a.

№ 950

$y = 3 - x^2$ – график этой функции симметричен относительно оу, значит, вершины прямоугольника будут иметь координаты

B = (-x, y); A = (-x, 0); C = (x, y); D = (x, 0).

Основание прямоугольника равно 2x (x>0) и высота y, значит, площадь:

$f(x) = S = 2x \cdot y = 2x \cdot (3 - x^2)$, $x \in (0; 3)$,

$f'(x) = 2(3 - x^2) + 2x \cdot (-2x) = 6 - 2x^2 - 4x^2 = 6(1 - x^2)$,

$f'(x) = 0$; $6(1 - x^2) = 0$, $x = \pm 1$, $1 \in (0; 3)$ $-1 \notin (0; 3)$,

$f(1) = 2 \cdot 1(3 - 12) = 2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: наибольшая площадь прямоугольника равноа 4.

№ 951

Пусть это точка B с координатами (x, x^2).

Тогда расстояние до точки A: $\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_B)^2}=\rho$ или

$$\rho=f(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+x^4-x^2+\frac{1}{4}}=$$

$$=\sqrt{x^4-4x+\frac{17}{4}},\quad f'(x)=\frac{1\cdot(4x^3-4)}{2\sqrt{x^4-4x+\frac{17}{4}}},$$

$f'(x) = 0; \quad \dfrac{4x^3-4}{2\sqrt{x^4-4x+\frac{17}{4}}} = 0$,

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 1 & x \end{array}$$

$x^3 = 1$, $x = 1$, $x = 1$ – точка минимума, $y = 1^2 = 1$.

Ответ: (1; 1) — ближайшая к точке А.

№ 952

Пусть a — ширина доски, φ – угол, $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда площадь поперечного сечения желоба:

$$S(\varphi) = 2\left(\frac{1}{2}\cdot a(a\cos\varphi)\sin\varphi\right) + a(a\cdot\cos\varphi),$$

$$S(\varphi) = a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi + \cos\varphi\right).$$

Найдем максимум этой функции:

$S'(x) = a^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 2\varphi - \cos\varphi\right)$,

$S' = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi - \sin\varphi = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2\varphi - \sin\varphi = 0$.

Обозначим $\sin\varphi = t$;

$2t^2 + t - 1 = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2}$; $t_1 = -1$; $t_2 = \dfrac{1}{2}$.

при $t = -1$: $\sin\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{3}{2}\pi$ — посторонний корень.

при $t = \dfrac{1}{2}$: $\sin\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}$, и угол наклона боковых досок к основанию : $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{3}\pi$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}\pi$.

§ 53 Выпуклость графика функции, точки перегиба

№ 953

1) $f''(x) = (x^2\cos x)'' = (2x\cos x - x^2\sin x)' = (2x\cos x)' - (x^2\sin x)' =$
$= 2\cos x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x = \cos x(2 - x^2) - 4x\sin x$;

2) $f''(x) = (x^3\sin x)'' = (3x^2\sin x + x^3\cos x)' = 3(x^2\sin x)' + (x^3\cos x)' =$
$= 6x\sin x + 3x^2\cos x + 3x^2\cos x - x^3\sin x = \sin x(6x - x^3) + 6x^2\cos x$;

3) $f''(x) = (x^5 + 2x^3 - x^2 + 2)'' = (5x^4 + 6x^2 - 2x)' = 20x^3 + 12x - 2$;

4) $f''(x) = (x^4 - 3x^3 + 5x + 6)'' = (4x^3 - 9x^2 + 5)' = 12x^2 - 18x$.

№ 954

1) $f''(x) = ((x + 1)^4)'' = (4(x + 1)^3)' = 12(x + 1)^2$,

$f''(x) > 0$ при всех $x \neq -1$, значит, функция при всех $x \neq -1$ выпукла вниз

2) $f''(x) = (x^4 - 6x^2 + 4)'' = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12$,

$f'' > 0$, $12(x^2 - 1) > 0$, $(x - 1)(x + 2) > 0$,

+ − +

-1 1 x

при $x < -1$ и $x > 1$, на этих промежутках функция выпукла вниз.

$f''(x) < 0$ при $-1 < x < 1$, на этом промежутке выпукла вверх;

3) $f''(x) = ((x^2 - 3x + 2)e^x)'' = ((2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 2)e^x)' =$

$= (e^x(x^2 - x - 1))' = e^x(x^2 - x - 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x - 2)$

$f''(x) > 0$, $x^2 + x - 2 > 0$,

+ − +

-2 1 x

$D = 1 + 8 = 9$, $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$,

при $x < -2$ $x > 1$ – функция выпукла вниз,

$f''(x) < 0$ при $-2 < x < 1$ – функция выпукла вверх;

4) $f''(x) = (x^3 - 6x \ln x)'' = (3x^2 - 6\ln x - 6)' = \left(6x - \dfrac{6}{x}\right)$, $x > 0$,

$f''(x) > 0$, $6\left(x - \dfrac{1}{x}\right) > 0$, $6\dfrac{(x^2-1)}{x} > 0$, $\dfrac{6(x-1)(x+1)}{x} > 0$,

при $x > 1$ – функция выпукла вниз,

$f''(x) < 0$ при $0 < x < 1$ – функция выпукла вверх.

№ 955

1) $f''(x) = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$, $f''(x) = 0$, $-\pi < x < \pi$,

$-\cos x = 0$, $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, $x = -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}$;

2) $f''(x) = (x^5 - 80x^2)'' = (5x^4 - 160x)' = 20x^3 - 160$,

$f''(x) = 0$, $20(x^3 - 8) = 0$, $x = 2$.

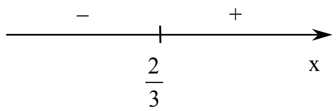
− +

2 x

При переходе через $x = 2$ $f''(x)$ меняет знак, значит, $x = 2$ – точка перегиба;

3) $f''(x) = (12x^3 - 24x^2 + 12x)'' = (36x^2 - 48x + 12)' = 72x - 48$

$f''(x) = 0$, $24(3x - 2) = 0$, $x = \dfrac{2}{3}$,



при переходе через $x = \frac{2}{3}$ знак $f''(x)$ меняется, значит, это точка перегиба

4) $f''(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)'' = (\cos x - \cos 2x)' =$

$= -\sin x + 2\sin 2x = 2\sin 2x - \sin x$, $-\pi < x < \pi$, $f''(x) = 0$,
$\sin x(4\cos x - 1) = 0$, $\sin x = 0$ $x = \pi n$, $n \in Z$, $\pi n \notin (-\pi; \pi)$,

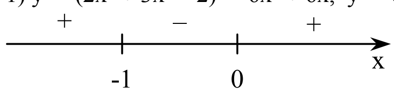
$\cos x = \frac{1}{4}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$,

$x = \pm\arccos\frac{1}{4}$ — являются точками перегиба.

Упражнения к главе IX.

№ 956

1) $y' = (2x^3 + 3x^2 - 2)' = 6x^2 + 6x$, $y' > 0$, $6x(x + 1) > 0$,

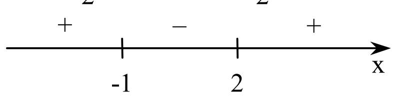


при $x < -1$, $x > 0$ – возрастает; $y' < 0$ при $-1 < x < 0$ – убывает;

2) $y' = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5\right)' = 2x^2 - 2x - 4$,

$y' > 0$, $2x^2 - 2x - 4 > 0$, $x^2 - x - 2 > 0$, $D = 1 + 8 = 9$,

$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$, $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$,



при $x < -1$ $x > 2$ функция возрастает; $y' < 0$ $x^2 - x - 2 < 0$,
при $-1 < x < 2$ – убывает;

3) $y' = \left(\frac{3}{x} - 1\right)' = -\frac{3}{x^2}$; $x \neq 0$

$y' < 0$ при всех x, но $x \neq 0 \Rightarrow$ значит, функция убывает при $x < 0$ и $x > 0$;

4) $y' = \left(\frac{2}{x-3}\right)' = \frac{-2}{(x-3)^2}$; $x \neq 3$,

$y' < 0$ при $x < 3$ и $x > 3$ и убывает на этих промежутках.

№ 957

1) $y' = (x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1)' = 4x^3 - 12x^2 - 16x$, $y' = 0$, $4x(x^2 - 3x - 4) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{array}\right.$, $D = 9 + 16 = 25$, $x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$, $x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$,

$x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$;

2) $y'(4x^4 - 2x^2 + 3)' = 16x^3 - 4x$, $y' = 0$, $4x(4x^2 - 1) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}$.

3) $y' = \left(\frac{x}{3} + \frac{12}{x}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{12}{x^2}$; $x \neq 0$, $y' = 0$, $\frac{x^2 - 36}{3x^2} = 0$,

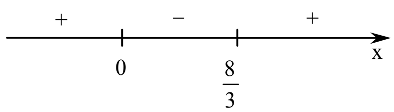
$x^2 - 36 = 0$, $x = \pm 6$;

4) $y' = (\cos 2x + 2\cos x)' = -2\sin 2x - 2\sin x$, $y' = 0$, $-2\sin x\,(2\cos x + 1) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z \\ x = \frac{\pm 2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \end{array}\right.$.

№ 958

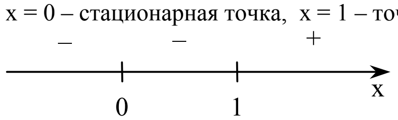
1) $y' = (x^3 - 4x^2)' = 3x^2 - 8x$, $y' = 0$, $x(3x - 8) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{8}{3}$,



$x = 0$ – точка max., $x = \frac{8}{3}$ - точка min.;

2) $y' = (3x^4 - 4x^3) = 12x^3 - 12x^2$, $y' = 0$, $12x^2(x - 1) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$,

$x = 0$ – стационарная точка, $x = 1$ – точка min.

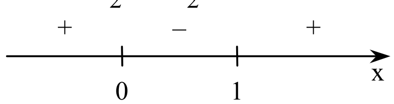


№ 959

1) $y' = \left(x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 3\right)' = 5x^4 - 5x$, $y' = 0$, $5x(x^3 - 1) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$,

$x = 0$ – точка max., $f(0) = 0 - 0 + 3 = 3$, $x = 1$ – точка min.,

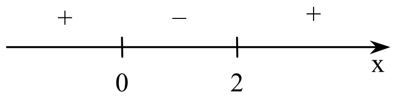
$f(1) = 1 - \frac{5}{2} + 3 = \frac{3}{2}$;



2) $y' = \left(\frac{1}{5}x^5 - 4x^2 - 3\right)' = x^4 - 8x$, $y' = 0$, $x(x^3 - 8) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$,

$x = 0$ – точка max., $f(0) = 0 - 0 - 3 = -3$, $x = 2$ – точка min.,

$f(2) = \frac{32}{5} - 16 - 3 = -\frac{63}{5}$.

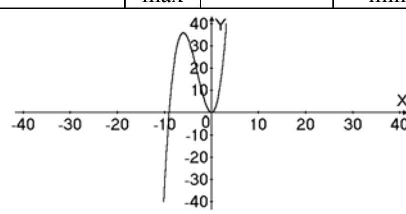


№ 960

1) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$.

Область определения – R, $y' = x^2 + 6x$, $y' = 0$, $x(x + 6) = 0$,
$x_1 = 0$; $x_2 = -6$ – стационарные точки

x	x<-6	-6	-6<x<0	0	x>0
y′	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
		max		min	

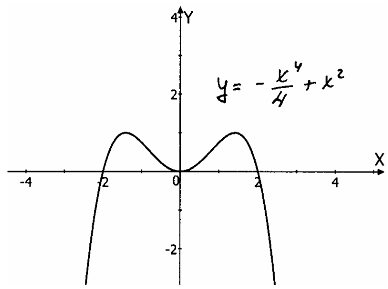


2) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$.

Область определения – R,

$y' = -x^3 + 2x$, $y' = 0$, $x(2 - x^2) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = \pm\sqrt{2}$

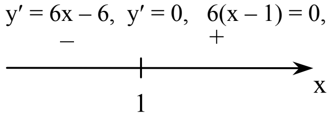
x	$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\left(-\sqrt{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
y′	+	0	-	0	+	0	-
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$
		max		min		max	



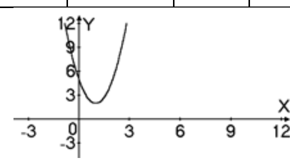
№ 961

1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ на [0; 3]. Область определения [0; 3],

$y' = 6x - 6$, $y' = 0$, $6(x - 1) = 0$, $x = 1$



x	0	(0; 1)	1	(1; 3)	3
y′		-	0	+	
y	5	↘	2	↗	14



2) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на [-2; 4].

Область определния [-2; 4],

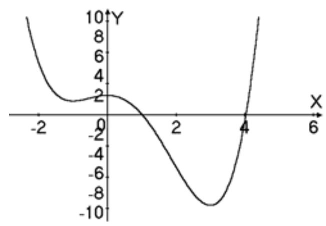
$y' = x^3 - 2x^2 - 3x$, $y' = 0$, $x(x^2 - 2x - 3) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}\right.$,

$D = 1 + 3 = 4$,

$x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$.

x	-2	(-2;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;3)	3	(3;4)	4
y′		-	0	+	0	-	0	+	
y	$\frac{16}{3}$	↘	$\frac{17}{12}$	↗	2	↘	$-\frac{37}{4}$	↗	$-\frac{2}{3}$
			min		max		min		



№ 962

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на $[-2; 2]$, $f(-2) = -8 - 6 \cdot 4 + 9 = -23$,
$f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 9 = -7$, $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f'(x) = 0$, $3x(x - 4) = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = 4$, $0 \in [-2; 2]$; $4 \notin [-2; 2]$, $f(0) = 9$,
$\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(0) = 9$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = -23$;

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ $[-4; 0]$, $f(-4) = -64 + 6 \cdot 16 + 9 \cdot (-4) = -4$, $f(0) = 0$,
$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ $f'(x) = 0$, $3(x^2 + 4x + 3) = 0$, $D/4 = 4 - 3 = 1$,
$x_1 = -3$; $x_2 = -1$, $-3 \in [-4; 0]$; $-1 \in [-4; 0]$, $f(-1) = -1 + 6 - 9 = -4$,
$f(-3) = -27 + 6 \cdot 9 - 9 \cdot 3 = 0$,
$\min\limits_{[-4;0]} f(x) = f(-4) = f(-1) = -4$, $\max\limits_{[-4;0]} f(x) = f(-3) = f(0) = 0$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ $[-4; 3]$, $f(-4) = 256 - 2 \cdot 16 + 3 = 227$,
$f(3) = 81 - 9 + 3 = 75$, $f'(x) = 4x^3 - 4x$, $f'(x) = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$,
$x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$, $-1 \in [-4; 3]$; $1 \in [-4; 3]$; $0 \in [-4; 3]$,
$f(-1) = f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $f(0) = 0 + 0 + 3 = 3$,
$\min\limits_{[-4;3]} f(x) = f(-1) = f(1) = 2$, $\max\limits_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 227$;

4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ $[-3; 2]$, $f(-3) = 81 - 8 \cdot 9 + 5 = 14$,
$f(2) = 16 - 8 \cdot 4 + 5 = -11$, $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $f'(x) = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$,
$x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2$, $0 \in [-3; 2]$; $2 \in [-3; 2]$; $-2 \in [-3; 2]$,
$f(0) = 0 + 0 + 5 = 5$, $f(-2) = f(2) = -11$,
$\min\limits_{[-3;2]} f(x) = f(-2) = f(2) = -11$, $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = f(-3) = 14$.

№ 963

Пусть сторона прямоугольника равна x, тогда другая сторона равна $\left(\frac{p}{2} - x\right)$.

Тогда диагональ вычислим как: $l = f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$.

Исследуем эту функцию на min

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} - px + x^2}\right)' = \left(\sqrt{2x^2 + \frac{p^2}{4} - px}\right)' =$$

$$= \frac{1 \cdot (4x - p)}{2\sqrt{2x^2 + \frac{p^2}{4} - px}}, \ f'(x) = 0, \quad \frac{4x - p}{2\sqrt{2x^2 + \frac{p^2}{4} - px}} = 0, \ 4x - p = 0,$$

$x = \frac{p}{4}$, вторая сторона $\frac{p}{2} - x = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$ – значит, это квадрат со стороной $p/4$, ч.т.д.

№ 964

Пусть x – одна из равных сторон, значит другая тоже x и основание $(p–2x)$, тогда высота равна:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{p^2}{4} + px - x^2} = \frac{\sqrt{-p^2 + 4px}}{2},$$

тогда площадь вычислим как:

$$S(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (p - 2x) \cdot \frac{\sqrt{-p^2 + 4px}}{2} = \frac{(p - 2x)\sqrt{-p^2 + 4px}}{4},$$

$$S'(x) = \frac{1}{4}\left(-2\sqrt{-p^2 + 4px} + \frac{(p - 2x) \cdot 4p}{2\sqrt{4px - p^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{4px - p^2}}\left(+4p^2 - 16px + 4p^2 - 8xp\right) = \frac{4p^2 - 12xp}{4\sqrt{4px - p^2}},$$

$S'(x) = 0$, $\frac{4p(p - 3x)}{2\sqrt{4px - p^2}} = 0$, $x = \frac{p}{3}$, $x = \frac{p}{3}$ – точка max.,

основание $p - 2x = p - \frac{2p}{3} = \frac{p}{3}$.

Это равносторонний треугольник.

№ 965

Пусть сторона квадрата равна x и высота h, тогда площадь поверхности равна: $p = 2\,(x^2 + xh + xh) = 600$, $x^2 + 2xh = 300$, $h = \frac{300 - x^2}{2x}$.

Найдем объем:

$$V = f(x) = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot \frac{300 - x^2}{2x} = 150x - \frac{x^3}{2}.$$

Найдем максимум функции V = $f(x)$: $f'(x) = 150 - \frac{3}{2}x^2$,

$f'(x) = 0$, $\frac{3}{2}x^2 = 150$, $x^2 = 100$, $x = \pm 10$, но x > 0 (по условию),

$h = \frac{300 - 100}{20} = 10$, значит это куб.

№ 966

$$y' = \left(\frac{9}{5}x^5 - \frac{7}{3}x^3 + 7x + 12{,}5\right)' = 9x^4 - 7x^2 + 7,$$

$y' = 0$, $9x^4 - 7x^2 + 7 = 0$; $D = 49 - 252 < 0$, значит $9x^4 - 7x^2 + 7 > 0$ и $y' > 0$ при всех $x \in R$, следовательно функция возрастает на всей области определения, ч.т.д.

№ 967

$y' = (x + 2x\sqrt{x})' = 1 + 3\sqrt{x}$, $1 + 3\sqrt{x} > 0$, т.к. $\sqrt{x} > 0$, следовательно $y' > 0$ при любых $x \in R$, и значит, функция возрастает на всей области определения, ч.т.д.

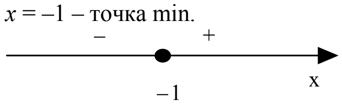
№ 968

1) $y' = (x \ln x) = \ln x + 1$, $y' = 0$, $\ln x + 1 = 0$, $\ln x = -1$, $\ln x = \ln e^{-1}$,

$x = \frac{1}{e}$ – точка min;

2) $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$, $y' = 0$, $e^x(1 + x) = 0$, $x = -1$,

$x = -1$ – точка min.



3) $y' = \left(\frac{25}{7-x} - \frac{9}{3-x}\right)' = \left(\frac{75 - 25x - 63 + 9x}{(7-x)(3-x)}\right)' = \left(\frac{12 - 16x}{x^2 - 10x + 21}\right)' =$

$$= \frac{-16(x^2 - 10x + 21) - (12 - 16x)(2x - 10)}{\left(x^2 - 10x + 21\right)^2} =$$

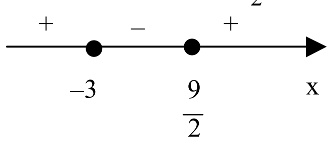
$$= \frac{16x^2 + 160x - 336 - 24x + 120 + 32x^2 - 160x}{\left(x^2 - 10x + 21\right)^2} = \frac{16x^2 - 24x - 216}{\left(x^2 - 10x + 21\right)^2},$$

$y' = 0$, $\frac{(2x^2 - 3x - 27)}{x^2 - 10x + 21} = 0$; $x^2 - 10x + 21 \neq 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 7) = 0$

$\Rightarrow x \neq 3, x \neq 7$, $2x^2 - 3x - 27 = 0$, $D = 9 + 216 = 225$,

$x_1 = \frac{3 + 15}{4} = \frac{9}{2}$, $x_2 = \frac{3 - 15}{4} = -3$,

$x = -3$ точка max., $x = \frac{9}{2}$ точка min.



№ 969

рис 148 а)

1) возрастает $x \in (x_3, x_5) \cup (x_7, x_8)$; убывает $x \in (x_1, x_3) \cup (x_5, x_7)$;

2) $x_{max} = x_1, x_5$; $x_{min} = x_3, x_7$; 3) x_2, x_4, x_6, x_8;

рис 148 б)

1) возрастает $x \in (-10, -8) \cup (-4, -2) \cup (0, 4) \cup (6, 7)$;

убывает $x \in (-8, -4) \cup (-2, 0) \cup (4, 6)$;

2) $x_{max} = -8; -2; 4$; $x_{min} = -4; 0; 6$; 3) $-10; -6; -3; -1; 2; 5; 7$.

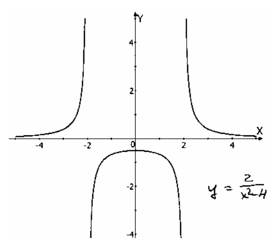
№ 970

1) $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$

а) Область определения $x \neq \pm 2$

б) $y' = \left(\dfrac{2}{x^2-4}\right)' = -\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$, $y' = 0$, $\quad -\dfrac{2x}{(x^2-4)^2} = 0$; $\quad x = 0$;

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	–
y	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{2}$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$



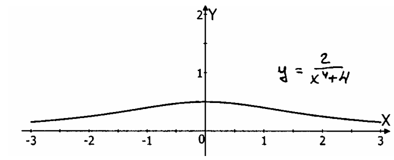
2) $y = \dfrac{2}{x^2 + 4}$

а) Область определения R:

б) $y'(x) = \dfrac{-2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2+4)^2}$;

в) $y'(x) = 0$, $\quad \dfrac{-4x}{(x^2+4)^2} = 0$, $\quad x = 0$;

x	$(-\infty; -0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	–
y	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$ max	$\searrow$



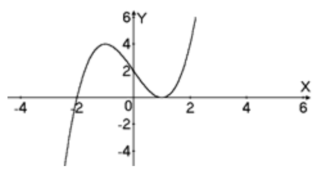
3) $y = (x-1)^2\,(x+2)$

а) Область определения R:

б) $y' = (x) = 2\,(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(2x+4+x-1) =$
$= (x-1)(3x+3) = 3\,(x-1)(x+1);$

в) $y' = 0$, $3 \cdot (x-1)(x+1) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$



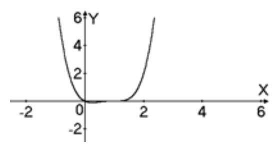
4) $y = x(x-1)^3$

а) Область определения: R

б) $y' = (x-1)^3 + 3x\,(x-1)^2 = (x-1)^2\,(x-1+3x) = (x-1)^2\,(4x-1)$

в) $y' = 0$, $(x-1)^2 \cdot (4x-1) = 0$, $x_1 = 1$ $\quad x_2 = \dfrac{1}{4}$

x	$(-\infty; -\frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	–	0	+	0	+
y	$\searrow$	$-\frac{27}{256}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$



№ 971

1) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x;$ $\qquad x \in [0;\ \dfrac{3\pi}{2}\,];$

а) Область определения $[0;\ \dfrac{3\pi}{2}\,]$; б) $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x;$

в) $f'(x)=0$, $2\cos x+2\cos 2x=0$; $4\cos^2 x+2\cos x-2=0$, $2\cos^2 x+\cos x-1=0$;

$D=1+8=9$; $\cos x \ \frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$;

$\cos x \ \frac{-1-3}{4}=-1$, $x=\pi+2n\pi$, $n\in Z$,

$f(0)=2\sin 0+\sin 0=0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}+\sin 3\pi=-2+0=-2$,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$f(\pi)=2\sin\pi+\sin 2\pi=0+0=0$,

$\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}(f(x))=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$; $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}(f(x))=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

2) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$; $x\in[0;\pi]$; а) $f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x$,

$f'(x)=0$, $-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)=0$, $2\sin^2 x+\sin x-1=0$, $D=1+8=9$,

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;\ \frac{5\pi}{6}\in[0;\pi],\ \frac{\pi}{6}\in[0;\pi]\\ \sin x=\frac{-1-3}{4}=-1 \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ \ -\frac{\pi}{2}\notin[0;\pi]\end{array}\right.$$

б) $f(0)=2\cos 0+\sin 0=2+0=2$, $f(\pi)=2\cos\pi+\sin\pi=-2+0=-2$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\min\limits_{[0;\pi]}(f(x))=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $\max\limits_{[0;\pi]}(f(x))=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

№ 972

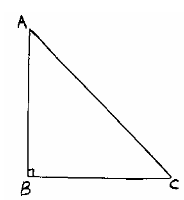
1) $v(t)=s'(t)=(6t^2-t^3)'=12t-3t^2$

2) найдем наибольшее значение $v(t)$

$v'(t)=12-6t$; $v'(t)=0$, $12-6t=0$, $t=2$, $t=2$ – точка max.,

$v(2)=24-12=12$.

№ 973



Пусть $BC=x$, $AC=l-x$, тогда

$AB=\sqrt{(l-x)^2-x^2}=\sqrt{l^2-2xl}$,

$S_{ABC}=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{l^2-2xl}$.

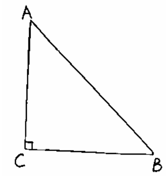
Найдем наибольшее значение S_{ABC}.

$$S'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2-2xl}+\frac{1\cdot(-2l)x}{2\sqrt{l^2-2xl}}\right)=\frac{l^2-2xl-lx}{2\sqrt{l^2-2xl}}=\frac{l^2-3lx}{2\sqrt{l^2-2xl}},$$

$S'(x)=0$, $\frac{l^2-3lx}{2\sqrt{l^2-2xl}}=0$, $x=\frac{l}{3}$, $x=\frac{l}{3}$ – точка max.,

$AC=l-\frac{l}{3}=\frac{2l}{3}$, $AB=\sqrt{\frac{4l^2}{9}-\frac{l^2}{9}}=\frac{\sqrt{3}l}{3}$.

№ 974



Пусть $AC = x$, тогда $CB = 40 - x$.

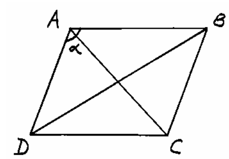
Тогда площадь найдем по формуле:

$$S(x)=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}x(40-x)=20x-\frac{x^2}{2}$$

Исследуем $S(x)$ на max.

$S'(x)=20-x$; $S'=0$, $20-x=0$, $x=20$, $x=20$ – точка max. $AC = 20$, $CB = 40 - 20 = 20$. Это равнобедренный прямоугольный треугольник.

№ 975



Пусть $AB = x = CD$ и $BC = y = AD$, тогда

$BD=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}$,

и $AC=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos(\pi-\alpha)}=$

$=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\alpha}$

$$AC+BD=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}+\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\alpha}=a$$

$$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha+x^2+y^2+2xy\cos\alpha-2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y\cos^2\alpha}$$

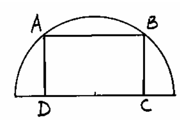
$a^4-4(x^2+y^2)a^2+4(x^2+y^2)^2=4(x^2+y^2)^2-16x^2y^2\cos^2\alpha,$

$a^4-4(x^2+y^2)a^2+16x^2y^2\cos^2\alpha=0$, $4(x^2+y^2)=a^2+16\frac{x^2y^2\cos^2\alpha}{a^2}$.

Величина $2(x^2+y^2)$ зависит от параметра α.

$\min 4(x^2+y^2)=a^2$ при $\cos^2\alpha=0$ $\alpha=90°$. Тогда $2(x^2+y^2)=\frac{a^2}{2}$.

№ 976



Пусть $AB = x$, тогда $AD=2\sqrt{R^2-x^2}$,

$S=AD\cdot AB=2x\sqrt{R^2-x^2}=2x\sqrt{R^2x^2-x^4}$.

Исследуем S на max при $x\in[0; R]$.

$S'=\frac{2\left(2R^2x-4x^3\right)}{2\sqrt{R^2x^2-x^4}}$; $S'=0$, $\frac{2R^2x-4x^3}{\sqrt{R^2x^2-x^4}}=0$,

$2x(R^2-2x^2)=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{R^2}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{R}{\sqrt{2}} \end{array}\right.,\quad -\dfrac{R}{\sqrt{2}}\notin[0;R],$

$x=0$ – точка min., $x=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ – точка max.,

$$AD=2\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}=2\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}R,\quad S=\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}R=R^2.$$

№ 977

Объем пирамиды $V=\dfrac{1}{3}h\cdot S'_{\text{осн.}}$; $h=12$ – постоянная, поэтому объем зависит только от площади основания. Найдем ее max.

Пусть один катет основания x, тогда другой $\sqrt{16-x^2}$. Тогда площадь

$$S(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{16-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16x^2-x^4};\qquad x\in[0;4]$$

$$S'(x)=\frac{1(32x-4x^3)}{4\sqrt{16x^2-x^4}}=\frac{8x-x^3}{\sqrt{16x^2-x^4}};\qquad S'(x)=0,$$

$$\frac{8x-x^3}{\sqrt{16x^2-x^4}}=0,\quad x(8-x^2)=0,\ x=0,\quad x=\pm2\sqrt{2},\quad -2\sqrt{2}\notin[0;4],$$

$x=0$ – точка min., $x=2\sqrt{2}$ – точка max., $S\left(2\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{16\cdot8-64}=\dfrac{8}{2}=4$,

$V=\dfrac{1}{3}\cdot12\cdot4=16.$

№ 978

Пусть радиус окружности в основании цилиндра $r=x$, тогда высота $h=\left(\dfrac{R}{2}-2x\right)$. Объем равен $V=h\cdot S_{\text{осн.}}=h\cdot\pi r^2$. $x\in[0;p]$,

$$V(x)=\left(\frac{p}{2}-2x\right)\cdot\pi\cdot x^2=\frac{p\pi x^2-4\pi x^3}{2}.$$

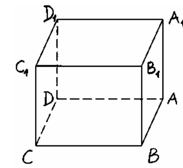
Исследуем $V(x)$ на max. $V'(x)=\dfrac{1}{2}(2p\pi x-12\pi x^2)=p\pi x-6\pi x^2$

$V'(x)=0,\ x\pi(p-6x)=0,\quad \left[\begin{array}{l} x\pi=0 \\ p-6x=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1=0;\quad x_2=\dfrac{p}{6}$

$x=0$ – точка min., $x=\dfrac{p}{6}$ – точка max.,

$$V\left(\frac{p}{6}\right)=\frac{p\pi\cdot\frac{p^2}{36}-4\cdot\pi\frac{p^3}{216}}{2}=\frac{\pi}{2\cdot216}\left(6p^3-4p^3\right)=\frac{\pi p^3}{216}.$$

№ 979



$\frac{AD}{AB}=\frac{5}{2}$; $\frac{AD}{5}=\frac{AB}{2}=k$, $AD = 5k$, $AB = 2k$,

$S_{пов} = AD\cdot AB + 2S_{AA_1B_1B} + 2S_{AA_1D_1D} =$

$= 10k^2 + 2AA_1(5k + 2k) = 2S$, $AA_1 = \frac{2S-10k^2}{14k}$,

$V = 10k^2\cdot\frac{2S-10k^2}{14k} = \frac{5}{7}\left(2Sk - 10k^3\right)$.

Исследуем V на max., $V' = \frac{5}{7}(2S - 30k^2)$; $V' = 0$, $\frac{5}{7}(2S - 30k^2) = 0$,

$k=\pm\sqrt{\frac{S}{15}}$, $k=\sqrt{\frac{S}{15}}$ – точка max, $k=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{15}}$; $AD=\frac{5\cdot\sqrt{S}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{5}{3}S}$, $AB=2\cdot\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{15}}$.

№ 980

$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

а) Область определения: $x^2 + 3x + 2 \neq 0$; $D = 9 - 8 = 1$,

$x\neq\frac{-3+1}{2}=-1$, $x\neq\frac{-3-1}{2}=-2$;

б) $y'=\frac{(2x-3)\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)(2x+3)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=$

$=\frac{2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-2x^3+6x^2-4x-3x^2+9x-6}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=$

$=\frac{12x^2-6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=+\frac{6\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$,

$y'=0$, $\frac{6\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=0$, $x^2-2=0$, $x=\pm\sqrt{2}$,

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	-1	$(-1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
y'	+	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	–	0	+
y	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$x=-\sqrt{2}$ – точка min., $x=\sqrt{2}$ – точка max.

№ 981

1) $y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$;

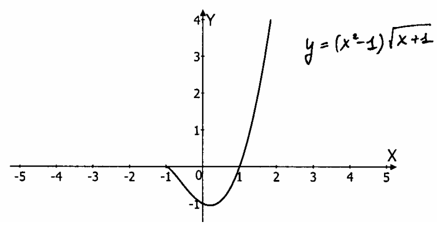
а) Область определения $x > 1$.

б) $y' = 2x\sqrt{x+1} + \dfrac{(x^2-1)}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{4x^2+4x+x^2-1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{5x^2+4x-1}{2\sqrt{x+1}}$;

в) $y' = 0$, $\dfrac{5x^2+4x-1}{2\sqrt{x+1}} = 0$, $5x^2 + 4x - 1 = 0$,

$D/4 = 4 + 5 = 9$; $x_1 = \dfrac{-2+3}{5} = \dfrac{1}{5}$, $x = \dfrac{-2-3}{5} = -1$

x	-1	$(-1; \frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5}; +\infty)$
y'	$\nexists$	–	0	+
y	0	↘	$\dfrac{24\sqrt{30}}{125}$ min	↗



2) $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$;

а) $D(y) = R$; б) $y = 0$ при $x = 0$, $x = -\dfrac{1}{3}$;

в) $y' = (|x|)' \sqrt[3]{1+3x} + \dfrac{|x| \cdot 3}{3\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$,

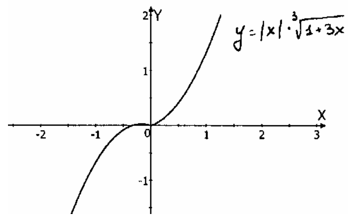
$x > 0$ $\quad y' = \sqrt[3]{1+3x} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = \dfrac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$,

$y' = 0$, $\quad \dfrac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = 0$, $x = -\dfrac{1}{4}$, но $x > 0$. Не подходит.

$x < 0$ $\quad y' = -\sqrt[3]{1+3x} + \dfrac{(-x)}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = -\dfrac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$,

$y' = 0$, $\quad -\dfrac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} = 0$ $\quad x = -\dfrac{1}{4}$ – точка max.

x	$(-\infty; -\frac{1}{4})$	$-\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{4}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	–	$\nexists$	+
y	↗	$\frac{1}{4\sqrt{4}}$ max	↘	0 min	↗



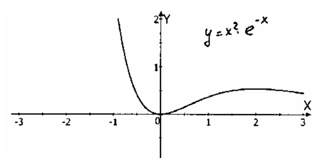
3) $y = x^2 e^{-x}$

а) Область определения: R

б) $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

в) $y' = 0$, $e^{-x}(2x - x^2) = 0$, $x = 0$; $x = 2$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	↘	0 min	↗	$\frac{4}{e^2}$ max	↘



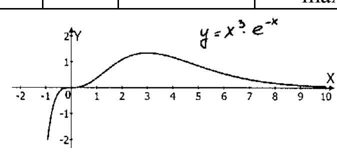
4) $y = x^3 e^{-x}$

а) $D(y)$ =R

б) $y' = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3)$

в) $y' = 0$, $e^{-x} \cdot x^2(3 - x) = 0$, $x = 0$, $x = 3$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	0	+	0	–
y	↗	0	↗	$\frac{27}{e^3}$ max	↘



№ 982

Запишем II закон Ньютона для груза:

$$F\cos\alpha = k\left(mg - F\cdot\sin\alpha\right)$$

$$F(\alpha) = \frac{mg}{\cos\alpha + k\sin\alpha};$$

Найдем min F(α): $F'(\alpha) = \frac{-mg}{\left(\cos\alpha + k\sin\alpha\right)^2}\cdot\left(-\sin\alpha + k\cos\alpha\right)$

$F'(\alpha) = 0, \quad -\sin\alpha + k\cos\alpha = 0, \quad k\cos\alpha = \sin\alpha, \quad tg\alpha = k, \;\; \alpha = arctgk$

Ответ: $\alpha = arctgk$.

X глава.

§ 54 Первообразная

№ 983

1) $F'(x) = \dfrac{6x^5}{6} = x^5 = f(x) \Rightarrow F(x)$ является первообр. $f(x)$ на R;

2) $F'(x) = \dfrac{5x^4}{5} + 0 = x^4 = f(x) \Rightarrow F(x)$ является первообр. $f(x)$ на R.

№ 984

1) $F'(x) = \dfrac{2\cdot(-1)}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2} = f(x)$; 2) $F'(x) = 0 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$;

$F(x)$ является первообр. $f(x)$ при $x > 0$.

№ 985

1) $\dfrac{x^5}{5}$ - первообр. x^4, т.к. $\left(\dfrac{x^5}{5}\right)' = x^4$, значит, все первообразные имеют вид $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + C$;

2) $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ – первообр., т.к. $F'(x) = \dfrac{4x^3}{4} = x^3 = f(x)$.

Общий вид: $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + C$.

3) $F(x) = -\dfrac{x^{-2}}{2}$ – первообр., т.к. $F'(x) = \dfrac{-2x^{-3}}{-2} = x^{-3} = f(x)$.

Общий вид: $F(x) = -\dfrac{x^{-2}}{2} + C$.

4) $F(x) = 2\cdot x^{\frac{1}{2}}$ – первообр., т.к. $F'(x) = 2\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} = f(x)$.

Общий вид: $F(x) = 2\cdot x^{\frac{1}{2}} + C$.

№ 986

1) Все первообр. функции $f(x) = x$ находятся по формуле:

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, т.к. $F'(x) = f(x)$.

Найдем число C, подставив точку $(-1; 3)$:

$3 = \frac{1}{2} + C,\quad C = \frac{5}{2},\ F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2};$

2) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ первообр. имеют вид: $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Чтобы найти C, подставим точку (9, 10):

$10 = \frac{2}{3}\cdot 27 + C,\quad C = -8,\ F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8.$

№ 987

1) $F'(x) = \left(3e^{\frac{x}{3}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}} = f(x)$ – сущ. при $x \in$ R;

2) $F'(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x = f(x)$ – сущ. при $x \in$ R.

№ 988

1) $f(x) = 2x^5 - 3x^2$. По таблице интегрирования:

$F(x) = \frac{2\cdot x^6}{6} - \frac{3\cdot x^3}{3} = \frac{x^6}{3} - x^3$.

2) $f(x) = 5x^4 + 2x^3$, тогда $F(x) = \frac{5\cdot x^5}{5} + \frac{2\cdot x^4}{4} = x^5 + \frac{x^4}{2}$.

3) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, тогда $F(x) = 2\ln x + \frac{3\cdot x^{-1}}{-1} = 2\ln x - \frac{3}{x}$.

4) $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$, тогда $F(x) = \frac{2\cdot x^{-2}}{-2} - 3\ln x = -\frac{1}{x^2} - 3\ln x$.

5) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$, тогда $F(x) = \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{3x}{1} = 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

6) $f(x) = 4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$, тогда $F(x) = \frac{4\cdot x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{6\cdot x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x}$.

№ 989

1) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$, тогда $F(x) = 3\sin x - 4(-\cos x) = 3\sin x + 4\cos x$.
2) $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$, тогда $F(x) = 5\cdot(-\cos x) + 2\cdot\sin x = 2\sin x - 5\cos x$.
3) $f(x) = e^x - 2\cos x$, тогда $F(x) = e^x - 2\sin x$.
4) $f(x) = 3e^x - \sin x$, тогда $F(x) = 3e^x - 1\cdot(-\cos x) = 3e^x + \cos x$.
5) $f(x) = 5 - e^{-x} + 3\cos x$, тогда $F(x) = 5x - (-1)\,e^{-x} + 3\sin x = 5x + e^{-x} + 3\sin x$
6) $f(x) = 1 + 3e^x - 4\cos x$, тогда $F(x) = x + 3e^x - 4\sin x$.

7) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$, тогда

$$F(x)=\frac{6\cdot x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-2\ln x+3e^{x}=\frac{9}{2}x\sqrt[3]{x}-2\ln x+3e^{3},\ \text{x} > 0.$$

8) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^{-x}$, тогда

$$F(x)=\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+3\ln x-2\cdot(-1)\cdot e^{-x}=8\sqrt{x}+3\ln x+2e^{-x},\ \text{x} > 0.$$

№ 990

1) $f(x) = (x + 1)^4$, тогда $F(x)=\frac{(x+1)^5}{5}$.

2) $f(x) = (x - 2)^3$, тогда $F(x)=\frac{(x-2)^4}{4}$.

3) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$, тогда $F(x)=\frac{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{x-2}$, $x > 2$.

4) $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$, тогда $F(x)=\frac{3\cdot(x+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$.

5) $f(x)=\frac{1}{x-1}+4\cos(x+2)$, тогда $F(x) = \ln(x - 1) + 4\sin(x + 2)$, $x > 1$.

6) $f(x)=\frac{3}{x-3}-2\sin(x-1)$, тогда

$F(x) = 3\ln(x - 3) - 2(-\cos(x - 1)) = 3\ln(x - 3) + 2\cos(x - 1)$, $x > 3$.

№ 991

1) $f(x) = \sin(2x + 3)$, тогда $F(x)=\frac{1}{2}(-\cos(2x+3))+C=-\frac{\cos(2x+3)}{2}+C$.

2) $f(x) = \cos(3x + 4)$, тогда $F(x)=+\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$.

3) $f(x) = \cos(\frac{x}{2} - 1)$, тогда $F(x) = 2\sin(\frac{x}{2} - 1) + C$.

4) $f(x) = \sin(\frac{x}{4} + 5)$, тогда $F(x) = -4\cos(\frac{x}{4} + 5) + C$.

5) $f(x)=e^{\frac{x+1}{2}}$, тогда $F(x)=2e^{\frac{x+1}{2}}+C$.

6) $f(x) = e^{3x-5}$, тогда $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x-5} + C$.

7) $f(x) = \frac{1}{2x}$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}\ln x + C$.

8) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$, тогда $F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$.

№ 992

1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1; 2)$; а) $F(x) = \frac{2x^2}{2} + 3x + C$;

б) $2 = 1 + 3 + C$, $C = -2$, значит $F(x) = x^2 + 3x - 2$;

2) $f(x) = 4x - 1$, $M(-1; 3)$; а) $F(x) = 4\cdot\frac{x^2}{2} - x + C = 2x^2 - x + C$

б) $3 = 2 + 1 + C$, $C = 0$, значит $F(x) = 2x^2 - x$

3) $f(x) = \sin 2x$, $M(\frac{\pi}{2}; 5)$; а) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

б) $5 = -\frac{1}{2}\cdot\cos\pi + C = \frac{1}{2} + C$, $C = \frac{9}{2}$, значит $F(x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

4) $f(x) = \cos 3x$, $M(0; 0)$; а) $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

б) $0 = \frac{1}{3}\sin 0 + C = 0 + C$, $C = 0$, значит $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$.

№ 993

1) $f(x) = e^{2x} - \cos 3x$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\sin 3x$;

2) $f(x) = e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$, тогда $F(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x$;

3) $f(x) = 2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$, тогда $F(x) = -10\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$;

4) $f(x) = 3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$, тогда $F(x) = 21\sin\frac{x}{7} + \frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$, тогда

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}} - \frac{4}{4}\cos(4x+2) = \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2);$$

6) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{3x+1}}-\frac{3}{2x-5}$, тогда

$$F(x)=\frac{4\cdot(3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 3}-\frac{3\cdot\ln(2x-5)}{2}=\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2}\ln(2x-5).$$

№ 994

1) $f(x)=\frac{2x^4-4x^3+x}{3}$, тогда

$$F(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2x^5}{5}-\frac{4x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}x^5-x^4+\frac{x^2}{2}\right);$$

2) $f(x)=\frac{6x^3-3x+2}{5}$, тогда

$$F(x)=\frac{1}{5}\left(\frac{6x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right);$$

3) $f(x)=x-3+2x^2-6x=2x^2-5x-3$, тогда

$$F(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-3x=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-3x;$$

4) $f(x)=4x+6x^2-6-9x=6x^2-5x-6$, тогда

$$F(x)=\frac{6x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-6x=2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x.$$

№ 995

1) $f(x)=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}$, тогда $F(x)=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

2) $f(x)=3x\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}$, тогда $F(x)=\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-\frac{2x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}$.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$, тогда $F(x)=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x^2}$;

4) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$, тогда $F(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}$.

№ 996

1) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, тогда $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$;

2) $f(x) = \sin(x - 3x) = -\sin 2x$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$.

№ 997

$y = f(x) = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

тогда $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + 6\sin\frac{x}{2} + C$

$0 = -\frac{2}{5}\cos\frac{5\pi}{3} + 6\sin\frac{\pi}{6} + C = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{5} + 3 + C$, $C = -\frac{14}{5}$,

$F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + 6\sin\frac{x}{2} - \frac{14}{5}$.

№ 998

1) $f(x) = 1 + \frac{3}{x-3}$, тогда $F(x) = x + 3\ln(x - 3)$;

2) $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2}$, $x \neq 1$, $x \neq -2$; тогда $F(x) = \ln(x + 2)$;

3) $f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{2x + \sin 2x}{4}$;

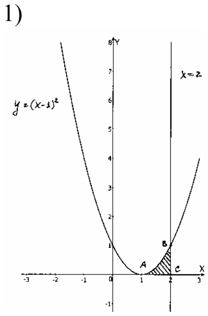
4) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$, тогда

$F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{4\cos 2x - \cos 8x}{16}$.

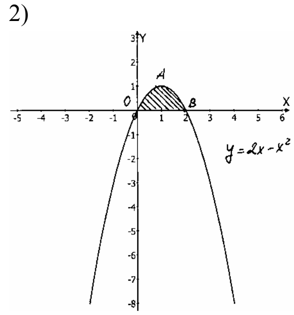
§ 56 Площадь криволинейной трапеции и интеграл

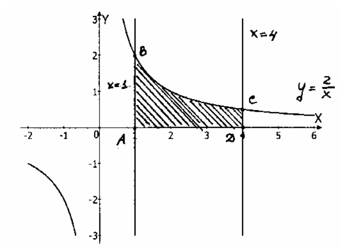
№ 999

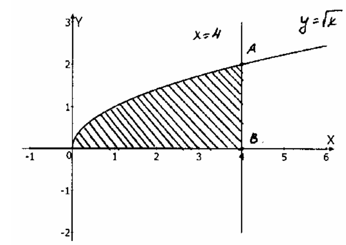
1)



2)

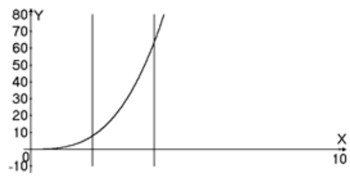


3) 

4) 

№ 1000

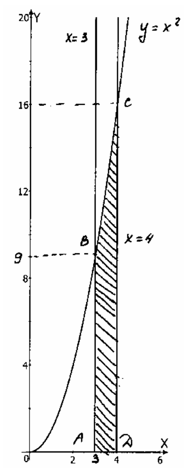
1)



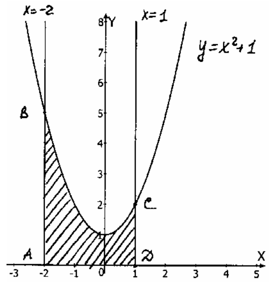
$ABCD$ – искомая трапеция; $S_{ABCD}=\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

$$S_{ABCD}=\int\limits_2^4 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_2^4=\frac{(4)^4}{4}-\frac{(2)^4}{4}=64-4=60 \text{ (кв. ед.)}$$

2)



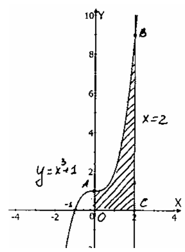
$$S_{ABCD}=\int\limits_3^4 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_3^4=\frac{1}{3}\left((4)^3-(3)^3\right)=\frac{1}{3}(64-27)=\frac{37}{3}.$$



3)

$ABCD$ – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{-2}^{1}\left(x^2+1\right)dx = \frac{x^3}{3}+x\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}+2 = 6$$

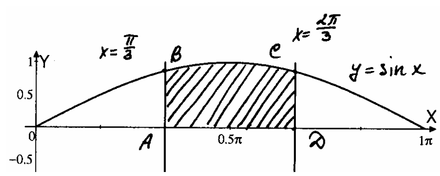


4)

$ABCD$ – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{0}^{2}\left(x^3+1\right)dx = \frac{x^4}{4}+x\Bigg|_{0}^{2} = \frac{16}{4}+2 = 6\,;$$

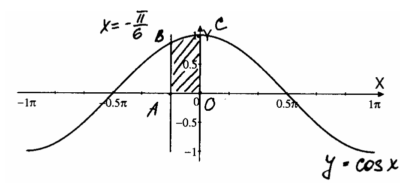
5)



$ABCD$ – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3} = +\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

6)

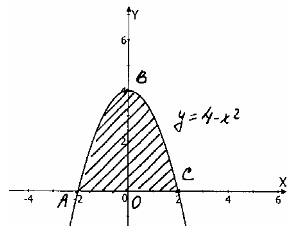


$ABCD$ – искомая трапеция

$$S_{ABCD} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \cos x dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = 0-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

№ 1001

1) $y = 4 - x^2$



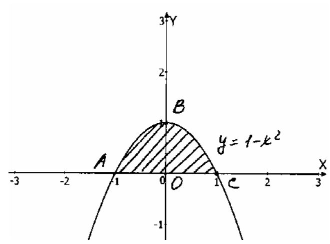
ABC – искомая трапеция

а) $4 - x^2 = 0$, $x = \pm 2$, $a = -2$, $b = 2$

б) $S_{ABC} = \int\limits_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$

$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$;

2) $y = 1 - x^2$

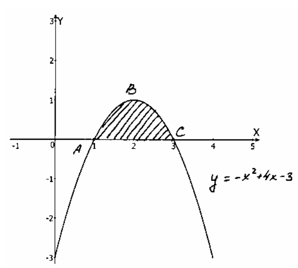


ABC – искомая трапеция

а) $1 - x^2 = 0 \quad x = \pm 1 \quad a = -1 \quad b = 1$

б) $S_{ABC} = \int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$.

3) $y = -x^2 + 4x - 3$



ABC – искомая трапеция

а) $-x^2 + 4x - 3 = 0 \; x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad D/4 = 4 - 3 = 1$

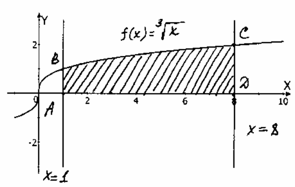
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1 \qquad a = 1 \qquad b = 3$

б) $S_{ABC}=\int\limits_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x\Big|_1^3=-9+18-9+$

$+\frac{1}{3}-2+3=1\frac{1}{3}$

№ 1002

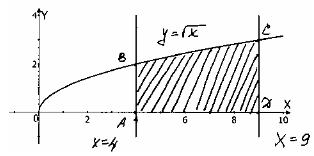
1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=1$, $b=8$



$ABCD$ – искомая трапеция

$$S_{ABCD}=\int\limits_1^8\sqrt[3]{x}dx=\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}\Bigg|_1^8=\frac{3}{4}(16-1)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}$$

2) $f(x)=\sqrt{x}$ $a=4$ $b=9$

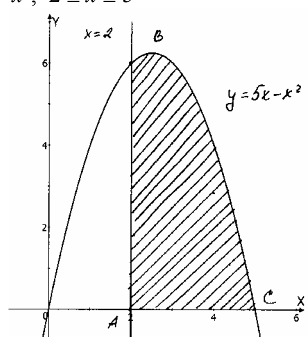


$ABCD$ – искомая трапеция

$$S_{ABCD}=\int\limits_4^9\sqrt{x}dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Bigg|_4^9=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}.$$

№ 1003

1) $b=2$ $f(x)=5x-x^2$, $2\le x\le 5$



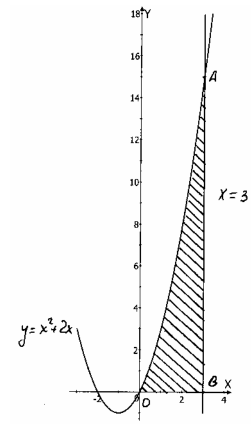
а) $5x - x^2 = 0,\ x(5 - x) = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 5$
б) ABC – искомая трапеция

в) $S_{ABC} = \int\limits_2^5 \left(5x - x^2\right) dx = \left. \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_2^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} - 10 + \frac{8}{3} =$

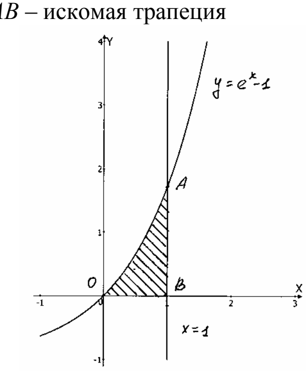
$= \frac{125}{6} + \frac{16}{6} - \frac{60}{6} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

2) $b = 3$, $f(x) = x^2 + 2x$
а) $x^2 + 2x = 0, \qquad x = 0, \qquad x = -2$
б) OAB – искомая трапеция

в) $S_{OAB} = \int\limits_0^3 \left(x^2 + 2x\right) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 \right|_0^3 = 9 + 9 = 18$.



3) $b = 1, \qquad f(x) = e^x - 1$
а) $e^x - 1 = 0, \quad e^x = e^0, \quad x = 0$
б) OAB – искомая трапеция



в) $S_{OAB} = \int\limits_0^1 \left(e^x - 1\right) dx = \left. e^x - x \right|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$

4) $b = 2$ $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

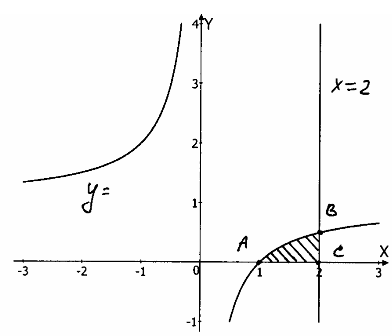
а) $1 - \frac{1}{x} = 0 \qquad x = 0$

б) ABC – искомая трапеция

в)

$S_{ABC} = \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \left. x - \ln x \right|_1^2 =$

$= 2 - \ln 2 - 1 + 0 = 1 - \ln 2$



§ 57 Вычисление интегралов

№ 1004

1) $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$; 2) $\int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9 - 0 = 9$;

3) $\int_{-1}^2 3x^2dx = x^3\Big|_{-1}^2 = 8 + 1 = 9$; 4) $\int_{-2}^3 2xdx = x^2\Big|_{-2}^3 = 9 - 4 = 5$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$;

7) $\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$;

8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_4^9 = 2(3-2) = 2$.

№ 1005

1) $\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$; 2) $\int_0^{\ln 2} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$;

3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos xdx = \sin x\Big|_{-\pi}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0$;

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin xdx = -\cos x\Big|_{-2\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos(-2\pi) = 1 + 1 = 2$;

5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{-2\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}(1+1) = -1$;

6) $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3xdx = +\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{-3\pi}^{0} = \frac{1}{3}(0-0) = 0$.

№ 1006

1) $\int_{-3}^{2} (2x-3)dx = x^2 - 3x\Big|_{-3}^{2} = 4 - 6 - 9 - 9 = -20$;

2) $\int_{-2}^{-1} (5-4x)dx = 5x - 2x^2\Big|_{-2}^{-1} = -5 - 2 + 10 + 8 = 11$;

3) $\int_{-1}^{2} (1-3x^2)dx = x - x^3\Big|_{-1}^{2} = 2 - 8 + 1 - 1 = -6$;

4) $\int_{-1}^{1} (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2\frac{2}{3}$;

5) $\int\limits_0^2 \left(3x^2-4x+5\right)dx=\left(x^3-2x^2+5x\right)\Big|_0^2=8-8+10=10$.

