Домашняя работа по алгебре за 10 класс к учебнику «Алгебра и начала анализа 10-11 класс»

Алимов Ш.А. и др.,

-М.: «Просвещение», 2001 г.

Содержание

Глава I. Действительные числа

1. 1) Воспользуемся алгоритмом деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -2{,}0 & 3 \\ \cline{2-2} 18 & 0{,}66 \\ \hline -20\ldots & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же цифра: 6. Следовательно, $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots=0,(6)$.

2) Воспользуемся алгоритмом деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -8{,}0 & 3 \\ \cline{2-2} 77 & 0{,}66 \\ \hline -30 & \\ 22 & \\ \hline \ldots & \\ \hline -30\ldots & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 72. Следовательно, $\frac{8}{11}=0{,}7272\ldots=0,(72)$.

3) $\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{6}{10}=0{,}6$

4) $-\frac{3}{4}=-\frac{25\cdot 3}{25\cdot 4}=-\frac{75}{100}-0{,}75$

5) $-8\frac{2}{7}=-\frac{56+2}{7}=-\frac{58}{7}$

$$\begin{array}{r|l} -\,-58 & 7 \\ \cline{2-2} -56 & -8{,}2857142 \\ \hline -\,-20 & \\ -14 & \\ \hline \ldots & \\ \hline -6\ldots & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 285714. Следовательно, $-8\frac{2}{7}=-8{,}2857142\ldots=-8,(285714)$.

6)
$$\begin{array}{r|l} -13{,}0 & 99 \\ \cline{2-2} 99 & 0{,}131 \\ \hline -310 & \\ 297 & \\ \hline \ldots & \\ \hline 31\ldots & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 13. Следовательно, $\frac{13}{99}=0{,}1313\ldots=0,(13)$.

2. 1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}=\frac{2\cdot 9+1\cdot 11}{9\cdot 11}=\frac{18+11}{99}=\frac{29}{99}$.

$$\begin{array}{r|l} -29{,}0 & 99 \\ \cline{2-2} 198 & 0{,}292 \\ \hline -920 & \\ 891 & \\ \hline \ldots & \\ \hline 92\ldots & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 29. Следовательно, $\frac{29}{99}=0{,}2929\ldots=0,(29)$.

2) $\dfrac{8}{13}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8\cdot3+2\cdot13}{3\cdot13}=\dfrac{24+26}{39}=\dfrac{50}{39}$.

$$\begin{array}{r|l} -50 & 39 \\ \cline{2-2} 39 & 1{,}282051 \\ \hline -110 & \\ \ldots & \\ \hline 11 & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 282051. Следовательно, $\dfrac{50}{39}=$ $=1{,}2820512...=1{,}(282051)$.

3) $\dfrac{1}{3}+1{,}25=\dfrac{1}{3}+\dfrac{125}{100}=\dfrac{1\cdot100+3\cdot125}{3\cdot100}=\dfrac{100+375}{300}=\dfrac{475}{300}=\dfrac{19}{12}$.

$$\begin{array}{r|l} -19 & 12 \\ \cline{2-2} 12 & 1{,}583 \\ \hline -70 & \\ 60 & \\ \hline \ldots & \\ \hline 4... & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же цифра: 3. Следовательно, $\dfrac{19}{12}=$ $1{,}5833...=1{,}58(3)$.

4) $\dfrac{1}{6}+0{,}33=\dfrac{1}{6}+\dfrac{33}{100}=\dfrac{1\cdot50+33\cdot3}{3\cdot2\cdot50}=\dfrac{50+99}{300}=\dfrac{149}{300}$.

$$\begin{array}{r|l} -149{,}0 & 300 \\ \cline{2-2} 1200 & 0{,}4966 \\ \hline -2900 & \\ 2700 & \\ \hline \ldots & \\ \hline 200... & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же цифра: 6. Следовательно, $\dfrac{149}{300}=0{,}4966...=0{,}49(6)$

5) $\dfrac{3}{14}\cdot1{,}05=\dfrac{3}{2\cdot7}\cdot\dfrac{105}{100}=\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot3}{2\cdot7\cdot5\cdot5\cdot4}=\dfrac{9}{40}=\dfrac{9\cdot25}{40\cdot25}=\dfrac{225}{1000}=0{,}225$.

6) $\dfrac{7}{9}\cdot1{,}7=\dfrac{7\cdot17}{9\cdot10}=\dfrac{119}{90}$.

$$\begin{array}{r|l} -119 & 90 \\ \cline{2-2} 90 & 1{,}32 \\ \hline -290 & \\ 270 & \\ \hline \ldots & \\ \hline 20... & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же цифра: 2. Следовательно, $\dfrac{119}{90}=1{,}322...=1{,}3(2)$.

3. 1) 0,(6).

Пусть $x=0{,}(6)=0{,}66...$ (*1*)

Период этой дроби состоит из одной цифры. Поэтому, умножая обе части этого равенства на 10, находим

$10x=6{,}66...$ (*2*)

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $9x=6$.

Отсюда $x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

2) 1,(55).

Пусть $x=1,(55)=1{,}5555\ldots$ $\qquad$ (*1*)

Период этой дроби состоит из двух цифр, поэтому, умножая обе части этого равенства на $10^2=100$, находим

$100x=155{,}55...$ $\qquad$ (*2*)

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получим

$99x=154$. Отсюда $x=\frac{154}{99}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$.

3) 0,1(2)

Пусть $x=0{,}1(2)=0{,}1222\ldots$.

Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем

$10x=1,(2)$ $\qquad$ (*1*)

Период этой дроби состоит из одной цифры. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на 10, находим

$100x=12,(2)$ $\qquad$ (*2*)

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $90x=11$. Отсюда $x=\frac{11}{90}$.

4) – 0,(8)

Пусть $x=-0,(8)=-0{,}888\ldots$ $\qquad$ (*1*)

Период этой дроби состоит из одной цифры. Поэтому, умножая обе части этого равенства на 10, получаем

$10x=-8,(8)$ $\qquad$ (*2*)

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $9x=-8$. Отсюда $x=-\frac{8}{9}$.

5) – 3,(27)

Пусть $x=-3,(27)=-3{,}2727\ldots$ $\qquad$ (*1*)

Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части этого равенства на $10^2=100$, получаем

$100x=-327,(27)$ $\qquad$ (*2*)

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $99x=-324$. Отсюда $x=-\frac{324}{99}=-\frac{36}{11}=-3\frac{3}{11}$.