№ 1007

1) $\int\limits_0^4 \left(x-3\sqrt{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4=\left(\frac{x^2}{2}-2x\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^4=8-16=-8$;

2) $\int\limits_1^9 \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=x^2-6\sqrt{x}\Big|_1^9=81-18-1+6=68$;

3) $\int\limits_0^2 e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^2=\frac{1}{3}\left(e^6-1\right)$; 4) $\int\limits_1^3 2e^{2x}dx=e^{2x}\Big|_1^3=e^6-e^2$.

(Опечатка в ответе задачника).

№ 1008

1) $\int\limits_{-2}^1 x(x+3)(2x-1)dx=\int\limits_{-2}^1\left(x^2+3x\right)(2x-1)dx=\int\limits_{-2}^1\left(2x^3+5x^2-3x\right)dx=$

$=\frac{1}{2}x^4+\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\Bigg|_{-2}^1=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-8+\frac{40}{3}+6=-3+15=12$;

2) $\int\limits_{-1}^0 (x+1)\left(x^2-2\right)dx=\int\limits_{-1}^0\left(x^3+x^2-2x-2\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2-2x\Big|_{-1}^0=$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1-2=-1+\frac{1}{12}=-\frac{11}{12}$;

3) $\int\limits_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\limits_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\Bigg|_1^2=$

$=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1=\frac{11}{6}+3=4\frac{5}{6}$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx=\int\limits_{-2}^{-1}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)dx=\left(-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=4+4-2-1=5$.

№ 1009

1) $\int\limits_1^2\frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\limits_1^2\left(5\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\left(\frac{5x\sqrt[3]{x^2}}{\frac{5}{3}}-\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_1^2=$

$=\left(3x\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x^2}\right)\Bigg|_1^2=6\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}-3+3=3\sqrt[3]{4}$;

2) $\int_1^3\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^3\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left.\left(\frac{3x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}\right)\right|_1^3=$

$=2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\Big|_1^3=6\sqrt{x}-2\sqrt{3}-2+2=4\sqrt{3}$;

3) $\int_2^7\frac{4}{\sqrt{x+2}}dx=\left.\frac{4\cdot\sqrt{x+2}}{\frac{1}{2}}\right|_2^7=8\sqrt{x+2}\Big|_2^7=24-16=8$.

№ 1010

1) $\int_1^2\frac{3}{2x-1}dx=\left.\frac{3\ln(2x-1)}{2}\right|_1^2=\frac{3\ln 3}{2}-0=\frac{3\ln 3}{2}$;

2) $\int_0^1\frac{4}{3x+2}dx=\left.\frac{4\ln(3x+2)}{3}\right|_0^1=\frac{4\ln 5}{3}-\frac{4\ln 2}{3}=\frac{4}{3}\ln\frac{5}{2}$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(-2\cos\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

№ 1011

1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}+0=\pi$.

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

4. $\int_0^{\pi}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\pi}1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=$

$=\int_0^{\pi}\frac{4-1+\cos 4x}{4}=\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}\right)dx=\left.\frac{3}{4}x+\frac{\sin 4x}{16}\right|_0^{\pi}=\frac{3\pi}{4}+0-0-0=\frac{3\pi}{4}$;

5) $\int_0^3 x^2\sqrt{x+1}dx = \int_0^3 \sqrt{x^5+x^4}dx = \frac{2}{3}\left(x^5+x^4\right)\sqrt{x^5+x^4}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}\left(3^5+3^4\right)^{\frac{3}{2}} = 3888$

6) $\int_3^4 \frac{x^4-4x+5}{x-2}dx = \int_3^4\left(x-2+\frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x+\ln(x-2)\Big|_3^4 =$

$= 8-8+\ln 2-\frac{9}{2}+6-\ln 1 = \ln 2+\frac{3}{2}$.

№ 1012

$\int_1^b (b-4x)dx = bx-2x^2\Big|_1^b = b^2-2b^2-b+2 =$

$= -b^2-b+2; \quad -b^2-b+2 \geq 6-5b$

$b^2 - 4b + 4 \leq 0(b-2)^2 \leq 0$, это возможно только при $b = 2$.

§ 58 Вычисление площадей с помощью интегралов

№ 1013

а) $S = \int_{-1}^1\left(x^2+4\right)dx = \frac{x^3}{3}+4x\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}+4+\frac{1}{3}+4 = 8\frac{2}{3}$;

б) $S = \int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+x\Big|_0^1 = \frac{2}{3}+1 = 1\frac{2}{3}$;

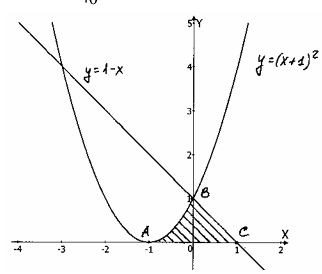
в) $S = \int_1^4 \frac{2}{x}dx = 2\ln x\Big|_1^4 = 2\ln 4-0 = 2\ln 4$.

№ 1014

1) ABC – искомая фигура,

$S_{ABC} = S_{ABO}+S_{OBC} = \int_{-1}^0 (x+1)^2dx+\int_0^1(x-1)dx =$

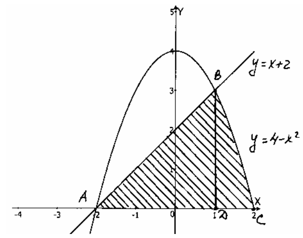
$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^0 + x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-1+1+1-\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$;



2) ABC – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} = \int_{-2}^{1}(x+2)dx + \int_{1}^{2}\left(4-x^2\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^{1} + 4x -$$

$$-\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{2} + 2 - (2-4) + 8 - \frac{8}{3} - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2} + 2 + \frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}\ .$$

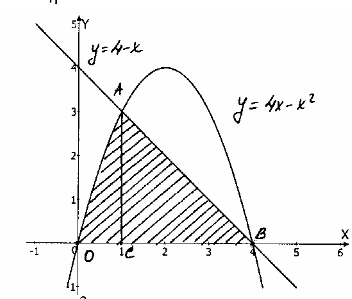


3) OAB – искомая фигура

$4x - x^2 = 4 - x,\qquad x^2 - 5x + 4 = 0,\qquad x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}\qquad x_1 = 4,\ x_2 = 1$

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = \int_{0}^{1}\left(4x - x^2\right)dx + \int_{1}^{4}(4-x)dx =$$

$$= 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} + 4x - \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{4} = 2 - \frac{1}{3} + 16 - 8 - 4 + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{6}\ ;$$



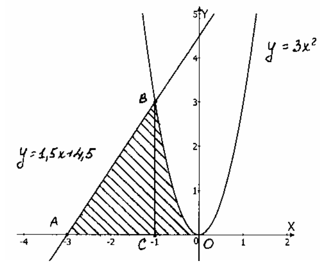
4) $3x^2 = 1{,}5x + 4{,}5,\qquad 2x^2 - x - 3 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}\ ,\ x_1 = \dfrac{3}{2}\ ,\quad x_2 = -1$

ABO – искомая фигура

$$S_{ABO} = S_{ABC} + S_{CBO} = \int_{-3}^{-1}\left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right)dx + \int_{-1}^{0}3x^2dx = \frac{3x^2}{4} + \frac{9}{2}x\Big|_{-3}^{-1} +$$

$$+ x^3\Big|_{-1}^{0} = \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - \frac{27}{4} + \frac{27}{4} + 1 = -6 + 9 + 1 = 4$$



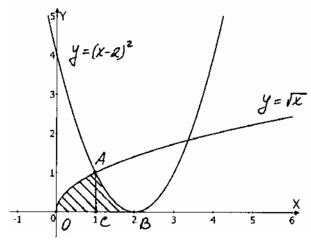
№ 1015

1) $\sqrt{x}=(x-2)^2$, $x=1$

OAB – искомая фигура

$$S_{OAB}=S_{OAC}+S_{CAB}=\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2(x-2)^2dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1+\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{2}{3}+0+\frac{1}{3}=1;$$

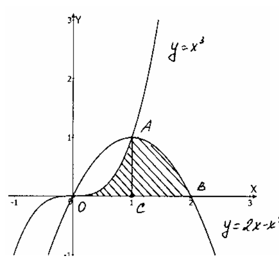


2) OAB – искомая фигура; $x^3=2x-x^2$

$x_1=0$, $x^2+x-2=0$, $x_2=-2$; $x_3=1$

$$S_{OAB}=S_{OAC}+S_{CAB}=\int_0^1x^3dx+\int_1^2\left(2x-x^2\right)dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=$$

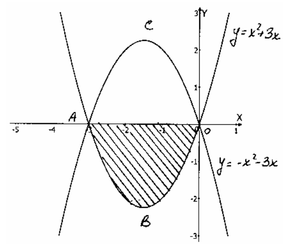
$$=\frac{1}{4}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=3-\frac{25}{12}=\frac{11}{12}$$



№ 1016

1) ABO – искомая фигура; $x^2 + 3x = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = -3$

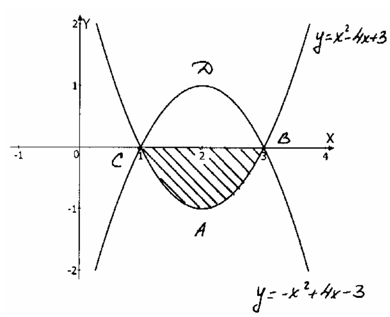
$$S_{ABO} = S_{ACO} = \int_{-3}^{0}\left(-x^2 - 3x\right)dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{0} = -9 + \frac{27}{2} = 4{,}5$$



2) $x^2 - 4x + 3 = 0$; $D/4 = 4 - 3 = 1$, $x = 3$, $x = 1$

$$S_{CAB} = S_{CDB} = \int_{1}^{3}\left(-x^2 + 4x - 3\right)dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\Big|_1^3 =$$

$$= -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1\frac{1}{3}$$



№ 1017

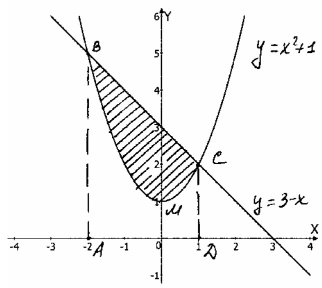
1) $y = x^2 + 1$; $y = 3 - x$

$x^2 + 1 = 3 - x$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

BCM – искомая фигура

$$S_{BCM} = S_{ABCD} - S_{ABMCD} = \int_{-2}^{1}(3 - x)dx - \int_{-2}^{1}\left(x^2 + 1\right)dx = 3x - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} -$$

$$-\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 3 - \frac{1}{2} + 6 + 2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{8}{3} - 2 = 4\frac{1}{2}$$



2) $y=(x+2)^2;\quad y=x+2$

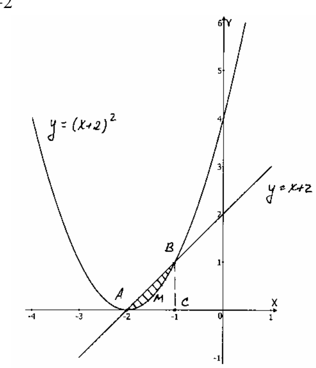
ABM – искомая фигура

$x^2+4x+4=x+2,\ \ x^2+3x+2=0$

$x_1=-2;\quad x_2=-1$

$$S_{AMB}=S_{ABC}-S_{AMC}=\int_{-2}^{-1}(x+2)dx-\int_{-2}^{-1}(x+2)^2dx=\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{-2}^{-1}-$$

$$-\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{1}{2}-2-2+4+\frac{1}{3}-2+4-\frac{8}{3}+8-8=\frac{1}{2}+2-\frac{7}{3}=\frac{1}{6}$$



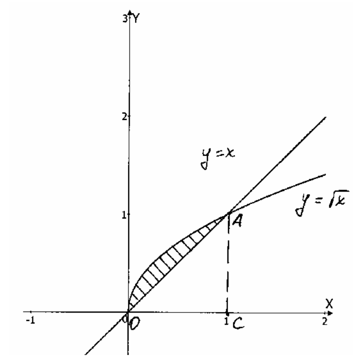
3) $y=\sqrt{x}\ ;\quad y=x$

OMA – искомая фигура

$\sqrt{x}=x,\quad x>0$

$x^2-x=0,\ \ x_1=0;\quad x_2=1$

$$S_{OMA}=S_{OMAC}-S_{OAC}=\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1 xdx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$



№ 1018

1) $y = 6x^2$; $y = (x-3)(x-4)$; $y = 0$

$6x^2 = (x-3)(x-4)$, $6x^2 = x^2 - 7x + 12$

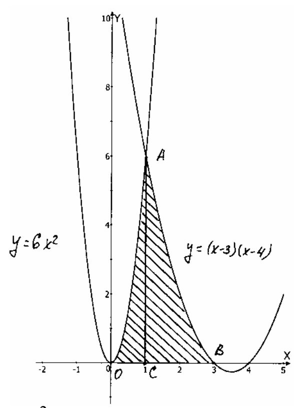
$5x^2 + 7x - 12 = 0$; $D = 49 + 240 = 17^2$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2{,}4$

DAB – искомая фигура

$$S_{AOB} = S_{AOC} + S_{CAB} = \int_0^1 6x^2dx + \int_1^3 \left(x^2 - 7x + 12\right)dx = 2x^3\Big|_0^1 +$$

$$+\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 12x\right)\Bigg|_1^3 = 2 + 9 - \frac{63}{2} + 36 - \frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 12 = 35 - 28 - \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$$



2) $y = 4 - x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = 0$

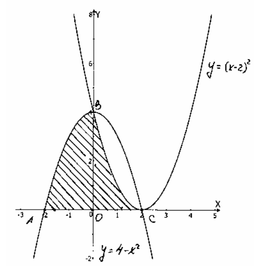
а) $4 - x^2 = x^2 - 4x + 4$; $2x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

б) $4 - x^2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

$ABMC$ – искомая фигура

$$S_{ABMC}=S_{ABO}+S_{OBMC}=\int\limits_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)dx+\int\limits_{0}^{2}(x-2)^2\,dx=4x-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Bigg|_{0}^{2}=0+8-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-8+8-0=8$$



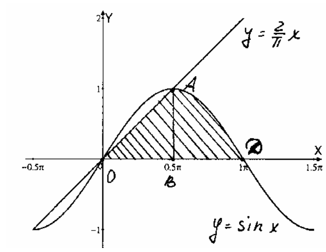
№ 1019

1) Найдем уравнение прямой: общий вид: $y = kx + b$, подставим точки:

(0; 0); $\quad 0=k\cdot 0+b \qquad b=0,$ $\left(\frac{\pi}{2};\,1\right)$; $\;1=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $\quad k=\frac{2}{\pi}$, $\quad y=\frac{2}{\pi}x$,

$$S_{OAD}=S_{OAB}+S_{BAD}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx=\frac{x^2}{\pi}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

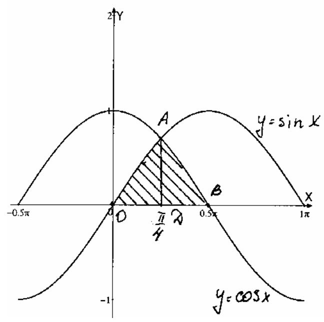
$$=\frac{\pi}{4}+1+0=\frac{\pi}{4}+1$$



2) OAB – искомая фигура

$$S_{OAB}=S_{OAD}+S_{DAB}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+-\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$$



№ 1020

1) $y = 6x - x^2$; $\quad y = x + 4$

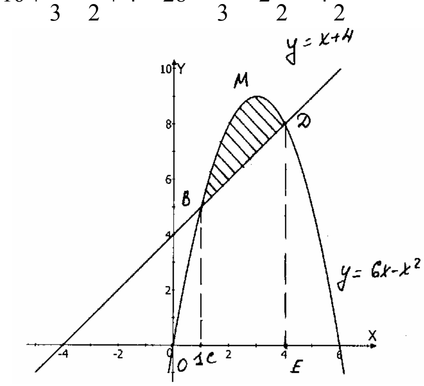
$6x - x^2 = x + 4, \qquad x^5 - 5x + 4 = 0, \qquad x_1 = 4, \qquad x_2 = 1$

BMD – искомая площадь

$$S_{BMD} = S_{CMF} - S_{CBDF} = \int_1^4 \left(6x - x^2\right)dx - \int_1^4 (x+4)dx =$$

$$= \int_1^4 \left(6x - x^2 - x - 4\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = 28 - \frac{63}{3} - 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

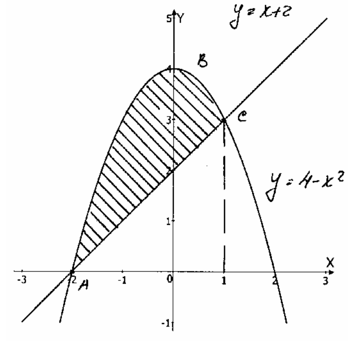


2) $y = 4 - x$; $\quad y = x + 2$

$4 - x^2 = x + 2, \qquad x^2 + x - 2 = 0, \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 1$

$$S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{ACD} = \int_{-2}^{1} \left(4 - x^2\right)dx - \int_{-2}^{1} (x+2)dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$



№ 1021

1) $y = 2 - x^2$; $y = -x$

$2 - x^2 = -x$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2$, $x = -1$

BCD – искомая фигура

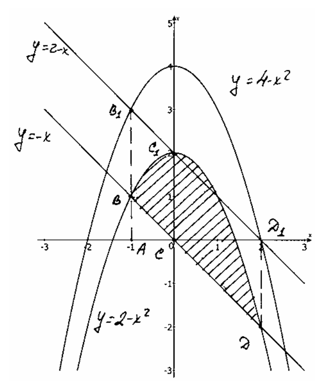
Перенесем ее на вектор (0; 2), тогда функции примут вид:

$y = 4 - x^2$ и $y = 2 - x$

$$S_{B_1C_1D_1} = S_{BCD} = S_{AB_1C_1D_1} - S_{AB_1D_1} = \int_{-1}^{2}\left(4 - x^2\right)dx - \int_{-1}^{2}(2 - x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(-x^2 + x + 2\right)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

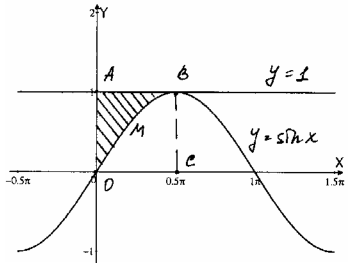


2) $y = 1$; $x = 0$; $y = \sin x$; $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

ABO – искомая фигура

$$S_{ABO} = S_{OABC} - S_{OBC} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$



№ 1022

1) Найдем прямую $y = kx + b$

$(0; -3)$; $-3 = k \cdot 0 + b, b = -3$; $(1; 0)$; $0 = k - 3$, $k = 3$, $y = 3x - 3$

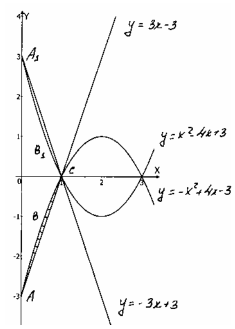
$-x^2 + 4x - 3 = 3x - 3$, $x^2 - x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

ABC – искомая фигура

Рассмотрим симметричную ей фигуру $A_1B_1C_1$.

$$S_{A_1B_1C} = S_{ABC} = S_{OA_1C_1} - S_{OA_1B_1C} = \int_0^1 (-3x + 3) dx - \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{6}$$



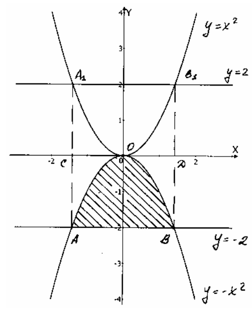
2) $y = -x^2$, $y = -2$, $-x^2 = -2, x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$

AOB – искомая фигура

Рассмотрим симметричную ей фигуру A_1OB_1.

$$S_{AOB} = S_{A_1OB_1} = S_{OA_1BD} - S_{CA_1OB_1D} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx =$$

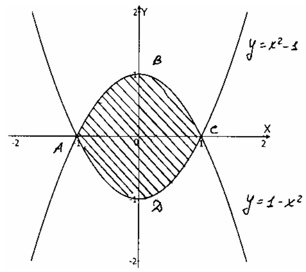
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) dx = 2x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$



3) $y = 1 - x^2$; $y = x^2 - 1$, $1 - x^2 = x^2 - 1$, $2x^2 = 2$, $x = \pm 1$
$ABCD$ – искомая фигура, $S_{ABC} = S_{ADC}$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 2S_{ABC} = 2\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{3}$$



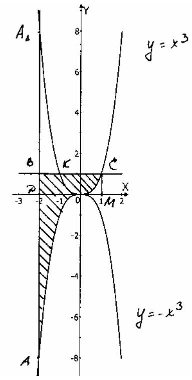
4) $y = x^3$; $y = 1$; $x = -2$
$ABCO$ — искомая фигура,
$S_{ABCO} = S_{DBCO} + S_{ADO}$,; $S_{DBCO} = S_{DBKO} + S_{KOC}$; $S_{DBKO} = 2 \cdot 1$;

$$S_{KOC} = S_{OKCM} - S_{OCM} = 1 \cdot 1 - \int_{0}^{1} x^3 dx = 1 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Теперь рассмотрим фигуру, симметричную $ADO - A_1DO$:

$$S_{ADO} = S_{A_1DO} = \int_{-2}^{0} -x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{0} = 0 + \frac{16}{4} = 4$$

$S_{ABCO} = 2 + \dfrac{3}{4} + 4 = 6\dfrac{3}{4}$.



№ 1023

1) $y = x^2 + 10$; (0; 1).

Уравнение касательной $y = kx + b$

(0; 1); $1 = k \cdot 0 + b$, $b = 1$, $y = kx + 1$

$y = f(x_0) + k(x - x_0)$, где x_0 – точка касания

$y = x_0^2 + 10 + kx - kx_0$, значит: $kx + 1 = x_0^2 + 10 + kx - kx_0$

$x_0^2 - kx_0 + 9 = 0$, но $k = f'(x_0) = 2x_0$

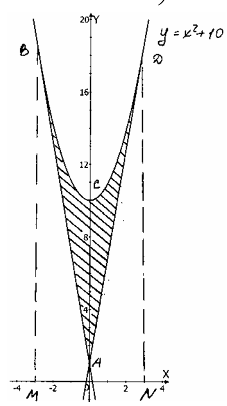
$x_0^2 - 2x_0^2 + 9 = 0$ $\quad 9 - x_0^2 = 0$ $\quad x_0 = \pm 3$

Т.е. $k = \pm 6$ $\quad y = 6x + 1$ $\quad y = -6x + 1$

$ABCD$ – искомая фигура.

$$S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 2(S_{OCDN} - S_{OADN}) = 2\left(\int_0^3 (x^2 + 10)dx - \int_0^3 (6x + 1)dx\right) =$$

$$= 2\int_0^3 (x^2 - 6x + 9)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\Big|_0^3\right) = 2(9 - 27 + 27) = 18\ .$$



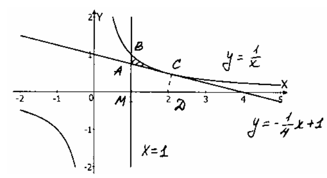
2) $y=\frac{1}{x}$; $x=1$, и касат. $x_0=2$

$y(x_0)=\frac{1}{2}$, $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y'(x_0)=-\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$, $y=-\frac{1}{4}x+1$;

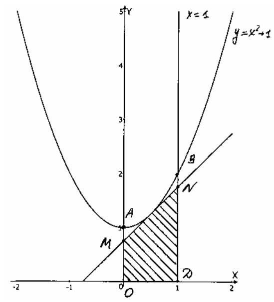
ABC – искомая фигура

$$S_{ABC}=S_{MBCD}-S_{MACD}=\int_1^2\frac{1}{x}dx-\int_1^2\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x-1\right)dx=$$

$$=\ln x+\frac{x^2}{8}-x\Big|_1^2=\ln 2+\frac{1}{2}-2-0-\frac{1}{8}+1=\ln 2-1+\frac{3}{8}=\ln 2-\frac{5}{8}.$$



№ 1024



$y=x^2+1$; $y=0$; $x=0$; $x=1$

1) Уравнение касательной: $y=f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$, $y=y_0+2x_0(x-x_0)$,

$y=2x_0\cdot x+x_0^2-2x_0^2+1$, $y=2x_0\cdot x-x_0^2+1$;

2) $OMND$ – искомая трапеция

$$S_{OMND}=\int_0^1\left(2x_0x-x_0^2+1\right)dx=x_0x^2-x_0^2x+x\Big|_0^1=x_0-x_0^2+1-0$$

Найдем наибольшее значение функции на (0; 1).

$f(x)=-x^2+x+1$, $f'(x)=-2x+1$, $f'(x)=0$, $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$,

$x=\frac{1}{2}$ – точка max., $x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=1\frac{1}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

§ 59 Применение производной и интеграла к решению практических задач

№ 1025

$v(t) = s'(t)$, s – первообразная $v(t)$

1) $s(t) = \int\limits_0^4 (3t^2 + 1)dt = t^3 + t\Big|_0^4 = 64 + 4 = 68$;

2) $s(t) = \int\limits_1^3 (2t^2 + t)dt = \dfrac{2t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}\Bigg|_1^3 = 18 + \dfrac{9}{2} - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = 18 + 4 - \dfrac{2}{3} = 21\dfrac{1}{3}$.

№ 1026

1) $v(t) = 0$, $4t - t^2 = 0$, $t = 0$, $t = 4$;

2) $s(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int\limits_0^4 (4t - t^2)dt = 2t^2 - \dfrac{t^3}{3}\Bigg|_0^4 = 32 - \dfrac{64}{3} - 0 = 10\dfrac{2}{3}$.

№ 1027

1) $y = 3x - 2x^2 + C$; 2) $y = 2x^3 - 4x^2 + x + C$; 3) $y = \dfrac{3}{2}e^{2x} + C$;

4) $y = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sin 2x + C = 2\sin 2x + C$.

5) $y = 3 \cdot (-\cos x) + C = -3\cos x + C$; 6) $y = \sin x + \cos x + C$.

№ 1028

1) $y = -\cos x + C$; $-\cos 0 + C = 0$, $C = 1$, $y = -\cos x + 1$
2) $y = 2\sin x + C$; $2\sin \pi + C = 1$, $C = 1$, $y = 2\sin x + 1$
3) $y = x^3 + 2x^2 - x + C$; $1 + 2 - 1 + C = -2$, $C = -4$; $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$
4) $y = 2x + x^2 - x^3 + C$; $-2 + 1 + 1 + C = 2$, $C = 2$; $y = 2x + x^2 - x^3 + 2$
5) $y = e^x + C$; $e + C = 1$, $C = 1 - e$, $y = e^x + 1 - e$
6) $y = -e^{-x} + C$; $-1 + C = 2$ $C = 3$ $y = -e^{-x} + 3$.

№ 1029

$y' = -C_1\omega\sin \omega x + C_2\omega\cos \omega x$; $y'' = -C_1\omega^2\cos \omega x - C_2\omega^2\sin \omega x$;
$y'' + \omega^2 y = -C_1\omega^2\cos \omega x - C_2\omega^2\sin \omega x + \omega^2 C_1\cos \omega x + \omega^2 C_2\sin \omega x = 0$;
$0 = 0$ – верно при любых C_1 и C_2.

№ 1030

Скорость распада $m'(t) = \dfrac{0{,}001 \text{ г}}{10 \text{ л}} = 0{,}0001$

$m'(t) = k\, m(t)$ решение $m(t) = m_0 e^{-kt}$
В нашем случае $m'(t)=0{,}0001$ и $m_0=1$, $t=10$, $m(t) = 0{,}999$, $0{,}999=1\cdot e^{-10k}$

$e^{-10k} = 0{,}999$, $-10k = \ln 0{,}999$, $k = -\dfrac{\ln 0{,}999}{10}$, $0{,}5 = 1 \cdot e^{\frac{\ln 0{,}999}{10}\cdot t}$,

$\dfrac{\ln 0{,}999}{10} \cdot t = \ln 0{,}5$, $t = \dfrac{10 \ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}$, $t \approx 6928$.

№ 1031

$F = kx;\quad k = \frac{F}{x} = \frac{2}{0{,}01} = 2\,,\quad F = 200x$

$$A = \int\limits_0^{0{,}03} 200x\,dx = 100x^2\Big|_0^{0{,}03} = 0{,}09 - 0 = 0{,}09 \text{ Дж.}$$

№ 1032

$F = kx,\quad k = \frac{F}{x} = \frac{3}{0{,}01} = 300\,,\qquad F = 300x$

$$A = \int\limits_0^{0{,}08} 300x\,dx = 150x^2\Big|_0^{0{,}08} = 0{,}96 \text{ Дж.}$$

Упражнения к главе X

№ 1033

1) $f(x) = \cos x$, тогда $F(x) = \sin x + C$
$(0; -2)$: $-2 = \sin 0 + C$, $C = -2$; $F(x) = \sin x - 2$
2) $f(x) = \sin x$, тогда $F(x) = -\cos x + C$
$(-\pi; 0)$: $0 = -\cos(-\pi) + C$, $C = -1$; $F(x) = -\cos x - 1$.
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, тогда $F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$(4; 5)$: $5 = 2\sqrt{4} + C$, $C = 1$; $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$
4) $f(x) = e^x$, тогда $F(x) = e^x + C$
$(0; 2)$: $2 = 1 + C$, $C = 1$; $F(x) = e^x + 1$.
5) $f(x) = 3x^2 + 1$, тогда $F(x) = x^3 + x + C$
$(1; -2)$: $-2 = 1 + 1 + C$, $C = -4$; $F(x) = x^3 + x - 4$
6) $f(x) = 2 - 2x$, тогда $F(x) = 2x - x^2 + C$
$(2; 3)$: $3 = 4 - 4 + C$, $C = 3$; $F(x) = 2x - x^2 + 3$.

№ 1034

1) $\int\limits_{-1}^{2} 2dx = 2x\Big|_{-1}^{2} = 4 + 2 = 6$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} (3 - x)dx = 3x - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 6 - 2 + 6 + 2 = 12$;

3) $\int\limits_1^3 \left(x^2 - 2x\right)dx = \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_1^3 = 9 - 9 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} \left(2x - 3x^2\right)dx = x^2 - x^3\Big|_{-1}^{1} = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$;

5) $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}(16 - 1) = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$;

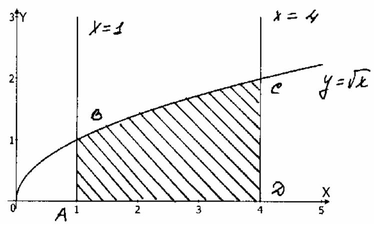
6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^8 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$; 7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

№ 1035

1) $y=\sqrt{x}$; $x=1$; $x=4$; $y=0$

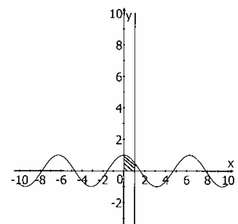
$ABCD$ – искомая фигура

$$S_{ABCD}=\int_1^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$



2) $y=\cos x$ $x=0$ $x=\frac{\pi}{3}$ $y=0$; $OABC$ – искомая фигура;

$$S_{OABC}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

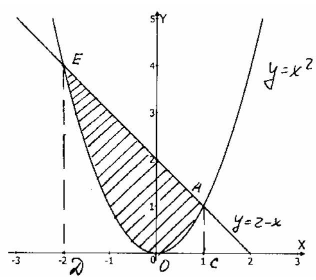


3) $y=x^2$; $y=2-x$, $x^2=2-x$, $x^2+x-2=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$,

EOA – искомая фигура

$$S_{EOA}=S_{DEAC}-S_{EDOAC}=\int_{-2}^{1}(2-x)dx-\int_{-2}^{1}x^2dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{-2}^{1}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4=8-3-\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$$



4) $y = 2x^2$; $y = 0{,}5x + 1{,}5$; $2x^2 = 0{,}5x + 1{,}5$,

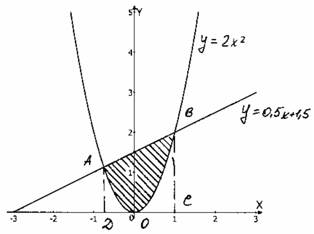
$4x^2 - x - 3 = 0$; $D = 1 + 48 = 49$, $x_1 = 1$ $x_2 = -\frac{3}{4}$,

AOB – искомая фигура,

$$S_{AOB} = S_{DABC} - S_{DAOBC} = \int_{-\frac{3}{4}}^{1}\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)dx - \int_{-\frac{3}{4}}^{1}2x^2dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{1}\left(-2x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)dx = -\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}\Big|_{-\frac{3}{4}}^{1} = -\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-$$

$$-\left(\frac{2\cdot 27}{3\cdot 64}+\frac{9}{16\cdot 4}-\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\right) = \frac{13}{12}+\frac{45}{64} = 1\frac{151}{192}.$$



№ 1036

1) $\int_0^1 \left(5x^4 - 8x^3\right)dx = x^5 - 2x^4\Big|_0^1 = 1 - 2 = -1$;

2) $\int_{-1}^{2}\left(6x^3 - 5x\right)dx = \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2\Big|_{-1}^{2} = 24 - 10 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 15$

(опечатка в ответе задачника)

3) $\int_1^4 \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx = \int_1^4\left(3\sqrt{x} - \frac{7}{\sqrt{x}}\right)dx = 2x\sqrt{x} - 14\sqrt{x}\Big|_1^4 =$

$= 16 - 28 - 2 + 14 = 0$;

4) $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx = \int_1^8\left(4\sqrt[3]{x} - \frac{16}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = 3x\sqrt[3]{x} - 48\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$

$= 48 - 96 - 3 + 48 = -3$;

5) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$;

6) $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(2x-3)^3}\cdot\frac{1}{2}\Big|_2^6 = \frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3}\Bigg|_2^6 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$.

№ 1037

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx = -\frac{1}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}\left(\cos 0-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$;

3) $\int\limits_1^3 3\sin(3x-6)dx = -1\cdot\cos(3x-6)\big|_1^3 = -\cos(+3)+\cos(-3) =$

$= -\cos 3+\cos 3 = 0$;

4) $\int\limits_0^3 8\cos(4x-12)dx = 2\sin(4x-12)\big|_0^3 = 2(\sin 0-\sin(-12)) =$

$= 2(0+\sin 12) = 2\sin 12$.

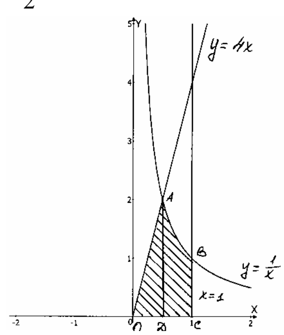
№ 1038

1) $y = \frac{1}{x}$; $y = 4x$; $x = 1$; $y = 0$, $\frac{1}{x} = 4x$, $4x^2 = 1$, $x = \pm\frac{1}{2}$.

OABC – искомая фигура

$S_{OABC} = S_{OAD} + S_{DABC} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 4x dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}dx = 2x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$

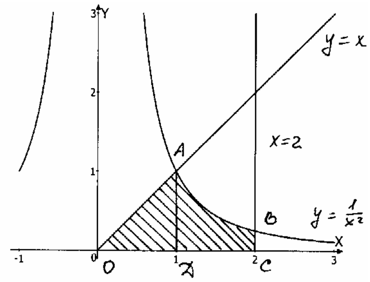
$= \frac{1}{2} + \ln 1\cdot\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}$;



2) $y=\dfrac{1}{x^2}$; $y=x$; $x=2$; $y=0$; $\dfrac{1}{x^2}=x$, $x^3=1$, $x=1$.

$OABC$ – искомая фигура

$$S_{OABC}=S_{OAD}+S_{DABC}=\int_0^1 xdx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\left.\frac{1}{x}\right|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1.$$

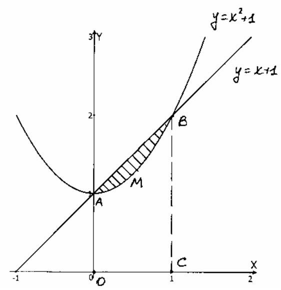


3) $y=x^2+1$; $y=x+1$, $x^2+1=x+1$, $x^2-x=0$, $x_1=0$, $x_2=1$

AMB – искомая фигура

$$S_{AMB}=S_{OABC}-S_{OAMBC}=\int_0^1(x+1)dx-\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1\left(x+1-x^2-1\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};$$



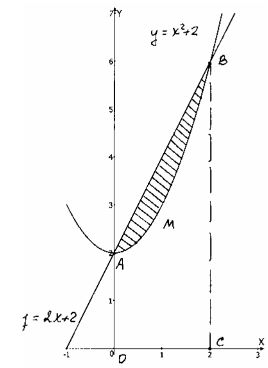
4) $y=x^2+2$; $y=2x+2$

$x^2+2=2x+2$, $x^2-2x=0$, $x_1=0$, $x_2=2$

AMB – искомая фигура

$$S_{AMB}=S_{OABC}-S_{OAMBC}=\int_0^2(2x+2)dx-\int_0^2\left(x^2+2\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left.x^2-\frac{x^3}{3}\right|_0^2=4-\frac{8}{3}=1\frac{1}{3}.$$



№ 1039

1) $y = x^2 - 6x + 9;\qquad y = x^2 + 4x + 4;\qquad y = 0$

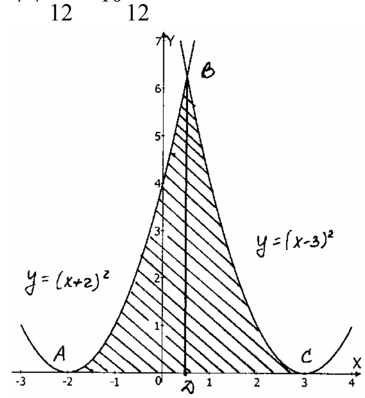
$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 4x + 4,\qquad 10x = 5,\qquad x = \frac{1}{2}$

ABC – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (x+2)^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} (x-3)^2\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\Big|_{-2}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\Big|_{\frac{1}{2}}^{3} = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{8}{3} - 8 + 8 + 9 - 27 + 27 - \frac{1}{24} + \frac{3}{4} - \frac{9}{2} =$$

$$= 11 - 4 + \frac{3}{4} + \frac{8}{3} = 7 + \frac{41}{12} = 10\frac{5}{12}$$



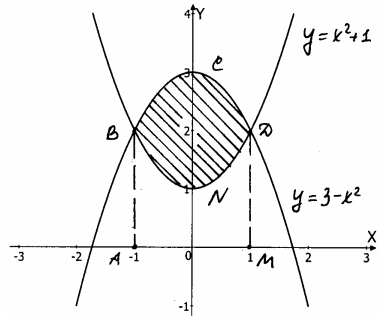
2) $y = x^2 + 1;\qquad y = 3 - x^2$

$x^2 + 1 = 3 - x^2, 2x^2 = 2,\qquad x^2 = 1,\quad x = \pm 1$

$BCDN$ – искомая фигура

$$S_{BCDN} = S_{ABCDM} - S_{ABNDM} = \int_{-1}^{1}\left(3 - x^2\right)dx - \int_{-1}^{1}\left(x^2 + 1\right)dx =$$

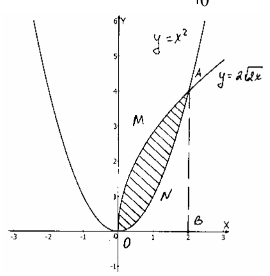
$$= \int_{-1}^{1}\left(-2x^2 + 2\right)dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.$$



3) $y = x^2$; $y = 2\sqrt{2x}$, $x^2 = 2\sqrt{2x}$, $x^4 = 8x$, $x\,(x^3 - 8) = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$,
OMAN – искомая фигура

$$S_{OMAN} = S_{OMAB} - S_{ONAB} = \int_{0}^{2} 2\sqrt{2x}\,dx - \int_{0}^{2} x^2 dx = \int_{0}^{2}\left(2\sqrt{2x} - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{4}{3}2x\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$



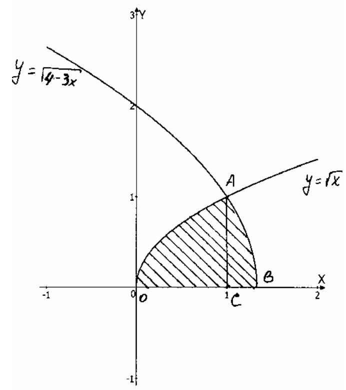
4) $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{4 - 3x}$; $y = 0$

$\sqrt{x} = \sqrt{4 - 3x}$, $x = 4 - 3x$, $4x = 4$, $x = 1$

OAB – искомая фигура

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = \int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx + \int_{1}^{\frac{4}{3}}\sqrt{4 - 3x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\left(4 - 3x\right)\times$$

$$\times\frac{1}{3}\Bigg|_1^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$



№ 1040

1) $y = x^2 - 2x + 2$; $x = 1$, точка пересечения параболы с Oy

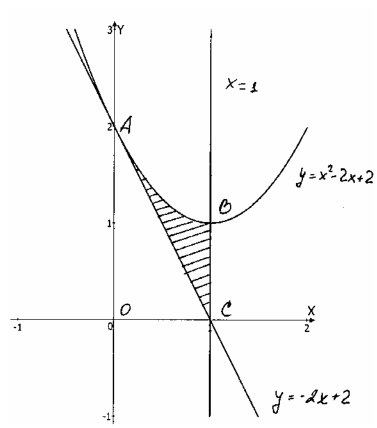
$x = 0$; $y = 0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$; $(0; 2)$

$y(0) = 2$; $y' = 2x - 2$, $y'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$, $y = 2 - 2\,(x - 0)$, $y = -2x + 2$,

ABC – искомая фигура

$$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC} = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx - \int_0^1 \left(-2x + 2\right)dx = \int_0^1 \left(x^2\right)dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

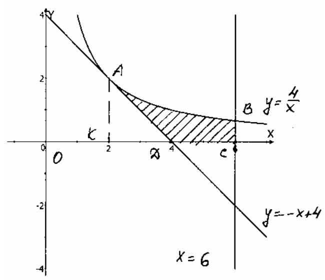


2) $y = \dfrac{4}{x}$; $x_0 = 2$; $y = 0$; $x = 6$, $y(2) = 2$, $y' = -\dfrac{4}{x^2}$, $y'(2) = -\dfrac{4}{4} = -1$,

$y = 2 - (x - 2)$ $y = -x + 4$, $DABC$ – искомая фигура;

$$S_{DABC}=S_{KABC}-S_{KAD}=\int_2^6\frac{4}{x}dx-\int_2^4(-x+4)dx=4\ln x\Big|_2^6+\frac{x^2}{2}-4x\Big|_2^4=$$

$$=4\ln 6-4\ln 2+8-16-2+8=4\ln 3-2$$



№ 1041

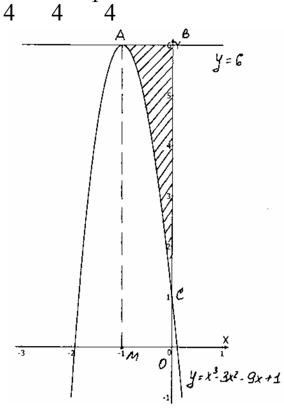
1) $y=x^3-3x^2-9x+1;\quad x=0;\quad y=6;\quad x<0$

ABC – искомая фигура

$$S_{ABC}=S_{MABO}-S_{MACO}=\int_{-1}^{0}6dx-\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x^2-9x+1\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-x^3+3x^2+9x+5\right)dx=-\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{9x^2}{2}+5x\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=\frac{1}{4}+1-\frac{9}{2}+5=6-\frac{17}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$$

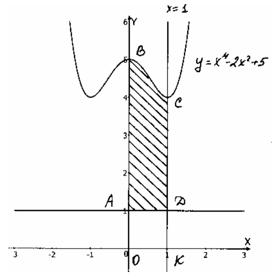


2) $y=x^4-2x^2+5;\ y=1;\quad x=0;\quad x=1$

$ABCD$ – искомая фигура

$$S_{ABCD}=S_{OBCK}-S_{OADK}=\int_0^1\left(x^4-2x^2+5\right)dx-\int_0^1 1dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^4-2x^2+4\right)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+4x\Big|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+4=4-\frac{7}{15}=3\frac{8}{15}.$$



№ 1042

$y = x^2 + px$ – парабола, ветви направлены вверх. Вершина $\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4}\right)$, пересечение с осями: (-p; 0) и (0; 0). Рассмотрим два случая.

а) $\boldsymbol{p} > 0$. $y = kx + 1$ проходит через (0; 1)

$x^2 + px = kx + 1$, $x^2 + (p - k)x - 1 = 0$, $D = (p - k)^2 + 4$

Точки пересечения:

$$x_1 = \frac{k - p - \sqrt{D}}{2}, \qquad x_2 = \frac{k - p + \sqrt{D}}{2}$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2}(kx+1)dx - \int_{x_1}^{x_2}\left(x^2 + px\right)dx = k\frac{x^2}{2} + x\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{x^3}{3} - p\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= (k-p)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\Big|_{x_1}^{x_2} = (k-p)\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} + x^2 - (k-p)\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} - x^2 =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) + \left(\frac{k-p}{2}\right)\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \left(x_2 - x_1\right), \text{ но } x_2 - x_1 = \sqrt{D}$$

$$x_2^2 - x_1^2 = \frac{1}{4}\left(\left(k - p + \sqrt{D}\right)^2 - \left(k - p - \sqrt{D}\right)^2\right) = (k-p)\sqrt{D}$$

$$x_2^3 - x_1^3 = \left(x_2 - x_1\right)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_1^2\right) = \frac{1}{4}\sqrt{D}\Big(\left(k - p + \sqrt{D}\right)^2 + (k-p)^2 -$$

$$- D + \left(k - p - \sqrt{D}\right)^2\Big) = \frac{1}{4}\sqrt{D}\left(2(k-p)^2 + 2D + (k-p)^2 - D\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{D}\left(3(k-p)^2 + D\right)$$

$$S = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{D}\left(3(k-p)^2 + D\right) + \left(\frac{k-p}{2}\right)(k-p)\sqrt{D} + \sqrt{D} =$$

$$= \sqrt{D}\left(-\frac{1}{4}(k-p)^2 - \frac{1}{12}D + \frac{1}{2}(k-p)^2 + 1\right) = \sqrt{D}\left(\frac{1}{4}(k-p)^2 - \frac{1}{12}D + 1\right)$$

т.к. $D = (p - k)^2 + 4$, то

$$S=\sqrt{(p-k)^2+4}\cdot\left(\frac{1}{4}(k-p)^2-\frac{1}{12}(k-p)^2-\frac{1}{3}+1\right)=\sqrt{(p-k)^2+4}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{6}(k-p)^2+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}\sqrt{(p-k)^2+4}\cdot\left((k-p)^2+4\right).$$

Найдем наименьшее $S(k)$

Пусть $(p-k)^2+4=t$, $S(t)=\frac{1}{6}t\sqrt{t}$, $t \in [4; +\infty)$, $S(t)$ – возрастающая функция, поэтому наше значение достигается при t=4, $(p-k)^2=0$, $\boldsymbol{p=k}$**;**

б) $\boldsymbol{p}<0$ – этот случай симметричен а). Все выкладки те же и ответ: $\boldsymbol{k=p}$.

Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа.

№ 1043 $0{,}025\cdot 3{,}2=\frac{1}{40}\cdot\frac{32}{10}=\frac{8}{100}=0{,}08$.

№ 1044 $0{,}42\cdot x=12{,}6$, $x=\frac{12{,}6}{0{,}42}=\frac{126\cdot 100}{10\cdot 42}=\frac{18\cdot 10}{1\cdot 6}=30$.

№ 1045 $x=\frac{1{,}3}{39}\cdot 100=\frac{13\cdot 100}{10\cdot 39}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}(\%)$.

№ 1046 $x=\frac{46{,}6}{11{,}65}\cdot 100=\frac{466\cdot 100\cdot 100}{10\cdot 1165}=\frac{2\cdot 1000}{5}=400(\%)$.

№ 1047 $1{,}75\cdot x=78{,}75$, $x=\frac{78{,}75}{1{,}75}=\frac{7875\cdot 100}{100\cdot 175}=45$.

№ 1048 $x=1{,}8\cdot 7{,}5=\frac{9}{5}\cdot\frac{15}{2}=\frac{27}{2}=13{,}5$.

№ 1049

x – исходная цена

1) понизили на 24%; $x_1=(x-0{,}24x)=0{,}76x$

2) снизили на 50%x_1; $x_2=(x_1-0{,}5x_1)=0{,}5x_1=0{,}5\cdot 0{,}76x=0{,}38x$

$x-x_2=x-0{,}38x=0{,}62x$

Цена уменьшилась на 62%.

№ 1050

цинк $x=18$ кг, олово $y=6$ кг, медь $z=36$ кг

$$\%\text{ цинка}=\frac{x}{x+y+z}\cdot 100\%=\frac{18}{18+6+36}\cdot 100\%=30\%$$

$$\%\text{ олова}=\frac{y}{x+y+z}\cdot 100\%=\frac{6}{18+6+36}\cdot 100\%=10\%$$

% меди $= \dfrac{z}{x+y+z} \cdot 100\% = \dfrac{36}{60} = 60\%$.

Ответ: цинк – 30%, олово – 10%, медь – 60%.

№ 1051

Пусть x – стоимость товара, y – стоимость перевозки. Тогда из условий следует, что: $\begin{cases} x + y = 3942 \\ 0{,}08x = y \end{cases}$, $\begin{cases} 1{,}08x = 3942 \\ y = 0{,}08x \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3650 \\ y = 292 \end{cases}$. Ответ: 3650 р.

№ 1052

Пусть $h = 5$ см – высота, $S = 4$ см^2 – площадь основания.

$V_1 = \dfrac{1}{3} h \cdot S$, $V_2 = \dfrac{1}{3} h_2 \cdot S_2$, $h_2 = 1{,}1h$, $S_2 = 1{,}1S$

$V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot 1{,}1h \cdot 1{,}1S = 1{,}21 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S = 1{,}21V_1$

$(V_2 - V_1) \cdot 100\% = (1{,}21 - 1)V_1 \cdot 100\% = 21\%$.

Ответ: объем увеличится на 21%.

№ 1053

Пусть x – искомое число, тогда

$x = a \cdot 72 + 68$

$\dfrac{x}{12} = \dfrac{a \cdot 72}{12} + \dfrac{68}{12} = \dfrac{6a \cdot 12}{12} + \dfrac{5 \cdot 12}{12} + 8 = \dfrac{12(6a+5)}{12} + 8$

Ответ: Остаток: 8.

№ 1054

Пусть эти числа x и y. Тогда:

$\begin{cases} x + y = 1100 \\ 0{,}06x = 0{,}05y \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1100 \\ y = \dfrac{5}{6}x \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{11}{6}x = 1100 \\ x = \dfrac{5}{6}y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 600 \\ x = 500 \end{cases}$

Ответ: Наибольшее – 600.

№ 1055

За первый год он получит прибыль $0{,}03 \cdot 600 = 18$ (р.). На счету будет $600 + 18 = 618$ р. В конце второго года он получит: $1{,}03 \cdot 618 = 636{,}54$ (р.), а за третий – $1{,}03 \cdot 636{,}54 = 655{,}64$ (р.).

№ 1056

За год он получил бы $0{,}02 \cdot 500 = 10$ р., а за месяц он получил $\dfrac{1}{12} \cdot 10 = \dfrac{5}{6}$ р. Он снял 100 р., на счете осталось $400\dfrac{5}{6}$ р. Через год он получит $1{,}02 \cdot 400\dfrac{5}{6} = 408{,}85$ р.

№ 1057

1) 23,276 : 2,3 – 3,6 · (17,2 · 0,125 + 0,005 : 0,1) + 6,25 · 3,2

Выполним по действиям.

а) $23{,}276 : 2{,}3 = \dfrac{23276 \cdot 10}{1000 \cdot 23} = \dfrac{1012}{100} = 10{,}12$;

б) $17{,}2 \cdot 0{,}125 + 0{,}005 : 0{,}1 = \dfrac{172 \cdot 1}{10 \cdot 8} + \dfrac{5 \cdot 10}{1000 \cdot 1} = \dfrac{43}{20} + \dfrac{5}{100} = \dfrac{440}{200} = 2{,}2$;

в) $3{,}6 \cdot 2) = \dfrac{36}{10} \cdot \dfrac{22}{10} = \dfrac{792}{100} = 7{,}92$; г) $6{,}25 \cdot 3{,}2 = \dfrac{625}{100} \cdot \dfrac{32}{10} = \dfrac{2000}{100} = 20$;

д) 1) – 3) + 4) = 10,12 – 7,92 + 20 = 22,2.

2) 9,25 · 1,04 – (6,372 : 0,6 + 1,125 · 0,8) : 1,2 + 0,16 · 6,25

Выполним по действиям.

а) $9{,}25 \cdot 1{,}04 = \dfrac{925}{100} \cdot \dfrac{104}{100} = \dfrac{9620}{1000} = 9{,}62$;

б) $6{,}372 : 0{,}6 + 1{,}125 \cdot 0{,}8 = \dfrac{6372 \cdot 10}{1000 \cdot 6} + \dfrac{9 \cdot 8}{8 \cdot 10} = \dfrac{1062}{100} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{1152}{100} = 11{,}52$;

в) $2) : 1{,}2 = \dfrac{1152 \cdot 10}{100 \cdot 12} = \dfrac{96}{10} = 9{,}6$; г) $0{,}16 \cdot 6{,}25 = \dfrac{16 \cdot 625}{100 \cdot 100} = \dfrac{1000}{1000} = 1$;

д) 1) – 3) + 4) = 9,62 – 9,6 + 1 = 1,02.

№ 1058

1) $\dfrac{\left(28 : 1\dfrac{3}{4} + 7\dfrac{1}{3} : 22 + 1\dfrac{2}{3} \cdot 9\dfrac{3}{4} + 14 : 1\dfrac{1}{2}\right) \cdot 3\dfrac{1}{7}}{10\dfrac{1}{2} - 9\dfrac{3}{4}}$. Выполним по действиям.

а) $28 : 1\dfrac{3}{4} + 7\dfrac{1}{3} : 22 + 1\dfrac{2}{3} \cdot 9\dfrac{3}{4} + 14 : 1\dfrac{1}{2} = \dfrac{28 \cdot 4}{7} + \dfrac{22 \cdot 1}{3 \cdot 22} + \dfrac{5 \cdot 39}{3 \cdot 4} +$

$+ \dfrac{14 \cdot 2}{3} = 16 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{65}{4} + \dfrac{28}{3} = 16 + \dfrac{29}{3} + \dfrac{65}{4} = 16 + \dfrac{116 + 195}{12} = 16 + \dfrac{311}{12} =$

$= 41\dfrac{11}{12} = \dfrac{503}{12}$;

б) $1) \cdot 3\dfrac{1}{7} = \dfrac{503 \cdot 22}{12 \cdot 7} = \dfrac{5533}{42}$; в) $10\dfrac{1}{2} - 9\dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{2} - \dfrac{39}{4} = \dfrac{3}{4}$;

г) $\dfrac{2)}{3)} = \dfrac{5533 \cdot 4}{42 \cdot 3} = \dfrac{11066}{63}$.

2) $\left(\dfrac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 + \left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{12}\right) : (0{,}358 - 0{,}108)$

Выполним по действиям.

а) $\left(\dfrac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 = (0{,}5 - 0{,}375) : 0{,}125 = 0{,}125 : 0{,}125 = 1$;

б) $\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108)=\left(\frac{10-7}{12}\right):0{,}25=\frac{1\cdot 4}{4\cdot 1}=1$;

в) 1) + 2) = 1 + 1 = 2.

№ 1059

1) $10:\frac{1}{8}=x:1\frac{1}{4}$, $x=10:\frac{1}{8}\cdot 1\frac{1}{4}=\frac{10\cdot 8\cdot 5}{4}=100$;

2) $x:0{,}75=9\frac{1}{2}:14\frac{1}{2}$, $x=0{,}75\cdot 9\frac{1}{2}:14\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 19\cdot 2}{4\cdot 2\cdot 29}=\frac{57}{116}$;

(опечатка в ответе задачника)

3) $\frac{x}{15}=\frac{1{,}456}{1{,}05}$, $x=\frac{15\cdot 1{,}456}{1{,}05}=20{,}8$.

№ 1060

$$\left(\frac{15\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}}-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}\right)-183\sqrt{5}$$

Выполним по действиям.