6) – 2,3(82)

Пусть $x=-2{,}3(82)=-2{,}38282\ldots$

Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем

$10x=-23,(82)$ $\qquad$ (*1*)

Период этой дроби состоит из двух цифр.

Поэтому, умножая обе части этого равенства на $10^2 = 100$, получаем $1000x = -2382,(82) \qquad (2)$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $990x = -2359$.

Отсюда $x = -\frac{2359}{990} = -2\frac{379}{990}$.

4. 1) $(20,88:18+45:0,36):(19,59+11,95) = \left(\frac{2088}{100\cdot 18}+\frac{45\cdot 100}{36}\right):$

$:\left(\frac{1959}{100}+\frac{1195}{100}\right) = \left(\frac{2088+4500\cdot 50}{50\cdot 2\cdot 12}\right):\left(\frac{3154}{100}\right) = \frac{227088}{100\cdot 18}\cdot\frac{100}{3154} = 4.$

2) $\frac{7}{36}\cdot 9+8\cdot\frac{11}{32}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18} = \frac{7}{4\cdot 9}\cdot 9+8\cdot\frac{11}{4\cdot 8}+\frac{9\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 9} = \frac{7}{4}+\frac{11}{4}+\frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$.

5. 1) $\left(3\frac{4}{25}+0,24\right)2,15+\left(5,1625-2\frac{3}{16}\right)\frac{2}{5} = \left(\frac{79\cdot 4}{4\cdot 25}+\frac{24}{100}\right)\cdot\frac{215}{100}+(5,1625-2,1875)\cdot\frac{2}{5} =$

$= \frac{316+24}{100}\cdot\frac{215}{100}+\frac{2975}{1000}\cdot\frac{2}{5} = \frac{35\cdot 215}{10\cdot 100}+\frac{595\cdot 5\cdot 2}{1000\cdot 5} = \frac{7310+1190}{1000} = \frac{8500}{1000} = 8,5$.

2) $0,364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0,125+2\frac{1}{2}\cdot 0,8 = \frac{364}{1000}\cdot\frac{25}{7}+\frac{5}{16}\cdot\frac{8}{10} =$

$= \frac{7\cdot 52\cdot 25}{40\cdot 25\cdot 7}+\frac{5\cdot 8\cdot 125}{2\cdot 8\cdot 125}+\frac{5\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{13}{10}+\frac{25}{10}+\frac{20}{10} = \frac{58}{10} = 5,8$.

6. 1) 16, 9 — рациональное число.

2) 7, 25(4) — бесконечная периодическая десятичная дробь — рациональное число.

3) 1,21221222… (после каждой единицы стоит *n* двоек) — бесконечная непериодическая десятичная дробь — аррациональное число.

4) 99,1357911…(после запятой записаны подряд все нечетные числа) — бесконечная непериодическая десятичная дробь — иррациональное число.

7. С помощью микрокалькулятора находим $\sqrt{31} = 5,5677643... \approx \quad \approx 5,57$.

Значит пара чисел 5, 4 и 5, 5 образует десятичное приближения числа $\sqrt{31}$ с недостатком, а пара чисел 5, 5 и 5, 6 — с избытком.

8. 1) $x = 5-\sqrt{7}$; $\sqrt{7} \approx 2,6457513..$, значит, $\sqrt{7} < 5$. Следовательно, $5-\sqrt{7} > 0$, значит, в данном случае является верным равенство |x|=x.

2) $x = 4-3\sqrt{5}$. Нужно выяснить какое из чисел больше 4 или $3\sqrt{5}$, для этого возведем их в квадрат: $4^2 = 16$; $(3\sqrt{5})^2 = 45$. Очевидно, что 45 > 16, следовательно, $3\sqrt{5} > 4$, а, значит, $4-3\sqrt{5} < 0$, и верным в данном случае является равенство $|x| = -x$.

3) $x = 5-\sqrt{10}$. Возведем в квадрат числа 5 и $\sqrt{10}$, получаем: $5^2 = 25$; $(\sqrt{10})^2 = 10$, так как $25 > 10$, то и $5 > \sqrt{10}$, поэтому $5-\sqrt{10} > 0$, а, значит, в данном случае верным является равенство $|x| = x$.

9. 1) $(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2})=(\sqrt{4\cdot 2}-3)(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)=(2\sqrt{2}-3)\times$
$\times(2\sqrt{2}+3)=(2\sqrt{2})^2-3^2=8-9=-1$ — рациональное число.

2) $(\sqrt{27}-2)(2-3\sqrt{3})=-(2-3\sqrt{3})(2-3\sqrt{3})=-(2-3\sqrt{3})^2=$
$=-(4+27-12\sqrt{3})=12\sqrt{3}-31$ — иррациональное число.

3) $(\sqrt{50}+4\sqrt{2})\sqrt{2}=(\sqrt{5^2\cdot 2}+4\sqrt{2})\sqrt{2}=(5\sqrt{2}+4\sqrt{2})\sqrt{2}=9\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=18$ — рациональное число.

4) $(5\sqrt{3}+\sqrt{27}):\sqrt{3}=(5\sqrt{3}+\sqrt{3^2\cdot 3}):\sqrt{3}=(5\sqrt{3}+3\sqrt{3}):\sqrt{3}=8\sqrt{3}:\sqrt{3}=8$ — рациональное число.

5) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2=3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}=8$ — рациональное число.

6) $(\sqrt{5}-1)^2-(2\sqrt{5}+1)^2=5+1-2\sqrt{5}-20-1-4\sqrt{5}=-15-6\sqrt{5}$ — иррациональное число.

10. 1) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{28}=\sqrt{7\cdot 3^2}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7}=3\cdot 2\cdot 7=42$;

2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2^2\cdot 5}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=10$;

3) $\sqrt{50}:\sqrt{8}=\sqrt{5^2\cdot 2}:\sqrt{2^2\cdot 2}=5:2=2{,}5$;

4) $\sqrt{12}:\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 2^2}:\sqrt{3^2\cdot 3}=2:3=\frac{2}{3}$.

11. 1) Сравнить $\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8}$ и $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}$.

$(\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8})^2=3{,}9+8+2\sqrt{31{,}2}=11{,}9+2\sqrt{31{,}2}$;

$(\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17})^2=11+17+2\sqrt{18{,}7}=28+2\sqrt{18{,}7}$.

Вычислим знак разности $(28+2\sqrt{18{,}7})-(28+2\sqrt{31{,}2})$,

если он положительный, то $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}>\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8}$,

если отрицательный, то $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}<\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8}$.

Допустим, что он положительный, т.е. $28+2\sqrt{18{,}7}>11{,}9+2\sqrt{31{,}2}$, проверим это: $28-11{,}9+2\sqrt{18{,}7}>2\sqrt{31{,}2}$; $16{,}1+2\sqrt{18{,}7}>2\sqrt{31{,}2}$; $259{,}21+74{,}8+64{,}4\sqrt{18{,}7}>124{,}8$; $209{,}21+64{,}4\sqrt{18{,}7}>0$ — верное неравенство, значит наше предположение было верным и $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}>\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8}$.

2) Сравнить $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}$ и $\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$.

Допустим, что $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}>\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$;

$11+2{,}1-2\sqrt{23{,}1}>10+3{,}1-2\sqrt{31}$; $-2\sqrt{23{,}1}>-2\sqrt{31}$;

$2\sqrt{23{,}1}<2\sqrt{31}$; $23{,}1<31$ — верное неравенство, значит, наше предположение было верным и $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}>\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$.

12. 1) $\sqrt{(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{35-10\sqrt{10}}+2\sqrt{10})}=$

$=\sqrt{(\sqrt{\frac{7+3}{2}}-\sqrt{\frac{7-3}{2}}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2\sqrt{5})}=\sqrt{10}$.

2) $\sqrt{(\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{7})\cdot 3}=\sqrt{(\sqrt{\frac{16+2}{2}}-\sqrt{\frac{16-2}{2}}+\sqrt{7})\cdot 3}=\sqrt{3\cdot 3}=3$.

3) $\sqrt{(\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}})\cdot 2+7}=$

$=\sqrt{(\sqrt{\frac{8+\sqrt{64-60}}{2}}+\sqrt{\frac{8-\sqrt{64-60}}{2}}-\sqrt{\frac{8+\sqrt{64-60}}{2}}+\sqrt{\frac{8-\sqrt{64-60}}{2}})\cdot 2+7}=$

$=\sqrt{2\sqrt{\frac{8-\sqrt{4}}{2}}\cdot 2+7}=\sqrt{2\sqrt{\frac{8-2}{2}}\cdot 2+7}=\sqrt{4\sqrt{3}+7}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2+\sqrt{3}$.

13. 1) $b_n=-5^{2n}$, получим: $b_1=-5^2$, $b_2=-5^4$, $b_3=-5^6$.

Итак, $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{5^4}{5^2}=25=\frac{b_3}{b_2}=\frac{5^6}{5^4}=25$, значит, данная последовательность является геометрической прогрессией.

2) $b_n=2^{3n}$, получим $b_1=2^3$, $b_2=2^6$, $b_3=2^9$.

Итак, $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{2^6}{2^3}=8=\frac{b_3}{b_2}=\frac{2^9}{2^6}$, значит, данная последовательность является геометрической прогрессией.

14. 1) $b_4=88,\ \ q=2;\ \ b_4=b_1\cdot q^3;\ \ 88=b_1\cdot 8;\ \ b_1=11.$

$S_5=\frac{b_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{11(1-32)}{1-2}=31\cdot 11=341$.

2) $b_1=11,\ \ b_4=88;\ \ b_4=b_1\cdot q^3;\ 88=11\cdot q^3;\ \ q^3=8;\ \ q=2.$

$S_5=\frac{11(1-2^5)}{1-2}=31\cdot 11=341$.

15. 1) $1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ldots$ Итак, $b_3=\frac{1}{25},\ \ b_2=\frac{1}{5}$; $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{1}{25}:\frac{1}{5},\ \ |q|<1$, значит, данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

2) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ldots$ Итак, $b_3=\frac{1}{27},\ \ b_2=\frac{1}{9}$;

$q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{1}{27}:\frac{1}{9}=\frac{1}{3},\ \ |q|<1$, значит, данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

3) – 27, – 9, – 3… Итак, $b_3=-3,\ \ b_2=-9$; $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ \ |q|<1$, значит, данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

4) – 64, – 32, – 16… Итак, $b_3 = -16$, $b_2 = -32$; $q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$, значит, данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

16. 1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$, так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$; $b_{11} = b_1 \cdot q^{10}$; $b_7 = b_1 \cdot q^6$, значит, $\frac{b_{11}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^{10}}{b_1 \cdot q^6} = q^4 = \frac{3}{4} : 12 = \frac{1}{16}$, откуда получаем, что $|q| = \frac{1}{2} < 1$, значит, данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

3) $b_7 = -30$, $b_6 = 15$; $q = \frac{b_7}{b_6} = \frac{-30}{15} = -2$, $|q| = 2 < 1$, значит, данная геометрическая прогрессия не является бесконечно убывающей.

4) $b_5 = 9$, $b_{10} = -\frac{1}{27}$; $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $b_{10} = b_1 \cdot q^9$, значит, $\frac{b_{10}}{b_5} = \frac{b_1 \cdot q^9}{b_1 \cdot q^4} = q^5 = -\frac{1}{27} : 9$, откуда $q^5 = -\frac{1}{3^5}$, то есть $q = -\frac{1}{3}$, $|q| =< 1$, значит, данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n}$. Если *n* неограниченно возрастает, то $\frac{1}{4^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $\frac{1}{4^n} \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}2)^n$. Если *n* неограниченно возрастает, то $(0{,}2)^n$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $(0{,}2)^n \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}2)^n = 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{7^n})$. Если *n* неограниченно возрастает, то $\frac{1}{7^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $\frac{1}{7^n} \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7^n} = 0$. Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{7^n}) = 1$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n - 2 \right)$. Если *n* неограниченно возрастает, то $\left(\frac{3}{5} \right)^n$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $\left(\frac{3}{5} \right)^n \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = 0$.

Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n - 2 \right) = -2$.

18. 1) $q=-\frac{1}{2},\ \ b_1=\frac{1}{8}\ \ S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$.

2) $q=\frac{1}{3},\ \ b_5=\frac{1}{81}$; $b_5=b_5\cdot q^4$; $\frac{1}{81}=b_1\cdot\frac{1}{34}$; $\frac{1}{81}=b_1\cdot\frac{1}{81}$, значит,

$b_1=1$; $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=1{,}5$.

3) $q=-\frac{1}{3},\ \ b_1=9$; $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{9}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{9}{\frac{4}{3}}=\frac{27}{4}=6{,}75$.