1) $\frac{15\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}}=15\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{125}=15\cdot 5\sqrt{5}=75\sqrt{5}$;

2) $2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}=2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt[4]{49}=2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=2\cdot 7=14$;

3) 1) – 2) = $75\sqrt{5}-14$; 4) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{81}+\sqrt{9\cdot 5}=3+3\sqrt{5}$;

5) 3) · 4) = $(75\sqrt{5}-14)(3+3\sqrt{5})=225\sqrt{5}+1125-42-42\sqrt{5}=1083+183\sqrt{5}$

6) 5) $-183\sqrt{5}=1083+183\sqrt{5}-183\sqrt{5}=1083$.

№ 1061

1) $\log_{27}729=\log_{27}27^2=2$.

2) $\log_9 729=\log_9 27^2=\log_9(9\cdot 3)^2=3$.

3) $\log_{\frac{1}{3}}729=\log_{\frac{1}{3}}3^6=6\log_{\frac{1}{3}}3=6\cdot(-1)=-6$.

№ 1062

1) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[5]{64}=\log_{2^{-4}}\left(2^6\right)^{\frac{1}{5}}=\log_{2^{-4}}2^{\frac{6}{5}}=\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\log_2 2=-\frac{3}{10}=-0{,}3$

2) $\log_8\log_4\log_2 16=\log_8\log_4 4=\log_8 1=0$.

№ 1063

1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}=2^{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}}=2^{\sqrt{4}}=2^2=4$.

2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}}\cdot 2^{-3}=2^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-3}=2^{9-3}=2^6=64$.

№ 1064

1) $\log_3\frac{9}{\sqrt[5]{3}}+\log_6\sqrt[5]{36}=\log_3 3^{2-\frac{1}{5}}+\log_6 6^{\frac{2}{5}}=\frac{9}{5}+\frac{2}{5}=\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$.

2) $16^{0,5\log_4 10+1}=\left(4^2\right)^{0,5\log_4 10}\cdot 16=4^{\log_4 10}\cdot 16=10\cdot 16=160$.

№ 1065

1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}\quad 2{,}5^{0,5}$.

Основания равны, значит будем сравнивать показатели степеней.
$f(x)=2{,}5^x$ – функция возрастающая, т.к. $2{,}5>1$.

$x_2>x_1,\quad f(x_2)>f(x_1);\quad \frac{1}{7}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2{,}5^{\frac{1}{7}}<2{,}5^{\frac{1}{2}}$;

2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}\quad 0{,}2^{\frac{3}{4}}$, $f(x)=0{,}2^x$ – убывает, т.к. $0{,}2<1$, $x_2>x_1\quad f(x_2)<f(x_1)$

Сравним $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, или $\frac{8}{12}$ и $\frac{9}{12}$. $\quad\frac{8}{12}<\frac{9}{12}\Rightarrow\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\Rightarrow 0{,}2^{\frac{2}{3}}>0{,}2^{\frac{3}{4}}$.

3) $\log_{3,1}\sqrt{10}\quad\log_{3,1}3$

Функция $\log_{3,1}x$ – возрастающая, т.к. $3{,}1>1$.
$\sqrt{10}>\sqrt{9}=3\Rightarrow\log_{3,1}\sqrt{10}>\log_{3,1}3$

4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}\quad\log_{0,3}\frac{3}{4}$, $f(x)=\log_{0,3}x$ – убывает, т.к. $0{,}3<1$,

$\frac{4}{5}=\frac{16}{20}>\frac{15}{20}=\frac{3}{4}\Rightarrow\log_{0,3}\frac{4}{5}<\log_{0,3}\frac{3}{4}$.

№ 1066

1) $a^{\frac{1}{5}}>1\Rightarrow a>1$; 2) $a^{-1,3}>1\Rightarrow\frac{1}{a\cdot\sqrt[10]{a^3}}>1\Rightarrow a<1,\qquad a\in(0;1)$;

3) $a^{-3,1}<1\Rightarrow a^{3,1}>1\Rightarrow a>1$; 4) $a^{2,7}<1\Rightarrow a\in(0;1)$;
5) $\log_a 0{,}2>0\Rightarrow\log_a 0{,}2>\log_a 1\Rightarrow a<1$;
6) $\log_a 1{,}3>0\Rightarrow\log_a 1{,}3>\log_a 1\Rightarrow a>1$.

№ 1067

1) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $4^{\log_2 3+\log_4 \frac{5}{11}}=2^{2\log_2 3}\cdot 4^{\log_4 \frac{5}{11}}=9\cdot\frac{5}{11}=\frac{45}{11}$

$\left(3\sqrt{2}\right)^2=18=\frac{2178}{121}>\frac{2025}{121}=\left(\frac{45}{11}\right)^2$, $\sqrt{18}>4^{\log_2 3+\log_4 \frac{5}{11}}$;

2) $\sqrt[3]{18}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}=\left(6^{-1}\right)^{\log_6 2-\log_6 5}$, $6^{-\log_6 \frac{2}{5}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}$,

$\left(\sqrt[3]{18}\right)^3=18=\frac{144}{8}>\frac{125}{8}=\left(\frac{5}{2}\right)^3$, $\sqrt[3]{18}>\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$.

№ 1068

1) $\lg 50=\lg(5\cdot 10)=\lg 10+\lg 5=1+\lg 5$

$0=\lg 1<\lg 5<\lg 10=1$, значит $1<1+\lg 5<2$, $\lg 50=1+\lg 5$;

2) $\log_2 10=\log_2(2\cdot 5)=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5$,

$2=\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8=3$, $3<1+\log_2 5<4$.

№ 1069

1) $3\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{180}-4\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{3}-\frac{1\cdot 2\sqrt{5}}{2}+3\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}-$

$-\frac{4\cdot 5\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{5}+18\sqrt{5}-10\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5}-\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}-$

$-\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{2}=0$.

№ 1070

1) $\sqrt{a^4\left(9a^2-6a+1\right)}=a^2\sqrt{(3a-1)^2}=a^2|3a-1|$

2) $\sqrt{b^2\left(4b^4+4b^2+1\right)}=|b|\sqrt{\left(2b^2+1\right)^2}=|b|\left(2b^2+1\right)$.

№ 1071

1) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;

2) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{6-5}=3\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$;

3) $\dfrac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\dfrac{12\left(\sqrt{10}+\sqrt{7}\right)}{10-7}=4\left(\sqrt{10}+\sqrt{7}\right);$

4) $\dfrac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\dfrac{8\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)}{11-3}=\sqrt{11}-\sqrt{3}$.

№ 1072

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{7-5}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

№ 1073

1) $x = 0{,}444...$, $10x = 4{,}4...$, $10x - x = 4{,}4... - 0{,}4...$, $9x = 4$, $x = \dfrac{4}{9}$;

2) $x = 2{,}77...$ $10x = 27{,}77...$, $9x = 25$, $x=\dfrac{25}{9}=2\dfrac{7}{9}$;

3) $x = 0{,}2121...$ $100x = 21{,}21...$, $99x = 21$, $x=\dfrac{21}{99}=\dfrac{7}{33}$;

4) $x = 1{,}36...$ $100x = 136{,}36...$, $99x = 135$, $x=\dfrac{135}{99}=\dfrac{15}{11}=1\dfrac{4}{11}$;

5) $x = 0{,}35...$, $10x = 3{,}5...$, $100x = 35{,}35...$, $90x = 32$, $x=\dfrac{32}{90}$;

6) $x = 0{,}213...$, $100x = 21{,}3...$ $1000x = 213{,}3...$,

$900x = 192$, $x=\dfrac{192}{900}=\dfrac{32}{150}=\dfrac{16}{75}$.

№ 1074

1)
$$\begin{array}{l|l} -50 & 6 \\ \hline \underline{48} & 0{,}833... \\ -20 & \\ \ \underline{18} & \\ \ \ 20 & \end{array}$$
$\dfrac{5}{6}=0{,}8\,(3)$

2) $2\dfrac{1}{9}$
$$\begin{array}{l|l} -1{,}0 & 9 \\ \hline \ \ \underline{9} & 0{,}11... \\ \ \ 10 & \end{array}$$
$2\dfrac{1}{9}=2,\,(1)$

3)
$$\begin{array}{l|l} -1{,}0 & 7 \\ \hline \ \ \underline{7} & 0{,}1428571... \\ -30 & \\ \ \underline{28} & \\ \ -20 & \\ \ \ \underline{14} & \end{array}$$
$\dfrac{1}{7}=0,\,(142857)$

$$\begin{array}{r} \underline{}60 \\ \underline{56} \\ \underline{}40 \\ \underline{35} \\ \underline{}50 \\ \underline{49} \\ 10 \end{array}$$

4) $5\frac{2}{11}$

$$\begin{array}{l|l} \_20 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{11} & 0{,}181... \\ \_90 & \\ \underline{80} & \\ 20 & \end{array}$$

$5\frac{2}{11} = 5,(18)$

№ 1075

1) нет; 2) да, например $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$; 3) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ – нет.

№ 1076

$a, b \in \mathrm{N}$ $\sqrt{ab}$ – рациональное, значит, $ab = k^2$, $a = \frac{k^2}{b}$,

$\frac{a}{b} = \frac{k^2}{b\cdot b} = \frac{k^2}{b^2}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{k^2}{b^2}} = \frac{k}{b}$ – рациональное число, ч.т.д.

№ 1077

a – рац. b – иррац.

$a = a_0, a_1 \dots a_k$ $a_0, a_1 \dots a_k$ – цифры; $b = b_0, b_1 \dots b_k, b_{k+1}$

$a \cdot b = (a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_k \cdot 10^{-k})\,(b_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + \dots + b_k \cdot 10^{-k} +$
$+ b_{k+1} \cdot 10^{-k-1}) = a_0b_0 + \dots + a_0b_k \cdot 10^{-k} + a_0b_{k+1} \cdot 10^{-k-1} + \dots$ – иррац.

$a + b = (a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}) + (b_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + \dots + b_k \cdot 10^{-k} + b_{k+1} \cdot 10^{-k-1}) =$
$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot 10^{-1} + \dots + (a_k + b_k) \cdot 10^{-k} + b_{k+1} \cdot 10^{-k-1} + \dots$ – иррац.

$\frac{a}{b} = \frac{a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}}{b_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \dots + b_k \cdot 10^{-k}}$ – очевидно, что оно иррационально, а т.к. $\frac{b}{a} = \frac{1}{(a/b)}$, то это тоже является иррац., ч.т.д.

№ 1078

1) $\left[1;\ 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}\right]$, $\left[3\sqrt{3} + 4;\ 15\right]$, $1 < 3\sqrt{3} + 4$, $15 > 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$,

$3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$, $3\sqrt{3} + 4$.

Возведем в квадрат.

$18 + 28 + 12\sqrt{14}$, $27 + 16 + 24\sqrt{3}$, $3 + 12\sqrt{14}$, $24\sqrt{3}$.

Сравним $12\sqrt{14}$ и $24\sqrt{3}$. Возведем в квадрат.
$2016 > 1728 \Rightarrow$ отрезки имеют общую точку.

2) $\left(0,\ \sqrt{27}+\sqrt{6}\right)$, $\left(\sqrt{48}-1, 10\right)$, $0 < \sqrt{48}-1$, $\sqrt{27}+\sqrt{6} < 6+3 = 9 < 10$.

Сравним $\sqrt{27}+\sqrt{6}$, $\sqrt{48}-1$.

Возведем в квадрат $27+6+2\sqrt{162}$, $48+1-2\sqrt{48}$, $18\sqrt{2}$, $16-8\sqrt{3} > 0$.

Еще раз возведем в квадрат 648, $256+192-256\sqrt{3}$, $200 > -256\sqrt{3}$.
Имеют общие точки.

3) $\left[2; 2\sqrt{5}+2\sqrt{6}\right]$ и $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{22}; 11\right)$, $2 < 3\sqrt{2}+\sqrt{22}$, $2\sqrt{5}+2\sqrt{6} < 11$.

Сравним $2\sqrt{5}+2\sqrt{6}$ и $3\sqrt{2}+\sqrt{22}$.

Возведем в квадрат $20+24+8\sqrt{30}$, $18+22+6\sqrt{44}$, $4+8\sqrt{30}$, $12\sqrt{11}$.

Возведем в квадрат $8\sqrt{30}$ и $12\sqrt{11}$.
$1920 > 1584 \Rightarrow$ имеют общие точки.

4) $\left[1; 1+\sqrt{3}\right]$ и $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}; 4\right)$, $1 < \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $1+\sqrt{3} < 4$.

Сравним $1+\sqrt{3}$ и $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$. Умножим оба на $\sqrt{3}-1 > 0$.

$(3 - 1) = 2$ – но одно отрезок, другой – интервал. Значит, не имеют.

№ 1079

$a < b$

1) Пусть a имеет координаты $(a, 0)$, а b – $(b, 0)$. Тогда середина отрезка $[a, b]$ имеет координаты $\left(\dfrac{a+b}{2}, 0\right)$. Точка $\dfrac{a+b}{2}$ имеет координаты $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)$, или $\left(\dfrac{a+b}{2}, 0\right)$ – т.е. она совпадает с серединой.

2) Допустим, эта точка не лежит в этом отрезке, тогда либо $\dfrac{a+bc}{1+c} > b$, $a + bc > b + bc$, $a > b$ – противоречие, либо $\dfrac{a+bc}{1+c} < a$, $a+bc<a+ac$, $bc<ac$, $b<a$ – противоречие, значит, она лежит внутри этого отрезка.

№ 1080

1) $S_\Delta = \dfrac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° = p \cdot r$, где $p = \dfrac{1}{2}(a + a + a)$.

$\dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}a \cdot r$, $r = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$, $d = 2r = 2\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{9}{2 \cdot \sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, $\dfrac{9}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{9}{a \cdot 4} = \dfrac{9}{16}$,

$$\cos\alpha = -2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2\cdot 81}{256} = \frac{94}{256} = \frac{47}{128}, \quad \alpha \cdot \arccos\frac{47}{128} \approx 68{,}46°.$$

№ 1081

$$\mathrm{tg}54° = \frac{120}{l}, \qquad l = \frac{120}{\mathrm{tg}54°} \approx 87{,}2.$$

№ 1082

$$l = x + y, \quad \frac{x}{\sin 22°} = \frac{130}{\sin 68°}, \quad x = \frac{130\sin\left(\frac{\pi}{2} - 68°\right)}{\sin 68°} = 130\mathrm{ctg}68°$$

$$\frac{y}{\sin(90° - 46°)} = \frac{130}{\sin 46°}, \qquad y = \frac{130\cos 46°}{\sin 46°} = 130\mathrm{ctg}46°$$

l = 130 (ctg 68° + ctg 46°) ≈ 178 (м).

№ 1083

1) $\cos\alpha = \dfrac{8}{10}$, $\qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{8}{10}\right)^2} = \dfrac{6}{10}$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{6\cdot 10}{10\cdot 8} = \frac{6}{8}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{8}{6}$$

2) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{25}{169}} = \dfrac{12}{13}$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5\cdot 13}{13\cdot 12} = \frac{5}{12}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$$

3) $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}4 = \dfrac{12}{5}$, $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{144}{25}}} = \dfrac{5}{13}$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$$

4) $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{7}{24}$, $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{49}{576}}} = \dfrac{24}{25}$,

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{24}{7}.$$

№ 1084

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

№ 1085

$$\sin\frac{11\pi}{3}+\cos 690°-\cos\frac{19\pi}{3}=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos(720°-30°)-$$

$$-\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}+\cos 30°-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

№ 1086

1) $2\operatorname{arctg}1-3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cdot\frac{\pi}{4}-3\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$;

2) $8\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+6\operatorname{arctg}\sqrt{3}=8\cdot\frac{\pi}{4}+6\cdot\frac{\pi}{3}=2\pi+2\pi=4\pi$.

№ 1087

1) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3)$, $\operatorname{arctg}3=x$, $\operatorname{tg}x=3$

$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{2\cdot3}{1-9}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$.

№ 1088

1) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\log_2 2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$;

2) $\log_{10}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\log_{10}1=0$;

3) $\log_8\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}$;

4) $\log_2\cos\frac{\pi}{3}=\log_2\frac{1}{2}=-1$;

5) $\log_3 1-\log_4\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log_5\cos 0=0-\log_4 1\log_5 1=0$.

№ 1089

1) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}1)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$;

3) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

5) $\cos(\operatorname{arctg}1)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

№ 1090

1) $\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

По определению арккосинус числа $\sqrt{2}/2$ - это такое число α, -0 ≤ α ≤ π, косинус которого равен $\sqrt{2}/2$. В нашем случае $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, далее

$$\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2) sin(5arccos0)

По определению арккосинус числа 0 – это такое число α, 0 ≤ d ≤ π, косинус которого равен 0. В нашем случае α = arccos0 = $\frac{\pi}{2}$, далее

$$\sin(5\arccos 0) = \sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

№ 1091

1) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$ при $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$, т.е. |sinα| ≠ |cosα|, знаменатель данного выражения отличен от 0 и выражение имеет смысл, далее

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{-2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{2}tg2\alpha,$$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$, тогда $-\frac{1}{2}tg2\alpha = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$ по условию, тогда $\frac{tg\alpha}{tg^2\alpha - 1} = \frac{3/4}{(3/4)^2 - 1} = \frac{3/4}{\frac{9}{16} - 1} = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{16}{7}\right) = -\frac{12}{7}$, итак, выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$ при $tg\alpha = \frac{3}{4}$ равняется $-\frac{12}{7}$;

2) sinαcosα, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Возведем обе части выражения $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$ в квадрат, получим

$(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$,

$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{9}$, откуда $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{9}$, таким образом

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{9}$.

№ 1092

1) $\frac{a+2}{a-2}\left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6}:\frac{2a-3}{a-2}\right)=\frac{a+2}{a-2}\left(\frac{2(a+1)(a-3/2)}{(a+2)(a+3)}\cdot\frac{a-2}{2a-3}\right)=$

$=\frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{2(a+1)(a-3/2)}{(a+2)(a+3)}\cdot\frac{a-2}{2(a-3/2)}=\frac{a+1}{a+3}$

2) $\left(2+\frac{1}{b}\right):\frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\cdot\frac{2b+1}{b}=\frac{2b+1}{b}\cdot\frac{b(b-4)}{2(2b+1)^2}\cdot\frac{2b+1}{b}=\frac{(b-4)}{2b}$

№ 1093

1) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}=$

$=\frac{a}{(a-1)(a+1)}+\frac{a^2+a-1}{a^2(a-1)+(a-1)}+\frac{a^2-a-1}{a^2(a+1)+(a+1)}-$

$-\frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{a}{(a-1)(a+1)}+\frac{a^2+a-1}{(a-1)(a^2+1)}+$

$+\frac{a^2-a-1}{(a+1)(a^2+1)}-\frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=$

$+\frac{a^2-a-1}{(a+1)(a^2+1)}-\frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=$

$=\frac{a(a^2+1)+(a^2+a-1)(a+1)+(a^2-a-1)(a-1)-2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}$

Преобразуем числитель полученной дроби
$a(a^2+1)+(a^2+a-1)(a+1)+(a^2-a-1)(a-1)-2a^3=a^3+a+a^3+a^2+a^2+a-a-1+a^3-$
$-a^2-a^2+a-a+1-2a^3=a^3+a$, тогда дробь примет вид

$\frac{a^3+a}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{a(a^2+1)}{(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{a}{a^2-1}$

2) $\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{(a+1)^2+a+1}-\frac{2}{a+3}=$

$=\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{2a}{(a+1)(a+3)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{2}{a+3}=$

$=\frac{1\cdot(a+1)+2a(a+2)+1\cdot(a+3)-2(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}=$

$=\frac{a+1+2a^2+4a+a+3-2a^2-6a-4}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{0}{(a+1)(a+2)(a+3)}=0$

№ 1094

1) $\frac{1}{4+4\sqrt{a}}-\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{4-4\sqrt{a}}=\frac{4-4\sqrt{a}+4+4\sqrt{a}}{\left(4+4\sqrt{a}\right)\left(4-4\sqrt{a}\right)}-\frac{1}{2-2a}=$

$\frac{8}{16-16a}-\frac{1}{2-2a}=\frac{1}{2-2a}-\frac{1}{2-2a}=0$

2) $\frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}=\frac{\sqrt{2}(a-1)+(a-1)}{\sqrt{2}(a-1)+2(a-1)}=\frac{(a-1)\left(\sqrt{2}+1\right)}{(a-1)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

№ 1095

1) $\left(1+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5,\ x=4$

Преобразуем данное выражение:

$\left(1+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)=1-\frac{a-x}{a+x}=\frac{a+x-a+x}{a+x}=\frac{2x}{a+x}$

при $a=5,\ x=4$ полученное выражение примет вид: $\frac{2\cdot 4}{5+4}=\frac{8}{9}$;

2) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3,\ x=\sqrt{5}$

Преобразуем данное выражение:

$$\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}{\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)}=$$

$$=\frac{a^2+2a\sqrt{a^2-x^2}+\left(a^2-x^2\right)-a^2+2a\sqrt{a^2-x^2}-\left(a^2-x^2\right)}{a^2-\left(a^2-x^2\right)}=$$

$=\frac{4a\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$; при $a=3,\ x=\sqrt{5}$ полученное выражение примет вид:

$\frac{4\cdot 3\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{12\sqrt{9-5}}{5}=\frac{24}{5}=4{,}8$.

№ 1096

1) $\frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}\cdot\left(\frac{x^{1/2}}{1-x^{1/2}}-\frac{1}{x^{1/2}-x}\right)=\frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}\cdot\left(\frac{x^{1/2}}{1-x^{1/2}}-\frac{1}{x^{1/2}\left(1-x^{1/2}\right)}\right)=$

$$=\frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}\cdot\frac{x-1}{x^{1/2}\left(1-x^{1/2}\right)}=\frac{x-1}{1-x}=-1$$

2) $$\frac{m+2m^{1/2}+1}{2m^{1/2}}\cdot\left(\frac{2m^{1/2}}{m^{1/2}-1}-\frac{4m^{1/2}}{m-1}\right)=\frac{\left(m^{1/2}+1\right)^2}{2m^{1/2}}\cdot\left(\frac{2m^{1/2}\left(m^{1/2}+1\right)-4m^{1/2}}{m-1}\right)=$$

$$=\frac{\left(m^{1/2}+1\right)^2}{2m^{1/2}}\cdot\frac{2m-4m^{1/2}+2m^{1/2}}{m-1}=\frac{\left(m^{1/2}+1\right)^2}{2m^{1/2}}\cdot\frac{2m-2m^{1/2}}{m-1}=m^{1/2}+1$$

№ 1097

1) $6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}=6n\cdot 3\sqrt{\frac{m\cdot 2mn}{2n}}=18mn$;

2) $$\frac{a-1}{a^{3/4}+a^{1/2}}\cdot\frac{a^{1/2}+a^{1/4}}{a^{1/2}+1}\cdot a^{1/4}=\frac{a-1}{a^{1/2}\left(a^{1/4}+1\right)}\cdot\frac{a^{1/4}\left(a^{1/4}+1\right)}{a^{1/2}+1}\cdot a^{1/4}=$$

$$=\frac{\left(a^{1/2}+1\right)\left(a^{1/2}-1\right)}{a^{1/2}\left(a^{1/4}+1\right)}\cdot\frac{a^{1/4}\left(a^{1/4}+1\right)}{a^{1/2}+1}\cdot a^{1/4}=a^{1/2}-1.$$

№ 1098

1) $$\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a\sqrt{a}-1+a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}=$$

$$\frac{a-1+\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}-1}\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{a-1}=\frac{(a-1)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}-1}\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}=\sqrt{a}+1;$$

2) $$\left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}=\frac{1+b\sqrt{b}-\sqrt{b}-b}{1+\sqrt{b}}\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}=$$

$$=\frac{(1-b)-\sqrt{b}(1-b)}{1+\sqrt{b}}\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}=\frac{(1-b)\left(1-\sqrt{b}\right)}{1+\sqrt{b}}\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}=1-\sqrt{b}.$$

№ 1099

$$\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-5/3}b^{2}-b^{-5/3}a^{-2}}-a^{1/3}b^{1/3}=\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}-a^{-4/3}b^{-5/3}+a^{-5/3}b^{-4/3}}{a^{-5/3}b^{-2}-b^{-5/3}a^{-2}}=$$

$$=\frac{a^{-1}b^{-2}+a^{-5/3}b^{-4/3}-\left(a^{-2}b^{-1}+a^{-4/3}b^{-5/3}\right)}{a^{-5/3}b^{-2}-b^{-5/3}a^{-2}}=$$

$$=\frac{a^{-5/3}b^{-2}\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)-b^{-5/3}a^{-2}\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)}{a^{-5/3}b^{-2}-b^{-5/3}a^{-2}}=$$

$$=\frac{\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)\cdot\left(a^{-5/3}b^{-2}-b^{-5/3}a^{-2}\right)}{a^{-5/3}b^{-2}-b^{-5/3}a^{-2}}=a^{2/3}+b^{2/3}.$$

№ 1100

1) $$\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}=$$

$$=\left(\frac{a+b+2\sqrt{ab}-a-b}{\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{ab}\left(a+b\right)}{2ab}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)}{4ab}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}=$$

$$=\frac{a^2+2a\sqrt{ab}+ab+ab+2b\sqrt{ab}+b^2-2a\sqrt{ab}-2b\sqrt{ab}}{4ab}=\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

2) $$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2\left(a^{-1/2}+b^{-1/2}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}=$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\cdot\frac{a+b}{ab}+\frac{2\left(1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}=$$

$$=\frac{a+b}{ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}+\frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\frac{1}{ab}$$

№ 1101

$$\left(\frac{9a-25a^{-1}}{3a^{1/2}-5a^{-1/2}}-\frac{a+7+10a^{-1}}{a^{1/2}+2a^{-1/2}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\left(3a^{1/2}-5a^{-1/2}\right)\left(3a^{1/2}+5a^{-1/2}\right)}{3a^{1/2}-5a^{-1/2}}-\frac{a+7+10a^{-1}}{a^{1/2}+2a^{-1/2}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{3a+5+6+10a^{-1}-a-7-10a^{-1}}{a^{-1/2}(a+2)}\right)^4=\left(\frac{2a+4}{a^{-1/2}(a+2)}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{2(a+2)}{a^{-1/2}(a+2)}\right)^4=\left(2a^{1/2}\right)^4=16a^2.$$

№ 1102

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}-\frac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-\left(b^2+18b+81\right)^{0,5}=$$

$$=\left(\frac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}(b-9)}+\frac{\sqrt{b}}{b-9}\right)^{-2}-\sqrt{(b+9)^2}=\left(\frac{\left(3+\sqrt{b}\right)}{b-9}\right)^{-2}-(b+9)=$$

$$=\left(\frac{b-9}{3+\sqrt{b}}\right)^2-(b+9)=\frac{b^2-18b+81-9b-6b\sqrt{b}-b^2-81-54\sqrt{b}-9b}{9+6\sqrt{b}+b}=$$

$$=\frac{-54\sqrt{b}-36b-6b\sqrt{b}}{9+6\sqrt{b}+b}=\frac{-6\sqrt{b}\left(9+6\sqrt{b}+b\right)}{9+6\sqrt{b}+b}=-6\sqrt{b}\ .$$

№ 1103

1) $\dfrac{1+tg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}:\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=tg^2\alpha$

2) $(1+tg\alpha)(1+ctg\alpha)-1/(sin\alpha cos\alpha)=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2\ .$$

№ 1104

$\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-ctg\alpha}=2tg^2\alpha$. Преобразуем левую часть данного тождества: $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-ctg\alpha}=\frac{1-1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=-2\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\sin^2\alpha-1)}=$

$=\frac{2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2tg^2\alpha$, таким образом, левая и правая части тождества совпадают, следовательно, тождество доказано.

№ 1105

1) $\sin^2(\alpha + 8\pi) + \cos^2(\alpha + 10\pi) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

2) $\cos^2(\alpha+6\pi)+\cos^2(\alpha-4\pi)=\cos^2(\alpha+3\cdot2\pi)+\cos^2(2\cdot2\pi-\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha$.

№ 1106

$$\frac{\sin2\alpha}{2(1-2\cos^2\alpha)}+\frac{\sin\alpha\cos(\pi-\alpha)}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$

$$=-\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=-tg2\alpha.$$

№ 1107

$$\frac{\cos^2x}{1+\sin x}-\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=-\sin x-\cos x$$

Преобразуем левую часть данного тождества:

$$\frac{\cos^2x-\cos^3x-\sin^2x-\sin^3x}{(1+\sin x)(1-\cos x)}=\frac{\cos^2x-\sin^2x-(\cos^3x+\sin^3x)}{(1+\sin x)(1-\cos x)}=$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cdot\cos x)}{(1+\sin x)(1-\cos x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-1+\sin x\cdot\cos x)}{(1+\sin x)(1-\cos x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x(1+\sin x)-(1+\sin x))}{(1+\sin x)(1-\cos x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(1+\sin x)(\cos x-1)}{(1+\sin x)(1-\cos x)}=-\sin x-\cos x,$$

таким образом правая и левая части тождества совпадают, ч.т.д.

№ 1108

1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}=$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha=\left(10\cos\alpha\right)-\sin\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

3) $3-4\sin^2\alpha=3-4(1-\cos^2\alpha)=3-4+4\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha-1=(2\cos\alpha-1)(2\cos\alpha+1)$;

4) $1-4\cos^2\alpha=(1-2\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)$.

№ 1109

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$

1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

Рассмотрим правую часть:

$$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}2\sin^2\frac{\beta}{2}=$$

$$=\sin\beta(1-\cos\alpha)+\sin\alpha(1-\cos\beta)=\sin\beta-\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha\cos\beta=$$

$$=\sin\beta+\sin\alpha-(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)=$$

$$=\sin\beta+\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta=)\sin\beta+\sin\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma$$

2) Рассмотрим левую часть:

$\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin2\gamma=$

$=2\sin(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta)+\sin2\gamma=2\sin\gamma\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma=$

$=2\sin\gamma(\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma)=2\sin\gamma\cdot2\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=$

$$=2\sin\gamma\cdot2\cos\frac{\pi-2\beta}{2}\cos\frac{\pi-2\beta-2\gamma}{2}=$$

$$=4\sin\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma\right)=4\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

№ 1110

$\mathrm{tg}\alpha=2$

1) $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$.

Разделим числитель и знаменатель данного выражения на $\cos^2\alpha\neq0$ (последнее выполняется вследствие $\mathrm{tg}\alpha=2$),

$$\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{3\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{tg^2\alpha+tg\alpha}{1+3tg\alpha}$$, при tgα = 2 выражение примет вид:

$$\frac{2^2+2}{1+3\cdot 2}=\frac{6}{7};$$

2) $\frac{2-\sin^2\alpha}{3+\cos^2\alpha}$. Разделим числитель и знаменатель данного выражения на

$\cos^2\alpha \neq 0$, получим: $\frac{\frac{2}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{3}{\cos^2\alpha}+1}=\frac{2+2tg^2\alpha-tg^2\alpha}{3+3tg^2\alpha+1}=\frac{2+tg^2\alpha}{4+3tg^2\alpha};$

при tgα = 2 выражение примет вид: $\frac{2+2^2}{4+3\cdot 2^2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

№ 1111

$tg\alpha + ctg\alpha = 3$, $tg^2\alpha + ctg^2\alpha = (tg\alpha + ctg\alpha)^2 - 2$, тогда при $tg\alpha + ctg\alpha = 3$ выражение примет вид: $3^2 - 2 = 7$.

№ 1112

1) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\frac{tg\,\pi/4+tg\alpha}{1-tg\,\pi/4\,tg\alpha}=$

$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=0;$

2) $tg^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=ctg^2\alpha-\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=$

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin 2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin 2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\sin 2\alpha)}=$

$=\frac{\sin 2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\sin 2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\sin 2\alpha)}.$

№ 1113

1) $\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{\frac{1}{tg\alpha}+\frac{1}{tg\beta}}=tg\alpha tg\beta$

2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha +$
$+ \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2$

3) $\frac{\sin\left(\pi/4+\alpha\right)-\cos\left(\pi/4+\alpha\right)}{\sin\left(\pi/4+\alpha\right)+\cos\left(\pi/4+\alpha\right)}=$

$=\frac{\sin\pi/4\cos\alpha+\cos\pi/4\sin\alpha-\cos\pi/4\cos\alpha+\sin\pi/4\sin\alpha}{\sin\pi/4\cos\alpha+\cos\pi/4\sin\alpha+\cos\pi/4\cos\alpha-\sin\pi/4\sin\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha}=2tg\alpha$;

4) $\frac{\sin\alpha+2\sin\left(\pi/3-\alpha\right)}{2\cos\left(\pi/6-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+2\left(\sin\pi/3\cos\alpha-\cos\pi/3\sin\alpha\right)}{2\left(\cos\pi/6\cdot\cos\alpha+\sin\pi/6\sin\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$

$=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{3}ctg\alpha$.

№ 1114

1) $\frac{1-tg^2\left(\pi/4-\alpha\right)}{1+tg^2\left(\pi/4-\alpha\right)}=\frac{1-\frac{\sin^2\left(\pi/4-\alpha\right)}{\cos^2\left(\pi/4-\alpha\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\pi/4-\alpha\right)}{\cos^2\left(\pi/4-\alpha\right)}}=$

$=\frac{\cos^2\left(\pi/4-\alpha\right)-\sin^2\left(\pi/4-\alpha\right)}{\cos^2\left(\pi/4-\alpha\right)+\sin^2\left(\pi/4-\alpha\right)}=\cos\left(2\left(\pi/4-\alpha\right)\right)=\cos\left(\pi/2-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$.

2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg\alpha$.

№ 1115

1) $\frac{tg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=\frac{tg^2\alpha}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}=\frac{tg^4\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{tg^4\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{1}=\sin^2\alpha\ tg^2\alpha.$

2) $\frac{1+ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha}=\frac{1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

3) $\frac{tg\alpha-tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta}=$

$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1/2\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)}{1/2\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)}=$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{{}^1\!/_2\left(\sin(\alpha-\beta-\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-2\beta)-\sin(-2\beta)-\sin 2\alpha\right)}{{}^1\!/_2\left(\sin(-2\beta)+\sin 2\alpha+\sin(\alpha+\beta-\alpha-\beta)+\sin(2\alpha+2\beta)\right)}=$$

$$=\frac{\sin(2\alpha-2\beta)+\sin 2\beta-\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta+\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha-2\beta)-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos(\alpha-2\beta)-\cos\alpha}{\cos(\alpha+2\beta)+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{-2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(-\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta}=tg(\alpha+\beta)\cdot tg\beta$$

4) $(tg\alpha+ctg\alpha)^2-(tg\alpha-ctg\alpha)^2=tg^2\alpha+2tg\alpha\cdot ctg\alpha+ctg^2\alpha-tg^2\alpha+2tg\alpha\cdot ctg\alpha-ctg^2\alpha=2+2=4$

№ 1116

1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\cos\alpha$;

2) $\frac{tg\alpha-\sin\alpha}{tg\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=tg^2\frac{\alpha}{2}$;

3) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{\sin 3\alpha+(\sin\alpha+\sin 5\alpha)}{\cos 3\alpha+(\cos\alpha+\cos 5\alpha)}=$

$=\frac{\sin 3\alpha+2\sin 3\alpha\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha+2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin 3\alpha(1+2\cos 2\alpha)}{\cos 3\alpha(1+2\cos 2\alpha)}=tg3\alpha$;

4) $\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha-2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}=$

$=\frac{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}=\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha$.

№ 1117

1) $\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin(2{,}5\pi+\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1-\cos 2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$

$\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{-\sin\alpha-\cos\alpha}=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$

2) $\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos(-\alpha)-\cos(2{,}5\pi+\alpha)}=\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-1-\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$

$=\frac{-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$.

№ 1118

1) $\dfrac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=2$

Преобразуем левую часть данного тождества:

$\dfrac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=2$,

следовательно, тождество выполняется.

2) $\dfrac{\sin^2(\alpha+90^o)}{1+\sin(-\alpha)}=1+\cos(\alpha-90^o)$

Преобразуем левую часть: $\dfrac{\sin^2(\alpha+90^o)}{1+\sin(-\alpha)}=\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}=1+\sin\alpha$

Преобразуем правую часть тождества: $1+\cos(\alpha-90^o)=1+\cos(90^o-\alpha)=1+\sin\alpha$

Правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

№ 1119

$\dfrac{5\cos x-3\sin x}{\sin\left(\pi/2-x\right)+\sin(-x)}-\dfrac{\sin 2x-8\sin^2 x}{\cos 2x}=$

$=\dfrac{5\cos x-3\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\sin 2x-4(1-\cos 2x)}{\cos 2x}=$

$=\dfrac{(5\cos x-3\sin x)(\cos x+\sin x)-2\sin x\cos x+8\sin^2 x}{\cos 2x}=$

$=\dfrac{5\cos^2 x+5\cos x\sin x-3\sin x\cos x-3\sin^2 x-2\sin x\cos x+8\sin^2 x}{\cos 2x}=$

$=\dfrac{5(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos 2x}=\dfrac{5}{\cos 2x}$.

№ 1120

$\sin(x-2\pi)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+tg(\pi-x)tg\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)=$

$= -\sin x\sin x + (-\mathrm{tg}x)(-\mathrm{ctg}x) = 1-\sin^2 x=\cos^2 x$.

№ 1121

1) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1=\cos^2(\alpha+2\beta)+(-\cos^2(\alpha-2\beta))=\cos^2(\alpha+2\beta)-$
$-\cos^2(\alpha-2\beta)=(\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha-2\beta))(\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha-2\beta))=$
$=(-2\sin\alpha\cdot\sin 2\beta)\cdot(2\cos\alpha\cos 2\beta)=-\sin 2\alpha\sin 4\beta$

2) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1=\sin^2(\alpha+2\beta)-\cos^2(\alpha-2\beta)=(\sin(\alpha+2\beta)-$
$-\cos(\alpha-2\beta))(\sin(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha-2\beta))=(\sin\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos\alpha-\cos\alpha\cdot\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta)$
$\cdot(\sin\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin\alpha\sin 2\beta)=(\sin\alpha(\cos 2\beta-\sin 2\beta)-$
$-\cos\alpha(\cos 2\beta-\sin 2\beta))\cdot(\sin\alpha(\cos 2\beta+\sin 2\beta)+\cos\alpha(\cos 2\beta+\sin 2\beta))=$
$=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\cos 2\beta-\sin 2\beta)(\cos 2\beta+\sin 2\beta)(\sin\alpha+\cos 2\beta)=$
$=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)=-\cos 2\alpha\cdot\cos 4\beta$.

№ 1122

1) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha \sin \alpha} = \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha)} = -2\frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha} = -2$;

2) $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{1 + \cos 2\alpha + 2\cos \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha + 1 + \cos 2\alpha - 1} =$

$\frac{2\cos \alpha(\cos \alpha + \cos 2\alpha)}{\cos \alpha + \cos 2\alpha} = 2\cos \alpha$.

№ 1123

1) $\frac{4\sin^2 \alpha - \sin^2 2\alpha}{4 - 4\sin^2 \alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{4\sin^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$

$= \frac{4\sin^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)}{4\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4\cos^4 \alpha} = tg^4\alpha$;

2) $\frac{tg^2 2\alpha tg^2\alpha - 1}{tg^2\alpha - tg^2 2\alpha} = \left(\left(\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}\right)^2 tg^2\alpha - 1\right) : \left(tg^2\alpha - \left(\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}\right)^2\right) =$

$= \frac{4tg^4\alpha - 1(1 - tg^2\alpha)^2}{(1 - tg^2\alpha)} \cdot \frac{(1 - tg^2\alpha)^2}{tg^2\alpha(1 - tg^2\alpha)^2 - 4tg^2\alpha} =$

$= \frac{4tg^4\alpha - 1 + 2tg^2\alpha - tg^4\alpha}{tg^2\alpha - 2tg^4\alpha + tg^6\alpha - 4tg^2\alpha} = \frac{3tg^4\alpha + 2tg^2\alpha - 1}{tg^6\alpha - 2tg^4\alpha - 3tg^2\alpha} =$

$= \frac{3(tg^2\alpha + 1)(tg^2\alpha - 1/3)}{tg^2\alpha(tg^2\alpha + 1)(tg^2\alpha - 3)} = \frac{3tg^2\alpha - 1}{tg^2\alpha(tg^2\alpha - 3)} =$

$= \frac{\frac{3\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 3\right)} = \frac{3\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha\left(\frac{\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)} =$

$= \frac{-\cos^2 \alpha(\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha)}{-\sin^2 \alpha(3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = ctg\alpha \cdot \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = ctg\alpha \cdot ctg 3\alpha$.

№ 1124

1) $\frac{\sqrt{2} - \cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x\right)}{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$

$$\frac{\sqrt{2}-2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

2) $\frac{1+\cos x+\sin x+tgx}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin x-\cos x+\sin x}{\cos x(\sin x+\cos x)}=$

$=\frac{(\cos x+\sin x)+\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{1+\cos x}{\cos x}=1+\frac{1}{\cos x}$.

№ 1125

$ctg\alpha=\frac{3}{4}$, $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\cos\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{ctg\alpha}{1-ctg^2\alpha}$.

При ctgα = ¾ выражение примет вид: $\frac{3/4}{1-\left(3/4\right)^2}=\frac{3/4}{1-9/16}=\frac{3}{7}\cdot\frac{16}{4}=1\frac{5}{7}$.

№ 1126

$\alpha=-\frac{\pi}{8}$, $\frac{2-3\sin^2\alpha}{\cos2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2-2\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$

$=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$

$=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-(\sin\alpha+2\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos2\alpha}=$

$=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}=$

$=\frac{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\sin2\alpha-\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot tg2\alpha$.

При $\alpha=-\frac{\pi}{8}$ выражение примет вид: $\frac{1}{2}tg\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}$.

№ 1127

$\frac{tg(\alpha-\beta)+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)-tg\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$. Преобразуем левую часть:

$\frac{tg(\alpha-\beta)+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)-tg\beta}=\left(\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}+tg\beta\right):\left(\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}-tg\beta\right)=$

$$=\left(\frac{tg\alpha - tg\beta + tg\beta + tg\alpha tg^2\beta}{1+tg\alpha tg\beta}\right):\left(\frac{tg\alpha + tg\beta - tg\beta + tg\alpha\cdot tg^2\beta}{1-tg\alpha tg\beta}\right)=$$

$$=\frac{tg\alpha\left(1+tg^2\beta\right)}{1+tg\alpha tg\beta}\cdot\frac{1-tg\alpha tg\beta}{tg\alpha\left(1+tg^2\beta\right)}=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\Rightarrow$$ тождество выполняется.

№ 1128

1) $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. Преобразуем правую часть:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+\sin\alpha,$$

правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

2) $1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. Преобразуем правую часть:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1-\sin\alpha,$$

права часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

№ 1129

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$

Преобразуем левую часть:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha,$$

правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$. Преобразуем левую часть:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha,$$

следовательно, тождество выполняется.

№ 1130

1) $\dfrac{2}{tg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$. Преобразуем левую часть:

$$\frac{2}{tg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\alpha}{2}}=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1}=\sin\alpha,$$ следовательно, тождество выполняется.

2) $\frac{ctg\alpha - tg\alpha}{ctg\alpha + tg\alpha} = \cos 2\alpha$. Преобразуем левую часть, получим:

$$\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \cos 2\alpha .$$

№ 1131

$(1+\cos\alpha)tg\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$. Преобразуем левую часть выражения:

$(1+\cos\alpha)tg\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = 2\cos(\alpha/2) \cdot \sin(\alpha/2) = \sin\alpha$, следовательно, тождество выполняется.

№ 1132

1) $1 - tg^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$. Преобразуем левую часть:

$1 - tg^2\alpha = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$, следовательно, тождество выполняется;

2) $1 - ctg^2\alpha = \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$. Преобразуем левую часть:

$1 - ctg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$, следовательно, тождество выполняется.

№ 1133

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha ,$$

следовательно, тождество выполняется.

№ 1134

1) $\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$. Преобразуем левую часть:

$$\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$$

2) $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 1 + \dfrac{\left(1 - tg^2\alpha\right)^2}{4tg^2\alpha}$.

Преобразуем левую часть: $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2 2\alpha} = 1 + ctg^2 2\alpha$.

Преобразуем правую часть, получим:

$1 + \dfrac{\left(1 - tg^2\alpha\right)}{2tg\alpha} \cdot \dfrac{\left(1 - tg^2\alpha\right)}{2tg\alpha} = 1 + \dfrac{1}{tg2\alpha} \cdot \dfrac{1}{tg2\alpha} = 1 + ctg^2 2\alpha$, правая часть равна левой, следовательно, тождество верно.

3) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$. Преобразуем левую часть:

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\pi/4 + \alpha\right)}{\cos\left(\pi/4 + \alpha\right)} = \frac{\sin\pi/4 \cdot \cos\alpha + \cos\pi/4 \cdot \sin\alpha}{\cos\pi/4 \cdot \cos\alpha - \sin\pi/4 \cdot \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Преобразуем правую часть:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

4) $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = ctg^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Преобразуем левую часть: $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}$.

Преобразим правую часть:

$$ctg^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cos^2\left(\pi/4 + \alpha\right)}{\sin^2\left(\pi/4 + \alpha\right)} = \frac{\left(\cos\pi/4 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\pi/4\right)^2}{\left(\sin\pi/4 \cdot \cos\alpha + \cos\pi/4 \cdot \sin\alpha\right)^2} = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}$$

Правая часть равна левой, следовательно, тождество выполняется.

№ 1135

1) $4\sin x \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$. Преобразуем левую часть:

$$4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4\sin x \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\sin x \cdot \cos 2x - 2\sin x \cdot \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin x \cdot \cos 2x + \frac{2}{2}\sin x =$$

$= 2\sin x \cdot \cos 2x + \sin x = \sin x(2\cos 2 + 1) = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 3x$, следовательно, тождество выполняется;

2) $\cos 3x \cos 6x \cos 12x = \dfrac{\sin 24x}{8\sin 3x}$

Умножим обе части тождества на 8sin3x и докажем равносильное тождество $8\cos 3x \cdot \sin 3x \cdot \cos 6x \cdot \cos 12x = \sin 24x$ (1)

Преобразуем левую часть: $8\cos3x \cdot \sin3x \cdot \cos6x \cdot \cos12x =$
$= 4\sin6x \cdot \cos6x \cdot \cos12x = 2\sin12x \cdot \cos12x = \sin24x$, следовательно, тождество (1), как и исходное, выполняется.

№ 1136

1) $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$, $3x–16+12=3x + 18 – 2x – 6$, $2x = 16$, $x = 8$;

2) $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\frac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right)$, $35(x–7)–63x–18(x–8)=-21x – 301$,

$35x – 245 – 63x – 18x + 144 = -21x – 301$, $-25x = -200$, $x = 8$.

№ 1137

$a(x – 3) + 8 = 13(x + 2)$. Если $x = 0$, то $a(0 – 3) + 8 = 13(0 + 2)$;
$-3a + 8 = 0 + 26$, $-3a = 18$, $a = -6$.

№ 1138

$1 – b(x + 4) = 2(x – 8)$. Если $x = 1$, то $1 – b(1 + 4) = 2(1 – 8)$,
$1 – 5b = -14$, $-5b = -15$, $b = 3$.

№ 1139

1) $x(x + 1) – (x + 2)(x + 3) + 9 = x(x + 4) – (x + 5)(x + 2)$,
$x^2 + x – x^2 – 3x – 2x – 6 + 9 = x^2 + 4x – x^2 – 2x – 5x – 10$, $-x = -13$, $x = 13$;
2) $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$, $2x^2+2x+6x+6+8=2x^2+10x+x+5$, $-3x=-9$, $x=3$.

№ 1140

1) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x^2-9}$, $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}-\frac{4}{(x-3)(x+3)}=0$,

$\frac{3(x-3)-2(x+3)-4}{(x-3)(x+3)}=0$, $\frac{x-13}{(x-3)(x+3)}=0$.

Знаменатель дроби не равен 0, следовательно, $x – 13 = 0$, т.е. $x = 13$;

2) $\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{11}{x^2+6x+8}$, $x^2 – 6x + 8 = 0$, $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{1}=3\pm1$,

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$, следовательно $x = 2$, $x = 4$ решениями не являются, т.к. обращают в 0 знаменатели дробей.

$\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x-4}-\frac{11}{(x-2)(x-4)}=0$, $\frac{5x-20+2x-4-11}{(x-2)(x-4)}=0$,

$\frac{7x-35}{(x-2)(x-4)}=0$, что равносильно системе, $\begin{cases}7x-35=0\\(x-2)(x-4)\neq0\end{cases}$, $x = 5$.

№ 1141

1) $(a – b)x = a^2 + (a + b)x$, $ax – bx = a^2 + ax + bx$, $-2bx = a^2$, $x=-\frac{a^2}{2b}$;

2) $a^2x = a + b + b^2x$, $x(a^2 – b^2) = a + b$, $x=\frac{a+b}{a^2-b^2}$, $x=\frac{1}{a-b}$.

№ 1142

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{1} = 1 \pm 4$, $x_1 = 5$, $x_2 = -3$;

2) $3x^2 + 4x - 4 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -2$.

№ 1143

1) $(x-3)(x-2) = 6(x-3)$, $(x-3)(x-2-6) = 0$, $(x-3)(x-8) = 0$,
$x = 3$, $x = 8$;

2) $x^2 - \frac{11x}{6} + \frac{1}{2} = 0$, $6x^2 - 11x + 3 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12}$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

№ 1144

1) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 0$, $\frac{x(x-1) + x(x+1)}{x^2-1} = 0$, что равносильно системе:

$\begin{cases} x^2 - x + x^2 + x = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$, $x = 0$;

2) $\frac{3x^2}{3x-1} - 2 = \frac{2x+1}{3x+1}$, $\frac{3x^2(3x+1) - 2(3x-1)(3x+1) - (2x+1)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)} = 0$,

$\frac{9x^3 + 3x^2 - 18x^2 + 2 - 6x^2 + 2x - 3x + 1}{(3x-1)(3x+1)} = 0$,

$\frac{9x^3 - 21x^2 - x + 3}{(3x-1)(3x+1)} = 0$, что равносильно системе:

$\begin{cases} 9x^3 - 21x^2 - x + 3 = 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2(3x-7) - (x+3) = 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases}$ Решений нет.

№ 1145

1) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{7}{2+x} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} + \frac{18}{2-x}$, $\frac{3x-1-7}{x+2} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} - \frac{18}{x-2}$,

$\frac{3x-8}{x+1} = \frac{7x^2 - 28 - 18(x+2)}{x^2-4}$, $\frac{7x^2 - 28 - 18x - 36}{x^2-4} - \frac{(3x-8)(x-2)}{x^2-4} = 0$,

$\frac{7x^2 - 18x - 64 - 3x^2 + 6x + 8x - 16}{x^2-4} = 0$, что равносильно системе:

$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 80 = 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases}$.

Решим первое уравнение системы: $x^2 - x - 20 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 20}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2},\quad x_1 = 5,\ x_2 = -4.$$

2) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2-x}{3-x}$, $\frac{(x+1)(x-3) - 12 + (2-x)(x+3)}{x^2-9} = 0$,

$$\begin{cases} x^2 - 3x + x - 3 - 12 + 2x + 6 - x^2 - 3x = 0 \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases},\ \begin{cases} -3x - 9 = 0 \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases},\ \begin{cases} x = -3 \\ (x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases}.$$

Ответ: решений нет

№ 1146

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1},\quad \frac{2(x+1) - (x^2 - x + 1) - 2x + 1}{x^3+1} = 0,$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 = 0 \\ (x+1)(x^2 - x + 1) \neq 0 \end{cases},\ \begin{cases} x = -1,\ \ x = 2 \\ (x+1)(x^2 - x + 1) \neq 0 \end{cases}.$$

Решением системы является $x = 2$.

№ 1147

1) $x - 4 + \frac{1}{x} = 0$.

При $x \neq 0$ умножим обе части уравнения на x: $x^2 - 4x + 1 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-1}}{1} = 2 \pm \sqrt{3};$$

2) $\frac{4x^2}{x+2} - \frac{10}{x+2} + 4 = 0$, $\frac{4x^2 - 10 + 4x + 8}{x+2} = 0$, $\begin{cases} 4x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$, $2x^2 + 2x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

№ 1148

1) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$.

Пусть $x^2 = y$, тогда уравнение примет вид: $y^2 - 11y + 30 = 0$,

$y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2}$, $y_1 = 6$, $y_2 = 5$, но $y = x^2$, т.е.

$x^2 = 6$, $x = \pm\sqrt{6}$; $x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$. Ответ: $x = \pm\sqrt{5}$, $x = \pm\sqrt{6}$.

2) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

Пусть $x^2 = y$, тогда уравнение примет вид: $2y^2 - 5y + 2 = 0$,

$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, $y_1 = \frac{8}{4} = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$, но $y = x^2$, т.е.

$x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$ и $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

№ 1149

1) $2x^{-2} + 4x^{-1} + 3 = 0$.

Пусть $x^{-1} = y$, тогда уравнение примет вид: $2y^2 + 4y + 3 = 0$,

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-6}}{2}$; D < 0, корней нет;

2) $(x^2 - x)^2 + 12 = 8(x^2 - x)$

Пусть $x^2 - x = y$, тогда уравнение примет вид: $y^2 + 12 = 8y$, $y^2 - 8y + 12 = 0$,

$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{1} = 4 \pm 2$, $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, но $y = x^2 - x$, т.е.

$x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ и $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_{2/3} = \pm 2$, $x_4 = -1$.

№ 1150

1) $x^2 + ax - b^2 + \frac{a^2}{4} = 0$, $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)}}{2} = \frac{-a \pm 2b}{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-a \pm 2b}{2}$.

2) $\frac{2x}{2x-a} - \frac{x}{2x+a} = \frac{5a^2}{4x^2 - a^2}$, $\frac{2x(2x+a) - x(2x-a) - 5a^2}{4x^2 - a^2} = 0$,

$\frac{4x^2 + 2ax - 2x^2 + ax - 5a^2}{4x^2 - a^2} = 0$,

$\frac{2x^2 + 3ax - 5a^2}{4x^2 - a^2} = 0$, что равносильно системе:

$\begin{cases} 2x^2 + 3ax - 5a^2 = 0 \\ (2x-a)(2x+a) \neq 0 \end{cases}$, $2x^2 + 3ax - 5a^2 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 40a^2}}{4} = \frac{-3a \pm 7a}{4}$, $x_1 = a$, $x_2 = \frac{-5}{2}a$.

№ 1151

$ax^2 + bx + c$. При $a \neq 0$, $a > 0$, $b^2 = 4ac$ трехчлен $ax^2 + bx + c$ является квадратом двучлена.

№ 1152

$ax^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{b^2 - b^2 + 4a^2}{4a^2} = 1$, следовательно, x_1, x_2 – взаимно обратные числа.

№ 1153

1) $|2x-3|=7$;

а) если $2x-3\ge 0$, то $2x-3=7$, $2x=10$, $x=5$;

б) если $2x-3<0$, то $2x-3=-7$, $2x=-4$, $x=-2$.

2) $|x+6|=2x$;

а) если $x+6\ge 0$, то $x+6=2x$, $x=6$;

б)если $x+6<0$, то $x+6=-2x$, $x=-2$, но тогда $x+6<0$ не выполняется

Ответ: $x=6$.

3) $2x-7=|x-4|$;

а) если $x-4\ge 0$, то $2x-7=x-4$, $x=3$, но тогда $x-4\ge 0$ не выполняется;

б) если $x-4<0$, то $2x-7=-x+4$, $3x=11$, $x=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$.

№ 1154

1) $|6-2x|=3x+1$;

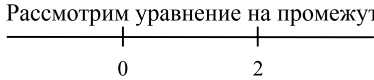
а) если $6-2x\ge 0$, то $6-2x=3x+1$, $x=1$;

б) если $6-2x<0$, то $2x-6=3x+1$,

$x=-7$, но тогда $6-2x<0$ не выполняется.   Ответ: $x=1$.

2) $2|x-2|=|x|-1$

Рассмотрим уравнение на промежутках:



а) $x<0$, тогда $2(2-x)=-x-1$, $4-2x=-x-1$,

$x=5$, но $x<0\Rightarrow x=5$ не является решением;

б) $0\le x<2$, тогда $2(2-x)=x-1$, $4-2x=x-1$, $x=\frac{5}{3}$;

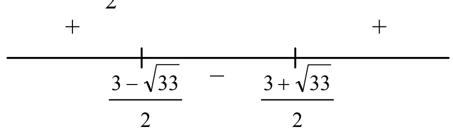
в) $x\ge 2$, $2(x-2)=x-1$, $2x-4=x-1$, $x=3$.   Ответ: $x=3$, $x=1\frac{2}{3}$.

№ 1155

$|x^2-3x-6|=2x$.

Найдем корни трехчлена: $x^2-3x-6=0$, $D=9-4\cdot 1\cdot(-6)=33$,

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$,



1) $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$,

тогда уравнение примет вид: $x^2-3x-6=2x$; $x^2-5x-6=0$,

$x_1=6$, $x_2=-1\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right]\cup\left[3+\frac{\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$;

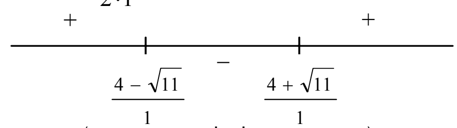
2) $x \in \left(\frac{3-\sqrt{33}}{2};\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$, $-x^2+3x+6=2x$, $-x^2+x+6=0$, $x^2-x-6=0$, $x_1=3$, $x_2=-2$, $-2 \in \left(\frac{3-\sqrt{33}}{2};\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$. Наименьший корень x = 3.

№ 1156

$|x^2 - 8x + 5| = 2x$

Найдем корни трехчлена: $x^2 - 8x + 5 = 0$. $D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 44$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{44}}{2 \cdot 1} = 4 \pm \sqrt{11}$.



1) $x \in \left(-\infty;4-\sqrt{11}\right] \cup \left[4+\sqrt{11};+\infty\right)$, $x^2 - 8x + 5 = 2x$, $x^2 - 10x + 5 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-5}}{1} = 5 \pm \sqrt{20} \in Q$;

2) $x \in \left(4-\sqrt{11};4+\sqrt{11}\right)$, $-x^2 + 8x - 5 = 2x$, $-x^2 + 6x - 5 = 0$,

$x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. Наибольший рациональный корень x = 5.

№ 1157

1) $\sqrt{2x+7} = x+2$,

$\begin{cases} 2x+7=(x+2)^2 \\ x+2 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+7=x^2+4x+4 \\ x \ge -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ x \ge -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=1,\ x_2=-3 \\ x \ge -2 \end{cases}$.

Ответ: x = 1

2) $x = 2-\sqrt{2x-5}$, $\sqrt{2x-5} = 2-x$

$\begin{cases} 2x-5=(2-x)^2 \\ 2-x \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-5=4-4x+x^2 \\ x \le 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-6x+9=0 \\ x \le 2 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ x \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ x \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: корней нет.

№ 1158

1) $3^{x-7} = 81$, $3^{x-7} = 3^4$, $x - 7 = 4$, $x = 11$;

2) $2^{x^2-5x+6,5} = \sqrt{2}$, $2^{x^2-5x+6,5} = 2^{1/2}$, $x^2 - 5x + 6,5 = 0,5$,

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = 6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

3) $\left(\frac{1}{4} \cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$, $\left(4^{-1} \cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$, $\left(4^{x-1}\right)^x = 4^{x+3}$,

$4^{x^2-x} = 4^{x+3}$, $x^2 - x = x + 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

№ 1159

1) $9^{5x}-9^{5x-1}=8$, $9^{5x}\left(1-9^{-1}\right)=8$, $9^{5x}\cdot\frac{8}{9}=8$, $9^{5x}=9$, $5x=1$, $x=1/5$;

2) $2^{x+4}-2^x=120$, $2^x(16-1)=120$, $2^x=8$, $x=3$.

№ 1160

1) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=35^{1/2(5x+6)}$, $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=5^{2,5x+3}\cdot 7^{2,5x+3}$,

$\frac{5^{2,5x+3}\cdot 7^{2,5x+3}}{5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}}=1$, $5^{0,5x-2}\cdot 7^{-0,5x+2}=1$, $\frac{5^{0,5x}}{25}\cdot 7^{-0,5x}\cdot 49=1$,

$\frac{5^{0,5x}}{7^{0,5x}}=\frac{25}{49}$, $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,5x}=\left(\frac{5}{7}\right)^2$, $0,5x=2$, $x=4$;

2) $0,2^{x^2}\cdot 5^{2x+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^6$, $5^{-x^2}\cdot 5^{2x+2}=5^{-6}$, $5^{-x^2+2x+2}=5^{-6}$,

$-x^2+2x+2=-6$, $-x^2+2x+8=0$, $x^2-2x-8=0$, $x_1=4$, $x_2=-2$.

№ 1161

1) $2,4^{3-2x}=2,4^{3x-2}$, $3-2x=3x-2$, $5=5x$, $x=1$;

2) $\left(5/3\right)^x=\left(3/5\right)^{x-2}$, $x=-x+2$, $2x=2$, $x=1$;

3) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$, $\left(\frac{1}{8}\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4x}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4x}$,

$3/2=-4x$, $x=-\frac{3}{8}$.

№ 1162

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^x\cdot\left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x}=\frac{2}{3}$,

$2x+3-3x=1$, $-x=-2$, $x=2$;

2) $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=216$, $2^{x/3}\cdot 3^{x/3}=6^3$, $(6)^{x/3}=6^3$, $x/3=3$, $x=9$.

№ 1163

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$, $5^x(5+1+5^{-1})=155$, $5^x\left(\frac{25+5+1}{5}\right)=155$,

$5^x=25$, $5^x=5^2$, $x=2$;

2) $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$, $3^{2x}(1-2\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{-2})=1$,

$3^{2x}\left(\frac{3^2-2\cdot 3-2}{9}\right)=1$, $3^{2x}=9$, $3^{2x}=3^2$, $x=1$.

3) $7^x-7^{x-1}=6$, $7^x(1-7^{-1})=6$, $7^x=7$, $x=1$;

4) $3^{x+2}+3^x=10$, $3^x(3^2+1)=10$, $3^x=1$, $x=0$.

№ 1164

1) $3^{2x} - 3^x = 72$, $3^{2x} - 3^x = 3^4 - 3^2$, $3^x(3^x - 1) = 3^2(3^2 - 1)$, $x = 2$;

2) $4^x - 2^{x+1} = 48$, $2^{2x} - 2^{x+1} = 48$, $2^x(2^x - 2^1) = 2^3(2^3 - 2^1)$, $x = 3$.

№ 1165

1) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$.

Пусть $\log_2 x = a$, тогда уравнение примет вид: $a^2 - 3a + 2 = 0$,

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, т.е. $\log_2 x = 1$, $x = 2$, $\log_2 x = 2$, $x = 4$.

Ответ: $x = 2$, $x = 4$

2) $(\log_3 x)^2 + 5 = 2\log_3 x^3$, $(\log_3 x)^2 + 5 - 6\log_3 x = 0$, $\log_3 x = a$,

$a^2 + 5 - 6a = 0$, $a^2 - 6a + 5 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, т.е. $\log_3 x = 1$, $x = 3$,

$\log_3 x = 5$, $\log_3 x = \log_3 3^5$, $x = 3^5 = 243$

Ответ: $x = 3$, $x = 243$.

№ 1166

1) $\ln\frac{2}{x+1} = \ln(x+2)$, $\ln 2 - \ln(x + 1) = \ln(x + 2)$, $\ln\frac{2}{x+1} - \ln(x+2) = 0$,

$\ln\left(\frac{2}{(x+1)(x+2)}\right) = \ln 1$, $\frac{2}{(x+1)(x+2)} = 1$, $2 = x2 + 3x + 2$, $x2 + 3x = 0$,

$x = 0$, $x = -3$, при $x = -3$ $\ln(x + 2)$ не определен.

Ответ: $x = 0$

2) $\log_3\sqrt{3x-6} - \log_3\sqrt{x-3} = 1$, $\log_3\left(\frac{\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x-3}}\right) = \log_3 3$, $\frac{\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x-3}} = 3$,

$3x - 6 = 3^2(x - 3)$, $3x - 6 = 9x - 27$, $21 = 6x$, $x = 3{,}5$.

№ 1167

1) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$, $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right) = \lg\frac{1}{2x}$, $\lg\left(\left(\frac{1}{2}+x\right)2x\right) = \lg 1$,

$\left(\frac{1}{2}+x\right)2x = 1$, $x + 2x^2 = 1$, $2x^2 - x - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$,

при $x = -1$ $\lg x$ не определен.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$

2) $2\lg x = -\lg\frac{1}{6-x^2}$, $\lg x^2 + \lg\frac{1}{6-x^2} = 0$,

$$\begin{cases} \lg\frac{x^2}{6-x^2} = \lg 1 \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{6-x^2} = 6 - x^2 \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 6 - x^2 \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x > 0 \\ (6-x^2)^{-1} > 0 \end{cases} \quad x = \sqrt{3}.$$

№ 1168

1) $\log_2(2x-18)+\log_2(x-9)=5$, $\log_2(2x-18)(x-9)=\log_2 2^5$,

$\begin{cases}(2x-18)(x-9)=2^5\\2x-18>0\end{cases}$, $2x^2-18x-18x+162-32=0$,

$2x^2-36x+130=0$, $x^2-18x+65=0$,

$x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-65}}{1}=9\pm4$, $\begin{cases}x_1=13,\ \ x_2=5\\x>9\end{cases}$. Ответ: $x = 13$

2) $\lg(x^2+19)-\lg(x+1)=1$, $\lg((x^2+19):(x+1))=\lg10$,

$\begin{cases}\dfrac{x^2+19}{x+1}=10\\x+1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+19=10x+10\\x>-1\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-10x+9=0\\x>-1\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=1,\ \ x_2=9\\x>-1\end{cases}$

Ответ: $x = 1$, $x = 9$.

№ 1169

1) $5^{\log_3 x^2}-6\cdot5^{\log_3 x}+5=0$.

Пусть log3x = a, тогда уравнение примет вид: $5^{2a}-6\cdot5^a+5=0$,

$(5^a)^2-6\cdot5^a+5=0$, $5^a=1$, $a=0=\log_3x$, $x=1$, $5^a=5$, $a=1=\log_3x$, $x=3$.

Ответ: $x = 1$, $x = 3$.

2) $25^{\log_3 x}-4\cdot5^{\log_3 x+1}=125$, $\left(5^{\log_3 x}\right)^2-4\cdot5\cdot5^{\log_3 x}=125$.

Пусть $5^{\log_3 x}=a$, тогда уравнение примет вид: $a^2-20a-125=0$,

$a_{1/2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100+125}}{1}=10\pm15$, $a_1=25$, $a=-5$; a_2 не является решением,

т.к. $5^{\log_3 x}\neq-5<0$, $5^{\log_3 x}=5^2$, $\log_3x=2$, $x=9$. Ответ: $x = 9$.

№ 1170

1) $x^{\lg x}=10$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x:

$\log_x x^{\lg x}=\log_x 10$, $\lg x=\dfrac{1}{\lg x}$, $\lg^2x=1$, $x=0$, но $x>0$, следовательно, решений нет.

2) $x^{\log_3 x}=9x$.

Прологарифмируем обе части уравнения по x: $\log_x x^{\log_3 x}=\log_x 9x$,

$\log_3x=\log_xx+\log_x9$, $\log_3x=1+2\log_x3$, $\log_3 x=1+\dfrac{2}{\log_3 x}$,

$\log_3^2x-\log_3x-2=0$, $\log_3x=-1$, $x=3^{-1}$, $\log_3x=2$, $x=9$. Ответ: $x=\dfrac{1}{3}$, $x = 9$.

3) $x^{\lg x}-1=10(1-x^{-\lg x})$, $x^{\lg x}-1=10-10x\text{-}l^{gx}$, $x^{\lg x}+10^{-\lg x}-11=0$.

Пусть $\lg x=y$, тогда $x=10^y$ и уравнение примет вид:

$(10^y)^y+10\cdot(10^y)^{-y}-11=0$, $10^{y^2}+\dfrac{10}{y^2}-11=0$.

Пусть $10^{y^2}=z$, тогда уравнение примет вид: $z+\frac{10}{z}-11=0$, при $z\neq 0$,

$z^2-11z+10=0$, $z_1=10$, $z_2=1$, тогда $10^{y^2}=10$, $y=\pm 1$ и $10^{y^2}=1$, $y=0$, тогда $x=10^{\pm 1}$, $x=10^0$ (заметим, что $x>0$). Ответ: $x=1$, $x=10$, $x=0{,}1$.

4) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

Заметим, что $x = 1$ – решение, далее $\left(x^{\sqrt{x}}\right)^2=x^x$; $x^{2\sqrt{x}}=x^x$, пусть

$\sqrt{x}=y$, $x=y^2$, и уравнение примет вид: $\left(y^{2y}\right)2=\left(y^2\right)^{y^2}$; $2y=y^2$,
$y^2-2y=0$, $y(y-2)=0$, $y=0$, $y=2$, тогда $x=0$, $x=4$, но 0^0 не определен.

Ответ: $x=1$, $x=4$.

№ 1171

1) $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0$, $7\cdot\left(2^{x^2}\right)^2-9\cdot 2^{x^2}\cdot 7^{x^2}+2\cdot\left(7^{x^2}\right)^2=0$,

$$7\left(\frac{2^{x^2}}{7^{x^2}}\right)-9\left(\frac{2x^2}{7^{x^2}}\right)+2=0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}=a$, тогда уравнение примет вид: $7a^2-9a+2=0$

$a_{1/2}=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{14}=\frac{9\pm 5}{14}$, $a_1=1$, $a_2=\frac{2}{7}$, тогда

а) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}=1$, т.е. $x=0$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}=\frac{2}{7}$, т.е. $x=\pm 1$. Ответ: $x=0$, $x=\pm 1$.

2) $5^{x+4}+3\cdot 4^{x+3}=4^{x+4}+4\cdot 5^{x+3}$, $5^4 5^x+3\cdot 4^3\cdot 4^x=4^4\cdot 4^x+4\cdot 5^3\cdot 5^x$,
$625\cdot 5^x+192\cdot 4^x=256\cdot 4^x+5\cdot 100\cdot 5^x$,

$625+192\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x=256\left(\frac{4}{5}\right)^x+100\cdot 5$, $64\left(\frac{4}{5}\right)^x=125$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$.

№ 1172

1) $\log_4\left(2+\sqrt{x+3}\right)=1$, $\log_4\left(2+\sqrt{x+3}\right)=\log_4 4$,

$\begin{cases}2+\sqrt{x+3}=4\\ x+3\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x+3=4\\ x\geq -3\end{cases}$, $x=1$.

2) $\log_{1/3}\sqrt{x^2-2x}=-1/2$, $\log_{1/3}\sqrt{x^2-2x}=\log_{1/3}\left(1/3\right)^{-1/2}$,

$\begin{cases}x^2-2x=\left(\sqrt{3}\right)^2\\ x^2-2x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-2x-3=0\\ x(x-2)>0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-1;\ x_2=3\\ x(x-2)>0\end{cases}$ $x=-1$, $x=3$.

3) $\frac{1}{2}\log_3(x+1)=\log_3\sqrt{x+4}-2\log_3\sqrt{2}$,

$\log_3(x+1)^{1/2}=\log_3\sqrt{x+4}-\log_3 2$, $\log_3(x+1)^{1/2}=\log_3\frac{\sqrt{x+4}}{2}$,

$\begin{cases}\sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{x+4}}{2}\\ x+1>0\\ x+4>0\end{cases}$ $\begin{cases}x+1=\frac{x}{4}+1\\ x>-1\\ x>-4\end{cases}$ $\begin{cases}4x+4-x-4=0\\ x>-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\ x>-1\end{cases}$ $x=0$

№ 1173

1) $x^{1+\lg x}=10x$,

Прологарифмируем по основанию x: $\log_x x^{1+\lg x}=\log_x 10x$,

$1+\lg x=1+\log_x 10$, $1+\lg x=1+\frac{1}{\lg x}$, $\lg^2 x=1$; $\lg x=\pm 1$, x = 10, x = 0,1.

2) $x^{\lg x}=100x$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x:

$\log_x x^{\lg x}=\log_x 100x$, $\lg x=\log_x 100+1$, $\lg x=2\lg_x 10+1$,

$\lg x=\frac{2}{\lg x}+1$, $\lg^2 x=2+\lg x$, $\lg^2 x-\lg x-2=0$;

1) lg x = -1, $x=10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1$; 2) lg x = 2, $x=10^2=100$.

3) $\log_2(17-2^x)+\log_2(2^x+15)=8$,

$\begin{cases}\log_2(17-2^x)(2^x+15)=\log_2 2^8\\ 17-2^x>0\\ 2^x+15>0\end{cases}$, $(17-2^x)(2^x+15)=2^8$,

$17\cdot 2^x+17\cdot 15-2^{2x}-15\cdot 2^x=256$, $2^{2x}-2\cdot 2^x+1=0$.

Пусть $2^x=a$, тогда уравнение примет вид:

$a^2-2\cdot a+1=0$, $(a-1)^2=0$, a = 1, т.е. $2^x=1$, x = 0, $\begin{cases}x=0\\ 17-2^x>0\\ 2^x+15>0\end{cases}$ $x=0$.

4) $\log_2(3+2^x)+\log_2(5-2^x)=4$,

$\begin{cases}\log_2(3+2^x)(5-2^x)=4\\ 3+2^x>0\\ 5-2^x>0\end{cases}$, $(3+2^x)(5-2^x)=16$, $15-3\cdot 2^x+5\cdot 2^{2x}=16$,

$-2^{2x}+2\cdot 2^x-1=0$, $2^{2x}-2\cdot 2^x+1=0$; $(2^x-1)^2$, $2^x=1$; x = 0; $\begin{cases}x=0\\ 3+2^x>0\\ 5-2^x>0\end{cases}$ $x=0$.

№ 1174

Ответ: не могут

m, n, k – действительные числа

$x^2-(m+n)x+mn-k^2=0$; $D=b^2-4ac=(m+n)^2-4(mn-k^2)=m^2+2mn+n^2-$
$-4mn-4k^2=m^2+n^2-2mn+4k^2=(m-n)^2+4k^2\ge 0$.

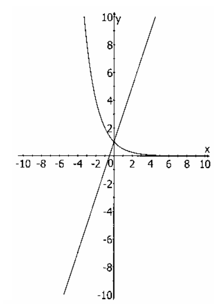
№ 1175

1) $z^2+4z+19=0$, $z_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-19}}{1}=-2\pm i\sqrt{15}$;

2) $z^2-2z+3=0$, $z_{1/2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-3}}{1}=1\pm i\sqrt{2}$.

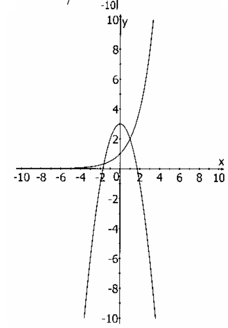
№ 1176

1) $0{,}5^x=2x+1$.
Построим графики функций
$y=0{,}5^x$ и $y=2x+1$:
Очевидно, графики функций пересекаются в точке (0,1), т.е. x = 0

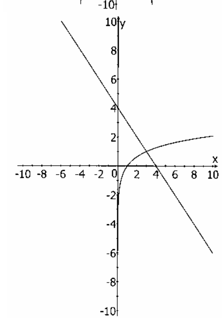


2) $2^x=3-x^2$
Построим графики функций
$y=2^x$ и $y=3-x^2$:

$x_1\approx\dfrac{3}{2}$, $x_2\approx-1{,}8$



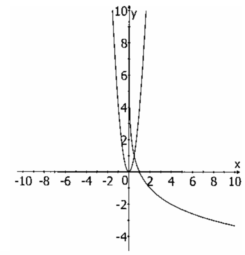
3) $\log_3 x=4-x$
Построим графики функций
$y=\log_3 x$ и $y=4-x$:
$x=3$.



4) $\log_{1/2} x = 4x^2$

Построим графики функций

$y = \log_{1/2} x$ и $y = 4x^2$

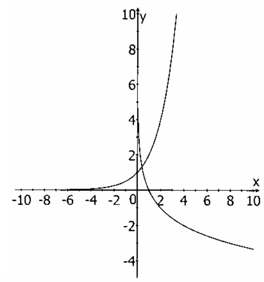


$x = \frac{1}{2}$

5) $2^x = \log_{0,5} x$

Построим графики функций

$y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$

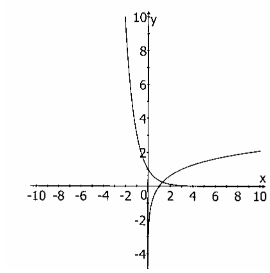


$x \approx \frac{1}{2}$

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$

Построим графики функций

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = \log_3 x$



$x \approx \frac{3}{2}$

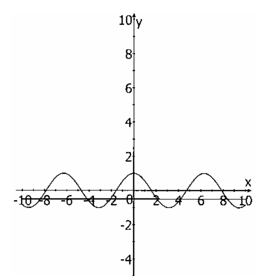
№ 1177

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $[-\pi; 3\pi]$

$\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi, \ n \in Z$

$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2n\pi, \ n \in Z$,

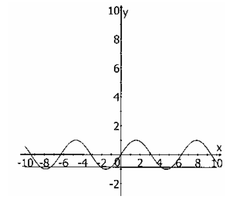
$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi, \ n \in Z$,



n = 1, $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{8\pi}{3}$, n=0, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = -\frac{2}{3}\pi$

Ответ: $x = \pm\frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{8\pi}{3}$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ [-π; 3π]



$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + n\pi,\ n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi,\ n \in Z$

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in Z$, n = 0, $x = -\frac{\pi}{3}$,

n = -1, $x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$, n = 2, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$,

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3},\ \ x = \frac{4}{3}\pi,\ \ x = \frac{-2}{3}\pi,\ \ x = \frac{5}{3}\pi$.

№ 1178

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; $2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi,\ \ n \in Z$,

$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z$;

2) $\cos 3x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $3x = \pm\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + 2n\pi,\ n \in Z$,

$3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2n\pi,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}n\pi,\ n \in Z$;

3) 2tg x + 5 = 0, $tgx = -\frac{5}{2}$;

$x = arctg\left(-\frac{5}{2}\right) + n\pi,\ n \in Z$, $x = -arctg\frac{5}{2} + n\pi,\ n \in Z$

№ 1179

1) $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$.

Пусть cos x = a, тогда уравнение примет вид: $3a^2 - 5a - 12 = 0$,

$a_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}$, $a_1 = 3,\ a_2 = -\frac{8}{6}$,

$a_1 > 1$, $a_2 < -1 \Rightarrow$ исходное уравнение не имеет решений, т.к. $|\cos x| \le 1$;

2) $3tg^2 x - 4tg\,x + 5 = 0$, tg x = a, $3a^2 - 4a + 5 = 0$,

$a_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-15}}{3}$,

D < 0 $\Rightarrow$ действительных корней нет.

№ 1180

1) (3 – 4sinx)(3 + 4cosx) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}3-4\sin x=0\\3+4\cos x=0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{3}{4}\\\cos x=-\frac{3}{4}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+n\pi,\ \ n\in Z\\x=\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2l\pi,\ 1\in Z\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+n\pi,\ n\in Z\\x=\pm(\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2l\pi,\ 1\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+n\pi,\ n\in Z$, $x=\pm(\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2l\pi,\ 1\in Z$.

2) (tg x + 3)(tg x + 1) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}tgx+3=0\\tgx+1=0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}tgx=-3\\tgx=-1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=-arctg3+n\pi,\ \ n\in Z\\x=-\frac{\pi}{4}+l\pi,\ 1\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+l\pi,\ l\in Z$; x = -arctg3 + nπ, n ∈ Z.

№ 1181

1) sin2x=3sin x cos^{2}x, 2sin x·cos x–3sin x · cos^{2}x, sin x·cos x(2-3cos x) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\cos x=0\\\cos x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=n\pi,\ \ \mathrm{n}\in \mathrm{Z}\\\mathrm{x}=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \ 1\in \mathrm{Z}\\\mathrm{x}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2m\pi,\ \ \mathrm{m}\in \mathrm{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: x = nπ, n ∈ Z; $x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \ l\in Z$;

$x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2m\pi,\ \ m\in Z$

2) sin4x = sin2x, 2sin2x · cos2x – sin2x = 0, sin2x(2cos2x – 1) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\\cos 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}2x=n\pi,\ \ n\in Z\\2x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2l\pi,\ \ l\in Z\end{array}\right.\ \ \left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{2},\ \ n\in Z\\x=\pm\frac{\pi}{6}+l\pi,\ \ l\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{n\pi}{2},\ \ n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+l\pi,\ \ l\in Z$.

3) cos2x + cos^{2}x = 0, cos^{2}x – sin^{2}x + cos^{2}x = 0, 2cos^{2}x – 1 + cos^{2}x = 0,
3cos^{2}x = 1,

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2n\pi, \quad n \in Z \\ x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2l\pi, \quad l \in Z \end{array}\right.$.

Ответ: $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2n\pi,\ n \in Z$, $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2l\pi,\ l \in Z$

4) $\sin 2x = \cos^2 x$, $2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$, $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin x - \cos x = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z \\ 2x = (-1)^l\frac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z \\ x = (-1)^l\frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z \end{array}\right.$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$, $\quad x = arctg\frac{1}{2} + l\pi,\ l \in Z$.

№ 1182

1) $\sin 2x = 3\cos x$, $2\sin x \cdot \cos x = 3\cos x$, $\cos x(2\sin x - 3) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z \\ x \in \phi \end{array}\right.$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$.

2) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$, $2\sin 2x \cdot \cos 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$,
$2\sin 2x \cdot \cos 2x = \cos 2x$, $\cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ 2x = (-1)^l\frac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z \\ x = (-1)^l\frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z$, $\quad x = (-1)^l\frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z$.

3) $2\cos^2 x = 1 + 4\sin 2x$, $(2\cos^2 x - 1) = 4\sin 2x$, $\cos 2x = 4\sin 2x$,
$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 4$; $\text{ctg } x = 4$; $x = \text{arcctg}4 + n\pi,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \text{arcctg}4 + n\pi,\ n \in Z$

4) $2\cos x + \cos 2x = 2\sin x$, $2(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$,
$2(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$,
$(\cos x - \sin x)(2 + \cos x + \sin x) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = -2 \end{array}\right.$; $x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z \quad x \in \phi$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z$.

№ 1183

1) cos x + cos2x = 0, $2\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}=0$,

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3}{2}x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}n\pi,\ n\in Z\\ x=\pi+2l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}n\pi,\ n\in Z$; x = π + 2lπ, l ∈ Z.

2) cos x – cos5x = 0, -2sin3x · sin(-2x) = 0,

$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{3},\ n\in Z\\ x=\frac{l\pi}{2},\ l\in Z\end{array}\right.$.

Ответ: $x=\frac{n\pi}{3},\ x=\frac{l\pi}{2},\ l\in Z$.

3) sin3x + sin x = 2sin2x
2sin2x · cos x = 2sin2x, 2sin2x(cos x – 1) = 0,

$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ x=2m\pi,\ m\in Z\end{array}\right.$.

Ответ: $x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$.

4) sin x+sin2x+sin3x = 0, 2sin2x · cos x + sin2x = 0, sin2x(2cos x + 1) = 0,

$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{2};\ x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\quad n\in Z$.

№ 1184

1) 2cos x + sin x = 0, 2 + tg x = 0, tg x = -2, x = -arctg2 + nπ, n ∈ Z.
Ответ: x = -arctg2 + nπ, n ∈ Z.

2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$, $tgx=-\sqrt{3}$,

$x=-arctg\sqrt{3}+n\pi,\ n\in Z$, $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z$.

№ 1185

1) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2$, $4\sin^4 x + 2^2\sin 2x \cdot \cos^2 x = 2$, $4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$,

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x = (-1)^l \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z \end{array}\right.$.

Ответ: $x = (-1)^l \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z$.

2) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$,

$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} + 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$,

$\left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$, $1 - \frac{1}{2}\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8}$,

$\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$, $\sin \frac{2x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\frac{2x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\quad n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi n}{2},\quad n \in Z$.

№ 1186

1) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$, $\sqrt{3}(\sin 2x - 1) - \cos 2x = 0$,

$-\sqrt{3}(\cos x - \sin x)^2 - \cos 2x = 0$,

$\sqrt{3}(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$,

$(\cos x - \sin x)\left(\sqrt{3}(\cos x - \sin x) + \cos x + \sin x\right) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin x + \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z \\ \cos x\left(\sqrt{3} + 1\right) - \sin x\left(\sqrt{3} - 1\right) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z \\ \left(\sqrt{3} + 1\right) - tgx\left(\sqrt{3} - 1\right) = 0 \end{array}\right.$, $tgx = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $\left[\begin{array}{l} x = arctg\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + n\pi,\ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = arctg\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + n\pi,\ n \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z$.

2) $6\sin x + 5\cos x = 6$, $12\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 5\cos^2 \frac{x}{2} - 5\sin^2 \frac{x}{2} = 6\cos^2 \frac{x}{2} + 6\sin^2 \frac{x}{2}$,

$12tg\frac{x}{2} + 5 - 5tg^2 \frac{x}{2} - 6 - 6tg^2 \frac{x}{2} = 0$, $11tg^2 \frac{x}{2} - 12tg\frac{x}{2} + 1 = 0$,

$\frac{D}{4}=36-11=25$, $tg\left(\frac{x}{2}\right)_{1,2}=\frac{6\pm5}{11}$,

$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=1 \\ tg\frac{x}{2}=\frac{1}{11} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n \\ \frac{x}{2}=arctg\frac{1}{11}+\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=2arctg\frac{1}{11}+2\pi k \end{array}\right.$; $k,n\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $x=2arctg\frac{1}{11}+2\pi k;$ $k,n\in Z$.

№ 1187

1) $tg^3x + tg^2x - 2tg\,x - 2 = 0$, $tg^2x(tg\,x + 1) - 2(tg\,x + 1) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} tgx+1=0 \\ tg^2x=2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z \\ tgx=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z \\ x=\pm arctg\sqrt{2}+l\pi,\ l\in Z \end{array}\right.$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$, $x=\pm arctg\sqrt{2}+l\pi,\ l\in Z$.

2) $1 - \cos x = tg\,x - \sin x$, $1-\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x$; $\cos x \neq 0$,

$\cos x - \cos^2x = \sin x - \cos x \cdot \sin x$, $\cos x(\sin x - \cos x) = \sin x - \cos x$,

$(\cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0$, $\left[\begin{array}{l} \cos=1 \\ \sin x-\cos x=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2n\pi,\ n\in Z \\ x=\frac{\pi}{4}+l\pi,\ l\in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = 2n\pi$, $n \in Z$, $x=\frac{\pi}{4}+l\pi,\ l\in Z$.

№ 1188

1) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2x$, $\sin x(1 + 2\cos x) = \cos x(1 + 2\cos x)$,
$(\sin x - \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z \\ x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2l\pi,\ l\in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$, $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2l\pi,\ l\in Z$.

2) $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$, $2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-\sqrt{6}(\cos x-\sin x)=0$,
$(\cos x-\sin x)\left(2(\cos x+\sin x)-\sqrt{6}\right)=0$,

$\left[\begin{array}{l} \cos x-\sin x=0 \\ 2(\cos x+\sin x)=\sqrt{6} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \cos x-\sin x=0 \\ \cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z \\ \cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

$$\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi/2-2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad \cos\frac{\pi/2-2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\pi}{4}-x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi l,\ l\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z,\ x=\frac{\pi}{12}+2\pi l,\ \text{x}=\frac{5\pi}{12}+2\pi l,\ l\in Z$.

№ 1189

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\cos x+\sin x,\quad \begin{cases}\sin 2x\neq 1\\ \cos 2x=(\cos x+\sin x)(1-\sin 2x)\end{cases},$$

$$\begin{cases}\sin 2x\neq 1\\ \cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)^2\end{cases},$$

(cos x – sin x)(cos x + sin x) – (cos x + sin x)(cos x – sin x)^2 = 0,
(cos x – sin x)(cos x + sin x)(1 – (cos x – sin x)) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 1-\cos x+\sin x=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ \cos x-\sin x=1\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ \begin{cases}\cos x=1\\ \sin x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=-1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ x=2l\pi,\ l\in Z\\ x=-\frac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in Z\end{array}\right.\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{-\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z;\ \ x=-\frac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in Z;\ \ \text{x}=2\pi\text{k},\ \text{k}\in Z$.

№ 1190

1) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$, $(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}tgx=-1\\ tg^2x+tgx+1=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z\\ x=\phi\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$.

2) $2\sin^2x+\sin^2 2x=2$, $2\sin^2x+4\sin^2x(1-\sin^2x)=2$,
$\sin^2x+2\sin^2x-2\sin^4x-1=0$, $3\sin^2x-2\sin^4x-1=0$,
$2\sin^4x-3\sin^2x+1=0$, $\sin 2x=a$, $2a^2-3a+1=0$, $D=9-4\cdot 2\cdot 1$,

$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$;

1) $\sin x = \pm 1,\ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; 2) $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z,\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z$.

3) $8\sin x \cdot \cos 2x \cos x = \sqrt{3}$, $4\sin 2x \cos 2x = \sqrt{3}$, $2\sin 4x = \sqrt{3}$,

$\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $4x = (-1)^l \frac{\pi}{3} + l\pi,\ l \in Z$. Ответ: $x = (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{4},\ l \in Z$.

4) $4\sin x \cos x \cos 2x = \cos 4x$, $2\sin 2x \cos 2x = \cos 4x$, $\sin 4x = \cos 4x$,

$4x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z$, $x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4},\ n \in Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4},\ n \in Z$.

№ 1191

1) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = \cos 2x$, $(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$,
$-\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$, $n \in Z$. Ответ: $x = 2n\pi$, $n \in Z$.
2) $2\sin^2 x - \cos^4 x = 1 - \sin^4 x$, $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\sin^2 x - 1$, $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$,

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0$, $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z$.

№ 1192

1) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \cos 2x$, $\sin x \cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,
$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$,

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0$, $tg^2 x + tg\, x - 1 = 0$, $tg\, x = a$, $a^2 + a - 1 = 0$,

$a_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

1) $tgx = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x = arctg\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + n\pi,\ n \in Z$;

2) $tgx = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = -arctg\frac{1-\sqrt{5}}{2} + l\pi,\ l \in Z$.

Ответ: $x = arctg\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + n\pi,\ n \in Z$, $x = -arctg\frac{1-\sqrt{5}}{2} + l\pi,\ l \in Z$;

2) $2 + \cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x = \sin^2 x$, $\cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x = -2$,
$2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x = 0$, $3\cos^2 x + \sin^2 x + 3\sin x \cos x = 0$,
$3 + tg^2 x + 3tgx = 0$, $tgx = a$, $a^2 + 3a + 3 = 0$, $D < 0$, следовательно, решений нет.
Ответ: решений нет.

№ 1193

1) $4\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x + 10\cos^2 x = 3$,
$4\sin^2 x - 3\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x + 10\cos^2 x - 3\cos^2 x = 0$,
$\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x + 7\cos^2 x = 0$, $tg^2 x - 8tgx + 7 = 0$, $a^2 - 8a + 7 = 0$,

$a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $tgx = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$, $tgx = 7$, $x = arctg7 + l\pi$, $l \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z$, $x = arctg7 + l\pi$, $l \in Z$;

2) $3\sin^2x - 2\sin x \cdot \cos x = 1$, $3\sin^2x - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2x - \cos^2x = 0$,
$2\sin^2x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2x = 0$, $2tg^2x - 2tgx - 1 = 0$, $tgx = a$, $2a^2-2a-1=0$,

$a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $tgx = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $x = arctg\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + n\pi,\ n \in Z$.

Ответ: $x = arctg\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + n\pi,\ n \in Z$.

№ 1194

1) $\sin 5x = \sin 3x$, $\sin 5x - \sin 3x = 0$, $2\sin x \cdot \cos 4x = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = n\pi,\ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4},\ l \in Z \end{array}\right.$. Ответ: $x=n\pi$, $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4},\ l \in Z$;

2) $\cos 6x + \cos 2x = 0$, $2\cos 4x \cdot \cos 2x = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4},\ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4},\ n \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z$;

3) $\sin 3x + \cos 7x = 0$, $\sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 7x\right) = 0$,

$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$,

$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 5x = n\pi,\ n \in Z \\ \frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5},\ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5},\ n \in Z$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2},\ l \in Z$;

4) $\sin x = \cos 5x$, $\sin x - \cos 5x = 0$, $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$,

$2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{4}=n\pi,\ n\in Z\\ \frac{\pi}{4}-2x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{3},\ n\in Z\\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{l\pi}{2},\ l\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{3},\ n\in Z$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{l\pi}{2},\ l\in Z$.

№ 1195

1) sinx + sin5x = sin3x, 2sin3x · cos2x – sin5x = 0, sin3x(2cos2x – 1) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \cos 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{3},\ n\in Z\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{l\pi}{2},\ l\in Z\end{array}\right.$$ Ответ: $x=\frac{n\pi}{3},\ n\in Z$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{l\pi}{2},\ l\in Z$;

2) cos7x – cos3x = 3sin5x, -2sin5x·sin2x–3sin5x=0, sin5x(2sin2x + 3) = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 5x=0\\ \sin 2x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.;\ x=\frac{n\pi}{5},\ n\in Z.$$

№ 1196

1) cosx · sin9x = cos3x · sin7x, $\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 10x)=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 10x)$,
sin8x – sin4x = 0, 2sin2x · cos6x = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 6x=0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{6},\ l\in Z\end{array}\right.$$ Ответ: $x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{6},\ l\in Z$;

2) sinxcos5x = sin9x · cos3x, $\frac{1}{2}(-\sin 4x+\sin 6x)=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 12x)$,
sin12x + sin4x = 0, 2sin8x · cos4x = 0,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 8x=0\\ \cos 4x=0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{8},\ n\in Z\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{l\pi}{4},\ l\in Z\end{array}\right.$$ Ответ: $x=\frac{n\pi}{8},\ n\in Z$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{l\pi}{4},\ l\in Z$.

№ 1197

1) 5 + sin2x = 5(sinx + cosx), 4 + $(\sin x + \cos x)^2$ = 5(sinx + cosx),

cosx + sinx = t $\sqrt{2}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=t$, t^2 – 5t + 4 = 0, D = 25 – 16 = 9,

$t_1=\frac{5+3}{2}=4$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}>1$ - нет решений,

$t_2=\frac{5-3}{2}=1$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z \\ x=2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.;$$

2) 2 + 2cosx = 3sinx · cosx + 2sinx,

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x\right)+2\left(\cos x-\sin x\right)=0,$$

$3(\cos x - \sin x)^2 + 4(\cos x - \sin x) + 1 = 0$, $\cos x - \sin x = 0$,

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=t, \quad 3t^2+4t+1=0,\ D=4-3=1,$$

$$t_1=\frac{-2-1}{3}=-1, \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi n \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z \\ x=-\pi+2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right. \quad t_2=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}, \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{3\sqrt{2}},$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)+2\pi n,\ n\in Z, \quad x=-\frac{\pi}{4}+\arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\quad x=\pi+2\pi n;\quad n\in Z$,

$$x=-\frac{\pi}{4}+ar\cos\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)+2\pi n,\quad n\in Z.$$

№ 1198

1) sinx + sin2x + sin3x + sin4x = 0, $2\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{3}{2}x=0$,

$$\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3}{2}x\right)=0, \quad \sin\frac{5}{2}x\left(2\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{5}{2}x=0 \\ \cos x=0 \\ \cos\frac{x}{2}=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{5}n\pi,\ n\in Z \\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z \\ x=\pi+2m\pi,\ m\in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{2}{5}n\pi,\ n\in Z$, $x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z$, $x = \pi + 2m\pi$, $m \in Z$;

2) cosx+cos2x+cos3x+cos4x=0, $2\cos\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{3}{2}x=0$,

$$\cos\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3}{2}x\right)=0, \quad 2\cos\frac{5}{2}x\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{5}{2}x=0\\ \cos x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}n\pi,\ n\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z\\ x=\pi+2m\pi,\ m\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}n\pi,\ n\in Z$, $x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z$.

№ 1199

1) $tg^2 3x - 4\sin^2 3x = 0$, $\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}-4\sin^2 3x=0$, $\cos 3x \neq 0$,

$\sin^2 3x - 4\sin^2 3x\cdot\cos^2 3x = 0$, $\sin^2 3x - 4\sin^2 3x(1-\sin^2 3x) = 0$,

$4\sin^4 3x - 3\sin^2 3x = 0$, $\sin^2 3x(4\sin^2 3x - 3) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \sin 3x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{n\pi}{3},\ n\in Z\\ 3x=(-1)^l\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{n\pi}{3},\ n\in Z$, $x=(-1)^l\frac{\pi}{9}+\frac{l\pi}{3},\ l\in Z$, $x=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{9}+\frac{l\pi}{3},\ l\in Z$

2) $\sin x\, tgx = \cos x + tgx$, $\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\sin^2 x-\cos^2 x-\sin x}{\cos x}=0$,

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x-1+\sin^2 x-\sin x=0\\ \cos x\neq 0\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}2\sin^2 x-\sin x-1=0\\ \cos x\neq 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z\\ x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi,\ m\in Z\end{array}\right.\\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi,\ m\in Z$.

3) $ctgx\left(ctgx+\frac{1}{\sin x}\right)=1$, $\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{\cos x+1}{\sin x}\right)=1$, $\frac{\cos^2 x+\cos x}{\sin^2 x}=1$,

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x=0\\ \sin^2 x\neq 0\end{array}\right.\\ 2\cos^2 x+\cos x-1=0\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=+\frac{1}{2}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=\pi+2n\pi,\ n\in Z\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2n\pi,\ n \in Z \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in Z \end{array}\right. \\ x \neq m\pi,\ m \in Z \end{cases}$$ Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in Z$.

4) $4ctg^2 x = 5 - \dfrac{9}{\sin x}$, $\dfrac{4\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{5\sin x - 9}{\sin x}$, $\begin{cases} 4\cos^2 x - 5\sin^2 x + 9\sin x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 - 9\sin^2 x + 9\sin x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 9\sin^2 x - 9\sin x - 4 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$, $9\sin^2 x - 9\sin x - 4 = 0$,

$9a^2 - 9a - 4 = 0$, $a_{1/2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{18} = \dfrac{9 \pm 15}{18}$, $\sin x = \dfrac{4}{3}$, $x \neq \phi$, $\sin x = -\dfrac{1}{3}$,

$x = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{1}{3} + n\pi,\ n \in Z$, $\begin{cases} x = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{1}{3} + n\pi,\ n \in Z \\ x \neq m\pi,\ m \in Z \end{cases}$

Ответ: $x = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{1}{3} + n\pi,\ n \in Z$.

№ 1200

1) tg2x = 3tgx

$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{3\sin x}{\cos x}$, $\dfrac{2\sin x \cdot \cos^2 x - 3\sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cos x} = 0$,

$\begin{cases} 2\sin x \cdot \cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x + 3\sin^3 x = 0 \\ \cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \neq 0 \end{cases}$,

$-\sin x\cos^2 x + 3\sin^3 x = 0$, $-\sin x(1 - \sin^2 x) + 3\sin^3 x = 0$, $4\sin^3 x - \sin x = 0$,
$\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = m\pi,\ m \in Z \\ x = (-1)^l \dfrac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z \\ x = (-1)^{l+1} \dfrac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = m\pi,\ m \in Z \\ x = (-1)^l \dfrac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z \\ x = (-1)^{l+1} \dfrac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z \end{array}\right. \\ \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in Z \end{cases} \end{cases}$

Ответ: $x = m\pi,\ m \in Z$, $x = (-1)^l \dfrac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z$, $x = (-1)^{l+1} \dfrac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in Z$;

2) ctg2x = 2ctgx, $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{2\cos x}{\sin x}$, $\dfrac{\cos 2x}{2\sin x \cdot \cos x} - \dfrac{4\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = 0$

$$\begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos^2 x = 0 \\ \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$, $\cos^2x - \sin^2x - 4\cos^2x=0$, $3\cos^2x+\sin^2x = 0$,

$3\cos^2x + 1 - \cos^2x = 0$, $2\cos^2x + 1 = 0$, $\cos^2 x = -\frac{1}{2}$. Ответ: решений нет.

3) $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$, $\frac{tgx+tg\frac{\pi}{4}}{1-tgxtg\frac{\pi}{4}}+\frac{tgx-tg\frac{\pi}{4}}{1+tgx\cdot tg\frac{\pi}{4}}=2$,

$\frac{tg+1}{1-tgx}+\frac{tgx-1}{1+tgx}-2=0$, $\frac{1+2tgx+tg^2x+tgx-tg^{2x}-1+tgx-2+2tg^2x}{1-tg^2x}=0$

$\frac{2tg^2x+4tgx}{1-tg^2x}=0$, $\begin{cases} 2tg^2x+4tgx=0 \\ 1-tg^2x\neq 0 \end{cases}$, $2tg^2x + 4tgx = 0$,

$\left[\begin{array}{l} tgx=0 \\ tgx=-2 \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=n\pi,\ n\in Z \\ x=-arctg2+\pi l,\ l\in Z \end{array}\right. \\ 1-tg^2x\neq 0 \end{cases}$

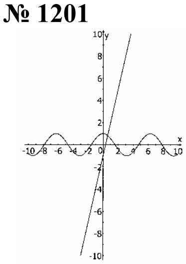
Ответ: $x = n\pi$, $n \in Z$, $x = -arctg2 + \pi l$, $l \in Z$.

4) $tg(2x + 1)ctg(x + 1) = 1$, $tg(2x + 1) = tg(x + 1)$, $tg(2x + 1) - tg(x + 1) = 0$,

$\frac{\sin(2x+1-x-1)}{\cos(2x+1)\cos(x+1)}=0$, $\frac{\sin x}{\cos(2x+1)\cos(x+1)}=0$, $\begin{cases} x=\pi n,\ n\in Z \\ \cos(2x+1)\cos(x+1)\neq 0 \end{cases}$

Ответ: $x = \pi n$, $n \in Z$.

№ 1201

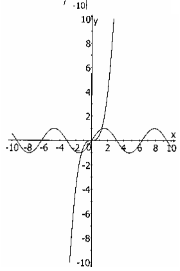


1) $\cos x = 3x - 1$

Построим графики функций

$y = \cos x$ и $y = 3x - 1$:

$x \approx \frac{1}{2}$



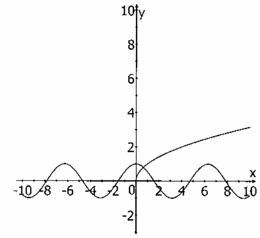
2) $\sin x = 0,5x^3$

$x \approx \pm 1$; $x = 0$

3) $\cos x = \sqrt{x}$

$y = \cos x$, $y = \sqrt{x}$

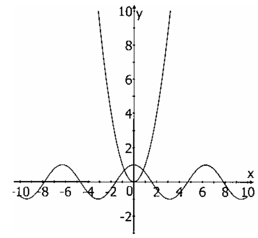
$x \approx \frac{1}{2}$



4) $\cos x = x^2$

$y = \cos x$, $y = x^2$

$x \approx \pm 0{,}8$



№ 1202

1) $x + 8 > 4 - 3x$, $4x > -4$, $x > -1$;

2) $3x + 1 - 2(3 + x) < 4x + 1$, $3x + 1 - 6 - 2x - 4x - 1 < 0$, $-3x < 6$, $x > -2$.

№ 1203

1) $\frac{4-3x}{8} - \frac{5-2x}{12} < 2$, $3(4-3x)-2(5-2x)-2\cdot 24<0$, $12-9x-10+4x-48 < 0$, $-5x - 46 < 0$, $x > -46/5$;

2) $\frac{5x-7}{6} - \frac{x+2}{7} \geq 2$ б $7(5x - 7) - 6(x + 2) - 42 \cdot 2 \geq 0$,

$35x - 49 - 6x - 12 - 84 \geq 0$, $29x \geq 145$, $x \geq 5$.

№ 1204

1) $\frac{5x-4}{7x+5} > 0$

а) $\begin{cases} 5x-4>0 \\ 7x+5>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x > \frac{-5}{7} \end{cases}$ $x > 4/5$

б) $\begin{cases} 5x-4<0 \\ 7x+5<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x < -\frac{5}{7} \end{cases}$ $x < -5/7$ $\left[\begin{array}{l} x > \frac{4}{5} \\ x < -\frac{5}{7} \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{7}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$;

2) $\frac{3x+10}{40-x}>0$

а) $\begin{cases}3x+10>0\\40-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>-\frac{10}{3}\\x<40\end{cases}$ $x\in\left(-\frac{10}{3};40\right)$

б) $\begin{cases}3x+10<0\\40-x<0\end{cases}$ $\begin{cases}x<-\frac{10}{3}\\x>40\end{cases}$ x ∈ ϕ $\left[\begin{array}{l}x\in\left(-\frac{10}{3};40\right)\\x\in\phi\end{array}\right.$.

Ответ: $x\in\left(-\frac{10}{3};40\right)$.

3) $\frac{x+2}{5-4x}>0$

а) $\begin{cases}x+2>0\\5-4x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>-2\\x<\frac{5}{4}\end{cases}$ $-2<x<\frac{5}{4}$

б) $\begin{cases}x+2<0\\5-4x<0\end{cases}$ $\begin{cases}x<-2\\x>\frac{5}{4}\end{cases}$ x ∈ ϕ $\left[\begin{array}{l}-2<x<\frac{5}{4}\\x\in\phi\end{array}\right.$

Ответ: $-2<x<\frac{5}{4}$.

4) $\frac{8-x}{6+3x}>0$

а) $\begin{cases}8-x>0\\6+3x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<8\\x>-2\end{cases}$ -2 < x < 8

б) $\begin{cases}8-x<0\\6+3x<0\end{cases}$ $\begin{cases}x>8\\x<-2\end{cases}$ x ∈ ϕ

Ответ: -2 < x < 8.

№ 1205

1) $\frac{3-2x}{3x-2}<0$

а) $\begin{cases}3-2x<0\\3x-2<0\end{cases}$ $\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x>\frac{2}{3}\end{cases}$; $x>\frac{3}{2}$; б) $\begin{cases}3-2x>0\\3x-2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\x<\frac{2}{3}\end{cases}$; $x<\frac{2}{3}$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

2) $\dfrac{10-4x}{9x+2}<0$; а) $\begin{cases}10-4x<0\\9x+2<0\end{cases}$ $\begin{cases}x>\dfrac{5}{2}\\x>-\dfrac{2}{9}\end{cases}$; $x>\dfrac{5}{2}$

б) $\begin{cases}10-4x>0\\9x+2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<\dfrac{5}{2}\\x<-\dfrac{2}{9}\end{cases}$; $x<-\dfrac{2}{9}$ $\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{5}{2}\\x<-\dfrac{2}{9}\end{array}\right.$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{9}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

3) $\dfrac{18-7x}{-4x^2-1}<0$; $\dfrac{18-7x}{4x^2+1}>0$

$18-7x>0$; $x<\dfrac{18}{7}$ ($4x^2+1>0$ при любых значениях x). Ответ: $x<\dfrac{18}{7}$.

№ 1206

1) $\dfrac{5x+4}{x-3}<4$; $\dfrac{5x+4-4(x-3)}{x-3}<0$; $\dfrac{x+16}{x-3}<0$;

$\begin{cases}x+16>0\\x-3<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x+16<0\\x-3>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>-16\\x<3\end{cases}$ или $\begin{cases}x<-16\\x>3\end{cases}$; $-16<x<3$;

2) $\dfrac{2}{x-4}<1$; $\dfrac{2-1(x-4)}{x-4}<0$; $\dfrac{6-x}{x-4}<0$;

$\begin{cases}6-x<0\\x-4>0\end{cases}$ или $\begin{cases}6-x>0\\x-4<0\end{cases}$; $\begin{cases}x>6\\x>4\end{cases}$ или $\begin{cases}x<6\\x<4\end{cases}$ $x>6$ или $x<4$;

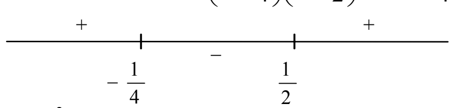
3) $\dfrac{2}{x+3}\le 4$, $\dfrac{2-4(x+3)}{x+3}\le 0$, $\dfrac{-4x-10}{x+3}\le 0$,

$\begin{cases}-4x-10\le 0\\x+3>0\end{cases}$ или $\begin{cases}-4x-10\ge 0\\x+3<0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -2{,}5\\x>-3\end{cases}$ или $\begin{cases}x\le -2{,}5\\x<-3\end{cases}$

$x\ge -2{,}5$ или $x<-3$.

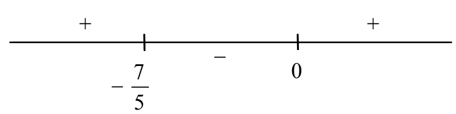
№ 1207

1) $8x^2-2x-1<0$, $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0$, $-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$



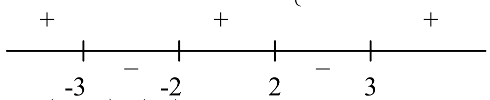
2) $5x^2+7x\le 0$,

$-\dfrac{7}{5}\le x\le 0$.



№ 1208

1) $\dfrac{x^2-9}{x^2-4}<0$ равносильно $\begin{cases}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)}<0\\ x\neq\pm2\end{cases}$, $\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)}<0$



$x\in(-3;-2)\cup(2;3)$;

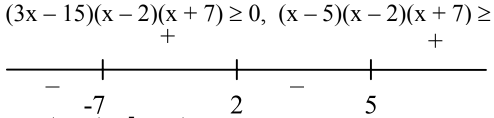
2) $(2x^2+3)(x+4)^3>0$, $2x^2+3>0$ при любых x;

$(x+4)^3>0$ равносильно $x+4>0$; $x>-4$.

№ 1209

1) $\dfrac{3x-15}{x^2+5x-14}\geq0$, $\begin{cases}(3x-15)(x^2+5x-14)\geq0\\ x^2+5x-14\neq0\end{cases}$,

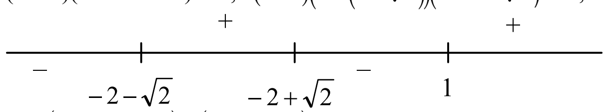
$(3x-15)(x-2)(x+7)\geq0$, $(x-5)(x-2)(x+7)\geq0$,



$x\in(-7;2)\cup[5;+\infty)$;

2) $\dfrac{x-1}{x^2+4x+2}<0$, $\begin{cases}(x-1)(x^2+4x+2)<0\\ x^2+4x+2\neq0\end{cases}$,

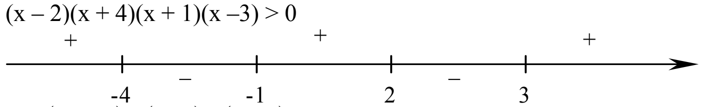
$(x-1)(x^2+4x+2)<0$, $(x-1)\left(x-\left(2+\sqrt2\right)\right)\left(x+2-\sqrt2\right)<0$,



$x\in\left(-\infty;-2-\sqrt2\right)\cup\left(-2+\sqrt2;1\right)$

3) $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3}>0$ равносильно $\begin{cases}(x^2+2x-8)(x^2-2x-3)>0\\ x^2-2x-3\neq0\end{cases}$

$(x-2)(x+4)(x+1)(x-3)>0$

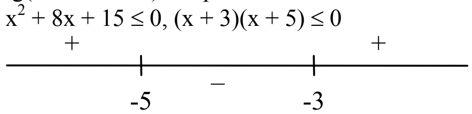


$x\in(-\infty;-4)\cup(-1;2)\cup(3;+\infty)$.

№ 1210

$\lg(x^2+8x+15)$. Выражение не имеет смысла при $x^2+8x+15\leq0$,

$x^2+8x+15\leq0$, $(x+3)(x+5)\leq0$



$x\in[-5;-3]$.

Ответ: $-5\leq x\leq-3$.

№ 1211

$(m-1)x2-2(m+1)x+m-3=0$.

Т.к. квадратное уравнение имеет два действительных корня, когда

D>0 и a≠0, то $\begin{cases}(m+1)^2-(m-1)(m-3)>0\\ m-1\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}m^2+2m+1-m^2+4m-3>0\\ m\neq 1\end{cases}$

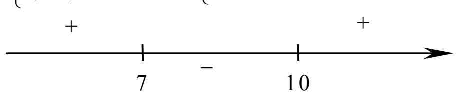
$\begin{cases}6m-2>0\\ m\neq 0\end{cases}$ $m>\frac{1}{3}$, следовательно, m =2 – наименьшее целое число, при котором уравнение имеет 2 действительных корня.