4) $q=-\frac{1}{2},\ \ b_4=\frac{1}{8}$; $b_4=b_1\cdot q^3$; $\frac{1}{8}=b_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, откуда получаем $b_1=-1$, значит, $S=\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$.

19. 1) 6, 1, $\frac{1}{6}\dots$ $b_1=6,\ \ b_2=1$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{6}$; $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{6}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{\frac{5}{6}}=\frac{36}{5}=7{,}2$.

2) -25, -5, -1,… $b_1=-25,\ \ b_2=-5$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{5}$;

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{-25}{1-\frac{1}{5}}=\frac{-25}{\frac{4}{5}}=\frac{-125}{4}=-31{,}25.$$

20. 1) 0,(5). Составим следующую последовательность приближенных значений данной бесконечной дроби:

$a_1=0{,}5=\frac{5}{10}$, $a_2=0{,}55=\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}$, … $a_3=0{,}555=\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}$,...

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$a=\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\dots$ Получаем $a=S=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{9}$.

2) 0,(8). Составим следующую последовательность:

$a_1=0{,}8=\frac{8}{10}$, $a_2=0{,}88=\frac{8}{10}+\frac{8}{10^2}$, …

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$a=\frac{8}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\dots$ Получаем $a=S=\frac{\frac{8}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{8}{9}$.

3) 0,(32). Составим следующую последовательность:

$$a_1 = 0{,}32 = \frac{32}{100},\ a_2 = 0{,}3232 = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2},\ \ldots$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$a = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + \ldots$$ Получаем $a = S = \dfrac{\frac{32}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \dfrac{32}{99}$.

4) 0,2(5). Составим следующую последовательность:

$$a_1 = 0{,}05 = \frac{5}{100},\ a_2 = 0{,}055 = \frac{5}{100} + \frac{5}{100^3},\ \ldots$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии и числа 0,2:

Получаем $a = 0{,}2 + S = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\frac{5}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{5}{90} = \dfrac{18+5}{90} = \dfrac{23}{90}$.

21. 1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; $b_1 = -6$; $b_2 = 12$; $b_3 = -24$;

$q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{12}{-6} = -2 = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{-24}{12}$, так как $|q| = 2 > 1$, то данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

2) $b_n = -5 \cdot 4^n$; $b_1 = -20$; $b_2 = -80$; $b_3 = -320$;

$q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{80}{20} = 4 = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{-320}{-80}$, так как $|q| = 4 > 1$, то данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

3) $b_n = 8 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_1 = 8$; $b_2 = -\dfrac{8}{3}$; $b_3 = -\dfrac{8}{9}$;

$q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{8} = -\dfrac{1}{3} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{-\frac{8}{9}}{-\frac{8}{3}}$, так как $|q| = \dfrac{1}{3} < 1$, значит, данная последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

4) $b_n = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$; $b_1 = 3$; $b_2 = -\dfrac{3}{2}$; $b_3 = \dfrac{3}{4}$;

$q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{-\frac{3}{2}}{8} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}}$, $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$, значит, данная последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

22. 1) $q = \dfrac{1}{2}$; $b_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$; $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $\dfrac{\sqrt{2}}{16} = b_1 \cdot \dfrac{1}{16}$, откуда получаем: $b_1 = \sqrt{2}$, $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$.

2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $b_4 = \frac{9}{8}$; $b_4 = b_1 \cdot q^3$; $\frac{9}{8} = b_1 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$,

откуда получаем: $b_1 = \sqrt{3}$, $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$.

23. 1) $S = 30$, $q = \frac{1}{5}$. Итак, $S = \frac{b_1}{1-q}$, значит, $b_1 = S \cdot (1-q) = 30(1-\frac{1}{5}) = 24.$

2) $S = 30$, $b_1 = 20$. Итак, $S = \frac{b_1}{1-q}$, значит, $1-q = \frac{b_1}{S}$,

а $q = 1 - \frac{b_1}{S} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

24. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-2^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3}{2^n} - 1)$.

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{3}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $\frac{3}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2^n} = 0$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3}{2^n} - 1) = -1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}+2}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9 \cdot 3^n + 2}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (9 + \frac{2}{3^n})$.

Если *n* неограниченно возрастает, то $\frac{2}{3^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $\frac{3}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3^n} = 0$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} (9 + \frac{2}{3^n}) = 9$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5^n+1)^2}{5^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{2n}+1+2\cdot 5^n}{5^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{2}{5^n})$.

Если *n* неограниченно возрастает, то $\frac{1}{5^{2n}}$ и $\frac{2}{5^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т.е. $\frac{1}{5^{2n}} \to 0$ и $\frac{2}{5^n} \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^{2n}} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{5^n} = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{2}{5^n}) = 1$.

25. Стороны поставленных друг на друга кубов составляют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{4},\ \frac{a}{8},\ \ldots$ значит, высота получившейся фигуры равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессией с $q=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$;

$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=2a$.

26. Расстояние от точки касания первой окружности со второй есть сумма бесконечно убывающей прогрессии диаметров окружностей с радиусами R_2 R_3… R_n…, то есть $2(R_2+R_2+\ldots+R_2+\ldots)$, а, значит, расстояние от центра первой окружности до вершины угла равно $R_1+2(R_2+R_2+\ldots+R_2+\ldots)$.

Расстояние от вершины угла до центра первой окружности равно $R_1:\sin 30^\circ=R_1:\frac{1}{2}=2R_1$.

Расстояние от вершины угла до центра второй окружности равно $2R_1-R_2-R_1=R_1-R_2$

Из подобия треугольника следует $\frac{R_1}{R_2}=\frac{2R_1}{R_1-R_2}$, откуда $2R_1^2-R_1R_2=2R_1R_2$, $R_2=\frac{R_1}{3}$, аналогично, $R_3=\frac{R_2}{3}=\frac{R_1}{9}$, таким образом $R_n=\frac{R_1}{3^{n-1}}$.