№ 1212

$(m-7)x^2+2(m-7)x+3=0$, $D<0$, $a\neq 0$

$\begin{cases}(m-7)^2-3(m-7)<0\\ m-7\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}m^2-14m+49-3m+21<0\\ m\neq 7\end{cases}$

$\begin{cases}m^2-17+70<0\\ m\neq 7\end{cases}$ $\begin{cases}(m-7)(m-10)<0\\ m\neq 7\end{cases}$ $(m-7)(m-10)<0$



$m\in(7;\,10)$.

Ответ: при m = 8, m = 9.

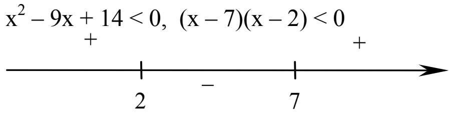
№ 1213

$\dfrac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}<0$, $\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)\left(x^2-9x+14\right)<0$.

Выражение принимает отрицательное значение, когда

$x^2-9x+14<0$, т.к. $\frac{x^2}{2}+3>0$ при любых x

$x^2-9x+14<0$, $(x-7)(x-2)<0$



$x\in(2;\,7)$, следовательно, наибольшее целое x = 6.

Ответ: x = 6

№ 1214

$\dfrac{x^2-x-6}{-7-x^2}>0$, $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7}<0$, $x^2+7>0$ при любых x, а

$x^2-x-6<0$ при $x\in(-2;\,3)$, следовательно, наименьшее целое, x = -1.

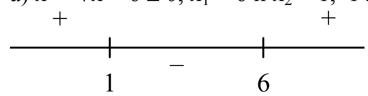
№ 1215

1) $|2x-3|<x$, $2x-3<x$ или $3-2x<x$, $2x-x<3$, $x<3$ или $-2x-x<-3$, $-3x<-3$; $x>1$. Ответ: $1<x<3$

2) $|4-x|>x$, $4-x>x$ или $x-4>x$; $x<-2$ или $x\in\phi$. Ответ: $x<-2$.

3) $|x^2 - 7x + 12| \le 6$, $x^2 - 7x + 12 \le 6$ или $-x^2 + 7x - 12 \le 6$;

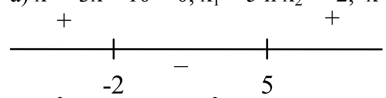
а) $x^2 - 7x + 6 \le 0$, $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$, $1 \le x \le 6$;



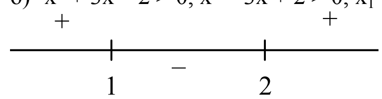
б) $x^2 - 7x + 18 \ge 0$, $x^2 - 7x + 18 = 0$, $D < 0$, следовательно, неравенство справедливо при всех x. Ответ: $1 \le x \le 6$.

4) $|x^2 - 3x - 4| > 6$, $x^2 - 3x - 4 > 6$ или $-x^2 + 3x + 4 > 6$;

а) $x^2 - 3x - 10 > 0$, $x_1 = 5$ и $x_2 = -2$, $x < -2$, $x > 5$;



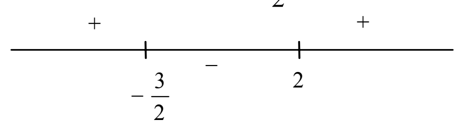
б) $-x^2 + 3x - 2 > 0$, $x^2 - 3x + 2 > 0$, $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, $1 < x < 2$;



Ответ: $x < -2$, $1 < x < 2$, $x > 5$;

5) $|2x^2 - x - 1| \ge 5$, $2x^2 - x - 1 \ge 5$ или $-2x^2 + x + 1 \ge 5$

а) $2x^2 - x - 6 \ge 0$, $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = 2$.



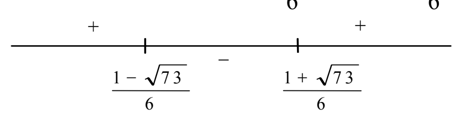
Следовательно, $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge 2$.

б) $-2x^2 + x - 4 \ge 0$, $2x^2 - x + 4 \le 0$, $D < 0$ – корней нет.

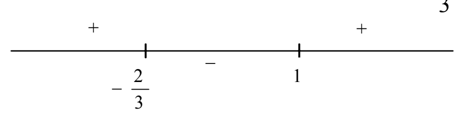
Ответ: $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge 2$

6) $|3x^2 - x - 4| < 2$, $3x^2 - x - 4 < 2$ или $-3x^2 + x + 4 < 2$,

а) $3x^2 - x - 6 < 0$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{73}}{6}$, $x = \frac{1+\sqrt{73}}{6}$;



б) $-3x^2 + x + 2 < 0$, $3x^2 - x - 2 > 0$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$,



$-\frac{2}{3} < x$, $x > 1$, но $|3x^2 - x - 4| = -3x^2 + x + 4$ при $-1 < x < 4/3$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{73}}{6} < x < -\frac{2}{3}$, $1 < x < \frac{1+\sqrt{73}}{6}$.

(Опечатка в ответе задачника)

№ 1216

1) $2{,}5^{1-x} > 2{,}5^{-3x}$, $1 - x > -3x$, $x > -\frac{1}{2}$;

2) $0{,}13^{x-4} \ge 0{,}15^{2-x}$, $x - 4 \le 2 - x$, $2x \le 6$, $x \le 3$;

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$, $-2x \ge x - 1$, $x \le \frac{1}{3}$;

4) $3^{-4x} > \sqrt{3}$, $3^{-4x} > 3^{1/2}$, $-4x > 1/2$, $x < -\frac{1}{8}$.

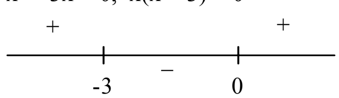
№ 1217

1) $2^{-x+5} < \frac{1}{4}$, $2^{-x+5} < 2^{-2}$, $-x + 5 < -2$, $x > 7$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$, $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ x > -1 \end{cases} \end{array}\right.$ $x \in (-1; 5)$.

№ 1218

1) $5^{x^2+3x+1{,}5} < 5\sqrt{5}$, $5^{x^2+3x+1{,}5} < 5^{3/2}$, $x^2 + 3x + 1{,}5 < 3/2$,
$x^2 + 3x < 0$, $x(x + 3) < 0$



$-3 < x < 0$.

2) $0{,}2^{x^2-6x+7} \ge 1$, $0{,}2^{x^2-6x+7} \ge 0{,}2^0$, $x^2-6x+7 \le 0$, $x \in \left[3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2}\right]$.

№ 1219

1) $3^{x+1}9^{x-1/2} \ge \sqrt[3]{3}$, $3^{x+1} \cdot 3^{2x-1} \ge 3^{1/3}$, $3^{3x} \ge 3^{1/3}$, $3x \ge 1/3$, $x \ge \frac{1}{9}$;

2) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 10$, $3^x(3 + 3^{-1}) < 10$, $3^x \cdot \frac{10}{3} < 10$, $3^x < 3$, $x < 1$.

№ 1220

1) $2^{2x} - 4^{x-1} + 8^{\frac{2}{3}x} \cdot 2^{-4} > 52$, $2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52$, $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$,
$2^{2x-4} \cdot 13 > 52$, $2^{2x-4} > 4$, $2^{2x-4} > 2^2$, $2x - 4 > 2$, $2x > 6$, $x > 3$;

2) $2^{x+2} - 2^{x+3} + 5^{x-2} > 5^{x+1} + 2^{x+4}$, $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x-2}$,

$4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - \dfrac{1}{25} \cdot 5^x$, $2^x(4 - 8 - 16) > 5^x\left(5 - \dfrac{1}{25}\right)$,

$2^x(-20) > 5^x \cdot 4\dfrac{24}{25}$, $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x < -\dfrac{124}{25 \cdot 20}$,

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^x < -0{,}248$ — решений нет, т.к., $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x > 0$ для всех x.

№ 1221

1) $3{,}3^{x^2+6x} < 1$, $3{,}3^{x^2+6x} < 3{,}3^0$, т.е. $x^2 + 6x < 0$, $x(x + 6) < 0$

$+ \quad\quad - \quad\quad +$

$-6 \quad\quad 0$ $\quad\quad$ $-6 < x < 0$;

2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-x^2} > \dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-2x^2} > \dfrac{1}{2}$, т.е. $2x - 2x^2 < 1$, $2x^2 - 2x + 1 > 0$,

$x \in R$, т.к. $D < 0$;

3) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$, $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 8{,}4^0$, $\dfrac{x-3}{x^2+6x+11} < 0$,

$x^2 + 6x + 11 > 0$ при любых x, т.к. $D < 0$, $x - 3 < 0$, $x < 3$.

Ответ: $x < 3$.

4) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0$, $2^{2x} \cdot 2 - 21 \cdot 2^{-2x-3} + 2 \ge 0$,

$2 \cdot 2^{2x} - \dfrac{21}{8} \cdot 2^{-2x} + 2 \ge 0$, $2^{2x} = a$, $2^{-2x} = \dfrac{1}{a}$, $a > 0$, $2a - \dfrac{21}{8a} + 2 \ge 0$,

$\dfrac{16a^2 + 16a - 21}{8a} \ge 0$ равносильно $(16a^2 + 16a - 21)8a \ge 0$.

Найдем корни трехчлена $16a^2 + 16a - 21$,

$a_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{16} = \dfrac{-8 \pm 20}{16}$, $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = -\dfrac{7}{4}$,

$\left(a - \dfrac{3}{4}\right)\left(a + \dfrac{7}{4}\right)a \ge 0$,

$- \quad + \quad - \quad +$

$-\dfrac{7}{4} \quad\quad 0 \quad\quad -\dfrac{3}{4}$

$a \in \left[-\dfrac{7}{4}; 0\right] \cup \left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$ т.к. $a > 0$, то решением является $a \in \left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$

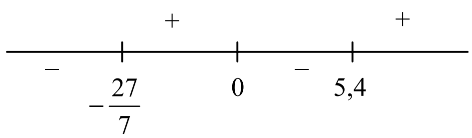
$2^{2x} \geq \frac{3}{4}$; $x \geq \frac{1}{2}\log_2 \frac{3}{4}$.

5) $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$, $3^4 \cdot 3^{-3x} - 35 \cdot 3^{3x-2} + 6 \geq 0$, $3^{3x} = a$, $a > 0$,

$\frac{3^4}{a} - \frac{35}{9} \cdot a + 6 \geq 0$, $\frac{81}{a} - \frac{35}{9}a + 6 \geq 0$, $\frac{81 \cdot 9 - 35a^2 + 54a}{9a} \geq 0$,

$(-35a^2 + 54a + 729)a \geq 0$, $(35a^2 - 54a - 729)a \leq 0$,

$(a - 5,4)\left(a + \frac{27}{7}\right)a \leq 0$,



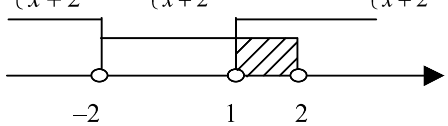
т.к. a > 0, то решением является $0 < a \leq 5,4$, $3^{3x} \leq 5,4$,

$3^{3x} \leq 3^{\log_3 5,4}$, $3x \leq \log_3 5,4$, $x \leq 1 - \frac{1}{3}\log_3 5$.

№ 1222

1) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \frac{1}{9}$, $\log_2 \frac{x-1}{x+2} < -2$, $\log_2 \frac{x-1}{x+2} < \log_2 \frac{1}{4}$

$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} < \frac{1}{4} \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4(x-1)-(x+2)}{4(x+2)} < 0 \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3x-6}{4(x+2)} < 0 \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3(x-2)}{4(x+2)} < 0 \\ \frac{x-1}{x+2} > 0 \end{cases}$



2) $5^{\log_2(x^2-4x+3,5)} > \frac{1}{5}$, $5^{\log_2(x^2-4x+3,5)} > 5^{-1}$, $\log_2(x^2 - 4x + 3,5) > \log_2 \frac{1}{2}$,

$\begin{cases} x^2 - 4x + 3,5 > \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x + 3,5 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3,5 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ \left(x - \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(x - \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty) \\ x \in \left(-\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \end{cases}$

$x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

№ 1223

1) $\log_6(2 - x) < \log_6(2x + 5)$

$$\begin{cases} 2 - x < 2x + 5 \\ 2 - x > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \\ x > -\dfrac{5}{2} \end{cases} \quad x \in (-1; 2);$$

2) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 2\right) \ge -1$, $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 2\right) \ge \log_{\frac{1}{3}} 3$,

$$\begin{cases} x^2 - 2 \le 3 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) \le 0 \\ \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \\ x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

$x \in \left[-\sqrt{5}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{5}\right]$.

№ 1224

1) $\sqrt{\lg x} < \dfrac{1}{2}$, $\begin{cases} \lg x \ge 0 \\ \lg x < \dfrac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge 1 \\ \lg x < \lg 10^{1/4} \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge 1 \\ x < 10^{1/4} \end{cases}$ $x \in \left[1; 10^{1/4}\right)$

2) $\log_{1/2}x < \log_{1/2}(2x + 6) + 2$, $\log_{1/2} x < \log_{1/2} \dfrac{1}{4}(2x + 6)$,

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x + 6 > 0 \\ 4x > 2x + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > 3 \end{cases} \quad x \in (3; +\infty).$$

№ 1225

1) $\log_{0,5}(1 + 2x) > -1$, $\log_{0,5}(1 + 2x) > \log_{0,5}2$

$$\begin{cases} 1 + 2x > 0 \\ 1 + 2x < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right);$$

2) $\log_3(1 - 2x) < -1$, $\log_3(1 - 2x) < \log_3 \dfrac{1}{3}$,

$$\begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ 1 - 2x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad x \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right).$$

№ 1226

1) $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 3)(x - 2) > 0 \\ (x - 1)(x - 4) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \\ x \in (1; 4) \end{cases}$$

$x \in (1; 2) \cup (3; 4)$;

2) $\log_8(x^2 - 4x + 3) \le 1$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \le 8 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ (x+1)(x-5) \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty) \\ x \in [-1;5] \end{cases}$$

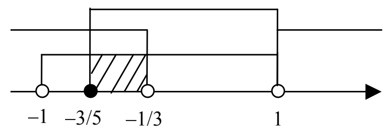
$x \in [-1;1) \cup (3;5]$.

№ 1227

1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3x+1}{x-1}\right) \le 0$

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-1} > 0 \\ \log_{1/2} \dfrac{3x+1}{x-1} > 0 \\ \log_{1/2} \dfrac{3x+1}{x-1} \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x + 1/3}{x-1} > 0 \\ \dfrac{3x+1}{x-1} < 1 \\ \dfrac{3x+1}{x-1} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; -1/3\right) \cup (1;+\infty) \\ \dfrac{3x+1-x+1}{x-1} < 0 \\ \dfrac{6x+2-x+1}{x-1} \le 0 \end{cases}$$

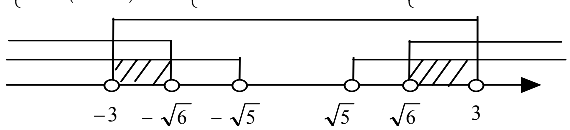
$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty) \\ \dfrac{x+1}{x-1} < 0 \\ \dfrac{x+\frac{3}{5}}{x-1} \le 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left[-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{3}\right)$

2) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2 - 5\right)\right) > 0$

$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ \log_4\left(x^2-5\right) > 0 \\ \log_4\left(x^2-5\right) > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) > 0 \\ x^2 - 5 > 1 \\ x^2 - 5 < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty; -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}; +\infty\right) \\ x \in (-3;3) \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left(-3; -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}; 3\right)$.

№ 1228

1) $(x^2 - 4)\log_{0,5}x > 0$, $x > 0$ по определению логарифма

а) $\begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ \log_{0,5} x > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x-2)(x+2) < 0 \\ \log_{0,5} x < 0 \end{cases}$;

а) $\begin{cases} x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty) \\ x < 1 \end{cases}$ x ∈ (-∞;-2); б) $\begin{cases} x \in (-2;2) \\ x > 1 \end{cases}$ x ∈ (1; 2)

Т.к. x > 0, то x ∈ (1, 2). Ответ: $x \in (1;2)$

2) $(3x - 1)\log_2 x < 0$

а) $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1/3 \\ x > 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ x > 1

б) $\begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ \log_2 x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x < \frac{1}{3}$. Ответ: $x \in \left(0;\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$

№ 1129

1) $x^{1+\lg x} < 0{,}1^{-2}$, x > 0; $x^{1+\lg x} < 10^2$.

Ясно, что x = 1 решение нашего неравенства

а) x > 0, x < 1, $\log_x x^{1+\lg x} > \log_x 10^2$, $1 + \lg x > \frac{2}{\lg x}$, $\frac{\lg x + \lg^2 x - 2}{\lg x} > 0$

Сделаем замену: lgx = a, $a \neq 0$, $\frac{(a^2 + a - 2)}{a} > 0$, $\frac{(a-1)(a+2)}{a} > 0$

\+ +

– -2 0 – 1

$a \in (-2;0) \cup (1;+\infty)$, т.е. -2 < lgx < 0 и lgx > 1,

0,01 < x < 1 и x > 10, но т.к. x > 0 и x < 1, то решением является

$\frac{1}{100} < x < 1$

б) x > 1, $\log_x x^{1+\lg x} < 2\log_x 10$, $1 + \lg x - \frac{2}{\lg x} < 0$.

Сделаем замену: lgx = a, $1 + a - \frac{2}{a} < 0$, $a \neq 0$

$\frac{a + a^2 - 2}{a} < 0$, $\frac{a^2 + a - 2}{a} < 0$, $\frac{(a-1)(a+2)}{a} < 0$

\+ +

– -2 0 – 1

$a \in (-\infty;-2) \cup (0;1)$, т.е.

lgx < -2 и 0 < lgx < 1

$x < \frac{1}{100}$ и 1 < x < 10 т.е. x > 1, то решением является 1 < x < 10

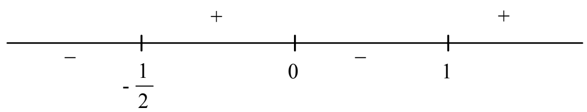
Ответ: $x \in (0{,}001;1) \cup (1;10) \cup [1]$.

2) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$.

Ясно, что x = 1 – решение нашего неравенства

а) x > 1, $\log_x x^{2\lg x} < \log_x 10x$, $2\lg x < 1 + \frac{1}{\lg x}$.

Сделаем замену: lgx = a, $a \neq 0$, $\frac{2a^2 - a - 1}{a} < 0$, $\frac{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)}{a} < 0$



$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0;1)$, т.е. $\lg x < -\frac{1}{2}$ и $0 < \lg x < 1$

$x < \frac{1}{\sqrt{10}}$ и 1 < x < 10 т.к. x > 1, то решением является 1 < x < 10;

б) 0 < x < 1, $\log_x x^{2\lg x} > \log_x 10x$, $2\lg x > 1 + \frac{1}{\lg x}$.

Сделаем замену: lgx = a, $a \neq 0$

$2a > 1 + \frac{1}{a}$, $\frac{2a^2 - a - 1}{a} > 0$, $a \in \left(\frac{1}{2}; 0\right) \cup (1; +\infty)$,

т.е. $-\frac{1}{2} < \lg x < 0$ и lgx > 1, $\frac{1}{\sqrt{10}} < x < 1$ и x > 10; т.к. 0 < x < 1,

то решением является $\frac{1}{\sqrt{10}} < x < 1$. Ответ: $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; 10\right)$.

3) $x + 3 > \log_3(26 + 3^x)$, $26 + 3^x > 0$ при любых x, $\log_3 3^{x+3} > \log_3(26 + 3^x)$,
$3^{x+3} > 26 + 3^x$, $3^{x+3} - 26 - 3^x > 0$, $26 \cdot 3^x - 26 > 0$, $3^x > 1$, x > 0;

4) $3 - x < \log_5(20 + 5^x)$, $20 + 5^x > 0$ при любых x, $\log_5 5^{3-x} < \log_5(20 + 5^x)$,

$5^{3-x} < 20 + 5^x$, $\frac{125}{5^x} - 20 - 5^x < 0$, $5^x = a > 0$

$\frac{125 - 20a - a^2}{a} < 0$, $\frac{a^2 + 20a - 125}{a} > 0$, $\frac{(a-25)(a+5)}{a} > 0$,

$a \in (-5;0) \cup (25; +\infty)$, т.е. $-5 < 5^x < 0$ и $5^x > 25$, $x = \phi$ и x>2, т.е. x > 2;

№ 1230

1) $\cos(-3x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(3x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 3x = y, $\cos y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq y \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$$-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n \le \frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z;$$

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$, $2x-\frac{\pi}{3}=y$, $\cos y<-\frac{1}{2}$;

$\frac{2}{3}\pi+2\pi n<y<\frac{4}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z$, $\frac{2}{3}\pi+2\pi n<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z$

$\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5}{6}\pi+\pi n,\ n\in Z$

№ 1231

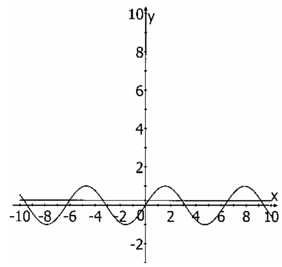
1) $\sin x<\frac{1}{4}$

$b=\arcsin\frac{1}{4}$, $a=-\pi-\arcsin\frac{1}{4}$

$c=2\pi+a=\pi-\arcsin\frac{1}{4}$

$-\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<x<\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,$

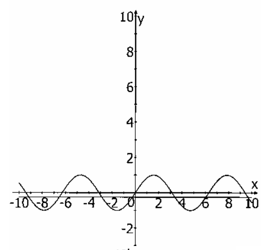
$n\in Z$



2) $\sin x>-\frac{1}{4}$

$-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<x<\arcsin\frac{1}{4}+$

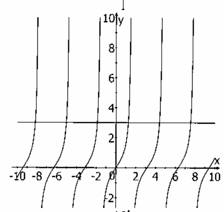
$+\pi+2\pi n,\ n\in Z$



3) $\mathrm{tgx}-3\le 0$

$\mathrm{tgx}\le 3$

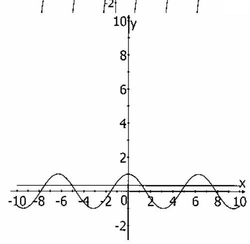
$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le arctg3+\pi n,\ n\in Z$



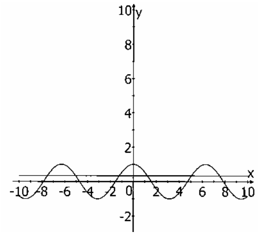
4) $\cos x>\frac{1}{3}$; $a=-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

$b=\arccos\frac{1}{3}$

$-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<x<\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$



№ 1232



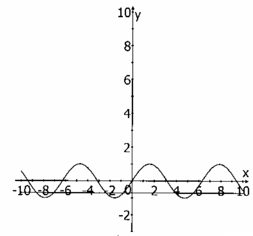
1) $2\cos x-\sqrt{3}<0$ $[-3\pi;\ \pi]$

$\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a=\dfrac{\pi}{6},\ \ \mathrm{b}=\dfrac{-\pi}{6},\ c=a-2\pi=-\dfrac{11}{6}\pi,$

$d=b-2\pi=\dfrac{-13}{6}\pi$

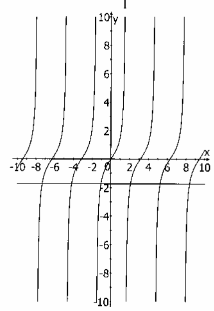
$x\in\left[-3\pi;-\dfrac{13}{6}\pi\right)\cup\left(-\dfrac{11}{6}\pi;-\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$



2) $\sqrt{2}\sin x+1\geq 0$ $[-3\pi;\ \pi]$

$\sin x\geq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$x\in\left[-3\pi;-\dfrac{11}{4}\pi\right]\cup\left[-\dfrac{9\pi}{4};-\dfrac{3}{4}\pi\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{4};\pi\right]$



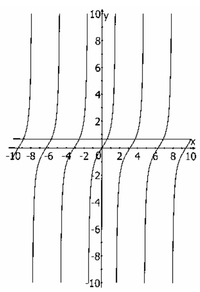
3) $\sqrt{3}+tgx\leq 0$, $[-3\pi;\ \pi]$

$tgx\leq-\sqrt{3}$, $a=-\dfrac{\pi}{3}$, $b=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$,

$c=\dfrac{-\pi}{3}-\pi=-\dfrac{4}{3}\pi$, $d=c-\pi=-\dfrac{4}{3}\pi-\pi=-\dfrac{7}{3}\pi$,

$x\in\left(-\dfrac{5}{2}\pi;-\dfrac{7}{3}\pi\right]\cup\left(-\dfrac{3}{2}\pi;-\dfrac{4}{3}\pi\right]\cup$

$\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}\right)$



4) $3\mathrm{tgx}-2>0$, $[-3\pi;\ \pi]$

$tgx>\dfrac{2}{3}$

$a=arctg\,\dfrac{2}{3}$

$x\in\left(arctg\dfrac{2}{3}-3\pi;\dfrac{-5\pi}{2}\right)\cup\left(arctg\dfrac{2}{3}-2\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup$

$\cup\left(arctg\dfrac{2}{3}-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(arctg\dfrac{2}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$

№ 1233

1) Рассмотрим очевидное неравенство $(a-b)^2 \ge 0$; преобразуем его:

$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$, $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $\frac{a^2+b^2}{2} \ge ab$, что и требовалось доказать

2) Преобразуем неравенство: $\frac{a^3+b^3}{2} > \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}$;

$\frac{4a^3+4b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{8} > 0$; $\frac{3a^3+3b^3-3a^2b-3ab^2}{8} > 0$;

$\frac{3(a^3+b^3)-3ab(a+b)}{8} > 0$; $\frac{3}{8}\cdot\frac{(a^3+b^3)-ab(a+b)}{1} > 0$;

$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2$, при $a, b > 0$ и $a \ne b$ $(a+b)(a-b)^2 > 0$, следовательно, исходное неравенство верно.

№ 1234

1) $(a+b)(ab+1) \ge 4ab$. Пусть $ab=x$, тогда $a = \frac{x}{b}$ и неравенство примет вид:

$\left(\frac{x}{b}+b\right)\left(\frac{x}{b}\cdot b+1\right) \ge \frac{4x}{b}\cdot b$; $\frac{(x+b^2)(x+1)-4bx}{b} \ge 0$; $\frac{x^2+b^2x+x+b^2-4bx}{b} \ge 0$;

$\frac{(x^2-2bx+b^2)+x(1-2b+b^2)}{b} \ge 0$; $\frac{(x-b)^2+x(1-b)^2}{b} \ge 0$.

Сделаем обратную подстановку: $\frac{(ab-b)^2+ab(1-b)^2}{b} \ge 0$.

Неравенство верно, т.к. $(ab-b)^2 > 0$, $ab > 0$, $b > 0$, $(1-b)^2 \ge 0$;

2) $a^4 + 6a^2b^2 + b^2 > 4ab(a^2 + b^2)$, $(a^4 + 2a^2b + b^4) + 4a^2b^2 > 4ab(a^2 + b^2)$, $(a^2+b^2)^2+4a^2b^2>4ab(a^2+b^2)$, $(a^2+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2>0$, но $((a^2+b^2)-2ab)^2 > 0$ при всех a, b таких, что $a^2 + b^2 - 2ab \ne 0$, т.е. при $(a-b)^2 \ne 0$, $a \ne b$.

№ 1235

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3$, $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 1$

Слева стоит среднее арифметическое чисел $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$, а справа их среднее геометрическое. Т.к. среднее геометрическое всегда не превышает среднего арифметического, то неравенство верно для любых $a>0$, $b>0$, $c>0$

2) $2a^2+b^2+c^2\ge 2a(b+c)$, $a^2+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac\ge 0$, $(a-b)^2+(a-c)^2 \ge 0$ – верно.

№ 1236

1) $\begin{cases} 5x-7y=3 \\ 6x+5y=17 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3+7y}{5} \\ \frac{6(3+7y)}{5}+5y=17 \end{cases}$

$18 + 42y + 25y = 85$, $67y = 67$, $y = 1$, $x = \dfrac{3+7y}{5} = 2$. Ответ: (2; 1).

2) $\begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y - 1 \\ 2(-2y-1) - y - 13 = 0 \end{cases}$

$-4y - 2 - y - 13 = 0$, $-5y = 15$, $y = -3$, $x = 5$. Ответ: (5; -3).

№ 1237

1) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{5} - \dfrac{x+y}{2} = 10 \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 2y - 5x - 5y = 100 \\ 2x + 5y = 100 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x - 7y = 100 \\ x = \dfrac{100-5y}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -3\left(\dfrac{100-5y}{2}\right) - 7y = 100 \\ x = \dfrac{100-5y}{2} \end{cases}$

$-300 + 15y - 14y = 200$, $y = 500$, $x = -1200$. Ответ: (-1200; 500).

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{3} = 6 \\ \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 3y + 2x - 2y - 36 = 0 \\ 3x + 3y - 4x + 4y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + y - 36 = 0 \\ 7y - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 35y + y - 36 = 0 \\ x = 7y \end{cases}$ $y = 1$, $x = 7$. Ответ: (7; 1).

№ 1238

1) $\begin{cases} y + 5 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ x^2 + (x^2 - 5)^2 = 25 \end{cases}$

$x^2 + x^4 - 10x^2 + 25 = 25$, $x^4 - 9x^2 = 0$, $x^2(x^2 - 9) = 0$, $x^2(x-3)(x+3) = 0$,
$x = 0$, $x = \pm 3$, $y = -5$, $y = 4$.
Ответ: (0, -5), (3, 4), (-3, 4).

2) $\begin{cases} xy = 16 \\ \dfrac{x}{y} = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 16 \\ x = 4y \end{cases}$; $\begin{cases} 4y^2 = 16 \\ x = 4y \end{cases}$, $y = \pm 2$, $x = \pm 8$. Ответ: (±8, ±2).

3) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 96 \\ x = 2y \end{cases}$ $\begin{cases} 4y^2 + 2y^2 = 96 \\ x = 2y \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 2y \end{cases}$, $y = \pm 4$, $x = \pm 8$.

Ответ: (±8, ±4)

№ 1239

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (1+y)^2 - y^2 = 13 \\ x = y + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + 2y + y^2 - y^2 = 13 \\ x = y + 1 \end{cases}$, $y = 6$, $x = 7$.

Ответ: (7, 6).

2) $\begin{cases} x^2-3y=-5 \\ 7x+3y=23 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3y=-5 \\ y=\dfrac{23-7x}{3} \end{cases}$, $x^2 - 23 + 7x + 5 = 0$, $x^2 + 7x - 18 = 0$,

$x_1 = 2$, $x_2 = -9$, $y_1 = 3$, $y_2 = 28\frac{2}{3}$. Ответ: (2, 3), (-9, $28\frac{2}{3}$).

№ 1240

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$. Пусть $\dfrac{x}{y}=t$, тогда $t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{t^2-1}{t}=\dfrac{3}{2}$; $2t^2-3t-2=0$,

$t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, отсюда а) $\frac{x}{y}=2$ и б) $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$;

а) $x = 2y$ и $(2y)^2 + y^2 = 20$, $5y^2 = 20$, $y=\pm\sqrt{4}=\pm 2$, $x = \pm 4$;

б) $x=-\frac{1}{2}y$ и $\left(-\frac{1}{2}y\right)^2+y^2=20$, $y = \pm 4$, $x = \pm 2$.

Ответ: (±4, ±2), (±2, ±4).

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=3\dfrac{1}{3} \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{10}{3} \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$.

Обозначим: $\frac{y}{x}=t$, тогда $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$, $3t^2 + 3 - 10t = 0$, $3t^2 - 10t + 3 = 0$,

$t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{3}$;

а) $\frac{y}{x}=3$, $y = 3x$, $x^2 - 9x^2 = 8$, $-8x^2 = 8$, $x^2 = -1$, решений нет

б) $\frac{y}{x}=\frac{1}{3}$; $x = 3y$, $9y^2 - y^2 = 8$, $y = \pm 1$, $x = \pm 3$. Ответ: (±3, ±1).

3) $\begin{cases} x^2=13x+4y \\ y^2=4x+13y \end{cases}$, вычтем уравнения: $x^2 - y^2 = 9(x - y)$,

$(x - y)(x + y) - 9(x - y) = 0$, $(x-y)(x+y-9) = 0$ – либо $x = y$, либо $x = 9 - y$

а) $x=y$, $x^2=13x+4x$, $x^2-17x=0$, $x(x-17)=0$, $x_1=0$, $x_2=17$, $y_1=0$, $y_2=17$;

б) $x=9-y$, $y^2=4(9-y)+13y$, $y^2-9y-36=0$, $y_1=-3$, $y_2=12$, $x_1 = 12$, $x_2 = -3$.

Ответ: (0, 0), (17, 17), (12, -3), (-3, 12).

4) $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40 \\ 2x^2+y^2+3x=52 \end{cases}$, вычтем уравнения: $x^2 - 7x = -12$,

$x^2-7x+12=0$, $x^2-7x+12=0$, $x_{1/2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\dfrac{7\pm 1}{2}$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$;

а) x = 4, $32 + y^2 + 12 = 52$, $y^2 = 8$, $y = \pm 2\sqrt{2}$;

б) x = 3, $18 + y^2 + 9 = 52$, $y^2 = 25$, $y = \pm 5$. Ответ: (4, $\pm 2\sqrt{2}$), (3, ±5).

№ 1241

1) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 3^{3y-x} = 27 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x+y} = 2^5 \\ 3^{3y-x} = 3^3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=5 \\ 3y-x=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5-y \\ 3y-5+y=3 \end{cases}$

4y = 8, y = 2, тогда x = 3. Ответ: (3, 2).

2) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7 \end{cases}$. Пусть $3^{\frac{x}{2}} = a$, $2^y = b$; a, b>0, тогда система примет вид:

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 77 \\ a - b = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 77 \\ a = b+7 \end{cases}$ $\begin{cases} (b+7)^2 - b^2 = 77 \\ a = b+7 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 + 14b - b^2 = 28 \\ a = b+7 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 2 \\ a = 9 \end{cases}$, тогда $3^{\frac{x}{2}} = 3^2$, x = 4, $2^y = 2$, y = 1. Ответ: (4, 1)

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^2 \cdot 2^6 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^2 \cdot 2^6 \\ y - x = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^2 \cdot 2^6 \\ y = x+4 \end{cases}$ $3^x \cdot 2^{x+4} = 3^2 \cdot 2^6$, $3^x \cdot 2^x = 3^2 \cdot 2^2$

Т.к. функция $3^x \cdot 2^x$ возрастает, то решение единственное. Отсюда x = 2, y = 6. Ответ: (2, 6)

4) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases}$ $\begin{cases} \lg xy = \lg 10^4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 10^4 \\ \log_x x^{\lg y} = \log_x 1000 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = 10^4 \\ \lg y = \log_x 10^3 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{10^4}{x} \\ \lg y = 3\log_x 10 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{10^4}{x} \\ \lg \dfrac{10^4}{x} = \dfrac{3}{\log_{10} x} \end{cases}$

$\lg \dfrac{10^4}{x} = \dfrac{3}{\lg x}$ $4 - \lg x = \dfrac{3}{\lg x}$

Пусть lgx = a, $4a - a^2 - 3 = 0$, $a^2 - 4a + 3 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$;

1) a = 1, lgx = 1, x = 10, $y = 10^3$; 2) a = 3, lgx = 3, $x = 10^3$, y = 10.

Ответ: (10, 1000), (1000, 10).

№ 1242

1) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x} y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x}y = 1 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ x^2 - \dfrac{5}{x} + 4 = 0 \end{cases}$ $x^3 + 4x - 5 = 0$,

$x^3 + 4x - 5 = (x - 1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (т.к. $x^2 + x + 5 > 0$ при любом $x \in R$), $x = 1$ – единственный действительный корень; $y = 1$. Ответ: (1, 1).

2) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ xy^2 = 2^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ y^2 = \dfrac{8}{x} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + \dfrac{8^2}{x^2} = 16 \\ y^2 = \dfrac{8}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} x^4 - 16x^2 + 64 = 0 \\ y^2 = \dfrac{8}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} \left(x^2 - 8\right)^2 = 0 \\ y^2 = \dfrac{8}{x} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{8} \\ y = \sqrt{\sqrt{8}} \end{cases}$, но x, y > 0 по определению логарифма. Ответ: $\left(\sqrt{8}, \sqrt[4]{8}\right)$.

№ 1243

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$.

Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, $a \ge 0$, $h \ge 0$, тогда система примет вид:

$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2b = 14 \\ a = b + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 7 \\ a = 9 \end{cases}$, тогда $x = a^2 = 81$, $y = b^2 = 49$.

Ответ: (81, 49).

2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19 \end{cases}$. Пусть $\sqrt{x} = a \ge 0$, $\sqrt{y} = b \ge 0$

$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 19 \end{cases}$ $\begin{cases} a = b + 1 \\ 2b = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \end{cases}$, где $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, тогда x=100, y=81.

№ 1244

1) $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1 \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y - 1 = 1 \\ x - y + 2 = 4\left(y^2 - 2y + 1\right) \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 - y \\ 2 - y - y + 2 = 4y^2 - 8y + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 - y \\ 4y^2 - 6y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 - y \\ 2y(2y - 3) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 - y \\ y = 0,\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2,\ x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0,\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, при этом должно выполняться:

а) $x + y - 1 \ge 0$; б) $x - y + 2 \ge 0$; в) $2y - 2 \ge 0$.
Для $y = 0$, $x = 2$ условие в) не выполняется, следовательно,

решение — $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2) $\begin{cases} \sqrt{3y+x+1} = 2 \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y+x+1 = 4 \\ 2x-y+2 = 49y^2 - 84y + 36 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3-3y \\ 2(3-3y) - y + 2 = 49y^2 - 84y + 36 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3-3y \\ 6-6y-y+2 = 49y^2 - 84y + 36 \end{cases}$

$49y^2 - 77y + 28 = 0$, $y_{1/2} = \frac{77 \pm \sqrt{5929 - 5488}}{98} = \frac{77 \pm 21}{98}$,

$y_1 = 1$, $y_2 = \frac{4}{7}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}$, при этом должно выполняться:

а) $3y + x + 1 \ge 0$; б) $2x - y + 2 \ge 0$; в) $7y - 6 \ge 0$, следовательно, решением является пара (0, 1). Ответ: (0, 1).

№ 1245

1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ \sin^2 x + 2\sin x(1 - \sin x) = \frac{3}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ \sin^2 x + 2\sin x - 2\sin^2 x - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ -\sin^2 x + 2\sin x - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$

$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$, $\sin x = a$, $|a| \le 1$, $4a^2 - 8a + 3 = 0$,

$a_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4}$, $a_{1/2} = \frac{4 \pm 2}{4}$, $a1 = 1{,}5 > 1$, $a2 = \frac{1}{2}$, т.е.

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$, $\cos y = \frac{1}{2}$; $y = \frac{\pm\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in Z$.

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z, \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z\right)$

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x + 2\sin x \sin y + 4\cos^2 y = 4 \end{cases}$, $\sin x = \frac{1}{2} - \sin y$,

$\cos^2 x + 2\left(\frac{1}{2} - \sin y\right)\sin y + 4\cos^2 y = 4$,

$1 - \left(\frac{1}{2} - \sin y\right)^2 + 1 \cdot \sin y - 2\sin^2 y + 4\cos^2 y = 4$,

$1 - \frac{1}{4} + \sin y - \sin^2 y + \sin y - 2\sin^2 y + 4 - 4\sin^2 y - 4 = 0$,

$-7\sin^2 y + 2\sin y + \frac{3}{4} = 0$, siny = a; |a| ≤ 1, $28a^2 - 8a - 3 = 0$,

$a_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{28} = \frac{4 \pm 10}{28}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{3}{14}$,

а) $\sin y = \frac{1}{2}$; $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$, sinx = 0, x = πl, l ∈ Z,

б) $\sin y = -\frac{3}{14}$; $y = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{3}{14}\right) + n\pi, n \in Z$,

$\sin x = \frac{5}{7}$, $x = (-1)^l \arcsin\left(\frac{5}{7}\right) + l\pi, l \in Z$.

Ответ: $\left(\pi l, l \in Z; (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z\right)$

$\left((-1)^l \arcsin\frac{5}{7} + l\pi, l \in Z; (-1)^{n+1} \arcsin\frac{3}{14} + n\pi, n \in Z\right)$.

№ 1246

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ tgxctgy = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = 1 \end{cases}$ $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = 1$, тогда

$\cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}$, $\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, т.е.

sin(x – y) = 0, x – y = πn, n ∈ Z, x = πn + y, n ∈ Z,

$\sin(y + \pi n)\cos y = -\frac{1}{2}$, $(\sin y \cdot \cos \pi n + \cos y \sin \pi n)\cos y = -\frac{1}{2}$,

а) n = 2k + 1, тогда $-\sin y \cos y = -\frac{1}{2}$, sin2y = 1, $2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$;

б) n = 2k, тогда $\sin y \cos y = -\frac{1}{2}$, sin2y = -1, $2y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$.

Ответ: $\left(\pi n + \left(\pm\frac{\pi}{4} + \pi l\right), \pm\frac{\pi}{4} + \pi l\right)$, l, n ∈ Z.

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ 3tgx = ctgy \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{1}{3} \end{cases}$ тогда $\cos x \cos y = \frac{3}{4}$,

$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

$\cos(x+y)=\frac{1}{2}$; $x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$, $x=\pm\frac{\pi}{3}-y+2\pi n, n\in Z$,

$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\frac{1}{2}\right)$,

$\cos(x-y)=1$; $x-y=2\pi l, l\in Z$,

$\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}-y+2\pi n, n\in Z \\ y=x-2\pi l, l\in Z \end{cases}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(l+n)$ $y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(l+n)-2\pi l$; $l, n\in Z$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(l+n);\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n-l)\right), l, n\in Z$.

№ 1247

$\begin{cases} \frac{2x-3}{2}-\frac{3x+5}{3}-\frac{x}{6}<3-\frac{x+4}{2} \\ 1-\frac{2x-8}{3}+\frac{4-3x}{2}<2x-\frac{x+2}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 3(2x-3)-2(3x+5)-x-3\cdot 6+3(x+4)<0 \\ 6-2(2x-8)+3(4-3x)-12x+2(x+2)<0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6x-9-6x-10-x-18+3x+12<0 \\ 6-4x+16+12-9x-12x+2x+4<0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-25<0 \\ -23x+38<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<\frac{25}{2} \\ x>\frac{38}{23} \end{cases}$; $\begin{cases} x<12\frac{1}{2} \\ x>1\frac{15}{23} \end{cases}$.

Ответ: наибольшее целое решение – это x = 12, наименьшее – это 2.

№ 1248

$\begin{cases} \frac{x+1}{5}-\frac{x+2}{4}<\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{2} \\ \frac{x-2}{3}>1+\frac{x-5}{15} \end{cases}$ $\begin{cases} 12(x+1)-15(x+2)-20(x-3)-30(x-4)<0 \\ 5(x-2)-15-3(x-5)>0 \end{cases}$

$\begin{cases} 12x+12-15x-30-20x+60-30x+120<0 \\ 5x-10-15-3x+15>0 \end{cases}$ $\begin{cases} -53x+162<0 \\ 2x-10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-\frac{162}{53} \\ x>5 \end{cases}$

Ответ: x > 5.

№ 1249

Примем длину эскалатора за 1, а время, за которое эскалатор поднимает неподвижно стоящего человека, за x, тогда $\frac{1}{x}$ — скорость эскалатора, $\frac{1}{180}$ — скорость пассажира, а $\frac{1}{45}$ — скорость пассажира, поднимающегося по движущемуся эскалатору.

По условию $\frac{1}{45}=\frac{1}{x}+\frac{1}{180}$, откуда x = 60. Ответ: 60 с

№ 1250

Пусть собственная скорость теплохода x, тогда скорость движения по течению (x + 2), а против – (x – 2). Расстояние между пристанями составит (x + 2) · 7 или (x – 2) · 9, следовательно (x – 2)9 = (x + 2)·7, откуда x = 16, следовательно, расстояние между пристанями 126 км.

№ 1251

Пусть x км/ч – планируемая скорость парохода, тогда истинная скорость x + 2,5 км/ч. расстояние будет равно x · 54, или (x + 2,5)·48. Следовательно, x · 54 = (x + 2,5) · 48;

54x – 48x = 120, 6x = 120, x = 20, следовательно, скорость парохода 20 км/ч, а расстояние 20 · 54 = 1080 км.

№ 1252

Примем объем работы за 1, а время выполнения при совместной работе за x дней. Тогда производительность I рабочего $\frac{1}{24}$, а II $\frac{1}{48}$, общая $\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$. Следовательно, получаем уравнение: $\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{48}\right)x=1$,

$\frac{3}{48}x=1$; 3x = 48, x = 16. Ответ: за 16 дней.

№ 1253

Пусть было освоено x га целинных земель, тогда остальная площадь составит 174 – x га. С целинных земель собрано 30x ц, а с остальных (174-x) · 22 ц. По условию было собрано 4556 ц. Следовательно, составим уравнение:

(174 – x) · 22 + 30x = 4556, откуда x = 91. Ответ: 91 га.

№ 1254

Пусть I число равно x, а II равно y. Тогда (x – y):xy = 1:24 и x+y=5(x–y).

Составим систему уравнений: $\begin{cases}24(x-y)=xy\\ x+y=5(x-y)\end{cases}$, получим x = 12, y = 8.

№ 1255

Пусть первая дробь равна x, а вторая дробь равна y. Тогда третья дробь равна 1 – x – y. По условию x – y = 1 – x – y и x + y = 5(1 – x – y).

Составим систему:

$\begin{cases}x-y=1-x-y\\ x+y=5-5x-5y\end{cases}$, откуда $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, тогда третья дробь $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Откуда: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$.

№ 1256

Пусть дневная плановая норма – x деталей, тогда новая норма x + 9 деталей. 360 деталей должны были изготовить за $\frac{360}{x}$ дней. А 378 деталей за $\frac{378}{x+9}$ дней. По условию задачи $\frac{360}{x}$ больше $\frac{378}{x+9}$ на 1. Составим уравнение:

$\frac{360}{x}-\frac{378}{x+9}=1$, откуда x = 45.

На самом деле бригада делала 54 детали, а за весь срок 378+54=432 детали. Ответ: 432 детали.

№ 1257

Пусть скорость катера x км/ч. По условию, скорость плота 3,6 км/ч. Путь катера 50 км, а плота 10 км. Время, затраченное на путь, будет равно $\frac{30}{x+3,6}+\frac{20}{x-3,6}$ или $\frac{10}{3,6}$. Отсюда $\frac{30}{x+3,6}+\frac{20}{x-3,6}=\frac{10}{3,6}$, откуда x = 18.

№ 1258

Пусть стоимость 1 билета в I организации x копеек, тогда во II организации билет стоил x – 30 копеек. I организация закупила $\frac{3000}{x}$, а II $\frac{1800}{x-30}$ билетов. По условию $\frac{3000}{x}$ больше $\frac{1800}{x-30}$ на 5.

Составим уравнение: $\frac{3000}{x}-\frac{1800}{x-30}=5$, откуда x = 150 или x = 120.

Следовательно, I организация купила 20 или 25 билетов, а II – 15 или 20.

№ 1259

Пусть скорость плота x км/ч, тогда скорость лодки x + 48 км/ч. Время лодки $\frac{17}{x+48}$ ч, а плота $\frac{17}{x}$ ч. По условию $\frac{17}{x}$ больше $\frac{17}{x+48}$ на $5\frac{1}{3}$ ч. Составим уравнение: $\frac{17}{x}-\frac{17}{x+48}=\frac{16}{3}$

$51x + 51 \cdot 48 - 51x = 16(x^2 + 48x)$, $16x^2 + 16 \cdot 48x - 51 \cdot 48 = 0$,
$x^2 + 48x - 152 = 0$, откуда x = 3. Ответ: 3 км/ч.

№ 1260

Пусть со II с 1 га собирали x ц, тогда на I участке с 1 га собирали

x + 1 ц. Площадь первого $\frac{210}{x+1}$ га, а второго $\frac{210}{x}$ га. По условию $\frac{210}{x}$ больше $\frac{210}{x+1}$ на 0,5. Составим уравнение: $\frac{210}{x}-\frac{210}{x+1}=\frac{1}{2}$, откуда x = 20.

Следовательно, на II участке с 1 га собрано 20 ц, а на I участке – 21 ц.

№ 1261

Пусть x шагов делает ученик, тогда его брат делает x – 400 шагов. Длина шага ученика $\frac{700}{x}$ м, а длина шага брата $\frac{700}{x-400}$ м. По условию $\frac{700}{x-400}$ больше $\frac{700}{x}$ на 0,2 м.

Составим уравнение: $\frac{700}{x-400}-\frac{700}{x}=0{,}2$.

3500x – 3500x + 1400000 = x^2 – 400x, откуда x=1400.

№ 1262

Пусть I число равно x, тогда II число xq, III – xq^2, IV – xq^3. По условию xq^2 больше x на 9, а xq больше xq^3 на 18.

Составим систему: $\begin{cases} xq^2-x=9 \\ xq-xq^3=18 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x=3 \\ q=-2 \end{cases}$

Следовательно, I число равно 3, II равно -6, III равно 12, IV равно –24.

№ 1263

1) По условию a_4 = 1, т.е. a_1 + 3d = 1, кроме того,

$S_3=\frac{2a_1+d\cdot 2}{2}\cdot 3=(a_1+d)\cdot 3$, т.е. ($a_1$ + d) · 3 = 0

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1+3d=1 \\ a_1+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2d=1 \\ a_1=-d \end{cases} \quad \begin{cases} d=\frac{1}{2} \\ a_1=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

2) $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, тогда $S_{12}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 11}{2}=27$.

№ 1264

Пусть I число равно x, знаменатель геометрической прогрессии q. Тогда II число равно xq, а III число xq^2. Разность арифметической прогрессии xq^2 – xq, тогда IV число $xq^2 + xq^2$ – xq = $2xq^2$ – xq. По условию задачи составим систему уравнений:

$\begin{cases} x+2xq^2-xq=16 \\ xq+xq^2=12 \end{cases}$, решая, получим: $\begin{cases} q=3 \\ x=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} q=\frac{1}{2} \\ x=16 \end{cases}$

Следовательно, I число равно 1, II равно 3, III равно 9, IV равно 15, или числа равны 16, 8, 4, 0, соответственно. Ответ: 1, 3, 9, 15 или 16, 8, 4, 0.

№ 1265

Пусть x – первый член геометрической прогрессии, а y – ее знаменатель, тогда $b_5 = x \cdot y^4$; $b_8 = x \cdot y^7$, $b_{11} = x \cdot y^{10}$. По условию $a_1 = x \cdot y^4$, $a_2 = x \cdot y^7$, $a_{10} = x \cdot y^{10}$.

Тогда $d = xy^7 - xy^4$ и $a_{10} = a_1 + 9d = xy^4 + 9(xy^7 - xy^4)$.

Составим уравнение: $xy^{10} = xy^4 + 9xy^7 - 9xy^4$; $x \neq 0$, $y \neq 0$

Следовательно, $y^6 = 9y^3 - 8$, $y^6 - 9y^3 + 8 = 0$,

$y^3=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{2}$; $y^3 = 8$, $y^3 = 1$.

Следовательно, y = 2 и y = 1. По условию

$S_5 = \frac{x(y^5-1)}{y-1}$ и $S_5 = 62$, т.е. $62 = \frac{x\cdot(2^5-1)}{2-1}$; x = 2

При y = 1имеем x + x + x + x + x = 62, 5x = 62, $x = 12\frac{2}{5}$.

Таким образом, первый член геометрической прогрессии равен 2 или $12\frac{2}{5}$.

Ответ: 2 или $12\frac{2}{5}$.

№ 1266

1) Пусть a1 – первый член арифметической прогрессии, а d – ее разность. По условию a1 > 0, d > 0.

2) $a_5 \cdot a_6$ больше $a_1 \cdot a_2$ в 33 раза, следовательно, можем составить уравнение: $(a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 5d) = a_1(a_1 + d) \cdot 33$; $a_1^2 + 9da_1 + 20d^2 = 33a_1^2 + 33a_1d$;

$32a_1^2 + 24a_1d - 20d^2 = 0$, откуда $a_1 = \frac{-10d}{8}$, $a_1 = \frac{d}{2}$, но a1 > 0, d > 0, следовательно, $a_1 = \frac{d}{2}$.

3) $a_5 \cdot a_2 = (a_1 + 4d) : (a_1 + d) = 3$.

№ 1267

В результате построений получается множество подобных треугольников с $k = \frac{1}{2}$, площади которых образуют бесконечную геометрическую прогрессию, в ней $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{4}$, следовательно $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = 16$ см^2.

№ 1268 $y = -\frac{5}{2}x + b$ (-2;3); $3 = -\frac{5}{2}\cdot(-2) + b$

$b = -2$

№ 1269 $y = kx + 3$ (-1;4); $4 = -1\cdot k + 3$

$k = -1$

№ 1270

$y = kx + b$

1) A(-1;-2), B(3;2) $\begin{cases} -2 = -1\cdot k + b \\ 2 = 3k + b \end{cases}$; $\begin{cases} 2 = k - b \\ 2 = 3(b+2) + b \end{cases}$; $k = 1, b = -1$;

2) A(2;1), B(1;2), $\begin{cases}1=2k+b\\2=k+b\end{cases}$; $\begin{cases}1=2k+2-k\\b=2-k\end{cases}$; $k=-1, b=3$;

3) A(4;2), B(-4;-3), $\begin{cases}2=4k+b\\-3=-4k+b\end{cases}$; $\begin{cases}b=2-4k\\3=4k-2+4k\end{cases}$; $k=\frac{5}{8}, b=-\frac{1}{2}$;

4) A(-2;-2), B(3;-2), $\begin{cases}-2=-2k+b\\-2=3k+b\end{cases}$; $\begin{cases}b=2k-2\\-2=3k+2k-2\end{cases}$; $\begin{cases}b=2k-2\\k=0\end{cases}$;
$k=0, b=-2$

№ 1271

A(-3;2), B(-2;2), C(3;0)

Для прямой, проходящей через B и C, справедлива система:

$\begin{cases}2=-2k+d\\0=3k+b\end{cases}$; $k=-\frac{2}{5}, b=\frac{6}{5}k$, таким образом $y_1=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$.

У прямой, проходящей через A коэффициент k равен $-\frac{2}{5}$ вследствие параллельности ее и первой прямой BC.

Справедливо уравнение: $2=-3\left(-\frac{2}{5}\right)+b$, откуда $b=\frac{4}{5}$,

тогда $y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$. Ответ: $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}, y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$.

№ 1272

$x+\frac{y}{2}=1$

1)A(-1;4) $-1+\frac{4}{2}=1$ принадлежит; 2) A(0;3) $0+\frac{3}{2}\neq 1$ не принадлежит

3) A(1;0) $1+\frac{0}{2}=1$ принадлежит 4) A$\left(\frac{3}{2};-1\right)$ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ принадлежит.

№ 1273

$y=-\frac{3}{4}x+2$; 1) $x=0, y=2, A(0,2)$ – точка пересечения с 0y;

$y=0, x=\frac{8}{3}, B\left(\frac{8}{3},0\right)$ – точка пересечения с 0x;

2) $AB=\sqrt{\left(0-\frac{8}{3}\right)^2+(2-0)^2}=\frac{10}{3}$

3) Из $\Delta AOC: OC=\sqrt{4-x^2}$ (1)

4) Из $\Delta BOC: OC = \sqrt{\frac{64}{9} - \left(\frac{100}{9} - \frac{20}{3}x + x^2\right)}$ (2)

Из (1) и (2): $x = \frac{6}{5} = AC$; $OC = \sqrt{4 - \frac{36}{25}} = \frac{8}{5}$.

№ 1274

$y = 3x - 1$; 1) $3x - 1 > 0, x < \frac{1}{3}$; 2) $3x - 1 < 0, x < \frac{1}{3}$.

№ 1275

$y^2 - 2x + 1$; 1) $-2x + 1 > 0, x < \frac{1}{2}$; 2) $-2x + 1 < 0, x > \frac{1}{2}$.

№ 1276

$y = 2x - 1, y = 3x - 2,\quad 2x - 1 < 3x - 2; x > 1.$

№ 1277

$y = (\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3}, y = (1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$

$(\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} > (1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}; x < -\sqrt{3}$

№ 1278

$y = 2x - 3$. Т.к. линейная функция вида $y = kx + b$ возрастает при $k > 0$ и данная функция линейная и $k = 2 > 0$, то она возрастает.

№ 1279

$y = -\sqrt{3x} - 3$

Т.к. функция $y = -\sqrt{3x} - \sqrt{3}$ линейная и $k = -3 < 0$, то она убывает.

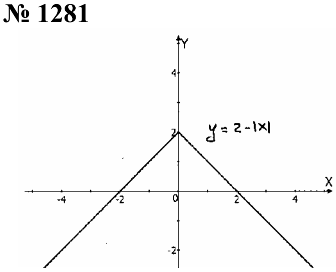
№ 1280

1) Графики линейных функций пересекаются, если коэффициенты k у них различны.

$y = 3x - 2$ и $y = 3x + 1$ параллельны

2) $y = 3x - 2$ и $y = 3x + 1$ пересекаются.

№ 1281

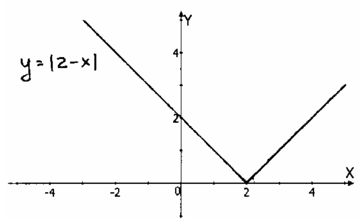


1) $y = 2 - |x|$

а) $y = 2 - x$

б) симметрия относительно Oy

в) пересечений нет.



2) $y = |2 - x|$

точки пересечения

$|2 - x| = 3, x = -1, y = 3$

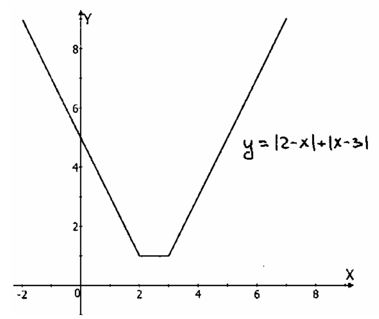
и $x = 5, y = 3$

3) $y = |2 - x| + |x - 3|$

а) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y = x - 2 + x - 3 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 2x - 5 \end{cases};$ б) $\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ y = x - 2 - x - 3 \end{cases}; \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ y = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x < 2 \\ y = 2 - x - x + 3 \end{cases}; \begin{cases} x < 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

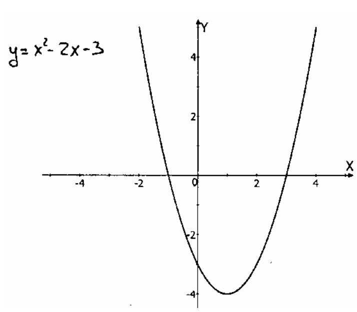
точки пересечения: $y = |2 - x| + |x - 3| = 3$, x = 4, y = 3 и x = 1, y = 3.



№ 1282

$y = x^2 - 2x - 3$

1) графиком функции служит парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке (+1;-4).



2) Найдем *y'*:

$y' = 2x - 2 = 2(x - 1)$

$y' > 0$ при $x > 1$, след. на $x \in [1;4)$ функция возрастает

3) Наименьшее значение в точке $x = 1$, равное –4

4) $x^2 - 2x - 3 > -2x + 1, x^2 - 4 > 0$

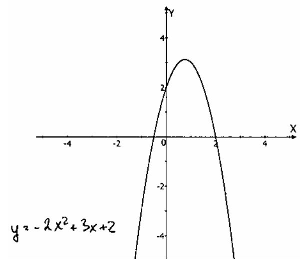
при $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

5) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(2)=2, f(2)=-3$
$y=-3+2(x-2)=-3+2x-4$

$y=2x-7$ — уравнение касательной в точке $x_0 = 2$.

№ 1283



$y=-2x^2+3x+2$

1) график функции – парабола, ветви направлены вниз; вершина с координатами $x_0=\frac{3}{4}, y_0=3\frac{1}{8}$,

точки пересечения с 0*y:* (0;2);
с 0*x:* (2;0), (- ½ ; 0) *y(x)* < 0 при *x* > 2 и *x* < - ½

2) y′ – 4x + 3 < 0 при $x>\frac{3}{4}$, следовательно на [1;2] функция убывает

3) наибольшее значение функция принимает в точке $x=\frac{3}{4}$

4) $y=3x+2$, $-2x^2+3x+2<3x+2$, $-2x^2<0$,

$x^2>0$, следовательно при всех $x \neq 0$;

5) $y=3;$ $3=-2x^2+3x+2;$ $2x^2-3x+1=0;$ $x=1, x=\frac{1}{2};$

$y'(1)=-1,$ $y=-x+4$ - уравнение касательной в *x = 1*

$y'\left(\frac{1}{2}\right)=1;$ $y=x+2{,}5$ - уравнение касательной в $x=\frac{1}{2}$

№ 1284

1) y = x^2 и y = x + 6, x^2 = x + 6,
x^2 – x – 6 = 0 D = 1 + 24 – решение есть, след. пересекаются.

2) $y=\frac{3}{x}$ и $y=4(x+1)$, $\frac{3}{x}=4x+1;$ $3=4x^2+x,$ $4x^2+x-3=0$,
D = 1 + 48 – решение есть, след. пересекаются.

3) $y=\frac{1}{8}x^2$ и $y=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{8}x^2=\frac{1}{x}$, $x^3=8$, $x=2$, след. пересекаются.

4) $y=2x-1$ и $y=\frac{1}{x}$, $2x-1=\frac{1}{x}$,

$2x^2-x-1=0$ $\mathrm{D}=1+8$ – решение есть, след. пересекаются.

№ 1285

1) $y=2^x+2^{-x}$, $y(-x)=2^{-x}+2^x=y(x)$ – функция четная

2) $y=3^x-3^{-x}$, $y(-x)=3^{-x}-3^x=-y(x)$ – функция нечетная

3) $y=\ln\frac{3+x}{3-x}$, $y(-x)=\ln\frac{3-x}{3+x}=-\ln\frac{3+x}{3-x}=-y(x)$ – функция нечетная

4) $y=\left|\ln\frac{5+x}{5-x}\right|$; $y(-x)=y(x)$ – функция четная

№ 1286

1) $y=2x^2-1$, $y(-x)=2(-x)^2-1=y(x)$ – функция четная

2) $y=x-x^3$, $y(-x)=-x+x^3=y(-x)$ – функция нечетная

3) $y=x^5-\frac{1}{x}$, $y(-x)=-x^5+\frac{1}{x}=y(x)$ – функция нечетная

4) $y=\frac{\sin(x)}{x}$, $y(-x)=\frac{-\sin x}{x}=y(x)$ – функция четная

№ 1287

1) $y=x\sin x$, $y(-x)=-x(-\sin x)=y(x)$ – функция четная

2) $y=x^2\cos x$, $y(-x)=(-x)^2\cos x=y(x)$ – функция четная

3) $y=x+\sin x$, $y(-x)=-x-\sin x=-y(x)$ – функция нечетная

4) $y=x+\cos x$, $y(-x)=-x+\cos x$ — функция не является четной и не является нечетной.

№ 1288

1) $y=\cos\frac{3x}{2}$ $T=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$ 2) $y=2\sin 0{,}6x$ $T=\frac{2\pi}{0{,}6}=\frac{10}{3}\pi$

№ 1289

1). $y=\cos 3x;\ 3T=2\pi;\ T=\frac{2\pi}{3}$; 2). $y=\sin\frac{x}{5};\ \frac{T}{5}=2\pi;\ T=10\pi$;

3). $y=tg5x;\ 5T=\pi;\ T=\frac{\pi}{5}$;

4). $y=\sin x+tgx;\ y=\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x(\cos x+1)}{\cos x}=tgx(\cos x+1)$;

Наименьший период для sin x 2π, для tg$x$ 2π тоже являются периодом. Следовательно для y = sin$x$ + 69x T=2π.

№ 1290

1) $y=-x^4+4x^2-5$, $y(-x)=-x^4+4x^2-5=y(x)$ – функция четная

2) $y=x^3-4x$, $y(-x)=-x^3+4x=-y(x)$ – функция нечетная

№ 1291

$y = ax^2 + bx - 4$, $y(1) = 0$, $y(4) = 0$,

$\begin{cases} 0 = a + b - 4 \\ 0 = 16a + 4b - 4 \end{cases}$; $\begin{cases} b = 4 - a \\ 16a + 16 - 4a = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b = 4 - a \\ 12a + 12 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 5 \\ a = -1 \end{cases}$

$y = -x^2 + 5b - 4$.

Наибольшее значение функция принимает в точке $x = \frac{5}{2}$; $y\left(\frac{5}{2}\right) = 2{,}25$

№ 1292

1) $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $y = 2\cos 2x + \sin^2 2x = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 4\sin^2 x\cos^2 x =$

$= 2\left(1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 2\left(\sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)\right) =$

$= 2\left(1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x - 2\sin^4 x\right) = 2 - 4\sin^2 x$

$1 \ge \sin^2 x \ge 0$, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = -2$. (Опечатка в ответе задачника).

№ 1293

1) $y = 2x^2 - 5x + 6$, с осью 0y: x = 0, y = 6 $\Rightarrow$ (0, 6),

с осью *0x* пересечений нет, т.к. $D < 0$;

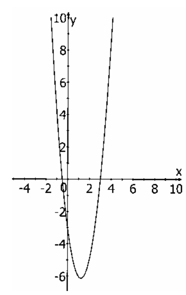
2) $y = 2x^2 - 5x + 2$, с осью 0y: x = 0, y = 2 $\Rightarrow$ (0, 2)

с осью *0x*: $x_{\frac{1}{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, (2, 0) и $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

№ 1294

$y = ax^2 + bx + c$, $y(-2) = 15$, $y(3) = 0$, $y(0) = -3$

$\begin{cases} 15 = 4a - 2b + c \\ 0 = 0a + 3b + c \\ -3 = c \end{cases}$; $\begin{cases} \text{c = -3} \\ \text{- 3a + 1 = b} \\ \text{15 = 4a + 6a - 2 - 3} \end{cases}$; $\begin{cases} \text{a = 2} \\ \text{b = -5} \\ \text{c = -3} \end{cases}$



$y = 2x^2 - 5x - 3$ — график функции — парабола с вершиной в точке $\left(\frac{5}{4}, -6\frac{1}{8}\right)$, ветви которой направлены вверх.

№ 1295

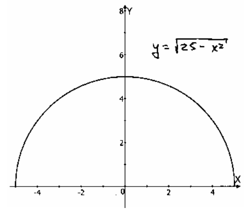
$y=\sqrt{25-x^2}$,

1) $25-x^2 \ge 0$, $(5-x)(5+x) \ge 0$; $D(y)=[-5;5]$;

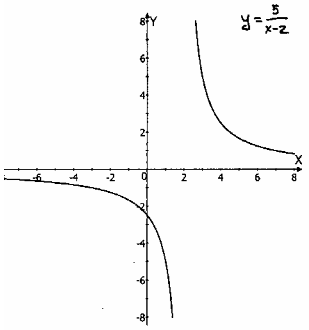
2) $y(-x)=\sqrt{25-x^2}=y(x)$ — четная;

3) $y'=-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, $y'=0$ при $x=0$;

4) т.к. функция четная, то график функции симметричен относительно 0y. Функция возрастает на [-5,0] и убывает на [0,5].



№ 1296



$y=\frac{5}{x-2}$

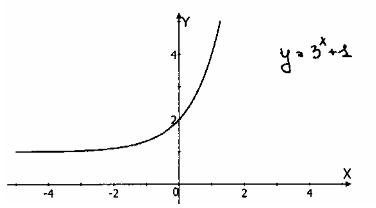
1) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; 2) Ни четная, ни нечетная, непериодическая

3) $y'=\frac{-5}{(x-2)^2}$, $y'\ne 0$, следовательно стационарных точек нет.

4) 0y: x = 0, y = -1,25, *0x*: пересечений нет;

5) $y'<0$ при $x\ne 2$, следовательно функция убывает.

№ 1297



1) $y=3^x+1$

а) $D(y)=(-\infty;+\infty)$

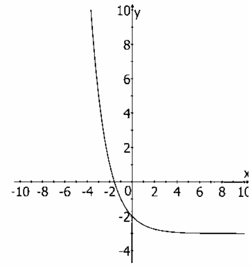
б) функция не является четной и нечетной

в) $y'=\frac{3^x}{\ln 3}$

г) 0x: y = 0 – пересечений нет, 0y: x = 0, y = 2

д) $y'>0$, $y'\ne 0$, следовательно функция возрастает.

2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$



а) $D(y)=(-\infty;+\infty)$

б) функция не является четной и нечетной

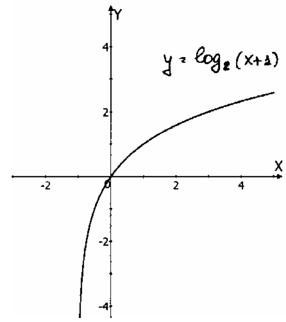
в) $y'=\frac{(0{,}5)^x}{\ln(0{,}5)}$

г) 0x: y = 0 – пересечений нет

0у: x = 0, y = -3

д) $y'>0,\ y'\neq 0$, следовательно функция возрастает

3) $y=\log_2(x+1)$



а) D(y): x + 1 > 0, т.е. x > - 1

б) функция не является четной и нечетной

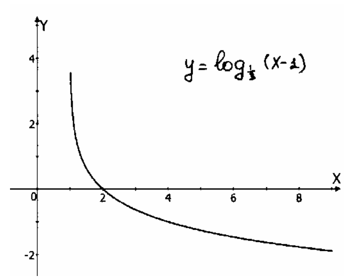
в) $y'=\frac{1}{(x+1)\ln 2}$

г) 0x: y = 0, x = 0; 0y: x = 0, y = 0

д) y′ > 0 при x > -1 — функция возрастает

y′ < 0 при x < -1, но на данном промежутке функция не существует.

4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$



а) D(y): x – 1 > 0, x > 1

б) функция не является четной и не является нечетной

в) $y'=\frac{1}{(x-1)\ln\frac{1}{3}}$

г) 0x: y = 0, x = 2

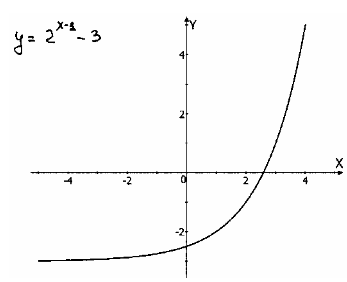
0y: x = 0 – пересечений нет

д) *y' > 0* при *x > 1*, функция возрастает

y' < 0 при *x < 1*, но функция на данном промежутке не существует.

№ 1298

1) $y=2^{x-1}-3$



а) D(y): $x\in(-\infty;+\infty)$

б) функция не является четной и не является нечетной

в) $y'=\frac{2^{x-1}}{\ln 2}$

г) 0x: y = 0, x = $\log_2 3+1$

0y: x = 0, y = -2,5

д) y' > 0 при x > -2

$y' < 0$ при $x < -2$, но на данном интервале функция не существует

2). $y = \log_2(x+2)+3$; а) Д(y) : $x+2>0$; $x>-2$;

б) функция не обладает свойствами четности или нечетности;

в) $y' = \dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$; г) Ох : $y=0$ при $x = -2+\dfrac{1}{8} = -\dfrac{15}{8} = -1\dfrac{7}{8}$;

Оу : $x=0$ при $y=4$;

д). $y'>0$ при $x>-2$; $y'<0$ при $x<-2$, но на этом интервале функция не существует, следовательно, данная функция возрастает на области определения.

№ 1299

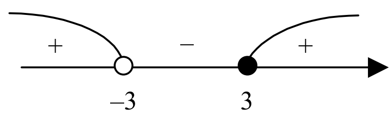
1) $y = 2^x + \lg(6-3x)$, D(y): $6 - 3x > 0$, $x < 2$;

2) $3^{-x} - 2\ln(2x+4)$, D(y): $2x + 4 > 0$, $x > -2$;

3) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$, $D(y)$: $\cos 2x \neq 0$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in Z$;

4) $y = tg\dfrac{x}{4}$, $D(y)$: $\cos\dfrac{x}{4} \neq 0$, $x \neq 2\pi + 4n\pi$, $n \in Z$.

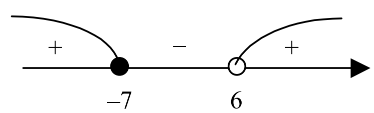
№ 1300



1) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$, $\dfrac{x-3}{x+3} \geq 0$

D(y): $x \in (-\infty;-3) \cup [3;+\infty)$

2) $y = \sqrt{\log_3 \dfrac{2x+1}{x-6}}$



$\dfrac{2x+1}{x-6} \geq 1$; $\dfrac{2x+1-x+6}{x-6} \geq 0$;

$\dfrac{x+7}{x-6} \geq 0$

D(y): $x \in (-\infty;-7] \cup (6;+\infty)$.

№ 1301

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}$,

$D(y)$: $\dfrac{(x-8)(x+2)}{(x-11)(x-1)} \geq 0$; $x \in (-\infty;-2] \cup (1;8] \cup (11;+\infty)$;

2) $y = \sqrt{\log_{1/2}(x-3) - 1}$,

$D(y)$: $\begin{cases} \log_{1/2}(x-3) - 1 \geq 0 \\ x-3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-3 \leq \dfrac{1}{2}; \\ x-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3\dfrac{1}{2}; \\ x>3 \end{cases}$ $x \in \left(3; 3\dfrac{1}{2}\right]$.

№ 1302

1) $y=\sqrt{\log_{0,8}\left(x^2-5x+7\right)}$, $D(y)\begin{cases}x^2-5x+7>0\\ \log_{0,8}\left(x^2-5x+7\right)\ge 0\end{cases}$;

$x^2-5x+7=0;\quad D<0\Rightarrow x^2-5x+7>0$;

$x^2-5x+7\le 1;\quad x^2-5x+6\le 0;\quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{2}$; $\begin{cases}x\in(-\infty;+\infty)\\ x\in(2;3)\end{cases}$ $x\in(2;3)$;

2) $y=\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2-9\right)}$,

$D(y)$: $\begin{cases}x^2-9>0\\ \log_{0,5}\left(x^2-9\right)\ge 0\end{cases}$; $x\in\left[-\sqrt{10};-3\right)\cup\left(3;\sqrt{10}\right]$.

№ 1303

1) $y=x^2+6x+3$, $x_0=-\dfrac{6}{2}=-3$, $y_0=-6$, след. $y\ge -6$;

2) $y=-2x^2+8x-1$, $x_0=\dfrac{-8}{-4}=2$, $y_0=7$, след. $y\le 7$;

3) $y=e^x+1$, $e^x>0$, след. $y>1$;

4) $y=2+\dfrac{2}{x}$, $y-2=\dfrac{2}{x}$; $x\ne 0$, $\dfrac{2}{x}\ne 0\Rightarrow y\ne 2$.

№ 1304

1) $y=0,5+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $-1\le\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$, след. $y\in[-0,5;1.5]$;

2) $y=0,5\cos x+\sin x$; $y=\sqrt{1,25}\cos(\alpha-x)$; $\alpha=ar\cos\dfrac{0,5}{\sqrt{1,25}}$;

$-\sqrt{1,25}\le\sqrt{1,25}\cos x\le\sqrt{1,25}$; $-1\le\sin x\le 1$, след. $y\in\left[-\sqrt{1,25};\sqrt{1,25}\right]$

№ 1305

1) $f(x)=\sin x+\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$, $k=f'(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$;

2) $f(x)=\cos 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $k=f'(x_0)=-3\sin\dfrac{\pi}{2}=-3$.

№ 1306

1) $f(x)=\dfrac{1}{4x^2}-\sqrt{x}$, $x_0=1$, $f'(x)=-\dfrac{1}{2}x^{-3}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

$f'(1)=-1=tg\alpha$, $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$;

2) $f(x)=2x\sqrt{x}$, $x_0=\frac{1}{3}$, $f'(x)=\left(2x^{3/2}\right)'=3x^{1/2}$,

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{3}=tg\alpha$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

№ 1307

1) $f(x)=\frac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0=\frac{1}{4}$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$f'(x)=\left(\frac{3}{4}x^{-3/2}\right)'=-\frac{9}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)=-36$,

$y=6-36\left(x-\frac{1}{4}\right)$; $y=15-36x$

2) $f(x)=2x^4-x^2+4$, $x_0=-1$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$f'(x)=8x^3-2x$, $f'(-1)=-6$, $y=5-6(x+1)$; $y=-1-6x$.

№ 1308

$y=x^3-x+1=f(x)$. Точка пересечения (0,1), т.е. $x_0=0$,

$g=f(x)+f'(x_0)(x-x_0)$, $f'(x)=3x^2-1$, $f'(0)=-1=k$, следовательно $к=-1$.

№ 1309

$y=3x^3-1=f(x)$, $y=2$, $2=3x^3-1$, $x=1$,

$f'(x)=9x^2$; $f'(1)=9$, $k=f'(1)=9\cdot 1=9$.

№ 1310

$y=4x-3$, $y=6-2x+x^2$.

Приравняем $4x-3$ и $6-2x+x^2$, $4x-3=6-2x+x^2$,

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$, $x=3$, $y=9$. Ответ: (3; 9).

№ 1311

$y=4x^3-9x^2+6x+1$, $y'=12x^2-18x+6$.

По условию $k=y(x_0)=0$, где x_0 – точка касания;

$12x^2-18x+6=0$, $2x^2-3x+1=0$,

$x_1=1$, $x_2=0{,}5$; $y_1=2$, $y_2=2{,}25$. Ответ: (1;2), (0,5;2,25).

№ 1312

$y=3x^2+7x+1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, тогда $tg\alpha=1=y'(x_0)$, где x_0 – точка касания; $y'=6x+7=1$, $x=-1$, $y=-3$. Ответ: (-1;-3).

№ 1313

1) $f(x)=x\ln 2x,\ x_0=0{,}5$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$f'(x)=\ln 2x+\frac{x}{2x}\cdot 2=\ln 2x+1$, $f'(0{,}5)=0+1$,

$y=0+1\left(x-\frac{1}{2}\right);\ y=x-\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=2^{-x},\ x_0=1$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $f'(x)=-2^{-x}\ln 2$,

$f'(1)=-\frac{1}{2}\ln 2$, $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2(x-1)=\frac{1}{2}(1+\ln 2-x\ln 2)$.

№ 1314

$y=x^3-x^2-7x+6,\ M(2;-4)$, $y'=3x^2-2x-7$,

$y'(2)=12-4-7=1$, $tg\alpha=y'(2)=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

№ 1315

$y=x^2\cdot e^{-x},\ \ x=1$, $tg\alpha=y'(1)$, $y'=2x\cdot e^{-x}-x^2e^{-x}$,

$y'(1)=\frac{2}{e}-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$, $tg\alpha=\frac{1}{e}$.

№ 1316

$y=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right),\ \ x=\frac{\pi}{3}$,

$y'=-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right);\ \ y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1,\ \ \alpha=-\frac{\pi}{4}$.

№ 1317

$f(x)=\frac{x^3+1}{3}$, $\frac{x^3+1}{3}=0,\ \ x=-1;\ \ y=f(-1)+f'(-1)(x+1)$,

$f'(x)=x^2;\ \ f'(-1)=1$, $y=x+1$.

№ 1318

$f(x)=\sqrt{x^3}+1,\ \ x=4$, $y=f(4)+f'(4)(x-4)$,

$f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2};\ \ f'(4)=3$, $y=9+3(x-4);\ \ y=3x-3$.

№ 1319

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

$$y'=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Функция возрастает при $x < 0$

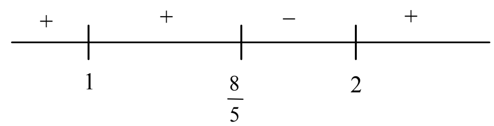
2) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$; $\quad y' = \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$.

Функция возрастает при $x \neq 0$

№ 1320

1) $y = (x-1)^3(x-2)^2$; $y' = 3(x-1)^2(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^3 =$

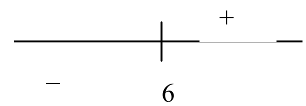
$= (x-1)^2(x-2)(3(x-2) + 2(x-2)) = (x-1)^2(x-2)(5x-8)$



$x = \frac{8}{5}$ — точка максимума; $\quad x = 2$ — точка минимума;

2) $y = 4 + (6-x)^4$, $\quad y' = -4(6-x)^3$

$x = 6$ — точка минимума.

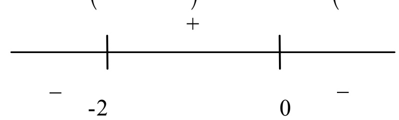


№ 1321

1) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; $y' = \frac{(6x+4)(x^2+x+1) - (2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \frac{6x^3 + 6x^2 + 6x + 4x^2 + 4x + 4}{(x^2+x+1)^2} -$

$- \frac{6x^3 + 8x^2 + 8x + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$



$x = -2$ – точка минимума; $x = 0$ – точка максимума;

2) $y = \frac{x^2 + 6x + 3}{3x + 4}$, $\quad y' = \frac{(2x+6)(3x+4) - 3(x^2 + 6x + 3)}{(3x+4)^2} =$

$= \frac{6x^2 + 26x + 24 - 3x^2 - 18x - 9}{(3x+4)^2} = \frac{3x^2 + 8x + 15}{(3x+4)^2} > 0,$ следовательно,

функция возрастает на всей числовой, за исключением точки $x = -\frac{4}{3}$, в которой функция не определена.

Следовательно нет точек максимума и минимума.

№ 1322

1) $y = 2\sin x + \sin 2x \quad \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$,

$y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2 \cdot 2\cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2}$,

$\cos\frac{3}{2}x > 0$ при $x \in (0;\pi)$ $\quad \cos\frac{x}{2} > 0$ при $x \in (0;\pi)$

$\cos\frac{3x}{2} = 0 \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $\quad \cos\frac{x}{2} = 0 \quad x = \pi + 2\pi n$,

$y(0) = 0 \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, $\quad y(\pi) = 0$,

наиб.: $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$; наим.: $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$;

2) $y = 2\sin x + \cos 2x \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$,

$\cos x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad 1 - 2\sin x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, следовательно $y = 1{,}5$ – точка максимума, $y = 1$ – точка минимума.

№ 1323

1) $y = \sqrt{x+5} \quad [-1;4]$, $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$, следовательно,

$y = 2$ – минимум; $y = 3$ – максимум;

2) $y = \sin x + 2\sqrt{2}\cos x \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$y' = \cos x - 2\sqrt{2}\sin x = 3\left(\frac{1}{3}\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin x\right) = 3\cos(\alpha + x) = 0$,

$\alpha = \arccos\frac{1}{3}$, $\quad \cos(\alpha + x) = 0 \quad \alpha + x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$\Rightarrow 0 \le -\alpha - \frac{\pi}{2} + \pi n \le \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} \le -\alpha \le \pi$, $-\pi \le \alpha \le -\frac{\pi}{2}$, что невозможно

$y(0) = 2\sqrt{2}$; $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow$ наим.: $y = 1$; $\quad$ наиб.: $y = 2\sqrt{2}$.

№ 1324

1) $y = \ln x - x \quad [0{,}5;4)$, $\quad y' = \frac{1}{x} - 1 = 0$,

$x = 1; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{1}{2}; \quad y(4) = \ln 4 - 4$

$y(1) = -1$; наим. $y(4) = \ln 4 - 4$ наиб. $y(1) = -1$

2) $y = x\sqrt{1-x^2}$ $[0;1]$,

$y' = \sqrt{1-x^2}$; $\frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$; $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$y(0) = 0$; $y(1) = 0$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, Наим. у = 0; Наиб. $y = \frac{1}{2}$.

№ 1325

Обозначим радиус основания цилиндра через r, тогда объем цилиндра $V = \pi r^2(3-r) = 3\pi r^2 - 2\pi r^3$, $V = 6\pi r - 3 \cdot 2\pi r^2 = 6\pi r(1-r)$.

Функция $V(r)$ возрастает, при $0 < r < 1$ и убывает при $r < 0$ и $r > 1$, следовательно максимум функции Vбудет, при $r = 1$.

№ 1326

Площадь полной поверхности цилиндра $S = 54\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2$, где r – радиус основания, а h – высота, тогда объем $V = \pi r^2 h$, $S = 54\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2$,

$h = \frac{27-r^2}{r}$, тогда $V = \frac{\pi r^2(27-r^2)}{r} = \pi(27r^2 - r^3)$,

$V' = \pi(27 - 3r^2) = 3\pi(9 - r^2)$, тогда максимум V будет в точке $r = 3$, $h = 6$, тогда максимальный объем $V_{max} = 54\pi$

№ 1327

Обозначим за x сторону основания, а за h – высоту пирамиды, тогда по условию $x + h = 9$; $V = \frac{1}{4\sqrt{3}}x^2(9-x)$, и так как объем максимальный, то

$V' = x\left(\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)$, $V' = 0$, тогда $x = 6$.

№ 1328

Обозначим за x сторону основания, а за h – высоту призмы, тогда $V = x^2 \cdot h$, где x^2 выражается через h и длину диагонали по формуле: $x^2 = \frac{12-h^2}{2}$, тогда $V = \frac{12-h^2}{2} \cdot h$, $V' = 6 - \frac{3}{2}h^2$, откуда находим, что максимум достигается при $h = 2$.

№ 1329

$f(x) = x^{-2} + \cos x$; $M\left(0{,}5\pi; -\frac{2}{\pi}\right)$

первообразная: $f_1(x) = -x^{-1} + \sin x + c$, т.к.

$f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$ запишем: $-\frac{2}{\pi}+1+c=-\frac{2}{\pi}$, откуда c = -1, следовательно первообразная имеет вид: $y_1=-x^{-1}+\sin x-1$.

№ 1330

$f(x)=x^2(2x-3)-12(3x-2),\quad -3\le x\le 6$

$f'(x)=\left(2x^3-3x^2-36x+24\right)=6x^2-6x-36;$

Функция возрастает при x < -2 и x > 3, и убывает при –2 < x < 3

$f(-2)=68,\quad f(-3)=51,\quad f(3)=-57,\quad f(6)=132$. Ответ: -57 и 132.

№ 1331

1) $f'(x)=2\cdot 3\cdot \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}-9\cdot 2\cdot \ln x\cdot\frac{1}{x}+12\cdot\frac{1}{x}=\frac{6}{x}\left(\ln^2 x-3\ln x+2\right)$

$f'(x)=0$ при $\frac{6}{x}\left(\ln^2 x-3\ln x+2\right)=0;$

$\ln x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2},\quad \ln x=2$ и $\ln x=1$, т.е. $x=e^2$ и $x=e$;

2) $e^2\in\left[e^{3/4};e^3\right],\quad e\in\left[e^{3/4};e^3\right];$

3) $f\left(e^3\right)=9,\quad f\left(e^{3/4}\right)=4\frac{25}{32},\quad f\left(e^2\right)=4,\quad f(e)=5$. Ответ: 4 и 9.

№ 1332

$y=x^2,\quad A\left(2;\frac{1}{2}\right);$

а) $d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2;\ A\left(2;\frac{1}{2}\right)$, следовательно $x_1=2,\ y_1=\frac{1}{2}$'

$X\left(x;x^2\right)$, следовательно $x_2=x,\ y_2=x^2;$

$d^2=(2-x)^2+\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2;\ x>0$

б) рассмотрим $f(x)=(2-x)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ и найдем ее наименьшее значение при x > 0.

$f'(x)=\left(4-4x+x^2+\frac{1}{4}-x^2+x^4\right)'=\left(4\frac{1}{4}-4x+x^4\right)'=-4+4x^3;$

$f'(x)=0$ при $-4+4x^3=0,\ x^3-1,\ x=1$ - стационарная точка

При переходе через единственную стационарную точку $x = 1$ производная меняет знак с «-» на «+», след. функция принимает в ней наименьшее значение. Итак, расстояние будет наименьшим от A до точки (1;1).

№ 1333

AD – основание трапеции, поэтому *BC(x)* – отрезок, параллельный *AD*.

$$S(x)=\frac{1}{2}(AD+BC(x))\cdot h(x), \text{ причем } AD=1,$$

$$BC(x)=2x, \quad h(x)=1+\left(1-x^2\right)=2-x^2, \text{ т т.}$$

$$S(x)=\frac{1}{2}(1+2x)\left(2-x^2\right)=\frac{1}{2}\left(2+4x-x^2-2x^3\right)=$$

$$=1+2x-\frac{1}{2}x^2-x^3, \text{ где } 0<x\leq 1$$

Рассмотрим $S'(x)$: $S'(x) = 2 - x - 3x^2$; $S'(x) = 0$ при $x = -1$ или $x=\frac{2}{3}$

Из полученных критических точек только $x=\frac{2}{3}$ лежит в промежутке (0;1]; при переходе через эту точку S'(x) меняет знак с «+» на «-», т.е. это точка максимума.

Найдем значения *S(x)* на концах рассматриваемого промежутка и в полученной критической точке.

$$S(0)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1, \quad S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{49}{27}, \quad S(1)=\frac{3}{2}, \text{ таким образом } S_{\max}=\frac{49}{27}.$$

№ 1334

1) $x\in[-1;1]$; $B\left(x;4x^2\right)$; $A\left(-x;4x^2\right)$;

2) $C(x_c;y_c)$, $3=\frac{x+x_c}{3}$; $x_c=6-x$; $6=\frac{4x^2+y_c}{2}$; $y_c=12-4x^2$;

3) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\left(12-4x^2-4x^2\right)=4\left(3x-2x^3\right)$

4) Рассмотрим функцию $f(x)=4\left(3x-2x^3\right)$ на [0;1] и найдем ее наибольшее значение. $f'(x)=4\left(3-6x^2\right)$,

$f'(x)=0$ при $4\cdot\left(3-6x^2\right)=0$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ - стационарная точка.

При переходе через единственную стационарную точку $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на [-1;1] производная меняет знак с «+» на «-», следовательно в этой точке функция принимает наибольшее значение.

5) $S_{ABC}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3-2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=4\sqrt{2}$.

№ 1335

$y = x^2 + px + q; \quad x = 5, \quad y_{\min} = 1$

$\begin{cases} 1 = 25 + 5p + q \\ y'(5) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = 25 + 5p + q \\ 2 \cdot 5 + p = 0 \end{cases};$ откуда p = -10, q = 26.

№ 1336

Обозначим через r радиус основания, а через h – высоту конуса, тогда объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h = \frac{400}{3}\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$,

$V' = \frac{400}{3}\pi - \pi h^2 = \pi\left(h - \frac{20}{\sqrt{3}}\right)\left(h + \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$, $h > 0$, след. $h_0 = \frac{20}{\sqrt{3}}$ – точка максимума (при переходе через h_0 V' меняет знак с «+» на «-», таким образом $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

№ 1337

Обозначим через r – радиус, через h – высоту цилиндра, тогда

$V = \pi r^2 \cdot h$, а $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$, $h = \frac{V}{\pi r^2}$; $S = \frac{2\pi r \cdot V + 2\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$,

$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$, точка минимума $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, а минимальная площадь $S_{\min} = \frac{2V\sqrt[3]{2\pi}}{\sqrt[3]{V}} + 2\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} = 2V^{2/3}\sqrt[3]{2\pi}V^{2/3} = 3V^{2/3}\sqrt[3]{2\pi} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

№ 1338

Обозначим через r – радиус основания, через $2h$ – высоту цилиндра, тогда $\mathrm{S} = 2\pi\mathrm{r} \cdot 2\mathrm{h} = 4\pi\mathrm{rh}$, где $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, тогда $S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$.

$$S' = 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{2\pi r(-2r)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4\pi\left(R^2 - r^2\right) - 4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$= \frac{4\pi R^2 - 8\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4\pi\left(R^2 - 2r^2\right)}{R^2 - r^2}$, $r_0 = R/\sqrt{2}$ – точка максимума, т.к. при переходе через r_0 S' меняет знак с «+» на «-», таким образом $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

№ 1339

Обозначим через r – радиус основания, через $2h$ – высоту цилиндра, тогда $V = \pi r^2 h = \pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$

$$V'=\left(\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}\right)'=\pi\left(2r\sqrt{R^2-r^2}-\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)=$$

$$=\frac{\pi\left(2r\left(R^2-r^2\right)-r^3\right)}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{\pi\left(2rR^2-3r^3\right)}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$r_0=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ – точка максимума, т.к. при переходе через r_0 V' меняет знак с «+» на «-», тогда $h=\sqrt{R^2-\frac{2}{3}R^2}=\frac{R}{\sqrt{3}}$, соответственно высота $2h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$

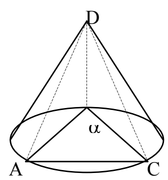
№ 1340

Обозначим через h высоту конуса, тогда радиус основания $r=\sqrt{R^3-(h-R)^2}$, а

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-(h-R)^2\right)h=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-h^2+2hR-R^2\right)h=\frac{1}{3}\pi h\left(2hR-h^2\right)$$

$V'=\frac{1}{3}\pi\left(2hR-h^2+h(2R-2h)\right)=\frac{1}{3}\pi h(R-3h);\ h_0=\frac{4}{3}R$ – точка максимума.

№ 1341



$S_{кон}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h$ - задана

$S_{пир}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha$

$AC=2R\sin\alpha \qquad \angle BAC=\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{AC}{\sin\alpha} \qquad AB=\frac{2R\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=2R\cos\frac{\alpha}{2}$$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha$ исследуем $f=\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$

$$f'=\left(\sin\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}$$

$f'=0 \quad 2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0 \quad D=1+8=9$;

$\cos\alpha_1=-1;\ \cos\alpha_2=\frac{1}{2}$, следовательно сумма всех углов треугольника π; $\alpha_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z,\ \Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$.

№ 1342

Обозначим через r – радиус основания, тогда высота $h = \frac{p}{2} - 22$, а объем $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{p-4r}{2} \right)$, $V' = \frac{\pi}{2}\left(2rp - 12r^2\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 2r(p-6r)$;

$r_0 = \frac{p}{6}$ - точка максимума, тогда $V_{\max} = \frac{\pi p^2}{36}\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{3}\right) = \frac{\pi p^3}{216}$.

№ 1343

Пусть $AO_1 = x$, тогда $OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$;

$V = \pi \cdot x^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}$; $V = 2\pi\sqrt{R^2x^4 - x^6}$; $x > 0$ и $x < R$

Рассмотрим функцию $g(x) = 2\pi\sqrt{R^2x^4 - x^6}$ при $0 < x < R$ и найдем ее наибольшее значение, заметим, что g(x) принимает наибольшее значение в той же точке, что и $f(x) = R^2x^4 - x^6$. $f'(x) = 4R^2x^3 - 6x^5$;

$x_0 = \sqrt{\frac{2R^2}{3}}$ – точка максимума, тогда $H = R\frac{2}{\sqrt{3}}$.

№ 1344

Пусть r – радиус основания, H – высота цилиндра, тогда

$S = 2\pi rH + 4\pi r^2 = 2\frac{Vr + 2\pi r^4}{r^2}$, где V – объем

$S' = \frac{2\left(4\pi r^3 - V\right)}{r^2}$; $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$ - точка минимума, следовательно расход жести будет наименьшим, когда $\frac{2r}{H} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}\right)^2}{V} = \frac{2\pi \cdot V}{V \cdot 4\pi} = \frac{1}{2}$, т.е. при 2D = H. (Опечатка в ответе задачника).

№ 1345

Пусть $OO_1 = x$, тогда $AO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$; $O_2O_1 = 2x$; $S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - r^2\right)$;

$V_{np} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - r^2\right)2x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(R^2x - x^3\right)$, причем $x > 0$ и $x < R$.

Рассмотрим $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(R^2x - x^3\right)$ на (0;R) и найдем ее наибольшее значение: $f'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(R^2 - 3x^2\right)$, $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ – точка максимума, тогда наибольший объем призма имеет при высоте $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

№ 1346

Пусть $AO = x$, тогда из подобия треугольников MOS и BO_1S получим

$$\frac{x}{R}=\frac{b}{H};\quad \frac{x}{R}=\frac{H-h}{H};\quad h=\frac{H(R-x)}{R};$$

$V=\pi\cdot x^2\cdot\frac{H\cdot(R-x)}{R}=\frac{\pi H}{R}\left(Rx^2-x^3\right)$, причем x > 0 и x < R.

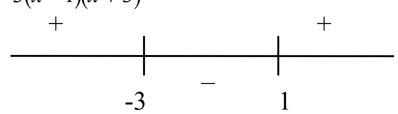
Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\pi H}{R}\left(Rx^2-x^3\right)$ на *(0;R)* и найдем ее наибольшее значение.

$f'(x)=\frac{\pi H}{R}\left(2Rx-3x^2\right)$, $x=\frac{2R}{3}$ – точка максимума, таким образом наибольший объем у цилиндра будет при $r=\frac{2R}{3}$, $h=\frac{H\cdot R/3}{R}=\frac{H}{3}$.

№ 1347

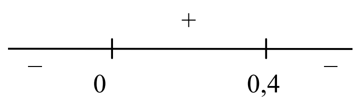
1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3\left(x^2+2x-3\right)=3(x-1)(x+3)$



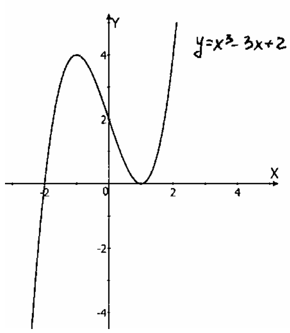
x = -3 – точка максимума;
x = 1 – точка минимума.

2) $f(x)=x^4-2x^5+5$, $f'(x)=4x^3-10x^4=x^3(4-10x)=x^3\left(\frac{4}{10}-x\right)$;



x = 0 – точка минимума
x = 0,4 – точка максимума

№ 1348



1) *D(y) = IR*, непрерывная, непериодическая, т.к. задана многочленом

2) *y(-x) = -x³ + 3x + 2* – ни четная, ни нечетная

3) y = 0 при $x^3 - 3x + 2 = 0$; x = 1; x = -2

4) y' = $3x^2 - 3$; y = 0 при $3x^2 - 3 = 0$;

3(x – 1)(x + 1) = 0; x = ± 1 – стационарные точки

5) *(-∞;-1)* – функция возрастает

(-1;1) – функция убывает

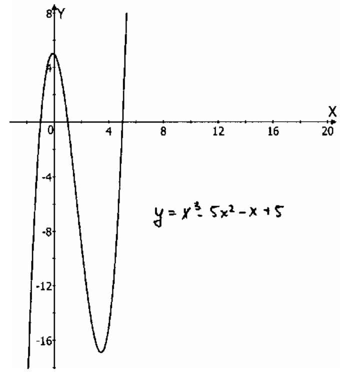
(1;+∞) – функция возрастает

6) k = tgα, α = 0 при k = 0; f'(x) = 0, т.е. x = -1, x = 1, т.е. (1;0), (-1;4).

№ 1349

1. D(y) = R

2. $y(-x) = -x^3 - 5x^2 + x + 5$ – ни четная, ни нечетная



3. y = 0 при $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$; x = 1, x = 5, x = -1

4. $y' = 3x^2 - 10x - 1$

y’ = 0 при $3x^2 - 10x - 1 = 0$;

$$x = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

5. $x = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$ — точка максимума

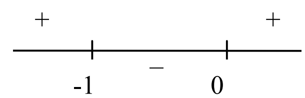
$x = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}$ — точка минимума

6. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; $x_0 = 4$

$f(4) = -15$, $f'(4) = 3x^2 - 10x - 1$, $f'(4) = 7$, $y = 7x - 43$

№ 1350

1) $f(x) = 4x^3 + 6x^2$



а) D(y) = R

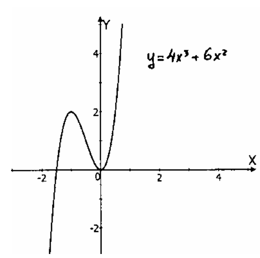
б) $f(-x) = -4x^3 + 6x^2$ – ни четная, ни нечетная

в) $f(x) = 0$ при $4x^3 + 6x^2 = 0$; $x^2(4x+6) = 0$, $x = 0$, $x = -1{,}5$

г) $f'(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1)$

x = -1 – точка максимума

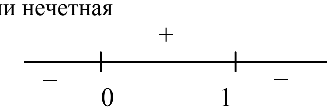
x = 0 – точка минимума

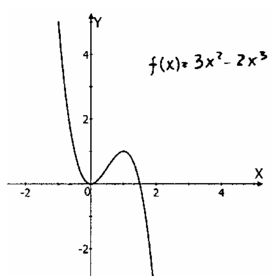


2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$; а) D(y) = R

б) $f(-x) = 3x^2 + 2x^3$ – функция ни четная, ни нечетная

в) $f(x) = 0$ при $3x^2 - 2x^3 = 0$,





$x^2(3 - 2x) = 0$, $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$

г) $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$

$x = 0$ – точка минимума

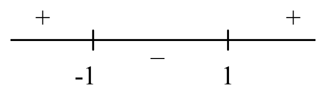
x = 1 – точка максимума

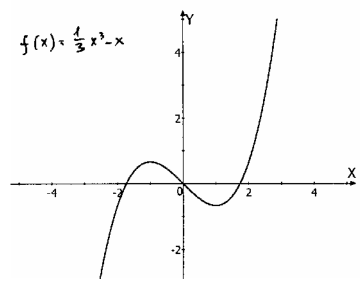
3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$;

а) D(y) = R; б) $f(-x)=-\frac{1}{3}x^3+x$,

следовательно функция нечетная

в) $f(x)=0$ при $\frac{1}{3}x^3-x=0;$
$x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)=0, \quad x=0, x=\pm\sqrt{3}$;





x = -1 – точка максимума
x = 1 – точка минимума

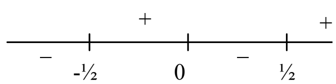
4) $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^2$

а) D(y) = R

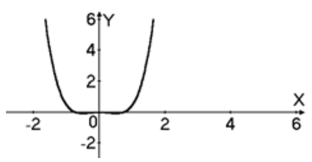
б) $f(-x)=x^4-\frac{1}{2}x^2$ - функция четная

в) $f(x)=0$ при $x^4-\frac{1}{2}x^2=0,$
$x^2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=0, \quad x=0, x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

г) $f'(x)=4x^3-x=x\left(4x^2-1\right)=$
$=4x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$



x = -½, x = ½ – точки минимума
x = 0 – точка максимума



№ 1351

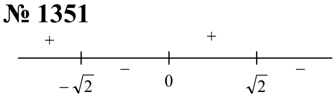
1) $y=-\frac{x^4}{4}+x^2$

а) D(y) = IR

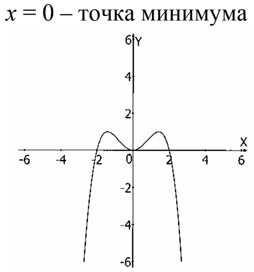
б) $f(-x)=-\frac{x^4}{4}+x^2$ – функция четная

в) $f(x)=0$ при $\frac{-x^4}{4}+x^2=0;$
$\frac{x^2}{4}\left(-x^2+4\right)=0$; $x=0, x=\pm2$

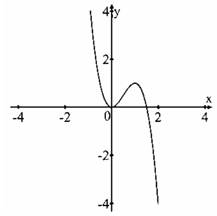
г) $f'(x)=-x^3+2x=x\left(-x^2+2\right)=$
$=-x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$



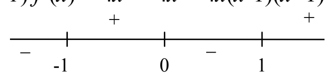
$x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$ – точки максимума
x = 0 – точка минимума



x = ± 1 – точка минимума
x = 0 – точка максимума



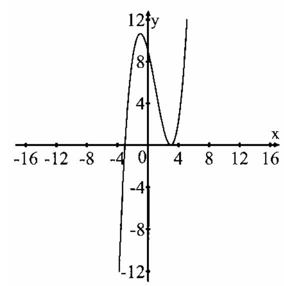
2) $y = x^4 - 2x^2 - 3$
а) D(y) – R
б) $f(-x) = x^4 - 2x^2 - 3$ – функция четная
в) $f(x) = 0$ при $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$,
$x = \pm\sqrt{1 \pm 2}$, след. $x = \pm\sqrt{3}$
г) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$



№ 1352

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$
а) D(y) = R
б) $f(-x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 9$ – функция ни четная, ни нечетная
в) $f(x) = 0$ при $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9 = 0$,

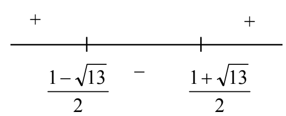
$$\frac{1}{3}x^2(x-3) - 3(x-3) = 0,\ (x-3)\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0,\ x = 3, x = \pm\sqrt{3}$$



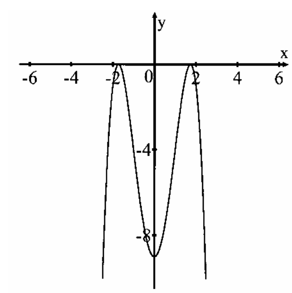
г) $f'(x) = x^2 - x - 3 = \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

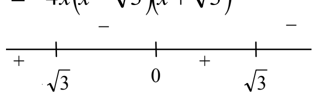
$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ – точка максимума

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ – точка минимума

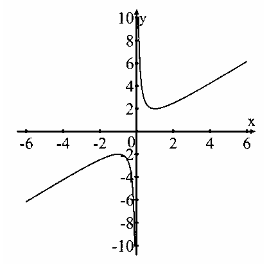


2) $y = -x^4 + 6x^2 - 9$
а) D(y) – R
б) $f(-x) = f(x)$ – функция четная
в) $f(x) = 0$ при $-x^4 + 6x^2 - 9 = 0$,
$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$, $(x^2 - 3)^2$, $x = \pm\sqrt{3}$
г) $f'(x) = -4x^3 + 12x = -4x(x^2 - 3) =$
$= -4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$





$x = \pm\sqrt{3}$ – точка максимума; x = 0 – точка минимума.

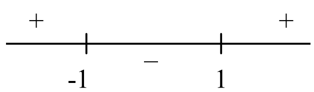


3) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

а) D(y): $x \neq 0$

б) $f(-x) = -f(x)$ – функция нечетная

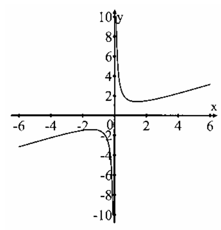
в) $f(x)=0$ при $\dfrac{x^2+1}{x}=0$, т.е. пересечений с осью 0x нет.



г) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-\left(x^2+1\right)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

x = -1 – точка максимума

x = 1 – точка минимума



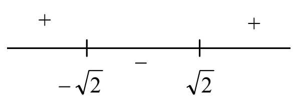
4) $y=\dfrac{x^2+2}{2x}$

а) D(y): $x \neq 0$

б) $f(-x) = -f(x)$ – функция нечетная

в) $f(x) \neq 0$

г) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot 2x-2\left(x^2+2\right)}{4x^2}=\dfrac{2x^2-4}{4x^2}=\dfrac{x^2-2}{2x^2}$



$x=-\sqrt{2}$ – точка максимума

$x=\sqrt{2}$ – точка минимума

№ 1353

1) $y_1=\sqrt{x-1},\ y_2=3-x,\ y_3=0$, $y_1=y_2$, $x-1 = 9-6x+x^2$, $x^2-7x+10=0$, $x=5$, $x=2$, но $x-1 \geq 0$ и $3-x \geq 0$, след. x = 2 – точка пересечения y_1 и y_2, тогда

$$S=\int_1^2\sqrt{x-1}dx+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\Big|_1^2+1/2=\frac{7}{6}$$

2) $y_1=-\dfrac{1}{x},\ y_2=x^2,\ y_3=\dfrac{x^2}{8}$

$y_1=y_2;\ -\dfrac{1}{x}=x^2;\ x=-1$ - точка пересечения y_1 и y_2

$y_2=y_3;\ x^2=\dfrac{x^2}{8},\ x=0$, $\ y_1=y_3;\ -\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2}{8};\ x=-2,$ тогда

$$S=\int_{-2}^{-1}-\frac{1}{x}dx+\int_{-1}^{0}x^2dx-\int_{-2}^{0}\frac{x^2}{8}dx=-\ln x\Big|_{-1}^{-1}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{24}x^3\Big|_{-2}^{0}=$$

$$=\ln x\Big|_1^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\ln 2$$

№ 1354

1) $y_1 = 4x - x^2$, $y_2 = 5$, $x = 0$, $x = 3$

$$S = 5\cdot 3 - \int_0^3 4x - x^2 = 15 - \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = 15 - 18 + 9 = 6\ ;$$

2) $y = x^2 - 2x + 8$, $y = 6$, $x = -1$, $x = 3$,

$$\int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x + 8\right)dx - 24 = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x\right)\Big|_{-1}^{3} - 24 =$$

$$= 9 - 9 + 24 - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 8\right) - 24 = \frac{28}{3}$$

3) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{2\pi}{3},\ x = \pi\ ,\ \ S = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx = -\cos\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{6}\ ,\ \ S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi/6} \cos x dx = \sin x\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ .$

№ 1355

1) $y = \sqrt{x}\ ,\ y = 2, x = 9\ ,\ \sqrt{x} = 2,\ x = 4\ ,$

$$S = 2\cdot 4 - \int_0^4 \sqrt{x}dx + \int_4^9 \sqrt{x} - 5\cdot 2 = 8 - \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_4^9 - 10 =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + 18 - \frac{16}{3} - 10 = \frac{16}{3}$$

2) $y = x^2 + 3$, $y = x + 5$, $x^2 + 3 = x + 5$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

$$S = \int_{-1}^{2}(x + 5)dx - \int_{-1}^{2}\left(x^2 + 3\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x\right)\Big|_{-1}^{2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 12 + 4{,}5 - \left(\frac{8}{3} + 6 - \left(-\frac{1}{3} - 3\right)\right) = 16{,}5 - 3 - 9 = 4{,}5$$

№ 1356

1) $y = 9 - x^2$, $y = (x - 1)^2 - 4$, $y_1 = 9 - x^2$, $y_2 = x^2 - 2x - 3$,
$9 - x^2 = x^2 - 2x - 3$, $2x^2 - 2x - 12 = 0$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$,

$$S = \int_{-3}^{3}\left(9 - x^2\right)dx + \left|\int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x - 3\right)dx\right| - \int_{-3}^{-2}\left(9 - x^2\right)dx - \int_{-2}^{-1}\left(x^2 - 2x - 3\right)dx =$$

$$= \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{3} - \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{-2} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{-1} =$$

$$= (27 - 9 + 27 - 9) + \left|\left(9 - 9 - 9 + \frac{1}{3} + 1 - 3\right)\right| - \left(-18 + \frac{8}{3} + 27 - 9\right) -$$

$-\left(-\frac{1}{3}-1+3+\frac{8}{3}+4-6\right)=36+\frac{32}{3}-\frac{8}{3}-\frac{7}{3}=\frac{125}{3}$.

2) $y_1=x^2,\ y_2=\sqrt[3]{x}$, $y_1=y_2,\ x^2=\sqrt[3]{x},\ x^6=x,\ x\left(x^5-1\right)=0$,

$x=0, x=1$ – точки пересечения

$$S=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}.$$

№ 1357

1) $y=\cos x,\ x=\frac{\pi}{4},\ y=0$,

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}};$$

2) $y=3^x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $S=\int_{-1}^{1}3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{3-1/3}{\ln 3}=\frac{8}{3\ln 3}$.

№ 1358

1) $f(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+x, x_0=\frac{1}{3}$, $f'(x)=3x^2-x+1$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1=1$;

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x_0=1$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(1)=1$;

3) $f(x)=x^{-3}-\frac{2}{x^2}+3x,\ x_0=3$, $f'(x)=-3x^{-4}+\frac{4x}{x^4}+3$,

$f'(3)=-\frac{1}{27}+\frac{4}{27}+3=\frac{1}{9}+3=3\frac{1}{9}$;

4) $y=\frac{\cos x}{\sin x},\ x_0=\frac{\pi}{4}$, $y'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

№ 1359

1) $f(x)=\sin 2x-x$, $f'(x)=2\cos 2x-1$, $2\cos 2x-1=0$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$;

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$;

2) $f(x)=\cos 2x+2x$, $f'(x)=-2\sin 2x+2$, $2\sin 2x=2$, $\sin 2x=1$,

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

3) $f(x)=(2x-1)^3$, $f'(x)=3(2x-1)^2\cdot 2$, $2x-1=0$, $x=½$;

4) $f(x)=(1-3x)5$, $f'(x)=5(1-3x)4\cdot(-3)$, $1-3x=0$, $x=1/3$.

№ 1360

$f(x) = (2x - 3)(3x^2 + 1)$, $f'(x) = 2(3x^2 + 1) + 6x(2x - 3)$,
$f'(1) = 8 - 6 = 2 \Rightarrow f'(1) = f'(0)$, $f'(0) = 2$.

№ 1361

$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x + \sqrt{3}$, $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$, $3x^2 - 3x - 18 < 0$,
$x^2 - x - 6 < 0$, $(x-3)(x+2) < 0$, $x \in (-2;3)$.