27. 1) $\sqrt{1}=\sqrt{1^2}=1;\ \sqrt{0}=\sqrt{0^2}=0;\ \sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4;$

$\sqrt{0{,}81}=\sqrt{(0{,}9)^2}=0{,}9;\ \sqrt{\frac{1}{289}}=\sqrt{\frac{1}{(17)^2}}=\frac{1}{17}.$

2) $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1^3}=1;\ \sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{0^3}=0;\ \sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5;$

$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3^3}}=\frac{1}{3};\ \sqrt[3]{0{,}027}=\sqrt[3]{(0{,}3)^3}=0{,}3;\ \sqrt[3]{0{,}064}=\sqrt[3]{(0{,}4)^3}=0{,}4.$

3) $\sqrt[4]{0}=\sqrt[4]{0^4}=0;\ \sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1^4}=1;\ \sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2;$

$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{2}{3};\ \sqrt[4]{\frac{256}{625}}=\sqrt[4]{\left(\frac{4}{5}\right)^4}=\frac{4}{5};\ \sqrt[4]{0{,}0016}=\sqrt[4]{(0{,}2)^4}=0{,}2.$

28. 1) $\sqrt[6]{36^3}=\sqrt[6]{(6^2)^3}=\sqrt[6]{6^6}=6$; 2) $\sqrt[12]{64^2}=\sqrt[12]{(2^6)^2}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$;

3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5^2}\right)^2}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^4}=\frac{1}{5}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}=\sqrt[8]{(15^2)^4}=\sqrt[8]{15^8}=15$.

29. 1) $\sqrt[3]{10^6}=\sqrt[3]{(10^2)^3}=10^2=100$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}=\sqrt[3]{(3^4)^3}=3^4=81$;

3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}=\sqrt[4]{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}=\sqrt[4]{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$.

30. 1) $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$; 2) $\sqrt[15]{-1}=\sqrt[15]{(-1)^{15}}=-1$;

3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=-\frac{1}{3}$; 4) $\sqrt[5]{-1024}=\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$;

5) $\sqrt[3]{-34^3}=-\sqrt[3]{34^3}=-34$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}=-\sqrt[7]{8^7}=-8$.

31. 1) $x^4=256;\ \ x=\pm\sqrt[4]{256};\ \ x=\pm\sqrt[4]{4^4};\ \ x=4$ или $x=-4.$

2) $x^5=-\frac{1}{32};\ \ x=\sqrt[5]{-\frac{1}{32}};\ \ x=-\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5};\ \ x=-\frac{1}{2}.$

3) $5x^5=-160;\ \ x=\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{2^5}=-2.$

4) $2x^6=128;\ \ x^6=64;\ \ |x|=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$, отсюда, $x=2$ или $x=-2.$

32. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}=-\sqrt[3]{5^3}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{2^6}=-5+\frac{2}{8}=-5+\frac{1}{4}=-4{,}75$;

2) $\sqrt[5]{32}-0{,}5\sqrt[3]{-216}=\sqrt[5]{2^5}+0{,}5\sqrt[3]{6^3}=2+3=5$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}=-\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[4]{5^4}=-1+5=4$;

4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}=-\sqrt[3]{10^3}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{4^4}=-10-1=-11$;

5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}+\sqrt[3]{(-0{,}1)^3}-\sqrt[4]{(0{,}2)^4}=$

$=\frac{1}{3}-0{,}1-0{,}2=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{10-9}{30}=\frac{1}{30}$.

33. 1) $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}=\sqrt[3]{(7)^3\cdot(0{,}5)^3}=\sqrt[3]{(7\cdot 0{,}5)^3}=7\cdot 0{,}5=3{,}5$;

2) $\sqrt[3]{512\cdot 216}=\sqrt[3]{8^3\cdot 6^3}=\sqrt[3]{(8\cdot 6)^3}=8\cdot 6=48$;

3) $\sqrt[5]{32\cdot 100000}=\sqrt[5]{2^5\cdot 10^5}=\sqrt[5]{(2\cdot 10)^5}=2\cdot 10=20$.

34. 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}=\sqrt[3]{(5\cdot 7)^3}=5\cdot 7=35$; 2) $\sqrt[4]{11^4\cdot 3^4}=\sqrt[4]{(11\cdot 3)^4}=11\cdot 3=33$;

3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5\cdot 8^5}=\sqrt[5]{(0{,}2\cdot 8)^5}=0{,}2\cdot 8=1{,}6$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot 21^7}=\sqrt[7]{(\frac{1}{3}\cdot 21)^7}=\frac{1}{3}\cdot 21=7$.

35. 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{2\cdot 500}=\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10$;

2) $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}04}=\sqrt[3]{0{,}2\cdot 0{,}04}=\sqrt[3]{0{,}008}=\sqrt[3]{(0{,}2)^3}=0{,}2$;

3) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{81\cdot 2^4}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^4}=3\cdot 2=6$;

4) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2\cdot 16}=\sqrt[5]{25}=2$.

36. 1) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}=3^2\cdot 2^3=9\cdot 8=72$;

2) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6}=\sqrt[3]{(2\cdot 5^2)^6}=2\cdot 5^2=2\cdot 25=50$;

3) $\sqrt[4]{3^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\sqrt[4]{\left(3^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^4}=3^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=27\cdot\frac{1}{9}=3$;

4) $\sqrt[10]{4^{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}=\sqrt[10]{\left(4^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{10}}=4^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=64\cdot\frac{1}{4}=16\cdot$

37. 1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}=\sqrt[3]{4^3x^3z^6}=\sqrt[3]{(4xz^2)^3}=4xz^2$;

2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}=\sqrt[4]{(a^2b^3)^4}=a^2b^3$;

3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}=\sqrt[5]{2^5x^{2\cdot 5}y^{4\cdot 5}}=\sqrt[5]{(2x^2y^4)^5}=2x^2y^4$;

4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}=\sqrt[6]{a^{2\cdot 6}b^{3\cdot 6}}=\sqrt[6]{(a^2b^3)^6}=a^2b^3$.

38. 1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}=\sqrt[3]{2\cdot 4a^3b^3}=\sqrt[3]{(2\cdot a\cdot b)^3}=2ab$;

2) $\sqrt[4]{2a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}=\sqrt[4]{3^4a^4b^4}=\sqrt[4]{(3ab)^4}=3ab$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}=\sqrt[4]{\frac{ab}{c}\cdot\frac{a^3c}{b}}=\sqrt[4]{a^4}=a$;

4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}=\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}\cdot\frac{1}{2ab}}=\sqrt[3]{\frac{8}{b^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{b}\right)^3}=\frac{2}{b}$.