№ 1362

$h = V_0 t - 4{,}9t^2$ $V_0 = 360$м/с, $V = h' = V_0 - 9{,}8t$,
$V(10) = 360 - 98 = 262$ м/с, h_{max} при $V_0 - 9{,}8t = 0$ $t = \dfrac{360}{9{,}8} \approx 37$ сек.

№ 1363

$\varphi = kt^3$ $\varphi = 2\pi$ $t = 2c \Rightarrow k = \dfrac{\varphi}{t^3} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$,
$\omega = 3kt^2 = \dfrac{3\pi}{4}t^2$, $\omega(4) = \dfrac{3\pi}{4} \cdot 16 = 12\pi$.

№ 1364

1) $y = \dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^3}$,

$$y' = \frac{(5x^4 - 9x^2 + 4x - 1)x^3 - 3x^2(x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3)}{x^3} =$$
$$= \frac{5x^7 - 9x^5 + 4x^4 - x^3 - 3x^7 + 9x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 9x}{x^3} =$$
$$= \frac{2x^7 - 2x^4 - 2x^3 - 9x^2}{x^3} = \frac{2x^5 - 2x^2 - 2x - 9}{x};$$

2) $y = \dfrac{6x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; $y = \dfrac{6x^{4/3}}{x^{1/2}}$, $y' = \dfrac{8x^{1/3} \cdot x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot x^{4/3} \cdot 6}{x} = \dfrac{8x^{5/6} - 3x^{5/6}}{x} = 5x^{-1/6}$.

№ 1365

1) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x+1}$,

$$y' = \frac{(6x-2)(x+1) - (3x^2 - 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x - 2x - 2 - 3x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{3x^2 + 6x - 3}{(x+1)^2} = \frac{3(x^2 + 2x - 1)}{(x+1)^2}$$

2) $y=\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}$,

$$y'=\frac{(4x-3)(2x+1)-2\left(2x^2-3x+1\right)}{(2x+1)^2}=\frac{8x^2+4x-6x-3-4x^2-6x-2}{(2x+1)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+4x-5}{(2x+1)^2}$$

№ 1366

1) $y=(2x+1)^2\sqrt{x-1}$,

$$y'=2(2x+1)\cdot 2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}=\frac{2\cdot 4(2x+1)(x-1)+1}{2\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{8\left(2x^2-2x+x-1\right)+1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{16x^2-8x-7}{2\sqrt{x-1}}$$

2) $y=x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$; $y=x^2(x+1)^{2/3}$,

$$y'=2x(x+1)^{2/3}+\frac{2}{3}x^2(x+1)^{-2/3}=\frac{3\cdot 2x(x+1)+2x^2}{3\sqrt[3]{x+1}}=$$

$$=\frac{8x^2+6x}{3\sqrt[3]{x+1}}=\frac{2x(4x+3)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

3) $y=\sin 2x\cos 3x$,

$$y'=2\cos 2x\cdot\cos 3x-3\sin 2x\cdot\sin 3x=\cos x+\cos 5x-\frac{3}{2}(\cos x-\cos 5x)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{5}{2}\cos 5x$$

4) $y=x\cos 2x$, $y'=\cos 2x-2x\sin 2x$.

№ 1367

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; $f(x)=(x^2-3x+2)(x-3)$

$f'(x)=(2x-3)(x-3)+x^2-3x+2=2x^2-6x-3x+9+x^2-3x+2=3x^2-12x+11$

$3x^2-12x+11=-1$, $3x^2-12x+12=0$, $3(x^2-4x+4)=0$; $3(x-2)^2=0$, $x=2$.

№ 1368

1) $f(x)=e^{3-2x}\cdot x^2$, $f'(x)=-2e^{3-2x}\cdot x^2+2x\cdot e^{3-2x}$

$f'(x)=-2e^{-1}\cdot 4+4\cdot e^{-1}=-4e^{-1}<0$

2) $f(x)=\frac{x^2}{e^{1-x}}$, $f'(x)=\frac{2x\cdot e^{1-x}+x^2\cdot e^{1-x}}{e^{2(1-x)}}$, $f'(2)=\frac{4\cdot e^{-1}+4e^{-1}}{e^{-2}}>0$.

№ 1369

$$f(x)=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cos 2x(1-\sin 2x)+2\cos 2x(1+\sin 2x)}{(1-\sin 2x)^2}=\frac{2\cdot 2\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}=\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$$

$$f'(0)=\frac{4}{1}=4;\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{8}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$

№ 1370

$$\begin{matrix} f(x)=x^3+x^2+x\sqrt{3} \\ g(x)=x\sqrt{3}+1 \end{matrix};\quad \begin{matrix} f'(x)=3x^2+2x+\sqrt{3} \\ g'(x)=\sqrt{3} \end{matrix}$$

$f'(x)\le g'(x)$, $3x^2+2x+\sqrt{3}\le\sqrt{3}$, $3x^2+2x\le 0$, $x(3x+2)\le 0$,

$x\in\left[-\frac{2}{3};0\right]$.

№ 1371

$f(x)=\cos 3x$, $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=-1$.

Первообразная $F=\frac{1}{4}\sin 4x+c$, с найдем из условия $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=-1$,

$\frac{1}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+c=-1;$ $\frac{1}{8}+c=-1$, $c=-1\frac{1}{8}$, $F=\frac{1}{4}\sin 4x-1\frac{1}{8}$.

№ 1372

1) $y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $F=\ln|x+1|-\ln|x-1|+c$;

2) $y=\frac{3}{4x-1}$; $y=\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}$, $F=\frac{3}{4}\ln\left|x-\frac{1}{4}\right|+c$.

№ 1373

1) $\int_2^9\sqrt[3]{x-1}\,dx=\int_2^9(x-1)^{1/3}dx=\frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big|_2^9=\frac{3}{4}\left(2^4-1\right)=\frac{45}{4}$;

2) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(2\cos^2 x-1\right)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$;

3) $\int_3^4\frac{x^2+3}{x-2}dx=\int_3^4\left(x+2+\frac{7}{x-2}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x+7\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=$

$=(8+8+7\ln 2)-\left(\frac{9}{2}+6+7\ln 1\right)=\frac{11}{2}+7\ln 2$.

№ 1374

1) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1$; 2) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$;

3) $\int\limits_{-2}^{1} \left(x^2 + 2x + 3\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\Big|_{-2}^{1} =$

$= \frac{1}{3} + 1 + 3 - \frac{8}{3} + 4 - 6 = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$;

4) $\int\limits_{1}^{2} \left(x^2 - 6x + 8\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x\right)\Big|_{1}^{2} =$

$\left(\frac{8}{3} - 12 + 16\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 8\right) = \frac{7}{3} - 1 = 1\frac{1}{3}$;

5) $\int\limits_{1}^{3} \left(x^{-2} + 1\right) dx = \left(-\frac{1}{x} + x\right)\Big|_{1}^{3} = \left(-\frac{1}{3} + 3\right) - \left(-1 + 1\right) = 2\frac{2}{3}$;

6) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{5-4x} dx = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{4x-5} dx = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{4\left(x - \frac{5}{4}\right)} dx =$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{5}{4}\right|\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{9} = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3$.

№ 1375

1) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $3x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$,

$3x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z$

2) $\log_2(3 - 2x) < -1$, $\log_2(3 - 2x) < \log_2\frac{1}{2}$, $3 - 2x > 0$, т т. $x < \frac{3}{2}$,

$3 - 2x < \frac{1}{2}$; $x > \frac{5}{4}$. Ответ: $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$

3) $4 \cdot 2^{3a} = 0{,}25^{a^2/2}$; $2^{3a+2} = 2^{-2\cdot\frac{a^2}{2}}$;

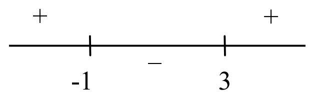
$2^{3a+2} = 2^{-a^2}$; $3a + 2 = -a^2$; $a^2 + 3a + 2 = 0$; $a_1 = -1, a_2 = -2$.

Ответ: $a_1 = -1, a_2 = -2$

4) $y = x(4 - x)$, $x = 0$, $x = 4$ – точки пересечения $y = 4x - x^2$ и $y = 0$, тогда

$S = \int\limits_{0}^{4} \left(4x - x^2\right) dx = \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{4} = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3}$. Ответ: $10\frac{2}{3}$

5) $y=\sqrt{4-\frac{9}{x+1}+\frac{1}{x-3}}$

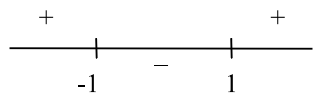


$$\begin{cases}4-\frac{9}{x+1}+\frac{1}{x-3}\ge 0\\ x\ne -1\\ x\ne 3\end{cases}$$

$$\frac{4(x+1)(x-3)-9(x-3)+(x+1)}{(x+1)(x-3)}\ge 0,\quad \frac{4(x^2-2x-3)-9x+27+x+1}{(x+1)(x-3)}\ge 0,$$

$$\frac{4x^2-16x+16}{(x+1)(x-3)}\ge 0;\quad \frac{4(x-2)^2}{(x+1)(x-3)}\ge 0,\quad \begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)\\ x\ne -1\\ x\ne -3\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

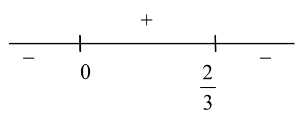


6) $y = x^3 - 3x + a$; $[-2;0]$; $y_{max} = 5$,
$y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0$; $3(x - 1)(x + 1) = 0$,
Максимальное значение на $[-2;0]$ функция принимает в точке $x = -1$, $y = 5 = -1 + 3 + a$, откуда $a = 3$.

№ 1376

1) $\sin^2x - 4\sin x - 5 = 0$, $\sin x = -1$, $\sin x = 5$, что невозможно, таким образом $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; $x=\frac{3}{2}\pi>0$.



2) $f(x) = 3x^2(1 - x)$, $[0;1]$
$f'(x) = 6x(1 - x) - 3x^2 = -9x^2 + 6x =$
$= -3x(3x - 2)$

Точка максимума $x=\frac{2}{3}$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.

3) $\lg x = \lg 3 - \lg(3x - 8)$, $x > 0$, $x>\frac{8}{3}$, т.е. $x>2\frac{2}{3}$,

$x=\frac{3}{3x-8}$; $3x^2 - 8x - 3 = 0$, $x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16+9}}{3}=\frac{4\pm 5}{3}$. Ответ: $x = 3$

4) $y_1 = (x - 3)^2$, $y_2 = 9$, $y_1 = y_2$; $(x - 3)^2 = 9$, $x = 0$, $x = 6$,

$$S=6\cdot 9-2\int_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=54-2\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right)\Big|_0^3=$$
$$=54-2(9-27+27)=36$$

Ответ: 36.

5) $\dfrac{(x-5)\left(2\dfrac{1}{x-1}+0{,}2\right)}{x+2} \le 0$

Данное неравенство равносильно системе:

$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+2} \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-2;5] \\ x \ne 1 \end{cases}$. Ответ: $x \in (-2;1) \cup (1;5]$.

6) $y = x^2 - 4x + 2$, $y = -2x + a$, $x^2 - 4x + 2 = -2x + a$, $x^2 - 2x + 2 - a = 0$,
$D = 4 - 4(2 - a) = -4 + 4a = 4(a - 1)$, $D \ge 0$ при $a \ge 1$.

№ 1377

1) $2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4$, $\log_{0,7}(1 + 2x) > 2$, $\log_{0,7}(1 + 2x) > \log_{0,7}0{,}7^2$,

$1+2x < \dfrac{49}{100}$, $2x < -\dfrac{51}{100}$, $x < -\dfrac{51}{200}$, но $1+2x > 0$, т.е. $x > -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{51}{200}$.

2) $f(x) = x^2 - x^3$, $x_0 = -1$, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $f'(x) = 2x - 3x^2$,
$f'(x_0) = -2 - 3 = -5$, $f(x_0) = 2$, $y = 2 - 5(x + 1)$, т.е. $y = -5x - 3$.

3) $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$,

$\begin{cases} x^4 - 3x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 1 \ge 0 \\ x^4 - 3x - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 \end{cases}$ $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4}$

$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x^4 - 3x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 1 \ge 0 \end{cases}$ Ответ: $x = 2$

4) $y_1 = \sqrt{x}, y_2 = \dfrac{1}{2}x$, $y_1 = y_2$; $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}x$; $x = \dfrac{1}{4}x^2$,

$x^2 - 4x = 9$; $x(x - 4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ – точки пересечения y_1 и y_2, тогда

$S = \int\limits_0^4 x^{1/2}dx - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \dfrac{2}{3}x^{2/3}\Big|_0^4 - 4 = \dfrac{16}{3} - 4 = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$.

5) $y = x^3 - 3ax2 + 27x - 5$, $y' = 3x^2 - 6ax + 27 = 0$, $3x^2 - 6ax + 27 = 0$,
$x^2 - 2ax + 9 = 0$, при $a = 3$, $x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9 = (x - 3)^2$, следовательно единственная стационарная точка при $a = 3$.

6) $\sin\dfrac{5\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$, $\left|\sin\dfrac{5\pi}{4}x\right| \le 1$

$x^2 - 4x + 5 \ge 1$, т.к. $(x-2)^2+1 \ge 0$, следовательно, равенство возможно только в случае $x=2$, т.е. когда обе части уравнения принимают значение, равное 1.

№ 1378

1) $\sqrt[4]{36^{\log_6 5}-5^{\log_5 9}}=\sqrt[4]{6^{2\log_6 5}-9}=\sqrt[4]{25-9}=2$.

2) $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$ т.к. касательная проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид y = kx; пусть x_0 – точка касания $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$f'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$, тогда $y=e^{\frac{x_0}{3}}+\frac{1}{3}e^{\frac{x_0}{3}}(x-x_0)$

$y=e^{\frac{x_0}{3}}+\frac{1}{3}e^{\frac{x_0}{3}}x-\frac{x_0}{3}e^{\frac{x_0}{3}}$, откуда $e^{x_0/3}-\frac{x_0}{3}e^{x_0/3}=0$;

$3e^{x_0/3}-x_0e^{x_0/3}=0$, $e^{x_0/3}(3-x_0)=0$, $x_0=3$. Ответ: (3; e)

3) $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)=1\\ x+y=-\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}-\sin x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x+\frac{3\pi}{2}\right)=1\\ y=-x-\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

$-\sin x-\sin x=1$, $\sin x=-\frac{1}{2}$,

$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$, $y=(-1)^{n+2}\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z.$

4) $(3-x)\log_3(x+5)\le 0$;

а) $x+5>0$, т.е. $x>-5$

$\begin{cases}3-x\le 0\\ \log_3(x+5)\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge 3\\ x\ge -4\end{cases}$;

$x\ge 3$

б) $x+5>0$, т.е. $x>-5$

$\begin{cases}3-x\ge 0\\ \log_3(x+5)\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 3\\ x\le -4\end{cases}$

$-5<x\le -4$

Ответ: $x\in(-5;-4]\cup[3;+\infty)$

5) $\int_{-6}^{6}\sqrt{36-x^2}\,dx$, заметим, что данный интеграл – это половина площади круга радиуса 6, тогда $\int_{-6}^{6}\sqrt{36-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\cdot 6^2=18\pi$;

6) $\cos\sqrt{2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2-x^2\ge 0$, $|x|\le\sqrt{2}$,

$\sqrt{2-x^2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$, $2-x^2=\frac{\pi^2}{36}\pm 2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot 2\pi n+4\pi^2n^2$

$x^2=2-\frac{\pi^2}{36}\pm\frac{2}{3}\pi^2 n+4\pi^2n^2$, $x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}\pm\frac{2}{3}\pi^2 n+4\pi^2n^2}$,

но т.к. $|x|\le\sqrt{2}$, то $x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$.

№ 1379

1) $\cos x \cos 3x = -0{,}5$, $\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = -0{,}5$, $\cos 2x + \cos 4x = -1$,

$\cos 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = -1$, $\cos 2x + 2\cos^2 2x = 0$,

$\cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$,

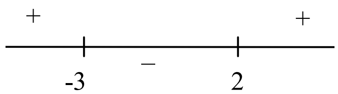
$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z \right.$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z;$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + l\pi, l \in Z.$

2) $\log_4 x^2 + \log_2^2(-x) > 6$, $\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2^2(-x) > 6$,

$\log_2^2(-x) + \log_2(-x) - 6 > 0$, $\log_2(-x) = t$

$t^2 + t - 6 = 0;$ $D = 1 + 24 = 25$, $t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$, $t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$.



$\left[\begin{array}{l} \log_2(-x) > 2 = \log_2 4 \\ \log_2(-x) < -3 = \log_2 \frac{1}{8} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} -x > 4 \\ -x < \frac{1}{8}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x < -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{1}{8} \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{8} < x < 0 \\ x < -4 \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 9 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{2x+y} = 3^2 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ \sqrt{2-2x} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2 - 2x \\ \sqrt{2-2x} = 1 + \sqrt{x} \end{cases}$

$2 - 2x = 1 + 2\sqrt{x} + x$, $1 - 3x = 2\sqrt{x}$, $1 - 6x + 9x^2 = 4x$,

$9x^2 - 10x + 1 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{9} = \frac{5 \pm 4}{9}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{16}{9}$.

Ответ: $(1;0), \left(\frac{1}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

4) $y_1 = 9x - x^3$, $x_0 = 3$, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; $f(3) > 0$, $f'(x) = 9 - 3x^2$,
$f'(3) = -18$, $y = -18x + 54$, $9x - x^3 = -18x + 54$, $-x^3 + 27x - 54 = 0$,
$(-x^2 + 6x^2 - 9x) - 6x^2 + 36x - 54 = 0$, $-x(x-3)^2 - 6(x-3)^2 = 0$,

$-(x-3)^2(x+6)=0,\ x=3,\ x=-6,\ S=S_1+S_2+S_3+S_4,$

$$S_1=\int_{-6}^{-3}\left(-18x+54-9x+x^3\right)dx=\int_{-6}^{-3}\left(x^3-27x+54\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{27x^2}{2}+54x\Big|_{-6}^{-3}=$$

$$=\frac{81}{4}-\frac{243}{2}-162-324+486+324=324-\frac{405}{4}=\frac{891}{4}.$$

$$S_2=\int_{-3}^{0}(-18x+54)dx=-9x^2+54x\Big|_{-3}^{0}=81+162=243,$$

$$S_3=\int_{-3}^{0}\left(x^3-9x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\Big|_{-3}^{0}=-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}=\frac{81}{4},$$

$$S_4=\int_{0}^{3}\left(-18x+54-9x+x^3\right)dx=\int_{0}^{3}\left(x^3-27x+54\right)dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{27x^2}{2}+54x\Big|_{0}^{3}=\frac{81}{4}-\frac{243}{2}+162=162-\frac{405}{4}=\frac{243}{4}$$

$$S=\frac{891}{4}+243+\frac{243}{4}=546\frac{3}{4}.$$

5) $y=2-3\sin x+4\cos x$ на $\left[-\frac{4\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

$y'=-3\cos x-4\sin x=-5\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x\right)=-5\cos(x-\varphi)$, где $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$

$-5\cos(x-\varphi)=0 \quad x-\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n \ (2)\ n\in Z,$

$\text{x}=\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z,$

$y=2-5\left(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x\right)=2-5\sin(x-\varphi)$, где $\varphi=\arccos\frac{3}{5}\quad(1)$;

$$y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=2-3\sin\left(+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2-\frac{3\sqrt{3}}{2}+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, теперь подставим в (1) (2)

$$y=2-5\sin(x-\varphi)=2-5\sin\frac{\pi}{2}=2-5=-3$$

$$y=2-5\sin(x-\varphi)=2-5\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2+5=7$$

$\max y=7\ \ \min y=-3$;

б) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4} = \log_3 3^{2^{1/4}}$, сравним, $\log_3 4$ и $\log_3 3^{2^{1/4}}$, что равносильно сравненнию 4 и $3^{2^{1/4}}$ очевидно, $4 > 3^{2^{1/4}}$, следовательно $\log_3 4 > \sqrt[4]{2}$.

№ 1380

1) $\cos 4x + 3\sin^2 x = 0{,}25$, $\cos^2 2x - \sin^2 2x + 3\sin^2 x = 0{,}25$,
$1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x + 3\sin^2 x = 0{,}25$, $1 - 2\sin^2 2x + 3\sin^2 x = 0{,}25$,
$1 - 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 3\sin^2 x = 0{,}25$, $1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x + 3\sin^2 x = 0{,}25$,
$8\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0{,}25$, $\sin^2 x = a$, $32a^2 - 20a + 3 = 0$,

$a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{32} = \frac{10 \pm 2}{32}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{8}$;

а) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$,

$x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$;

б) $\sin^2 x = \frac{3}{8}$; $\sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$, $x_{3,4} = (-1)^l \arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right) + l\pi, l \in Z$.

Ответ: $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$, $x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$,

$x_{3,4} = (-1)^l \arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right) + l\pi, l \in Z$.

2) $y = \log_{3x+4}(7x - 4)$, $x = 2$, $y = \frac{\ln(7x-4)}{\ln(3x+4)}$,

$$y' = \frac{\frac{7}{7x-4} \cdot \ln(3x+4) - \frac{3}{3x+4}\ln(7x-4)}{\ln^2(3x+4)},$$

$$y'(2) = \left(\frac{7}{10}\ln 10 - \frac{3}{10}\ln 10\right) / \ln^2 10 = \frac{2}{5\ln 10};$$

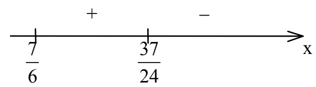
3) $y = 2\cos 3x - 5\sin 2x + 10$, $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$,

$y = 2\cos 3x - 5\sin 2x + 10 \geq 10 - 2 - 5 = 3 > 0$

$$S = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (2\cos 3x - 5\sin 2x + 10)dx = \left.\frac{2}{3}\sin 3x + \frac{5}{2}\cos 2x + 10^x\right|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{25\pi}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{15\pi}{2} = \frac{40\pi}{2} = 20\pi\ .$$

4) $y = \sqrt{6x-7} - 2x$, $x \ge \frac{7}{6}$, $y' = \frac{1\cdot 6}{2\sqrt{6x-7}} - 2 = \frac{3 - 2\sqrt{6x-7}}{\sqrt{6x-7}} = 0$,



$\sqrt{6x-7} = \frac{3}{2}$ $\quad 6x - 7 = \frac{9}{4}$ $\quad x = \frac{37}{24}$,

$x = \frac{37}{24}$ - точка максимума $\Rightarrow$ дальше y убывает в $-\infty$.

$$y\left(\frac{37}{24}\right) = \sqrt{6\cdot\frac{37}{24} - 7} - 2\cdot\frac{37}{24} = \frac{3}{2} - \frac{37}{24} = -\frac{19}{12}\ .$$

5) $9^{|x|} + 6\cdot 3^x \ge 11$, $3^{2|x|} + 6\cdot 3^x \ge 11$.

Так как необходимо найти наименьшее натуральное число, удовлетворяющее решению, то: $x \ge 0$, $3^{2x} + 6\cdot 3^x - 11 \ge 0$, $3^x = t > 0$,

$t^2 + 6t - 11 \ge 0$, $D/4 = 9 + 11 = 20$;

1) $t_1 = -3 + 2\sqrt{5}$ $\quad t_2 = -3 - 2\sqrt{5}$
$3^x \ge 2\sqrt{5} - 3$ $\quad x \ge \log_3\left(2\sqrt{5} - 3\right) > 0$

№ 1381

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{25 + 10x + x^2} = 8$; $|x - 3| + |5 + x| = 8$

а) $x \ge 3$;	б) $-5 \le x < 3$;	в) $x < -5$;
$x - 3 + 5 + x = 8$;	$3 - x + 5 + x = 8$;	$3 - x - 5 - x = 8$;
$x = 3$;	$-5 \le x < 3$;	$x = -5$; $x \in \varnothing$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x \in \varnothing \\ -5 \le x < 3 \end{array}\right. ; \qquad x \in [-5; 3].$$

2) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 6$; $|x + 2| - |x - 3| = 6$

а) $x \ge 3$;	б) $-2 \le x < 3$;	в) $x < 2$
$x + 2 - x + 3 = 6$;	$x + 2 - 3 + x = 6$;	$-x - 2 - 3 + x = 6$
$x \in \varnothing$	$x = 3{,}5$	$x \in \varnothing$

Ответ: $x \in \varnothing$. (Опечатка в ответе задачника)

3) $\sqrt[3]{(8-x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = 7$.

Пусть $\sqrt[3]{8-x} = y$, $\sqrt[3]{27+x} = z$, тогда исходное уравнение примет вид:

1) $y^2 - yz + z^2 = 7$, и 2) $y^3 + z^3 = 35$, поделим 2) на 1), получим:

$y + z = 5$; $\begin{cases} y + z = 5 \\ y^3 + z^3 = 35 \end{cases}$; $\begin{cases} z = 5 - y \\ y^3 + (5 - y)^3 = 35 \end{cases}$;

$y^3 + 125 - 75y + 15y^2 - y^3 = 35$; $15y^2 - 75y + 90 = 0$;

$y^2-5y+6=0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, тогда а) $\sqrt[3]{8-x} = 2$, $x = 0$; б) $\sqrt[3]{8-x} =3$, $x=-19$.

4. $\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5$; $x\le 8$, $x\ge -89$; $\sqrt{8-x} + 2\sqrt[4]{(8-x)(89+x)} + \sqrt{(89+x)} = 25$;

$\sqrt[4]{8-x} = y$, $\sqrt[4]{89+x} = z$, $y, z \ge 0$;

$\begin{cases} y^2 + 2yz + z^2 = 25 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$; $\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 5 - z \\ (5-z)^4 + z^4 = 97 \end{cases}$;

$(5-z)^4+z^4=97$; $(25-10z+z^2)^2+z^4=97$; $(25-10z)^2+2(25-10z)\, z^2+z^4+z^4 =97$;

$625 - 500z + 100z^2 + 50z^2 - 20z^3 + 2z^4 - 97 = 0$;

$2z^4 -20z^3 + 150z^2 - 500z + 528 = 0$; $z^4 - 10z^3 + 75z^2 - 250z + 264 = 0$;

$z_1 = 3$, $z_2 = \sqrt[4]{162}$, т.к. $z = \sqrt[4]{89+x}$, то $x_1 = -8$, $x_2 = 73$.

№ 1382

В учебнике опечатка.Условие задачи следует читать так :

1) $16\sin 2x + 16\cos^2 x = 10$; $16\sin 2x + 16\cos^2 x = 10(\sin^2 x + \cos^2 x)$;

$32\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x - 10\sin^2 x = 0$;

$\cos x = 0$ не является решением, тогда $10\mathrm{tg}^2 x - 32\mathrm{tg} x - 6 = 0$;

$5\mathrm{tg}^2 x - 16\mathrm{tg} x - 3 = 0$;

$\mathrm{tg} x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+15}}{5}$; $x = \mathrm{arctg}\dfrac{8 \pm \sqrt{79}}{5} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\dfrac{8 \pm \sqrt{79}}{5} + \pi n$, $n \in Z$.

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 34$;

$\left(\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1}\right)^x = 34$; $\left(\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}\right)^x + \left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}\right)^x = 34$;

$\left|1+\sqrt{2}\right|^x + \left|1-\sqrt{2}\right|^x = 34$; $(1+\sqrt{2})^x + (\sqrt{2}-1)^x = 34$;

$(1+\sqrt{2})^{2x} - 34(1+\sqrt{2})^x + 1 = 0$; $(1+\sqrt{2})^x = 17 \pm \sqrt{288} = 17 \pm 12\sqrt{2}$;

$17 + 12\sqrt{2} = 9 + 6\sqrt{8} + \sqrt{8} = (3+\sqrt{8})^2 = (1+\sqrt{2})^4$, т.е. $x_1 = 4$;

$17 - 12\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^4 = (1+\sqrt{2})^{-4}$, т.е. $x_2 = -4$.

Ответ: $x = \pm 4$.

№ 1383

1) $x^3-3x^2+x=3$; $x^3-3x^2-3+x=0$; $x^2 (x-3)+(-3+x)=0$; $(x^2+1) (x-3)=0$; $x = 3$.

2) $x^3-3x^2-4x+12=0$; $x^2 (x-3)-4(x-3)=0$; $(x-2) (x+2) (x-3)=0$; $x_{1/2}=\pm 2$; $x_3=3$;

3) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3 = 0$;

$x = -1$ – корень данного уравнения, тогда можно записать его в следующем виде: $(x + 1)(x^4 - 6x^2 - 8x - 3) = 0$; $(x + 1)(x - 3)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 0$;

$(x + 1)(x - 3)(x + 1)(x^2 + 2x + 1) = 0$; $(x + 1)^4 (x - 3) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

4) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$;

$x = -1$ – корень данного уравнения, тогда можно записать его в следующем виде: $(x + 1)(x^3 - 4x^2 + 2x - 8) = 0$; $(x + 1)(x^2(x - 4) + 2(x - 4)) = 0$;

$(x + 1)(x - 4)(x^2 + 2) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$.

№ 1384

1) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 2\mathrm{ctg}4x$; $\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x = \dfrac{\mathrm{ctg}^2 2x - 1}{\mathrm{ctg}2x}$; $\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} - 1}{\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}}$;

$\dfrac{1}{\sin x \cos x} = \dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin^2 2x} \cdot \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$; $\dfrac{1}{\sin x \cos x} = \dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x}$;

$\dfrac{\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x} - \dfrac{1}{\sin x \cos x} = 0$;

$\begin{cases} 2\cos^2 2x - 1 - 2\cos 2x = 0, \ \cos 2x = a \\ \sin 2x \cdot \cos 2x \neq 0 \end{cases}$;

$2a^2-1-2a=0$; $2a^2-2a-1=0$; $a=1-\sqrt{3}$; $2x = \pm \arccos(1 - \sqrt{3}) + 2n\pi$, $n \in Z$;

$\begin{cases} x = \pm \dfrac{\arccos\left(1 - \sqrt{3}\right)}{2} + \pi n, \ n \in Z \\ \sin 2x \cdot \cos 2x \neq 0 \end{cases}$;

Ответ: $x = \pm \dfrac{\arccos(1 - \sqrt{3})}{2} + n\pi, \ n \in \mathrm{Z}$.

2) $\dfrac{\sin 4x}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right)$; $\dfrac{\sin 4x}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin x - \cos x\right)} = \sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right)$;

$\begin{cases} \sin 4x - \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 0 \\ \sin x - \cos x \neq 0 \end{cases}$;

$\sin4x + \cos2x = 0$; $2\sin2x \cdot \cos2x + \cos2x = 0$; $\cos2x(2\sin2x + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in Z \\ x = \left(-1\right)^{l+1} \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\ln}{2}, \ l \in Z \end{array}\right.$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}, \ n \in Z \\ x = \left(-1\right)^{l+1} \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{l\pi}{2}, \ l \in Z \end{array}\right. \\ \sin x - \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. $\quad x = \left(-1\right)^l \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi l}{4}$, $l \in Z$.

№ 1385

1) $\frac{\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 3x}$; $\frac{\sin 3x\cdot\sin 2x+\cos 3x\cdot\cos 2x}{\sin 2x\cdot\cos 2x}=\frac{2}{\sin 3x}$;

$\frac{\cos x}{\sin 2x\cdot\cos 2x}-\frac{2}{\sin 3x}=0$; $\frac{\cos x\cdot\sin 3x-\sin 4x}{\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x}=0$;

$\frac{\sin 4x+\sin 2x-2\sin 4x}{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x}=0$; $\frac{\sin 2x-\sin 4x}{\sin 4x\cdot\sin 3x}=0$; $-\frac{2\sin x\cdot\cos 3x}{\sin 4x\cdot\sin 3x}=0$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 3x=0\end{array}\right.\\ \sin 4x\neq 0\\ \sin 3x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3},\ n\in Z\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

2) $\mathrm{tg}2x+\mathrm{ctg}x=8\cos^2 x$; $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos x}{\sin x}=8\cos^2 x$;

$\frac{\sin 2x\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos 2x}{\cos 2x\cdot\sin x}=8\cos^2 x$; $\frac{\cos x}{\cos 2x\cdot\sin x}=8\cos^2 x$;

$\frac{\cos x}{\cos 2x\cdot\sin x}-8\cos^2 x=0$; $\cos x\left(\frac{1}{\cos 2x\cdot\sin x}-8\cos x\right)=0$;

$\cos x\left(\frac{1-8\cos 2x\cdot\cos x\cdot\sin x}{\cos 2x\cdot\sin x}\right)=0$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 1-8\cos 2x\cdot\cos x\cdot\sin x=0\end{array}\right.\\ \cos 2x\cdot\sin x\neq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\\ 1-2\sin 4x=0\end{array}\right.\\ \cos 2x\cdot\sin x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\\ x=(-1)^l\frac{\pi}{24}+\frac{l\pi}{4},\ l\in Z\end{array}\right.\\ \cos 2x\cdot\sin x\neq 0\end{cases}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in Z$. $x=(-1)^l\frac{\pi}{24}+\frac{l\pi}{4}$, $l\in Z$.

№ 1386

$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x$; $\frac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{\sin x\cdot\sin 3x}=2\cos 2x$;

$\frac{(\sin 3x-\sin x)(\sin 3x+\sin x)}{\sin x\cdot\sin 3x}=2\cos 2x$; $\frac{2\sin x\cdot\cos 2x\cdot 2\sin 2x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\sin 3x}=2\cos 2x$;

$\frac{2\sin^2 2x\cdot\cos 2x-2\cos 2x\cdot\sin x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot\sin 3x}=0$;

$\begin{cases}2\cos 2x(\sin^2 2x-\sin x\cdot\sin 3x)=0\\ \sin x\cdot\sin 3x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}2\cos 2x\cdot\sin x(4\sin x\cdot\cos^2 x-\sin 3x)=0\\ \sin x\cdot\sin 3x\neq 0\end{cases}$;

$2\cos 2x \cdot \sin x(4\sin x - 4\sin^3 x + 4\sin^3 x - 3\sin x) = 0$

$\begin{cases} 2\cos 2x \cdot \sin^2 x = 0 \\ \sin x \cdot \sin 3x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2},\ n \in Z \\ x \neq n\pi,\ x \neq \dfrac{n\pi}{3},\ n \in Z \end{cases}$. Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

№ 1387

$\log_2(4\cos x+3)\log_6(4\cos x+3)=\log_2(4\cos x+3)+\log_6(4\cos x+3)$; $4\cos x + 3 = a > 0$;
$\log_2 a \log_6 a = \log_2 a + \log_6 a$; $\log_2 a\,(\log_6 a - 1) = \log_6 a$; $\log_2 a \log_6 a/6 - \log_6 a = 0$;
$\dfrac{\log_6 a}{\log_6 2}\log_6 a/6 - \log_6 a = 0$; $\log_6 a\,(\log_6 a/6 - \log_6 2) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \log_6 a = 0 \\ \log_6 a/12 = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 12 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 4\cos x + 3 = 1 \\ 4\cos x + 3 = 12 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ x \in \varnothing \end{array}\right.$;

$x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$. Ответ: $x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$.

№ 1388

$y=x^3-6x^2+11x-6$; $0=x^3-6x^2+11x-6$; $x = 1$; $(x-1)(x^2-5x+6) = 0$;
$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$; $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ – точки пересечения с осью Ox.

№ 1389

$2x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; $\begin{cases} 2 + m + n + 12 = 0 \\ -16 + 4m - 2n + 12 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} m + n = -14 \\ 4m - 2n = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} m + n = -14 \\ 2m - n = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} m = -14 - n \\ -28 - 3n = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} m = -4 \\ n = -10 \end{cases}$, тогда исходное уравнение имеет вид: $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

№ 1390

1) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2 \\ x + y = a + a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = 5/2 \\ x + y = a + a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0 \\ x + y = a + a^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_y x = 2 \\ \log_y x = 1/2 \end{array}\right. \\ x + y = a + a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y^2 \\ x = \sqrt{y} \end{array}\right. \\ x + y = a + a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y^2 \\ x = \sqrt{y} \end{array}\right. \\ x = a + a^2 - y \end{cases}$;

$\left[\begin{array}{l} a + a^2 - y = y^2 \\ a + a^2 - y = \sqrt{y} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} y^2 + y - \left(a + a^2\right) = 0 \\ y + \sqrt{y} - \left(a + a^2\right) = 0 \end{array}\right.$;

$y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\left(a + a^2\right)}}{2}$; $x_{1,2} = -y_{1,2} + a + a^2$

$$y_{3,4}=\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4\left(a+a^2\right)}}{2}\right)^2;\ x_{3,4}=-y_{3,4}+a+a^2$$

Ответ:

1) если $a > 0$, $a \neq 1$, то $(a^2; a)$, $(a; a^2)$

2) если $a < -1$, $a \neq -2$, то $(-a-1; (a+1)^2)$, $((a+1)^2; -a-1)$

3) если $-1 \leq a \leq 0$, $a = 1$, $a = -2$, то решений нет.

2) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 & b>0 \\ \log_b x+\log_b y=2 & b\neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \log_b xy=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ xy=b^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(\frac{b^2}{y}\right)^2+y^2=a^2 \\ x=\frac{b^2}{y} \end{cases}$; $\left(\frac{b^2}{y}\right)^2+y^2=a^2$; $b^4+y^4=a^2y^2$;

$y^4-a^2y^2+b^4=0$; $y^2=t$; $t^2-a^2t+b^4=0$; $t_{1,2}=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$;

$a^4-4b^4\geq 0$; $(a^2-2b^2)(a^2+2b^2)\geq 0$.

При $a^2-2b^2\geq 0$ и $a^2-\sqrt{a^4-4b^4}\geq 0$; $y=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}}$.

№ 1391

$\begin{cases} a^2-2\sqrt{3|a|}y+x^2+2xy-y^2-2=0 \\ x^2+y^2-2y-\cos(xy)+11-6a+a^2=0 \end{cases}$;

$x^2+(y-1)^2+(a-3)^2+(1-\cos(xy))=0$.

Все слагаемые не отрицательны, следовательно: x=0, y=1, a=3, $1-\cos(xy)=0$, т.е. при $a \neq 3$ решений нет.

При $a = 3$ проверим, является ли решением системы $x = 0$, $y = 1$.

$1-\cos(0\cdot 1)=0$ – верно; $9-2\cdot 3\cdot 1+0+0-1-2=0$;

$3-3=0$ – верно, т.е. $x = 0$, $y = 1$ – решение.

Ответ: $a = 3$, $x = 0$, $y = 1$. $a \neq 3$ решений нет.

№ 1392

1) $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^3=y^2 \end{cases}$; $x, y > 0$; $\begin{cases} x^y=y^x \\ x=y^{2/3} \end{cases}$; $\begin{cases} x^y=y^{y\frac{2}{3}} \\ x=y^{2/3} \end{cases}$;

$\begin{cases} x^y=y^{y\frac{2}{3}} \\ x=y^{2/3} \end{cases}$ $y^{2/3}-\frac{2}{3}y=0$; $y^{2/3}\left(1-\frac{2}{3}y^{1/3}\right)=0$;

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y^{1/3}=\frac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$; $y \neq 0$; $x = y^{2/3}$; $x=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{9}}$, а также (1; 1).

Ответ: $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{9}};\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, (1; 1).

2) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y \\ y^{\sqrt{y}}=x^4 \end{cases}$; $x, y > 0$; $\begin{cases} x^{y^{1/2}}=y \\ x=y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}} \end{cases}$; $\begin{cases} y^{\frac{1}{4}y}=y \\ x=y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}} \end{cases}$;

$\frac{1}{4}$ $y = 1$; $y = 4$; $x = 2$, а также (1; 1).   Ответ: (1; 1), (2; 4).

3) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y \end{cases}$.

Сложим уравнения системы: $\sqrt{2}\,\sin x+\sqrt{2}\,\cos x=\sin y+\sqrt{3}\,\cos y$;

$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=2\left(\frac{1}{2}\sin y+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y\right)$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)$;

$x+\frac{\pi}{4}+2\pi n=y+\frac{\pi}{3}$, $n \in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+y+2\pi n$, $n \in Z$.

Вычтем уравнения системы, получим:

$2\sin\frac{x-y+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{x+y-\frac{7}{12}\pi}{2}=0$, откуда

$x=\frac{5}{6}\pi+2\pi n$, $n \in Z$; $y=\frac{3}{4}\pi+\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x=\frac{5}{6}\pi+2\pi n$, $n \in Z$; $y=\frac{3}{4}\pi+\pi n$, $n \in Z$.

4) $\begin{cases} x-y=-\frac{1}{3} \\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi y=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=y-\frac{1}{3} \\ \cos^2\pi\left(y-\frac{1}{3}\right)-\sin^2\pi y=\frac{1}{2} \end{cases}$;

$\cos^2\left(\pi y-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\pi y=\frac{1}{2}$; $\left(\cos\pi y\cdot\frac{1}{2}+\sin\pi y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2\pi y=\frac{1}{2}$;

$\left(\frac{1}{2}\cos\pi y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi y\right)^2-\sin^2\pi y=\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{4}\cos^2\pi y+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi y\cdot\sin\pi y+\frac{3}{4}\sin^2\pi y-\sin^2\pi y=\frac{1}{2}$;

$\cos^2\pi y+2\sqrt{3}\cos\pi y\cdot\sin\pi y+3\sin^2\pi y-4\sin^2\pi y=2$;

$\cos^2\pi y-\sin^2\pi y+2\sqrt{3}\cos\pi y\cdot\sin\pi y=2$; $\cos 2\pi y+\sqrt{3}\sin 2\pi y=2$;

$\frac{1}{2}\cos 2\pi y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\pi y=1$; $\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\pi y+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\pi y=1$;

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi y\right)=1$; $\frac{\pi}{6}+2\pi y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $y=\frac{1}{6}+n$, $x=-\frac{1}{6}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{6}+n,\ \frac{1}{6}+n\right)$, $n\in Z$.

5) $\begin{cases}\cos x\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin 2x+\sin 2y=0\end{cases}$; $\begin{cases}\cos x\sin x=\frac{1}{2}\\ 2\sin(x+y)\cos(x-y)=0\end{cases}$;

$\begin{cases}\cos x\cdot\sin y=1/2\\ \left[\begin{array}{l}\sin(x+y)=0\\ \cos(x-y)=0\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}\cos x\cdot\sin y=1/2\\ \left[\begin{array}{l}x+y=n\pi,\ n\in Z\\ x-y=l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.\end{cases}$;

$\frac{1}{2}(\sin(y-x)+\sin(y+x))=\frac{1}{2}$; $\sin(y-x)+\sin(y+x)=1$.

а) $x+y=n\pi$, $n\in Z$; $\sin(n\pi-2x)=1$;

$n\pi-2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $n, k\in Z$; $x=-\frac{\pi}{4}-k\pi+\frac{n\pi}{2}$;

$y=n\pi+\frac{\pi}{4}+k\pi-\frac{n\pi}{2}$, $n, k\in Z$; $y=\frac{\pi}{4}+k\pi+\frac{n\pi}{2}$, $n, k\in Z$;

$\left(-\frac{\pi}{4}-k\pi+\frac{n\pi}{2};\frac{\pi}{4}+k\pi+\frac{n\pi}{2}\right)$, $n, k\in Z$.

б) $x-y=n\pi$, $n\in Z$; $\sin(y+x)=1$; $\sin(2y+n\pi)=1$;

$2y+n\pi=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k, n\in Z$; $2y=\frac{\pi}{2}+2\pi k-n\pi$, $k, n\in Z$;

$y=\frac{\pi}{4}+\pi k-\frac{n\pi}{2}$, $n, k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi k+\frac{n\pi}{2}$, $n, k\in Z$;

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{4}\pm k\pi+\frac{n\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}+k\pi\pm\frac{n\pi}{2}\right)$, $n, k\in Z$.

№ 1393

$\begin{cases}6\sin x\cdot\cos y+2\cos x\cdot\sin y=-3\\ 5\sin x\cdot\cos y-3\cos x\cdot\sin y=1\end{cases}$

Обозначим $\sin x\cdot\cos y$ за u, $\cos x\cdot\sin y$ за v, тогда система примет вид:

$\begin{cases} 6u+2v=-3 \\ 5u-3v=1 \end{cases}$; $\begin{cases} u=\dfrac{-3-2v}{6} \\ 5u-3v=1 \end{cases}$; $5(-3-2v)-18v=6$; $-15-10v-18v=6$;

$-28v=21$; $v=-\dfrac{3}{4}$; $u=\dfrac{-3+\dfrac{3}{2}}{6}=-\dfrac{1}{4}$;

$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=-\dfrac{1}{4} \\ \cos x\cdot\sin y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} 4\sin x\cdot\cos y=-1 \\ 4\cos x\cdot\sin y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2(\sin(x-y)+\sin(x+y))=-1 \\ 2(\sin(x-y)+\sin(x+y))=-3 \end{cases}$;

$4\sin(x-y)=2$; $\sin(x-y)=\dfrac{1}{2}$; $x-y=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$;

$x=y+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$; $2(\sin(x-y)+\sin(x+y))=-1$;

$2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=-1$; $1+2\sin\left(2y+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right)=-1$;

$\sin\left(2y+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right)=-1$; $2y+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$;

$y=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\pi n-\dfrac{k\pi}{2}$, $k, n\in Z$;

$x=-\dfrac{\pi}{4}-(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\pi n-\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k, n\in Z$;

$x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\pi n+\dfrac{k\pi}{2}$, $k, n\in Z.$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\pi n+\dfrac{k\pi}{2}$; $y=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\pi n-\dfrac{k\pi}{2}$, $k, n\in Z.$

№ 1394

$\begin{cases} 3^{\log_x 2}=y^{\log_5 y} \\ 2^{\log_y 3}=x^{\log_7 x} \end{cases}$; $\begin{cases} \log_x 2=\log_3 y^{\log_5 y} \\ \log_y 3=\log_2 x^{\log 7x} \end{cases}$;

$\begin{cases} \dfrac{1}{\log_2 x}=\log_5 y\cdot\log_3 y \\ \dfrac{1}{\log_3 y}=\log_7 x\cdot\log_2 x \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 x=\dfrac{1}{\log_3 y\cdot\log_5 y} \\ \dfrac{1}{\log_3 y}=\log_7 x\cdot\log_2 x \end{cases}$;

$\begin{cases} x=2^{\frac{1}{\log_3 y\cdot\log_5 y}} \\ \dfrac{1}{\log_3 y}=\log_7 2^{\frac{1}{\log_3 y\log_5 y}}\cdot\log_2 2^{\frac{1}{\log_3 y\log_5 y}} \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \dfrac{1}{\log_3 y} = \dfrac{\log_7 2}{\log_3^2 y \cdot \log_5^2 y} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \log_5^2 y \cdot \log_3 y = \log_7 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \log_5^2 y \cdot \dfrac{\log_5 y}{\log_5 3} = \log_7 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{\log_3 y \cdot \log_5 y}} \\ \log_5 y = (\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{(\log_5 3 \cdot \log_7 2)^{\frac{2}{3}}} \log_5 3} \\ y = 5^{(\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}}} \end{cases}.$$

№ 1395

1) $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$; $x > 0, x \neq 1$; $\lg_x x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > \lg_x 1000$;

$\lg^2 x - 3\lg x + 1 > \dfrac{1}{\log_{10^3} x}$; $\lg^2 x - 3\lg x + 1 > \dfrac{3}{\lg x}$.

Обозначим $\lg x$ через a, тогда неравенство примет вид:

$a^2 - 3a + 1 > \dfrac{3}{a}$; $\dfrac{a^3 - 3a^2 + a - 3}{a} > 0$;

$\dfrac{a^2(a-3) + (a-3)}{a} > 0$; $\dfrac{(a-3)(a^2+1)}{a} > 0$;

$a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, т.е. $\left[\begin{array}{l} \lg x < 0 \\ \lg x > 3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 1000 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup (1000; +\infty)$.

2) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$; $x > 0$; $3^{\lg x + 2} - 3^{2\lg x + 5} + 2 < 0$

$3^{\lg x + 2} - 3^{2(\lg x + 2)} \cdot 3 + 2 < 0$; $3^{\lg x + 2} = t$ $\quad t > 0$;

$-3t^2 + t + 2 < 0$; $\quad 3t^2 - t - 2 > 0$;

$D = 1 + 24 = 25$; $\quad t_1 = \dfrac{1+5}{6} = 1$; $\quad t_2 = -\dfrac{2}{3}$;

$t > 1$ $\quad 3^{\lg x + 2} > 1 + 3^0$; $\lg x + 2 > 0 \lg x > -2 = \lg 0{,}01$; $x > 0{,}01$.

№ 1396

$\log_{|2x+2|}(1 - 9^x) < \log_{|2x+2|}(1 + 3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\dfrac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$;

1) $|2x + 2| > 1$, т.е. $x < -\dfrac{3}{2}$, $x > -\dfrac{1}{2}$;

$\log_{|2x+2|}\dfrac{(1-3^x)(1+3^x)}{1+3^x} < \log_{|2x+2|}\left(\dfrac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$; $1 - 3^x < \dfrac{5 + 3^{x+1}}{9}$;

$4 < 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x$; $9 - 3^{x+2} < 5 + 3^{x+1}$; $4 < 12 \cdot 3^x$; $3^{x+1} > 3^0$; $x > -1$;

$$\begin{cases} x > -1 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{2}{3} \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}; \; x > -\frac{1}{2}.$$

2) $|2x + 2| < 1$, т.е. $-\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{1}{2}$;

$\log_{|2x+2|}(1 - 9^x) < \log_{|2x+2|}(1 - 3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\dfrac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$;

$1 - 3^x > \dfrac{5 + 3^{x+1}}{9}$; $x < -1$; $\begin{cases} x < -1 \\ -\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $-\dfrac{3}{2} < x < -1$.

Заметим, что по определению логарифма $1-9^x>0$, $1+3^x>0$, $\dfrac{5}{9}+3^{x-1}$, т.е. $x < 0$, тогда решением исходного неравенства являются $x \in \left(-\dfrac{3}{2};\ -1\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$.

№ 1397

$\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} > 0$; $\dfrac{x(x^2 - 4) + (x^2 - 4)}{(x-1)(x+3)(x+4)} > 0$; $\dfrac{(x+1)(x+2)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x+4)} > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

№ 1398

1) $\sqrt{2x - 7} \le \sqrt{6x + 13}$; $\begin{cases} 2x - 7 \ge 0 \\ 6x + 13 \ge 0 \\ 2x - 7 \le 6x + 13 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge 3{,}5 \\ x \ge -\dfrac{13}{6} \\ x \ge -5 \end{cases}$. Ответ: $x \ge 3{,}5$.

2) $\sqrt{3 - x} < \sqrt{3x - 5}$; $\begin{cases} 3 - x \ge 0 \\ 3x - 5 \ge 0 \\ 3 - x < 3x - 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 3 \\ x \ge \dfrac{5}{3} \\ x > 2 \end{cases}$. Ответ: $x \in (2; 3]$.

№ 1399

$\dfrac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \ge 3x - 10$; $\begin{cases} 3x^3 - 22x^2 + 40x \ge 0 \\ 3x^3 - 22x^2 + 40x \ge (3x - 10)^2(x - 4)^2 \\ x - 4 \ne 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \in \left[0; \dfrac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ 3x^3 - 22x^2 + 40x \ge (3x-10)^2(x-4)^2 \\ x - 4 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \in \left[0; \dfrac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ x(x-4)(3x-10) - (3x-10)^2(x-4)^2 \ge 0 \\ x - 4 \ne 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ (x-4)(3x-10)(x-(3x-10)(x-4)) \ge 0 \\ x-4 \ne 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ (x-4)(3x-10)(x-3x^2+22x-40) \ge 0 \\ x-4 \ne 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ (x-4)(3x-10)(-3x^2+23x-40) \ge 0 \\ x-4 \ne 0 \end{cases}; \quad (x-4)(3x-10)(x-5)\left(x-\frac{8}{3}\right) \le 0;$$

$$\begin{cases} x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \\ x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right] \cup [4; 5] \end{cases}; \; x \ne 4. \qquad \text{Ответ: } x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right] \cup (4; 5].$$

№ 1400

$|x - 5a| \le 4a - 3$;

а) $x - 5a \ge 0$, т.е. $x \ge 5a$; $x - 5a \le 4a - 3$; $x \le 9a - 3$, тогда $5a \le x \le 9a - 3$ при $a > \frac{3}{4}$; $x = \frac{15}{4}$ при $a = \frac{3}{4}$; $x \in \varnothing$ при $a < \frac{3}{4}$.

б) $x-5a<0$, т.е. $x<5a$; $5a-x\le 4a-3$; $x\ge a+3$, тогда $a+3\le x<5a$ при $a > \frac{3}{4}$;

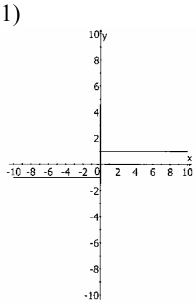
$x = \frac{15}{4}$ при $a = \frac{3}{4}$; $x \in \varnothing$ при $a < \frac{3}{4}$; $x^2-4x-5<0$; $(x+1)(x-5)<0$; $x \in (1; 5)$.

Ответ: если $a = \frac{3}{4}$, то $x = \frac{15}{4}$; если $a > \frac{3}{4}$, то $a + 3 < x < 9a - 3$;

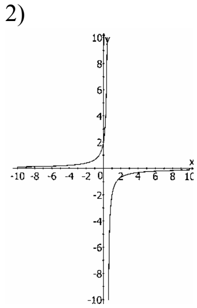
если $a < \frac{3}{4}$, то $x \in \varnothing$; решения первого неравенства являются решениями второго при $\frac{3}{4} \le a < \frac{8}{9}$.

№1401

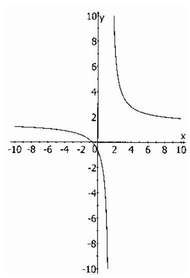
1)



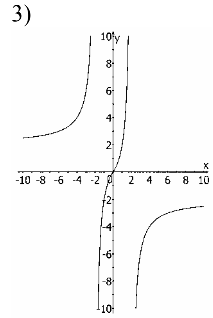
2)



2)

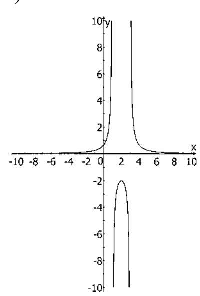


3)

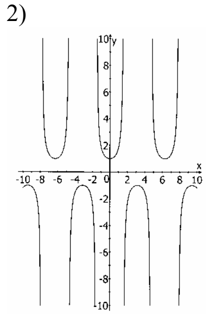


№1402

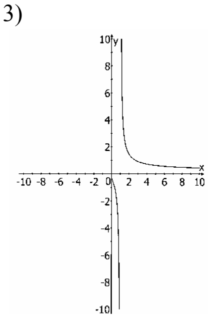
1)



2)

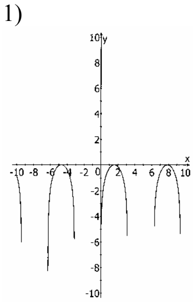


3)

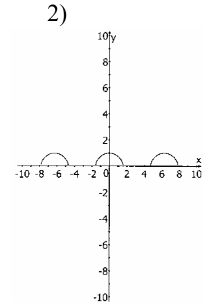


№1403

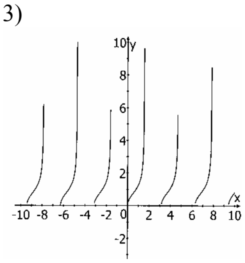
1)



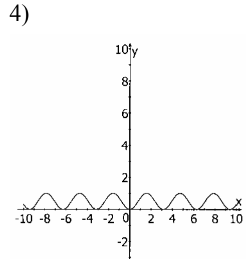
2)



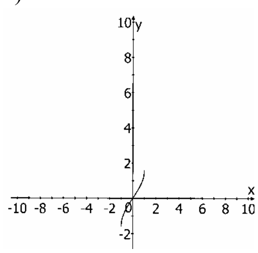
3)

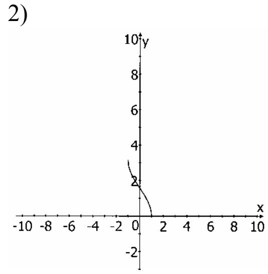


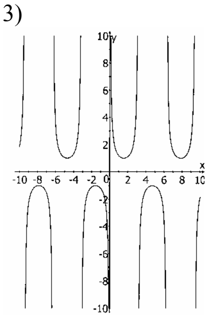
4)

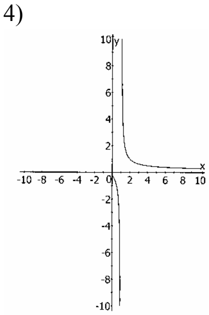


№1404

1) 

2) 

3) 

4) 

№ 1405

$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$

Преобразуем левую часть выражения: $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c =$

$= \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_c a \cdot \log_d c = \dfrac{\log_d a}{\log_d c} \cdot \log_d c = \log_d a$, что и требовалось доказать.