39. 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\sqrt[3]{\frac{4^3}{5^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^3}=\frac{4}{5}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{2}{3}$;

3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{3}{2}=1{,}5\cdot$

4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{32\cdot 7+19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{224+19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\sqrt[5]{\frac{35}{25}}=\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

40. 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324:4}=\sqrt[4]{34}=3$;

2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}=\sqrt[3]{128:2000}=\sqrt[3]{0{,}064}=\sqrt[3]{(0{,}4)^3}=0{,}4$;

3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}:\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\frac{256}{8}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$;

5) $(\sqrt{25}-\sqrt{45}):\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{9})}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{9}=\sqrt{5}-3$;

6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}=\frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{125}-1)}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{125}-1=5-1=4.$

41. 1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}=\sqrt[5]{(a^6b^7):(ab^2)}=\sqrt[5]{a^5b^5}=ab$;

2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}=\sqrt[3]{(81x^4y):3xy}=\sqrt[3]{27\cdot x^3}=3x$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}=\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}:\frac{y}{9x^2}}=\sqrt[3]{\frac{27x^3}{y^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3x}{y}\right)^3}=\frac{3x}{y}$;

4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}=\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}:\frac{a}{8b^3}}=\sqrt[4]{\frac{16b^4}{a^4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{2b}{a}\right)^4}=\frac{2b}{a}$.

42. 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2=\sqrt[6]{7^{3\cdot 2}}=\sqrt[6]{7^6}=7$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}=\sqrt[6]{9^{-3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{9^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{3^6}}=\frac{1}{3}$;

3) $(\sqrt[10]{32})^2=\sqrt[10]{32^2}=\sqrt[10]{(2^5)^2}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$;

4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}=\sqrt[8]{16^{-4}}=\sqrt[8]{\frac{1}{16^4}}=\sqrt[8]{\frac{1}{4^{2\cdot 4}}}=\sqrt[8]{\frac{1}{4^8}}=\frac{1}{4}$.

43. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{36}=3$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[10]{1024}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}=\sqrt[9]{3^2}\cdot\sqrt[9]{3^7}=\sqrt[9]{3^7\cdot 3^7}=\sqrt[9]{3^9}=3$;

4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}=\sqrt[12]{5^2}\cdot\sqrt[6]{5^5}=\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[6]{5^5}=\sqrt[6]{5\cdot 5^5}=\sqrt[6]{5^6}=5$.

44. 1) $(\sqrt[3]{x})^6=\sqrt[3]{x^6}=\sqrt[3]{(x^2)^3}=x^2$; 2) $(\sqrt[3]{y^2})^3=\sqrt[3]{(y^2)^3}=y^2$;

3) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6=\sqrt{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^6}=\sqrt{a^{2\cdot 3}}\cdot\sqrt[3]{b^{3\cdot 2}}=a^8\cdot b^9$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3})^{12}=\sqrt[3]{(a^2)^{12}}\cdot\sqrt[4]{(b^3)^{12}}=(a^2)^4\cdot(b^3)^3=a^8\cdot b^9$;

5) $(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}})^6=(\sqrt[6]{a^2b})^6=\sqrt[6]{(a^2b)^6}=a^2b$;

6) $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}})^4=\sqrt[12]{(3a)^{3\cdot 4}}=\sqrt[12]{(3a)^{12}}=3a$.

45. 1) $\sqrt[6]{2x-3}$, это выражение имеет смысл при $2x–3\geq 0$; $2x\geq 3$; $x\geq\frac{3}{2}$; $x\geq 1{,}5$.

2) $\sqrt[6]{x+3}$, это выражение имеет смысл при $x+3\geq 0$; $2x\geq 3$; $x\geq -3$.

3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$, это выражение имеет смысл при $2x^2-x-1\geq 0$. Решим уравнение $2x^2-x-1=0$. $D=1+8=9=3^2$; $x_1=\frac{1+3}{4}=1$ или $x_2=\frac{1-3}{4}=-0{,}5$.

Так как ветви параболы $2x^2-x-1=0$ направлены вверх и точки пересечения этой параболы с осью абсцисс: (1; 0) и (–0,5; 0), то $2x^2-x-1\geq 0$ при $x\leq -0{,}5$ и $x\geq 1$.

4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$; Это выражение имеет смысл при совокупности $\frac{2-3x}{2x-4}\geq 0$;

$\frac{2-3x}{x-2}\geq 0$, что эквивалентно системе неравенств:

$\begin{cases}2-3x\geq 0\\ x-2>0\end{cases}$ или $\begin{cases}2-3x\leq 0\\ x-2<0\end{cases}$ $\begin{cases}2\geq 3x\\ x>2\end{cases}$ или $\begin{cases}2\leq 3x\\ x<2\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq\frac{2}{3}\\ x>2\end{cases}$ или $\begin{cases}x\geq\frac{2}{3}\\ x<2\end{cases}$

Первая система не имеет действительных решений, значит $\frac{2}{3} \le x < 2$.

46. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9\cdot\sqrt{17}} = \sqrt{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$;

2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} =$

$= 6-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{2^2} = 6-4 = 2$;

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}})^2 = 5+\sqrt{21}+2\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}+5-\sqrt{21} = 10+$

$+2\sqrt{(5+\sqrt{21})(5-\sqrt{21})} = 10+2\sqrt{25-21} = 10+2\sqrt{4} = 10+2\sqrt{2^2} = 10+4 = 14$.

47. 1) $\frac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{49\cdot112}{250}} = \sqrt[3]{\frac{7^3\cdot2\cdot8}{250}} = \sqrt[3]{\frac{7^3\cdot2^3}{5^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{14}{5}\right)^3} = \frac{14}{5} = 2{,}8$;

2) $\frac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{54\cdot120}{5}} = \sqrt[4]{54\cdot24} = \sqrt[4]{3^4\cdot2^4} = \sqrt[4]{(3\cdot2)^4} = 6$;

3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}}+\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[6]{2^6} = \sqrt[4]{16}+3-2 = \sqrt[4]{2^4}+1 = 2+1 = 3$;

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[3]{\frac{24+3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{\frac{8+1}{2}}-\sqrt[4]{4^4} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}+\sqrt[4]{9\cdot2\cdot\frac{9}{2}}-4 =$

$= 1{,}5+\sqrt[4]{3^4}-4 = 3-2{,}5 = 0{,}5$;

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}} = \sqrt[3]{(11-\sqrt{57})(11+\sqrt{57})} = \sqrt[3]{121-57} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$;

6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}} = \sqrt[4]{(17-\sqrt{33})(17+\sqrt{33})} = \sqrt[4]{289-33} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$.