№ 1406

1) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right) = \pm\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)} = \pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \pm\dfrac{4}{5}$;

$\arcsin\dfrac{3}{5} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, следовательно $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

2) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right) = \pm\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right)} = \pm\sqrt{1-\dfrac{25}{169}} = \pm\dfrac{12}{13}$.

$\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) \in [0;\ \pi]$, на промежутке $[0;\ \pi]$ $\sin x > 0$, следовательно $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right) = \dfrac{12}{13}$.

№ 1407

arcsin$x$ + arccos$x$. Пусть arcsin$x$ + arccos$x$ = c, тогда arcsin$x$ = c – arccos$x$;

sin (arcsin$x$) = sin (c – arccos$x$); x = sin$c$ · cos (arccos$x$) – cos$c$ · sin (arccos$x$);

$x = x \cdot \sin c - \cos c\sqrt{1-x^2}$; $x(1 - \sin c) = -\cos c\sqrt{1-x^2}$;

$x(\sin c - 1) = \cos c\sqrt{1-x^2}$; $x^2(\sin^2 c - 2\sin c + 1) = \cos^2 c(1 - x^2)$;

$x^2\sin^2 c - 2x^2\sin c + x^2 - \cos^2 c + x^2\cos^2 c = 0$; $2x^2 - 2x^2\sin c - \cos^2 c = 0$;

$2x^2 - 2x^2\sin c - 1 + \sin^2 c = 0$; $2x^2(1 - \sin c) - (1 - \sin^2 c) = 0$;

$(1 - \sin c)(2x^2 - (1 + \sin c)) = 0$, независимо от x уравнение решается при $\sin c = 1$, откуда $c = \frac{\pi}{2}$.

№ 1408

$f(x) = \sin 2x - 8(b + 2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)x$;

$f'(x) = 2\cos x + 8(b + 2)\sin x - (4b^2 + 16b + 6)x$; $f'(x) < 0$;

$2\cos 2x + 8\sin x(b+2) - (4b^2 + 16b + 6)x < 0$; $2b^2 - b(4\sin x - 8) - (\cos 2x + 8\sin x - 3) > 0$;

$\left(b - \left(\sin x - 2 + \sqrt{3}\right)\right)\left(b - \left(\sin x - 2 - \sqrt{3}\right)\right) > 0$;

Решение неравенства не зависит от x при $b \in \left(-\infty; -3 - \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3} - 1; +\infty\right)$.

№ 1409

$y_1 = 3\cos 5x$, $y_2 = 5\cos 3x + 2$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$y_{1_k} = -15\sin 5x_0(x - x_0) + 3\cos 5x_0$; $y_{2_k} = -15\sin 3x_0(x - x_0) + 5\cos 3x_0$;

$y_{1_k} = -15x\sin 5x_0 + 15x_0\sin 5x_0 + 3\cos 5x_0$; $y_{2_k} = -15x\sin 3x_0 + 15x_0\sin 3x_0 + 5\cos 3x_0$.

Условие параллельности:

$-15\sin 5x_0 = -15\sin 3x_0$; $\sin 5x_0 - \sin 3x_0 = 0$; $2\sin x_0 \cdot \cos 4x_0 = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\sin x_0 = 0\\ \cos 4x_0 = 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x_0 = n\pi,\ n \in Z\\ x_0 = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4},\ n \in Z\end{array}\right.$. Ответ: при $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in Z$.

№ 1410

$A\left(2; -\frac{12}{5}\right)$, $y = -\frac{3}{5}x^2$, $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$,

$y = -\frac{6}{5} \cdot 2(x - 2) - \frac{12}{5}$; $y = -\frac{12}{5}x + \frac{12}{5}$

$y = 0$, $x = 1$ (1, 0) – точка B

$x = 0$, $y = \frac{12}{5}$; $\left(0, \frac{12}{5}\right)$ – точка C

$r = \frac{S}{p}$, где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр, S – площадь.

$$S=\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{5},\ p=\frac{\left(1+\frac{12}{5}+\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}\right)}{2}=\frac{5+12+13}{10}=3\text{, тогда } r=\frac{2}{5}.$$

№ 1411

A (3; –4), $y=-\frac{12}{x}$; l: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=\frac{12}{x_0^2}(x-x_0)-\frac{12}{x_0}$; $y=\frac{4}{3}(x-3)-4$; $y=\frac{4}{3}x-8$.

Искомая окружность является вписанной в треугольник со сторонами 12, $\sqrt{36+64}$, $\sqrt{36+64}$, тогда $r=\frac{S}{p}$, где S = 48, p = 16, т.е. r = 3 – случай, когда окружность лежит ниже оси Ox, во втором случае (окружность лежит выше оси Ox) получаем r = 12.

№ 1412

Пусть t – переменная времени, тогда расстояние l между кораблями можно представить как функцию $l(t)$.

$l(t)=\sqrt{(3t)^2+(5-4t)^2}=\sqrt{9t^2+25-40t+16t^2}=\sqrt{25t^2-40t+25}$;

$l'(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{50t-40}{\sqrt{25t^2-40t+25}}$; $t=\frac{4}{5}$ – точка минимума; $l\left(\frac{4}{5}\right)$ = 3 мили.

Ответ: корабли не будут на расстоянии, достаточном для приема.

№ 1413

$y=-x^3+ax^2+bx+c$, x = 2, (0; 2), (0; 6).

Пусть точки A и B лежат на расстоянии l от прямой x = 2, тогда имеют координаты A $(2-l, y_1)$, B $(2+l, y_1)$, т.к. A и B лежат на графике функции, то $y_1=-(2-l)^3+a(2-l)^2+b(2-l)+c$; $y_1=-(2+l)^3+a(2+l)^2+b(2+l)+c$

Уравнение касательной в точке A: $y=y'(2-l)(x-(2-l))+y(2-l)$

Уравнение касательной в точке B: $y=y'(2+l)(x-(2+l))+y(2+l)$

Т.к. касательные проходят через точки (0; 2) и (0; 6), то справедливо

$0=y'(2-l)(2-(2-l))+y(2-l)$ и $0=y'(2+l)(6-(2+l))+y(2+l)$;

условие параллельности касательных: $y'(2-l)=y'(2+l)$

$y'=-3x^2+2ax+b$, тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1=-(2-l)^3+a(2-l)^2+b(2-l)+c \\ y_1=-(2+l)^3+a(2+l)^2+b(2+l)+c \\ 0=\left(-3(2-l)^2+2a(2-l)+b\right)l+\left(-(2-l)^3+a(2-l)^2+b(2-l)+c\right) \\ 0=\left(-3(2+l)^2+2a(2-l)+b\right)(4-l)+(-(2+l)^3+a(2+l)^2+ \\ +b(2+l)+c)-3(2-l)^2+2a(2-l)+b=-3(2+l)^2+2a(2+l)+b \end{cases}$$

решая которую, найдем a = 6, b = –11, с = 6.

№ 1414

Пусть $A = (x_1; y_0)$, $B = (x_2; y_0)$, тогда по условию $x_1 = -2 - t$, $x_2 = -2+t$, $t > 0$.

$y' = 3x^2 + 2ax + b$, т.к. касательные в A и B параллельны, то

$y'(x_1) = y'(x_2)$, т.е. $3(-2-t)^2+2a(-2-t)+b=3(-2+t)^2+2a(-2+t) + b$, откуда $a = 6$.

Уравнение касательных, проходящих через $A(0; 1)$ и $B(0; 5)$:

$0=(3(2+t)^2+12(-2 - t) + b)\ (1 - (-2 - t) + (-2 - t)^3 + 6(2 + t)^2 + b(-2 - t) + c$ и $0 = (3(-2 + t)^2 + 12(-2 + t) + b)\ (5 - (-2 + t) + (-2 + t)^3 + 6(-2 + t)^2 + b(-2 + t) + c$

Т.к. A и B принадлежат графику функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, то $(-2 - t)^3 + 6(2 + t)^2 + b(-2 - t) + c = (-2 + t)^3 + 6(-2 + t)^2 + b(-2 + t) + c$.

Из полученных трех уравнений найдем $b = 11$, $c = 5$.

№ 1415

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

Пусть точка A имеет координаты $(0; y_0)$, $M = (x_1; 0)$, $N = (x_2; 0)$, тогда площадь ΔAMN можно записать как $\frac{1}{2}|x_2 - x_1| \cdot |y_0| = 1$.

Уравнение касательной в точке M, проходящей через точку A:

$y_0 = \left(3x_1^2 + 2ax_1 + b\right)\left(0 - x_1\right) + x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c$.

Т.к. $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ проходит через M и N и A, то

$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, $x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ и $y_0 = c$.

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = c,\ c < 0 \\ \left|\left(x_2 - x_1\right)y_0\right| = 0 \\ y_0 = \left(3x_1^2 + 2ax_1 + b\right)\left(0 - x_1\right) - x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c \\ x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$.

№ 1416

$y = -x^3 + ax^2 + bx + c$, $c > 0$

По условию $D = (0, y_0)$, $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$, тогда площадь ΔABD запишем как $\frac{1}{2}|(x_2 - x_1)y_0| = 1$.

Запишем уравнение касательной в точке B, проходящей через точку D

$y_0 = \left(-3x_2^2 + 2ax_2 + bx_2\right)\left(0 - x_2\right) - x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c$.

Т.к. точки A, B, D принадлежат графику функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$, то

$y_0 = c$

$0 = -x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c$; $0 = -x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c$.

Можем записать систему:

$$\begin{cases} y_0 = c,\ c > 0 \\ \left|(x_2 - x_1)y_0\right| = 2 \\ y_0 = \left(-3x_2^2 + 2ax_2 + bx_2\right)\left(-x_2\right) - x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c \\ 0 = -x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c \\ 0 = -x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем $a = 4$, $b = -5$, $c = 2$.

№ 1417

$y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $A\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$, $B(4; 2)$.

Уравнение касательной:

$y = (x_0 - 2)\,(x - x_0) + 0{,}5\,x_0^2 - 2x_0 + 2$, т.к. касательная проходит через точки A и B, то справедливо $\dfrac{1}{2} = \left(x_{0_1} - 2\right)\left(1 - x_{0_1}\right) + 0{,}5_{0_1}^2 - 2x_{0_1} + 2$ и

$2 = \left(x_{0_2} - 2\right)\left(4 - x_{0_2}\right) + 0{,}5_{0_2}^2 - 2x_{0_2} + 2$, откуда

$\begin{matrix} x_{0_1} = 1 \\ x_{0_2} = 4 \end{matrix}$; тогда уравнения касательных:

$y = -1(x - 1) + 1/2 = -x + \dfrac{3}{2}$, $y = 2(x - 4) + 2 = 2x - 6$ (точка пересечения касательных $x = \dfrac{5}{2}$), тогда искомая площадь

$$S = \int_1^4 \left(0{,}5x^2 - 2x + 2\right)dx + \left|\int_{3/2}^{5/2} \left(\frac{3}{2} - x\right)dx\right| + \left|\int_{5/2}^{3} (2x - 6)dx\right| - \int_1^{3/2} \left(\frac{3}{2} - x\right)dx -$$

$$- \int_3^4 (2x - 6)dx = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right)\Bigg|_1^4 + \left|\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{3/2}^{5/2}\right| + \left|\left(x^2 - 6x\right)\Big|_{5/2}^{3}\right| -$$

$$- \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^{3/2} - \left(x^2 - 6x\right)\Big|_3^4 = \frac{9}{8}.$$

№ 1418

Уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке a имеет вид:

$y = \dfrac{x}{2\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a}}{2} + \sqrt{a} = \dfrac{x - a + 2a}{2\sqrt{a}} = \dfrac{x + a}{2\sqrt{a}}$; ордината точки пересечения с прямой $x = 3$: $\dfrac{3 + a}{2\sqrt{a}}$; абсцисса точки пересечения с осью Ox: $x = -a$.

Тогда искомая площадь треугольника

$$S=\frac{(a+3)^2}{4\sqrt{a}};\ S'=\frac{2(a+3)4\sqrt{a}-(3+a)^2\cdot\dfrac{4}{2\sqrt{a}}}{16a}=\frac{8a(a+3)-2(3+a)^2}{16a\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{8a^2+24a-18-12a-2a^2}{16a\sqrt{a}}=\frac{6a^2+12a-18}{16a\sqrt{a}}=\frac{3a^2+6a-9}{8a\sqrt{a}}$$

$S=\dfrac{(a+3)^2}{4\sqrt{a}}=\dfrac{4^2}{4}=4$. Точка минимума $a = 1$.

№ 1419

Площадь фигуры $S=\int\limits_0^{\pi/2}\sin x dx=1$.

Прямая, проходящая через начало координат, задается уравнением $y = kx$, где $k = \text{tg}\alpha$, α – угол наклона к оси Ox. Тогда условие того, что данная прямая делит фигуру площади S на две фигуры равной площади, запишем следующим образом: $1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot k$, откуда $k=\frac{4}{\pi^2}$, а угол $\alpha=\text{arctg}\frac{4}{\pi^2}$.

№ 1420

1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-4}=\sqrt{3x-2}$

$$\begin{cases} x+3\ge 0\\ 2x-4\ge 0\\ 3x-2\ge 0\\ \sqrt{x+3}-\sqrt{2x-4}\ge 0\\ x+3-2\sqrt{(x+3)(2x-4)}+2x-4=3x-2 \end{cases}$$

$3x+3-4-3x+2=2\sqrt{(x+3)(2x-4)}$;

$1=2\sqrt{(x+3)(2x-4)}$; $1 = 4(2x^2 + 2x - 12)$; $8x^2 + 8x - 49 = 0$;

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+392}}{8}=\frac{-4\pm\sqrt{408}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{102}}{4};$$

$$\begin{cases} x+3\ge 0\\ 2x-4\ge 0\\ 3x-2\ge 0\\ \sqrt{x+3}-\sqrt{2x-4}\ge 0\\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{102}}{4} \end{cases}.$$ Ответ: $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{102}}{4}$.

2) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$; $\sqrt{1-\text{x}}=a>0$;

$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{a}$; $\begin{cases}(1+a+1-a)a-2(1-a^2)\sqrt{2}=0\\(1-a)(1+a)a\ne 0\end{cases}$;

$2a-2\sqrt{2}\ +2\sqrt{2}\ a^2=0$; $a-\sqrt{2}+\ \sqrt{2}\ a^2=0$; $\sqrt{2}\ a^2+a-\sqrt{2}=0$;

$a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-1\pm 3}{2\sqrt{2}}$; $a>0$, следовательно, $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$\sqrt{1-x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $1-x=\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{1}{2}$. Ответ: $x=\dfrac{1}{2}$.

№ 1421

$|\,2\sqrt{x}\ +1-x|+|x-\ 2\sqrt{x}\ +2|=7$; $|\,2\sqrt{x}\ -x+1|+|-(\ 2\sqrt{x}\ -x+1)+3|=7$;

$|\,2\sqrt{x}\ -x+1=a$; $|a|+|3-a|=7$.

а) $a>3$; $a+a-3=7$; $a=5$. б) $0\le a\le 3$; $a+3-a\ =7$; $a\in\varnothing$.

в) $a<o$;$-a+3-a=7$; $a=-2$; а) $2\sqrt{x}\ -x+1=5$; $2\sqrt{x}\ =x+4$; $4x=x^2+8x+16$;
$x^2+4\,x+16=0$ – действ. корней нет.

б) $2\sqrt{x}\ -x+1=-2$; $2\sqrt{x}\ =x-3$; $x\ge 0$; $4x=x^2-6x+9$;

$x^2-10x+9=0$; $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-9}}{1}=5\pm 4$; $x_1=9$, $x_2=1$.

$x=1$ не является решением, т.к. $|2+1-1|+|1-2+2|\ne 7$. Ответ: x=9.

№ 1422

1) $9\cdot 4^{1/x}+5\cdot 6^{1/x}=4\cdot 9^{1/x}$, $3^2\cdot 4^{1/x}+5\cdot 2^{1/x}\cdot 3^{1/x}=4\cdot 3^{2/x}$, $3^2\cdot 2^{2/x}+5\cdot 2^{1/x}\cdot 3^{1/x}=2^2\cdot 3^{2/x}$

разделим все на $(3)^{\frac{2}{x}}\ne 0$, $9\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-4=0$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=t$; $t>0$

$9t^2+5t-4=0$; $D=25+144$, $t_1=\dfrac{-5+13}{18}=\dfrac{4}{9}$; $t_2=\dfrac{-5-13}{18}=-1$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$; $\dfrac{1}{x}=2$; $x=\dfrac{1}{2}$.

2) $\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0$,

$\dfrac{x^2-3}{6x-10}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2x^2-6-6x+10}{2(6x-10)}=0$; $\begin{cases}2x^2-6x+4=0\\ x\ne 10/6\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-3x+2=0\\ x\ne 10/6\end{cases}$;

$x_1=1$, $x_2=2$, т.к. $x^2-3>0$ и $6x-10>0$, то $x=1$ не является решением.
Ответ: $x=2$.

3) $2\log_2 x-\ 2\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{\log_2 x}$; $2\log_2 x+1=\ 3\sqrt{\log_2 x}$, $x>0$.

$\sqrt{\log_2 x}=a\ge 0$; $2a^2-3a+1=0$; $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$; $\log_2 x=1$, $x=2$;

$\log_2 x=\dfrac{1}{4}$, $x=\sqrt{\sqrt{2}}$. Ответ: $x=\sqrt{\sqrt{2}}$.

4) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$; $2x^2-3x-4>0$, $x>0$, $x\ne 1$;

$\log_x(2x^2 - 3x - 4) = \log_x x^2$; $2x^2 - 3x - 4 = x^2$; $x^2 - 3x - 4 = 0$;
$x_1 = -1$, $x_2 = 4$; $x_1 < 0$, следовательно не является решением.
Ответ: $x = 4$.

№ 1423

1) $1 + \log_x(5 - x) = \log_7 4 \cdot \log_x 7$; $1 + \log_x(5 - x) = \log_x 7^{\log_7 4}$;
$\log_x x(5 - x) = \log_x 4$; $5 - x > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$; $5x - x^2 = 4$;
$x^2 - 5x + 4 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; Ответ: $x = 4$.
2) $(\log_9(7 - x) + 1)\log_{3-x}3 = 1$; $\log_9 9(7 - x)\log_{3-x}3 = 1$;
$\frac{1}{2}\log_3 9(7-x)\cdot\frac{1}{\log_3 3-x} = 1$; $\log_{3-x}9(7 - x) = 2$;
$\log_{3-x}9(7 - x) = \log_{3-x}(3 - x)^2$; $9(7 - x) = 9 - 6x + x^2$; $x^2 + 3x - 54 = 0$;
$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+54\cdot 4}}{2} = \frac{-3\pm 15}{2}$;
$x_1 = 6$, $x_2 = -9$; $3 - x > 0$, $3 - x \neq 1$ следовательно, $7 - x > 0$, $x = -9$.
Ответ: $x = -9$.

№ 1424

1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; $2\cos 2x + \cos x + \cos 2x = 0$;
$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2l\pi,\ l\in Z\end{array}\right.$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}, n\in Z$; $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2l\pi, l\in Z$.

2) $\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x$; $\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = -\cos x + \sin 2x$;

$\cos^3 x - 3\cos^2 x + 2\cos x - \sin 2x = 0$; $\cos x(\cos^2 x - 3\cos x + 2 - 2\sin x) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 1-\sin^2 x - 3\cos x + 2 - 2\sin x = 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\\ 3 - 3\cos x - \sin^2 x - 2\sin x = 0\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\\ x = 2\pi l,\ l\in Z\end{array}\right.$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2}+n\pi, n\in Z$; $x = 2\pi l, l\in Z$.

3) $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$; $\cos^2 3x - \cos^2 x = 0$;
$\left[\begin{array}{l}\cos 3x - \cos x = 0\\ \cos 3x + \cos x = 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}-2\sin 2x\cdot\sin x = 0\\ 2\cos 2x\cdot\cos x = 0\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z \\ x=m\pi,\ m\in Z \\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ l\in Z \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z \end{array}\right.$$. Ответ: $x=\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$.

4) $\mathrm{ctg}x+\sin 2x=\mathrm{ctg}3x$; $\mathrm{ctg}3x-\mathrm{ctg}x-\sin 2x=0$; $\frac{-\sin 2x}{\sin 3x\cdot\sin x}-\sin 2x=0$;

$\begin{cases}\sin 2x(1+\sin 3x\cdot\sin x)=0\\ \sin 3x\cdot\sin x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x-\cos 4x=-2;\end{array}\right.\\ \sin 3x\cdot\sin x\neq 0\end{cases}$ $x=\frac{\pi}{2}+m\pi,\ m\in Z$.

№ 1425

1) $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\mathrm{tg}x}$

$\begin{cases}\sin x+\cos x\geq 0\\ 1+\mathrm{tg}x\geq 0\\ (\sin x+\cos x)^2=\frac{(\cos x+\sin x)}{\cos x}\end{cases}$; $(\sin x+\cos x)^2-\frac{(\cos x+\sin x)}{\cos x}=0$;

$\begin{cases}(\sin x+\cos x)(\cos x(\sin x+\cos x)-1)=0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos x\cdot\sin x+\cos^2 x-1=0\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{4}\pi+n\pi,\ n\in Z\\ \sin x(\cos x-\sin x)=0\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{4}\pi+n\pi,\ n\in Z\\ x=m\pi, m\in Z\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2},\ m\in Z\\ x=n\pi,\ n\in Z\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\\ \sin x+\cos x\geq 0\\ 1+tgx\geq 0\end{cases}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}$; $x=n\pi$, $m, n\in Z$.

2) $\sqrt{5\sin 2x-2}=\sin x-\cos x$; $\begin{cases}\sin x-\cos x\geq 0\\ 5\sin 2x-2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\end{cases}$;

$5\sin 2x-2=1-\sin 2x$; $6\sin 2x=3$; $\sin 2x=\frac{1}{2}$;

$\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ \sin x-\cos x\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z\\ x\in\left[\frac{\pi}{4}+2l\pi;\ \frac{5}{4}\pi+2l\pi\right],\ l\in Z\end{cases}$;

№ 1426

$$\frac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}-\frac{1}{3}=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\quad \frac{2\sin x}{+2\sin 2x\sin x}-\frac{1}{3}=4\cdot\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2};$$

$\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{3}=2\cdot(1+\sin 2x)$; $\frac{3-\sin 2x}{3\sin 2x}-\frac{3(2+2\sin 2x)\sin 2x}{3\sin 2x}=0$; $\sin 2x\neq 0$;

$\sin x\neq 0$; $3-\sin 2x-6\sin 2x-6\sin^2 2x=0$; $6\sin^2 2x+7\sin 2x-3=0$; $\sin 2x=t$; $6t^2+7t-3=0$;

$D=49+72=121$; $t_1=\frac{-7+11}{12}=\frac{1}{3}$; $t_1=\frac{-7-11}{12}=-\frac{3}{2}<-1$;

$\sin 2x=\frac{1}{3}$; $2x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$; $x=\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

№ 1427

$\begin{cases}\cos x+(1+\cos x)tg^2x=0\\ tgx>0\end{cases}$; $\cos x+(1+\cos x)\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)-1=0$;

$\cos x+\frac{(1+\cos x)(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}-1=0$; $\cos x\neq 0$; $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$;

$\cos^3 x+1-\cos^2 x+\cos x-\cos^3 x-\cos^2 x=0$; $2\cos^2 x-\cos x-1=0$; $\cos x=t$; $2t^2-t-1=0$;

$D=1+8=9$; $t=\frac{1+3}{4}=1$; $t=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$;

$\cos x=1\Rightarrow\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=0$; $tgx=0$ – не подходит.

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow tgx<0$ – не подходит.

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tgx>0$; $x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

№ 1428

$\begin{cases}\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{25\pi}{6}\\ \lg\left(x-\sqrt{2x+24}\right)>0\end{cases}$; $\lg(x-\sqrt{2x+24})>0=\lg 1$

$x-\sqrt{2x+24}>0$; $x>-12$; $x-1>\sqrt{2x+24}$; $x>1$; $x^2-2x+1>2x+24$;

$x^2-4x-23>0$; $D/4=4+23=27$; $x_1=2+3\sqrt{3}$; $x_2=2-3\sqrt{3}$; $x>2+3\sqrt{3}$;

$\sin^4 x+\left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\pi}{6}$; $4\sin^4 x+(1+\sin 2x)^2=4\frac{1}{4}$;

$4\sin^4 x+1+2\sin 2x+\sin 2x=1$; $4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+2\sin 2x+\sin^2 2x=0$;

$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 0$; $2 + 2\sin 2x - 2\cos 2x = 0$;

$1 + \sin 2x - \cos 2x = 0$; $1+\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x=2n\pi,\ n\in Z \\ 2x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x=n\pi,\ n\in Z \\ x=\frac{3\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=n\pi,\ n\geq 3 \\ x=\frac{3\pi}{4}+n\pi,\ n\geq 2 \end{array}\right.$.

№ 1429

$\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin x\cdot\cos 2x=0$; $-\sin 5x+\sin 3x-\sin x=0$;

$\sin 3x-(2\sin 3x\cos 2x)=0$; $\sin 3x(1-2\cos 2x)=0$; $\sin 3x=0$; $3x=\pi n$; $x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

Самое большое значение x на $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ из этой серии $x=\frac{\pi}{3}$

$\cos 2x=\frac{1}{2}$; $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Самое большое значение x на $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ из этой серии $x=\frac{\pi}{6}$

В итоге самое большое $x=\frac{\pi}{3}$.

№ 1430

$\sin^8 x+\cos^8 x=a$; $(\sin^4 x-\cos^4 x)^2+2\sin^4 x\cos^4 x=a$; $(\cos^4 x-\sin^4 x)^2+\frac{1}{8}\sin^4 2x=a$;

$\cos^4 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x=a$; $1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x=a$; $\sin^4 2x-8\sin^2 2x+(8-8a)=0$;

$(\sin^2 2x-4)^2=8+8a$; $\sin^2 2x-4=\pm\sqrt{8+8a}$;

$\sin^2 2x=4\pm\sqrt{8+8a}$; $0\leq 4\pm\sqrt{8+8a}\leq 1$; $0\leq 4+\sqrt{8+8a}\leq 1$ – невыполнимо;

$0\leq 4-\sqrt{8+8a}\leq 1$; $3\leq\sqrt{8+8a}\leq 4$; $a\in\left[\frac{1}{8};1\right]$

Итак, при $a\in\left[\frac{1}{8};1\right]$: $\sin^2 2x=4-\sqrt{8+8a}$;

$\sin 2x=\pm\sqrt{4-2\sqrt{2(1+a)}}$; $x=(-1)^n(\pm\arcsin\sqrt{4-2\sqrt{2(1+a)}}+\pi n,\ n\in Z$;

$x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{4-1\sqrt{2(1+a)}}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

№ 1431

1) $\begin{cases} x-3y=-5;\ y\neq 0;\ x\neq 0 \\ \dfrac{x}{3y}-\dfrac{2y}{x}=-\dfrac{23}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x=3y-5 \\ \dfrac{3y-5}{3y}-\dfrac{2y}{3y-5}=-\dfrac{23}{6} \end{cases}$;

$6\left((3y-5)^2-6y^2\right)+23\cdot 3y(3y-5)=0$; $6(9y^2-30y+25-6y^2)+207y^2-345y=0$;
$18y^2-180y+150+207y^2-345y=0$; $225y^2-525y+150=0$; $9y^2-21y+6=0$;

$3y^2-7y+2=0$; $y_{1/2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}$; $y_1=2$, $y_2=\dfrac{1}{3}$, $x_1=1$, $x_2=-4$.

Ответ: (1; 2), (–4; $\frac{1}{3}$).

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3};\ x\neq\pm y \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=\dfrac{10}{3} \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$;

$\begin{cases} \dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{10}{3} \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{10}{x^2-y^2}=\dfrac{10}{3} \\ x^2=5-y^2 \end{cases}$; $\dfrac{10}{5-2y^2}=\dfrac{10}{3}$; $30=50-20y^2$; $y=\pm1$; $x=\pm2$.

№ 1432

1) $\begin{cases} 6^x-2\cdot 3^y=12 \\ 6^x\cdot 3^y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} 6^x=2+2\cdot 3^y \\ 6^x\cdot 3^y=12 \end{cases}$; $(2+2\cdot 3^y)\,3^y=12$; $2\cdot 3^y+2\cdot 3^{2y}=12$;
$3^y+3^{2y}=6$; $3^y=a>0$; $a^2+a-6=0$, $a_1=-3$, $a_2=2$, тогда $3^y=2$, $y=\log_3 2$;
$6^x=2+2\cdot 2$, т.е. $x=1$. Ответ: $(1, \log_3 2)$

2) $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2 \\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93 \end{cases}$; $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2 \\ 6\cdot 2^x-5y=93 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x=\dfrac{2-6y}{7} \\ \dfrac{6(2-6y)}{7}-5y=93 \end{cases}$;

$6(2-6y)-35y=651$; $12-36y-35y=651$; $-71y=639$; $y=-9$; $2^x=8$, $x=3$.
Ответ: (3; –9).

№ 1433

$\begin{cases} 27\cdot 3^{2x-y}+3^{x^2}=4\sqrt{3} \\ \lg(y-4x)=2\lg(2+2x-y)-\lg y \end{cases}$.

Очевидно, что $\begin{cases} y-4x>0 \\ 2+2x-y>0 \\ y>0 \end{cases}$; $\lg\dfrac{y-4x}{2+2x-y}=\lg\dfrac{2+2x-y}{y}$;

$\dfrac{y-4x}{2+2x-y}=\dfrac{2+2x-y}{y}$; $\begin{cases} y^2-4xy-(2+2x-y)^y=0 \\ y\neq 0 \\ 2+2x-y\neq 0 \end{cases}$;

$y^2–4xy–(4+8x+4x^2–2y(2+2x)+y^2)=0$; $y^2–4xy–4 – 8x – 4x^2 – 4y + 4xy – y^2 = 0$;
$– 4x^2 – 8x + 4y – 4 = 0$; $x^2 + 2x – y + 1 = 0$;

$y = (x + 1)^2$, подставим в первое уравнение исходной системы:

$27 \cdot 3^{2x-x^2-2x-1} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}$; $3^3 \cdot 3^{-x^2-1} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}$;

$3^{2-x^2} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}$; $3^{x^2} = a > 0$; $\frac{9}{a} + a = 4\sqrt{3}$; $9 + a^2 = 4\sqrt{3}\ a$;

$a^2 - 4\sqrt{3}\ a + 9 = 0$; $a_{1/2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-9}}{1} = 2\sqrt{3 \pm \sqrt{3}}$;

$a_1 = 3\sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3}$, тогда

1) $3^{x^2} = 3^{3/2}$; $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; $y_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{6} + 1$; $y_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{6} + 1$; $y_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{6} + 1$;

2) $3^{x^2} = 3^{1/2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; $y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1$; $y_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1$;

$$\begin{cases} y - 4x > 0 \\ 2 + 2x - y > 0 \\ y > 0 \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}},\ y = \frac{5}{2} + \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ y = \frac{5}{2} - \sqrt{6} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}\right)$.

2) $\begin{cases} 8 \cdot 2^{-x-2y} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2} \\ \lg(x+4y) = 2\lg(2-x-2y) - \lg x \end{cases}$;

Очевидно, что $\begin{cases} x + 4y > 0 \\ 2 - x - 2y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$;

$\lg(x + 4y) = 2\lg(2 – x – 2y) – \lg x$; $\frac{x+4y}{2-x-2y} = \frac{2-x-2y}{x}$;

$x(x+4y)=(2–x–2y)^2$; $x^2+4xy–(4–4x+x^2–4y(2–x)+4y^2)=0$;

x^2+4xy–4+4x–x^2+8y–4xy–4y^2=0; – 4+4x+8y–4y^2=0; – 1 + x + 2y – y^2 = 0;

$x = (y-1)^2$, подставим в первое уравнение исходной системы:

$8\cdot 2^{-(y-1)^2}+2^{y^2}=3\sqrt{2}$; $8\cdot 2^{3-y^2+2y-1-2y}+2^{y^2}=3\sqrt{2}$;

$2^2\cdot 2^{-y^2}+2^{y^2}=3\sqrt{2}$; $2^{y^2}=a>0$;

$\frac{4}{a}+a^2=3\sqrt{2}$; $4+a^2=3\sqrt{2}\,a$; $a^2-3\sqrt{2}\,a+4=0$;

$$a_{1/2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-16}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{2}.$$

1) $a_1=2\sqrt{2}$, тогда $2^{y^2}=2^{3/2}$; $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}+1$.

2) $a_2=\sqrt{2}$, тогда $2^{y^2}=2^{1/2}$; $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}+1$;

$$\begin{cases} x+4y>0\\ 2-x-2y>0\\ x>0\\ \left(\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}+1;\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\ \left(\frac{3}{2}\pm\sqrt{2};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}.\quad \text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}\pm\sqrt{2};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

№ 1434

$$\begin{cases}\log_3(y-3)-2\log_9 x=0\\ (x+a)^2-2y-5a=0\end{cases};\ y>3;\ x>0;\ \begin{cases}y-3=x\Rightarrow y=x+3\\ x^2+2ax+a^2-2x-6-5a=0\end{cases}.$$

Хотя бы одно решение D ≥ 0. $x^2+(2a-2)x+a^2-5a-6=0$;

$D/4=(a-1)^2-a^2+5a+6=a^2-2a+1-a^2+5a+6=3a+7$; $3a+7\ge 0$; $a\ge-\frac{7}{3}$;

$D=0$, $x=1-a=1+\frac{7}{3}>0$; $D>0$, $x_1=1-a+\sqrt{3a+7}>0$.

См. в конце.

$x_2=1-a-\sqrt{3a+7}>0$; $1-a=\sqrt{3a+7}$, $1-a>0$, $a<1$

$1-2a+a^2>3a+7$, $a^2-5a-6>0$;

$$\begin{cases}a<-1 \text{ и } a>6\\ a<1\\ a<-\frac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow -\frac{7}{3}<a<-1,\ x_1=1-a+\sqrt{3a+7}>0;\ \sqrt{3a+7}>1-a$$

1) $a-1<0$; $a<1$, $\begin{cases}a<1\\ a>-\frac{7}{3}\end{cases}$, $-\frac{7}{3}<a<1$

2) $a-1\ge 0$; $a\ge 1$; $3a+7>a^2-2a+1$; $a^2-5a-6<0$;

$\begin{cases}-1<a<6\\ a<-\dfrac{7}{3}\\ a\ge 1\end{cases}\Rightarrow 1\ge a<6$; $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{7}{3}<a\ge 1\\ 1<a<6\end{array}\right.$; $-\dfrac{7}{3}<a<6$,

одновременно x_1 и $x_2>0$, $\begin{cases}-\dfrac{7}{3}<a<6\\ -\dfrac{7}{3}<a<-1\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{7}{3}<a<-1$.

№ 1435

1) $\dfrac{2x-3}{4-x}>\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{2x^2-3x-4+x}{x(4-x)}>0$;

$\dfrac{2x^2-2x-4}{x(4-x)}>0$; $\dfrac{x^2-x-2}{x(x-4)}<0$; $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x(x-4)}<0$.

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(2;4)$.

2) $\dfrac{2x+5}{|x+1|}\ge 1$; 1. $x>-1$; $\dfrac{2x+5-x-1}{(x+1)}\ge 0$; $\dfrac{x+4}{x+1}\ge 0$; $x\in(-1;+\infty)$.

2. $x<-1$; $\dfrac{2x+5}{-x-1}\ge 1$; $\dfrac{2x+5}{x+1}\le -1$; $\dfrac{2x+5+x+1}{x+1}\le 0$;

$\dfrac{3x+6}{x+1}\le 0$; $\dfrac{x+2}{x+1}\le 0$; $x\in[-2;-1)$. Ответ: $x\in[-2;-1)\cup(-1;+\infty)$.

№ 1436

1) $\dfrac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}\le a$; $\dfrac{8x^2-4x+3-4x^2a+2ax-a}{4x^2-2x+1}\le 0$;

$\dfrac{8x^2-4ax^3-4x+2ax+3-a}{4x^2-2x+1}\le 0$; $\dfrac{x^2(8-4a)-x(4-2a)+(3-a)}{4x^2-2x+1}\le 0$;

$4x^2-2x+1<0$ при любых x; найдем значения a, для которых $x^2(8-4a)-x(4-2a)+$ $+(3-a)\le 0$ при любых x: $8-4a<0$, т.е. $a>2$ и $D=(4-2a)^2-4(3-a)(8-4a)\le 0$;

$16-16a+4a^2-4(24-12a-8a+4a^2)=-12a^2+64a-80$;

$12a^2-64a+80\ge 0$; $6a^2-32a+40\ge 0$; $3a^2-16a+20\ge 0$; $a\in(-\infty;2]\cup[10/3;+\infty)$.

Таким образом $x^2(8-4a)-x(4-2a)+(3-a)\le 0$ при $a\ge\dfrac{10}{3}$.

2) $\dfrac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}\ge a$; $\dfrac{3x^2-4x+8-9ax^2+12ax-16a}{9x^2-12x+16}\ge 0$;

$9x^2-16x+16>0$ при любых x; найдем значения a, для которых $3x^2-9ax$ $+12ax-4x+8-16a\ge 0$ независимо от x. $x^2(3-9a)+x(12a-4)+(8-16a)\ge 0$:

$3-9a\ge 0$, т.е. $a\le\dfrac{1}{3}$, $D=(6a-2)^2-(8-16a)(3-9a)\le 0$;

$36a^2 - 48a + 4 - (24 - 72a - 48a + 144a^2) = -108a^2 + 72a - 20;$

$-108a^2 + 72a - 20 \le 0$; $27a^2 - 18a + 5 \ge 0$ (1); $a_{1/2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-135}}{27}$;

D < 0 $\Rightarrow$ неравенство (1) выполнено при любом a, таким образом $a \le \dfrac{1}{3}$.

№ 1437

1) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6} < 1$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6} < \left(\dfrac{2}{5}\right)^0$

$x^2 - 5x + 6 > 0$; $(x-2)(x-3) > 0$; $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

2) $5^x - 3^{x+1} > 2(5^x - 3^{x+1})$; $5^x - 3 \cdot 3^x > \dfrac{2}{5} \cdot 5^x - \dfrac{2}{9} \cdot 3^x$; $\dfrac{3}{5} \cdot 5^x - 2\dfrac{7}{9} \cdot 3^x > 0$;

$\dfrac{3}{5} \cdot 5^x - \dfrac{25}{9} \cdot 3^x > 0$; $27 \cdot 5^x - 125 \cdot 3^x > 0$; $3^3 \cdot 5^x - 5^3 \cdot 3^x > 0$; $3^3 \cdot 5^x > 5^3 \cdot 3^x$; $x > 3$.

№ 1438

1) $\log_{1/2}(1 + x - \sqrt{x^2-4}) \le 0$

$$\begin{cases} \log_{1/2}\left(1 + x - \sqrt{x^2-4}\right) \le \log_{1/2} 1 & (1) \\ 1 + x - \sqrt{x^2-4} > 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $1 + x - \sqrt{x^2-4} \ge 0$; $\begin{cases} x \ge \sqrt{x^2-4} \\ x \ge 0,\ x^2 - 4 \ge 0 \end{cases}$; $x^2 \ge x^2 - 4$; $\begin{cases} 0 \ge -4 \\ x \ge 2 \end{cases}$; $x \ge 2$.

(2) $1 + x - \sqrt{x^2-4} > 0$; $1 + x > \sqrt{x^2-4}$;

$\begin{cases} 1 + x > 0 \\ x^2 - 4 \ge 0 \\ 1 + 2x + x^2 > x^2 - 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x > -1 \\ x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \\ x > -2{,}5 \end{cases}$; $x \ge 2$. $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge 2 \end{cases}$; $x \ge 2$.

2) $\dfrac{1}{\log_5(3-2x)} - \dfrac{1}{4 - \log_5(3-2x)} < 0$;

$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ \log_5(3-2x) \ne 0 \\ 4 - \log_5(3-2x) \ne 0 \end{cases}$ – область определения; $\log_5(3 - 2x) = a$

$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{4-a} < 0$; $\dfrac{4-a-a}{4-a} < 0$; $\dfrac{2-a}{4-a} < 0$;

$2 < \log_5(3-2x) < 4$; $\log_5 5^2 < \log_5(3-2x) < \log_5 5^4$; $25 < 3 - 2x < 4^4$; $11 < -x < 311$;

$\begin{cases} -11x > x > -311 \\ 3 - 2x > 0 \\ \log_5(3-2x) \ne 0 \\ 4 - \log_5(3-2x) \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -311 < x < -11 \\ x < \dfrac{3}{2} \\ x \ne 1 \\ x \ne -311 \end{cases}$; $-311 < x < -11$.

№ 1439

1) $\log_{|2x+1|}x^2 \ge 2$; $\log_{|2x+1|}x^2 \ge 1)\ \log_{|2x+1|}|2x+1|^2$

1. $|2x+1| > 1$, т.е. $x \in (-\infty; -1)$ U $(0; +\infty)$; $x_2 \ge (2x+1)^2$

$x_2 \ge 4x^2 + 4x + 1$; $3x^2 + 4x + 1 \le 0$; $(x+1)(x+\frac{1}{3}) \le 0$. $x \in [-1; -\frac{1}{3}]$.

2. $|2x+1| < 1$, т.е. $x \in (-1; 0)$; $x_2 \le 4x^2 + 4x + 1$; $x \in (-\infty; -1)$ U $(-\frac{1}{3}; +\infty)$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \\ x \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1; 0) \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases} \end{array}\right.$$. Ответ: $x \in [-\frac{1}{3}; 0]$.

2) $\log_{x^2}|3x+1| < \frac{1}{2}$; $\log_{x^2}|3x+1| < \log_{x^2}|x|$

1. $x^2 > 1$, $x \in (-\infty; -1)$ U $(1; +\infty)$; $|3x+1| < |x|$

а) $x \ge 0$, $3x + 1 < x$, $x < -\frac{1}{2}$; $x \in \varnothing$

б) $-\frac{1}{3} \le x < 0$, $3x + 1 < -x$, $x < -\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3} \le x < -\frac{1}{4}$

в) $x < -\frac{1}{3}$, $-3x - 1 < -x$, $x > -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$. $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

2. $x^2 < 1$, $x \in (-1; 1)$; $|3x+1| > |x|$

а) $x \ge 0$, $3x + 1 > x$, $x > -\frac{1}{2}$; $x \ge 0$;

б) $-\frac{1}{3} \le x < 0$, $3x + 1 > -x$, $x > -\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4} < x < 0$;

в) $x < -\frac{1}{3}$, $-3x - 1 > -x$, $x < -\frac{1}{2}$; $x < -\frac{1}{2}$; $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)U\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Решением исходного неравенства является система:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \\ x \in (-1; 1) \end{cases} \end{array}\right.$$.

Кроме того по определению логарифма $x \ne 0$, $x \ne -\frac{1}{3}$, тогда

$x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)U\left(-\frac{1}{4}; 0\right)U(0; 1)$. Ответ: $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)U\left(-\frac{1}{4}; 0\right)U(0; 1)$.

№ 1440

$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3}<0$; $\begin{cases}x^2+3x-4\ge 0\\ x-3\ne 0\end{cases}$ – область определения;

$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}+x-3}{x-3}<0$; $\frac{4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3}<0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}<0\\ x-3>0\end{cases}\\ \begin{cases}4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}>0\\ x-3<0\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases}4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}<0\\ x-3>0\end{cases}$; $\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3x-4}<2x-4\\ 2x-4>0\\ x-3>0\end{array}$;

$\begin{cases}x^2+3x-4<4x^2-16x+16\\ x>2\\ x>3\end{cases}$; $3x^2-19x+20>0$;

$x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\text{U}(5;+\infty)$; $\begin{cases}x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup(5;+\infty)\\ x>3\end{cases}$; $x\in(5;+\infty)$.

2) $\begin{cases}4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}>0\\ x-3<0\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-4}>2x-4\\ x<3\end{cases}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\in\left(\frac{4}{3};5\right)\\ x\in(-\infty;2)\end{array}\right.\\ x<3\end{cases}$; $x\in(-\infty;3)$; $\begin{cases}x^2+3x-4\ge 0\\ x-3\ne 0\\ \left[\begin{array}{l}x\in(5;+\infty)\\ x\in(-\infty;3)\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}x\in(-\infty;-4]\cup[1;+\infty)\\ x-3\ne 0\\ x\in(-\infty;3)\cup[5;+\infty)\end{cases}$.

Ответ: $(-\infty;-4]$ U $[1;3)$ U $(5;+\infty)$.

№ 1441

$\log_{1/2}(x^2+ax+1)<1$, $x<0$; $\log_{1/2}(x^2+ax+1)<\log_{1/2}1/2$;

$x^2+ax+1>½$; $x^2+ax+1/2>0$; $2x^2+2ax+1>0$.

Для любых $x<0$ неравенство выполняется в двух случаях:

1) $D=a^2-2<0$, т.е. $a\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

2) $\begin{cases}x_1>0\\ x_2>0\end{cases}$ т.е. $\begin{cases}-a+\sqrt{a^2-2}>0\\ -a-\sqrt{a^2-2}>0\end{cases}$

а) $\sqrt{a^2-2} > a$, $\begin{cases} a^2-2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a^2-2 > a^2 \\ a < 0 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right) \\ \left[\begin{array}{l} a \in \varnothing \\ a < 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$a \in (-\infty; -\sqrt{2}\,]$

б) $-\sqrt{a^2-2} > a$, $\sqrt{a^2-2} < -a$

$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right) \\ -a > 0 \\ a^2-2 < a^2 \end{cases}$ $a \in (-\infty; -\sqrt{2}\,]$

Таким образом, ответом на вопрос задачи является система

$\left[\begin{array}{l} a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \\ a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \end{array}\right.$. Ответ: $a \in (-\infty; -\sqrt{2}\,]$.

№ 1442

$y=(x-1)^2$, $0 \leq x \leq 1$; $y=x^2-2x+1$; $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

$y=(2x_0-2)(x-x_0)+x_0^2-2x_0+1$; $y = 2xx_0 - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 + x_0^2 - 2x_0 + 1$;

$y = 2xx_0 - 2x - 2x_0^2 + 1$; $y = x(2x_0 - 2) + (1 - 2x_0^2)$.

Точки пересечения касательной с осями: $x = 0$, $y = 1 - 2x_0^2$

$y = 0$, $x = \dfrac{2x_0^2-1}{2x_0-2}$, тогда площадь треугольника,

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_0^2-1}{2x_0-2} \cdot \frac{1-2x_0^2}{1} = \frac{\left(2x_0^2-1\right)^2}{2(2-2x_0)}; \; S(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_0^2-1}{2x_0-2} \cdot \frac{1-2x_0^2}{1} = \frac{\left(2x_0^2-1\right)^2}{2(2-2x_0)};$$

$$S'(x_0) = \left(\frac{\left(2x_0^2-1\right)^2}{4-4x_0}\right)' = \frac{2\left(2x_0^2-1\right) \cdot 4x_0 + 4\left(2x_0^2-1\right)^2}{(4-4x_0)^2} =$$

$$= \frac{\left(4x_0^2-2\right) \cdot 4x_0 + 4\left(4x_0^4-4x_0^2-1\right)}{(4-4x_0)^2}.$$

Минимум данной функции $S'(x_0)$ в точке $x_0 = \dfrac{1}{3}$, $y_0 = \dfrac{4}{9}$. Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{9}\right)$.

№ 1443

Уравнение касательной в точке x_0 выглядит $y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$. Она прямая. Из этого следует, что для любой касательной, проходящей через центр $y(x_0) - y'(x_0)x_0 = 0$, $(y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = kx + b)$

$y(x_0) = 2x_0^2 - 3x_0 + 8$, $y'(x_0) = 4x_0 - 3 \Rightarrow 2x_0^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm 2$

Легко проверить, что в этих точках касательная проходит через центр.

№ 1444

$y = x^2 + 2x - 3$, $y = kx + 1$. Ошибка в условии.

№ 1445

$y = x^2 + px + q$, $y = 2x - 3$; $x = 1$.

Найдем точки пересечения: $y = 1 \cdot 2 - 3 = -1$, тогда для p и q справедливо $-1 = 1 + p + q$, т.е. $p + q = -2$ (использовали уравнение $y = x^2 + px + q$)

Вершины параболы имеют координаты $\left(-\frac{p}{2}, \left(\frac{-p}{2}\right)^2 \frac{-p^2}{2} + q\right)$, т.е. расстояние до оси O_x равно $|y_0| = \left|\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{2} + q\right| = \left|\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q\right| = \left|-\frac{p^2}{4} - 2 - p\right|$

$y_0' = -\frac{p}{2} - 1 = \frac{-p-2}{2}$, очевидно $p = -2$ точка минимума, тогда $q = 0$, а кратчайшее расстояние равно 1.

№ 1446

$y = 4x - x^2$, $M\left(\frac{5}{2}; 6\right)$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$y'=4-2x$, тогда уравнение касательной имеет вид: $y=(4-2x_0)(x-x_0)+4x_0- x_0^2$;

$y = 4x - 4x_0 - 2xx_0 + 2x_0^2 + 4x_0 - x_0^2$; $y = x_0^2 - 2xx_0 + 4x$.

Известно, что эта касательная проходит через точку M, тогда

$6 = x_0^2 - 5x_0 + 10$; $x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0$;

$x_0 = 1$, $x_0 = 4$, т.е. получим уравнения касательных $y=1 + 2x$ и $y = 16 - 4x$;

Касательные пересекаются в точке с абсциссой $\frac{15}{6}$, тогда искомая площадь

$$S = \int_1^{15/6}(1+2x)dx + \int_{15/6}^4(16-4x)dx - \int_1^4(4x - x^2)dx =$$

$$= \left(x + x^2\right)\Big|_1^{15/6} + \left(16x - 2x^2\right)\Big|_{15/6}^4 - \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 = 2{,}25$$

№ 1447

$y = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$

Перепишем данную функцию в виде $y = 6(1 - \sin^2 x) + 6\sin x - 2$, $y = -6\sin^2 x + 6\sin x + 4$, положим $y' = -12\sin x\cos x + 6\cos x = 0$, $6\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ – точки max $\Rightarrow$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

№ 1448

$y = x^2 + (a + 4)x + 2a + 3$, $x \in [0; 2]$; $y_{\min} = -4$; $y' = 2x + a + 4$;

$y' = 0$, $2x + a + 4 = 0$, $x = \dfrac{-a-4}{2}$.

Ветви параболы направлены вверх, т.е. $x = \dfrac{-a-4}{2}$ – точка минимума.

Рассмотрим три случая. 1) вершина параболы лежит правее $x = 2$, тогда минимальное на отрезке [0; 2] значение она принимает в точке $x = 2$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{-a-4}{2} \ge 2 \\ -4 = 4 + (a+4)\cdot 2 + 2a + 3 \end{cases} \text{ – решений нет}$$

2) вершина параболы лежит внутри отрезка [0; 2]:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{-a-4}{2} < 2 \\ -4 = \left(\dfrac{-a-4}{2}\right)^2 + \dfrac{(a+4)(-a-4)}{2} + 2a + 3 \end{cases} \text{ – решений нет}$$

3) вершина параболы лежит левее $x = 0$; $\begin{cases} \dfrac{-a-4}{2} \le 0 \\ -4 = 2a + 3 \end{cases}$ $a = -3{,}5$.

№ 1449

$y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2 < x \in [0; 2]$; $y_{\min} = 3$. Ветви параболы направлены вверх. $y' = 8x - 4a$; $y' = 0$; $8x - 4a = 0$, $x = \dfrac{a}{2}$

1) $\begin{cases} \dfrac{a}{2} \ge 2 \\ 3 = 16 - 8a + a^2 - 2a + 2 \end{cases}$ $a = 5 + \sqrt{10}$

2) $\begin{cases} 0 < \dfrac{a}{2} < 2 \\ 3 = 4\cdot\dfrac{a^2}{4} - 4\cdot a\cdot\dfrac{a}{2} + a^2 - 2a + 2 \end{cases}$ – решений нет

3) $\begin{cases} \dfrac{a}{2} \le 0 \\ 3 = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$ $a = 1 - \sqrt{2}$

Рассмотрели три случая: в первом – вершина лежит правее $x = 2$, т.е. минимальное значение на [0; 2] данная функция принимает в точке $x = 2$; во втором – вершина лежит внутри [0; 2], т.е. минимальное значение – в точке $x = \dfrac{a}{2}$; в третьем случае – вершина лежит левее точки $x = 0$, т.е. минимальное значение на отрезке [0; 2] данная функция принимает в точке $x = 0$.

Ответ: $a = 5 + \sqrt{10}$; $a = 1 - \sqrt{2}$.

№ 1450

$y = 4x^2 + 8ax - 9$, $y = 4ax^2 + 8x + a - 2$; $y = -5$.

Найдем ординаты вершин парабол:

$y_1 = 4(-a)^2 + 8a(-a) - 9 = -4a^2 - 9$;

$$y_2 = 4a\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{a}\right) + a - 2 = \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + a - 2 = -\frac{4}{a} + a - 2.$$

Возможны два случая:

1) $\begin{cases} -4a^2 - 9 > -5 \\ -\frac{4}{a} + a - 2 > -5 \end{cases}$; $\begin{cases} 4a^2 < -4 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2 < -1 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 > 0 \end{cases}$ – чего не может быть ни при каких a

2) $\begin{cases} -4a^2 - 9 < -5 \\ -\frac{4}{a} + a - 2 < -5 \end{cases}$; $\begin{cases} 4a^2 > -4 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2 > -1 \\ -\frac{4}{a} + a + 3 < 0 \end{cases}$ – это при любых a

Рассмотрим два случая

1) $a > 0$, $-\frac{4}{a} + a + 3 < 0$; $-4 + a^2 + 3a < 0$; $a^2 + 3a - 4 < 0$

$a \in (-4; 1)$ и $a > 0$, следовательно, $0 < a < 1$; $a < 0$.

2) $-4 + a^2 + 3a > 0$; $a^2 + 3a - 4 > 0$; $a < -4$ и $a > 1$, но $a < 0$; $a < -4$.

Ответ: $a < -4$, $0 < a < 1$.

№ 1451

$$y = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x};\ y' = \frac{\left(2\cos^4 x + \sin^2 x\right)'\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)}{\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(2\cos^4 x + \sin^2 x\right)\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)'}{\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-8\cos^3 x \cdot \sin x + 2\sin x \cdot \cos x\right)\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)}{\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(2\cos^4 x + \sin^2 x\right)\left(8\sin^3 x\cos x - 6\cos x \cdot \sin x\right)}{\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right)^2}$$

Знаменатель дробей не влияет на исследование функции y, т.к. не может обращаться в 0 и не может быть отрицательным.

$\left(-8\cos^3 x \cdot \sin x + 2\sin x \cdot \cos x\right)\left(2\sin^4 x + 3\cos^2 x\right) -$

$- \left(2\cos^4 x + \sin^2 x\right)\left(8\sin^3 x \cdot \cos x - 6\cos x \cdot \sin x\right) =$

$= \sin x \cdot \cos x(2 - 8\cos^2 x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) - \cos x \cdot \sin x(8\sin^2 x - 6)(2\cos^4 x + 3\sin^2 x) =$

$= \sin 2x(1 - 4\cos^2 x)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) - \sin 2x(4\sin^2 x - 3)(2\sin^4 x + 3\cos^2 x) =$

$= \sin 2x(2\sin^4 x + 3\cos^2 x - 8\sin^4 x \cdot \cos^2 x - 12\cos^4 x - 8\sin^2 x \cdot \cos^4 x - 4\sin^4 x + 6\cos^4 x + 3\sin^2 x) =$

$= \sin 2x(-2\sin^4 x - 6\cos^4 x + 3 - 8\sin^2 x \cdot \cos^4 x - 8\sin^4 x \cdot \cos^2 x) = \sin 2x(-2\sin^4 x - 6\cos^4 x + 3 -$

$- 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x))^2 = \sin 2x(-2\sin^4 x - 6\cos^4 x + 3 - 2\sin^2 x)$

Отсюда получаем максимальное значение $\frac{2}{3}$ и минимальное значение $\frac{7}{15}$.