48. 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b} = \sqrt[3]{2ab\cdot4a^2b\cdot27b} = \sqrt[3]{2^3\cdot3^3a^3b^3} = \sqrt[3]{(2\cdot3ab)^3} = 6ab$;

2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2} = \sqrt[4]{abc\cdot a^3b^2c\cdot b^5c^2} = \sqrt[4]{a^4b^8c^4} = \sqrt[4]{(ab^2c)^4} = ab^2c$.

49. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}})^3 = \sqrt[9]{a^{18}}+(\sqrt[6]{a^4})^3 = \sqrt[9]{(a^2)^9}+\sqrt[6]{a^{12}} = a^2+\sqrt[6]{(a^2)^6} =$

$= a^2+a^2 = 2a^2$;

2) $(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}})^3+2(\sqrt[4]{\sqrt{x}})^8 = (\sqrt[6]{x^2})^3+2(\sqrt[8]{x})^8 = \sqrt[6]{x^6}+2\sqrt[8]{x^8} = x + 2x = 3x$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-(\sqrt[5]{xy^2})^5 = \sqrt[6]{(xy^2)^6}-\sqrt[5]{(xy^2)^5} = xy^2-xy^2 = 0$;

4) $((\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}})^5-\sqrt[5]{a}):\sqrt[10]{a^2} = (\sqrt[5]{(a\sqrt[5]{a})^5}-\sqrt[5]{a}):\sqrt[5]{a} = (a\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{a}):$

$:\sqrt[5]{a} = (\sqrt[5]{a}(a-1)):\sqrt[5]{a} = a-1$.

50. 1) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[6]{3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{3}}\cdot\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3\cdot3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$;

2) $\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}} = \frac{\sqrt[12]{7^4}\cdot\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[12]{7}} = \sqrt[12]{\frac{7^4}{7}}\cdot\sqrt[4]{7^3} = \sqrt[12]{7^3}\cdot\sqrt[4]{7^3} = \sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{7^3} =$

$= \sqrt[4]{7\cdot7^3} = \sqrt[4]{7^4} = 7$;

3) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}+$
$+\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{3^2\cdot 2}+\sqrt[3]{3^2\cdot 2}-\sqrt[3]{2^2\cdot 3}+\sqrt[3]{2^2\cdot 3}-\sqrt[3]{2^3}=3-2=1$.

51. 1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$;

а) при $x\ge 2$; $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$; б) при $x<2$; $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}=|3-x|^3$;

а) при $x\le 3$; $|3-x|^3=(3-x)^3$; б) при $x>3$; $|3-x|^3=(x-3)^3$.

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+6|+|x-3|$.

Если $-1<x<2$, то $|x+6|=x+6$; а $|x-3|=3-x$, значит, $|x+6|+|x-3|=x+6+3-x=9$.

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}+\sqrt[4]{(4+x)^2}=|2x+1|-|4+x|$.

Если $-3<x<-1$, то $|2x+1|=-(2x+1)=-2x-1$; а $|4+x|=4+x$, значит, $|2x+1|-|4+x|=2x-1-4-x=-3x-5$.

52. 1) $\sqrt[3]{63}<\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$, значит, $-\sqrt[3]{63}>-4$;

$\sqrt[3]{30}>\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$; $\sqrt{3}>\sqrt{1}=\sqrt{1^2}=1$.

Складываем эти неравенства и получаем: $\sqrt[3]{30}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{63}>3+1-4$; $\sqrt[3]{30}+\sqrt{3}>\sqrt[3]{63}$.

2) $\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$, значит, $-\sqrt[3]{7}>-2$;

$\sqrt{15}<\sqrt{16}=\sqrt{4^2=4}$, значит, $-\sqrt{15}>-4$;

$\sqrt{10}>\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$; $\sqrt[3]{28}>\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$.

Складывая эти неравенства, получим:

$\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{7}-\sqrt{15}>3+3-2-4=0$; $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}>\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$.

53. 1) $(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})^2=4+\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}=$
$=8-2\sqrt{16-4\cdot 3}=8-2\sqrt{4}=8-2\sqrt{2^2}=8-4=4=(2)^2$;

2) $(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^2=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}+$
$+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}=18+3\sqrt[3]{(9-\sqrt{80})(81-80)}=$
$=18+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+3\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x^3$; $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt{9-\sqrt{80}}=\dfrac{x^3}{3}-6$;

$x=\dfrac{x^3}{3}-6$; $(x-3)(x^2+3x+6)=0$; $x^2+3x+6\ne 0$, значит, $x-3=0$;

$x=3=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

54. 1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})-(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab})}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}=$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{ba^2}-\sqrt[4]{b^3}-\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ba^2}+\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b^2})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[4]{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt[4]{b}\ ;$$

2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{(a-b)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})-(a+b)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}=$

$$=\frac{a\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}-a\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{2a\sqrt[3]{b}-2b\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{2\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=2\sqrt[3]{ab}\ ;$$

3) $(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2=\dfrac{a+b-\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-2\sqrt[3]{ab})}=$

$$=\frac{a+b-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ba^2}+\sqrt[3]{b^3}-2\sqrt[3]{ab^2}}=\frac{a+b-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{a+b-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}=1\cdot$$

55. 1) $\sqrt{x^3}=x^{\frac{2}{3}}$: 2) $\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{4}{3}}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}=b^{\frac{3}{4}}$;

4) $\sqrt[5]{x^{-1}}=x^{-\frac{1}{5}}$; 5) $\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{6}}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}=b^{-\frac{3}{7}}$.

56. 1) $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{y^2}$;

3) $a^{-\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^{-5}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{b^{-1}}$;

5) $(2x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2x}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(3b)^{-2}}$.

57. 1) $64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$; 2) $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$;

3) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{(2^3)^2}=\sqrt[3]{4^3}=4$;

4) $81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(81)^3}=\sqrt[4]{(3^4)^3}=\sqrt[4]{27^4}=27$;

5) $16^{-0,75}=16^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^{-3}}=\sqrt[4]{(2^4)^{-3}}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}=0,125$;

6) $9^{-1,5}=9^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{9^{-3}}=\sqrt{(3^2)^{-3}}=3^{-3}=\dfrac{1}{27}$.

58. 1) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}=2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}}=2^{\frac{4+11}{5}}=2^{\frac{15}{5}}=2^3=8$;

2) $5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}}=5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}}=5^{\frac{2+5}{7}}=5^{\frac{7}{7}}=5^1=5$;

3) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{-\frac{1}{6}}=9^{\frac{4-1}{6}}=9^{\frac{3}{6}}=\sqrt{3^2}=3$;

4) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}=4^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{5}{6}}=4^{\frac{2-5}{6}}=4^{-\frac{3}{6}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{2^2}}=\frac{1}{2}=0,5$;

5) $(8^{\frac{1}{2}})^{-4}=8^{-\frac{4}{12}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{1}{2}=0,5$.

59. 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}=(3^{\frac{2}{5}})^2\cdot(3^{\frac{2}{5}})^3=3^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{6}{5}}=3^{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=3^2=9$;

2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}=7^{\frac{2}{3}}\cdot(7^{\frac{2}{3}})^2=7^{\frac{2}{3}}\cdot 7^{\frac{4}{3}}=7^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=7^2=49$;

3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=(3^2\cdot 4^2)^{\frac{3}{4}}\cdot(9^{-\frac{3}{4}})^2=4^{\frac{6}{4}}\cdot 3^{\frac{6}{4}}\cdot 3^{-\frac{6}{4}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{6}{4}-\frac{6}{4}}=2^3\cdot 3^0=8\cdot 1=8$;

4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}=25^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot 6^{-\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}=5^3\cdot 2^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=$

$=125\cdot 2^0\cdot 3^0=5\cdot 1\cdot 1=125$.

60. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=(16)^{\frac{3}{4}}+(8)^{\frac{4}{3}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}+(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^3+2^4=8+16=24$;

2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=(25)^{\frac{3}{2}}-(8)^{\frac{2}{3}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}-(2^3)^{\frac{2}{3}}=$

$=5^3-2^2=125-4=121$;

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}=8^{\frac{9}{7}}\cdot 8^{-\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}=8^{\frac{9}{7}-\frac{2}{7}}-3^{\frac{10}{5}}=8^{\frac{7}{7}}-3^2=8-9=1$;

4) $(5^{-\frac{2}{5}})^{-5}+((0,2)^{\frac{3}{4}})^{-4}=5^{\frac{2}{5}\cdot 5}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{4}\cdot 4}=5^2+5^3=25+125=150$.

61. 1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$;

при $a=0,09$; $\sqrt{a}=\sqrt{0,009}=\sqrt{(0,3)^2}=0,3$.

2) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}=\frac{\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{\frac{b^3}{b}}=\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[3]{b}$; при $b=27$; $\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$.

3) $\frac{\sqrt{b}\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}=\frac{\sqrt[6]{b^3}\sqrt[6]{(b^2)^2}}{\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{\frac{b^3\cdot b^4}{b}}=\sqrt[6]{b^6}=b=1,3$.

4) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}=\sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{a^3}\cdot\sqrt[12]{a^5}=\sqrt[12]{a^4\cdot a^3\cdot a^5}=\sqrt[12]{a^{12}}=a=2,7$.

62. 1) $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{2+3}{6}}=a^{\frac{5}{6}}$;

2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}=b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=b^{\frac{3+2+1}{6}}=b^{\frac{6}{6}}=b^1$;

3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=b^{\frac{2-1}{6}}=b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{4-1}{3}}=a^{\frac{3}{3}}=a^1$;

5) $x^{1,7}\cdot x^{2,8}:\sqrt{x^5}=x^{\frac{17-28}{10}}:x^{\frac{5}{2}}=x^{\frac{45}{10}}\cdot x^{-\frac{5}{2}}=x^{\frac{9}{2}}\cdot x^{-\frac{5}{2}}=x^{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}=x^{\frac{4}{2}}=x^2$;

6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{-3,8} \cdot y^{2,3} \cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{2,3+\frac{1}{3}-3,8} = y^{\frac{1}{3}-1,5} = y^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = y^{\frac{2-9}{6}} = y^{-\frac{7}{6}} = y^{-1\frac{1}{6}}$.

63. 1) $x^{\frac{1}{2}} + x = x^{\frac{1}{2}} + x^1 = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{2}})$;

2) $(ab)^{\frac{1}{3}} + (ac)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}})$;

3) $y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{9}{12}} - y^{\frac{4}{12}} = y^{\frac{4}{12}+\frac{5}{12}} - y^{\frac{4}{12}} = y^{\frac{4}{12}} \cdot y^{\frac{5}{12}} - y^{\frac{4}{12}} = y^{\frac{4}{12}}(y^{\frac{5}{12}} - 1) = y^{\frac{1}{3}}(y^{\frac{5}{12}} - 1)$;

4) $12xy^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}y = 3(4x^{\frac{2}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{2}}) = 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(4x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$.

64. 1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}} \cdot b^{\frac{2}{4}} = (a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2 = (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})$;

2) $y^{\frac{2}{3}} - 1 = (y^{\frac{1}{3}})^2 - 1^2 = (y^{\frac{1}{3}} + 1)(y^{\frac{1}{3}} - 1)$;

3) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}} - b^{\frac{2}{6}} = (a^{\frac{1}{6}})^2 - (b^{\frac{1}{6}})^2 = (a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})$;

4) $x - y = x^1 - y^1 = x^{\frac{2}{2}} - y^{\frac{2}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$;

5) $4a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = 2^2a^{\frac{2}{4}} - b^{\frac{2}{4}} = (2a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2 = (2a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(2a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})$;

6) $0,01m^{\frac{1}{6}} - n^{\frac{1}{6}} = (0,1)^2 m^{\frac{2}{12}} - n^{\frac{2}{12}} = (0,1)^2(m^{\frac{1}{12}})^2 - (n^{\frac{1}{12}})^2 =$

$= (0,1m^{\frac{1}{12}})^2 - (n^{\frac{1}{12}})^2 = (0,1m^{\frac{1}{12}} + n^{\frac{1}{12}})(0,1m^{\frac{1}{12}} - n^{\frac{1}{12}})$.

65. 1) $a - x = a^{\frac{3}{3}} - a^{\frac{3}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^3 - (x^{\frac{1}{3}})^3 = (a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})(0,1m^{\frac{1}{12}} + n^{\frac{1}{12}})$;

2) $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 - (y^{\frac{1}{2}})^3 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{2}{2}} + y^{\frac{2}{2}} + y^{\frac{2}{2}}) = (x^{\frac{2}{2}} + y^{\frac{2}{2}})(x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)$;

3) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{6}} - b^{\frac{3}{6}} = (a^{\frac{3}{6}})^3 - (b^{\frac{3}{6}})^3 = (a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{2}{6}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{2}{6}}) = (a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}})$;

4) $27a + c^{\frac{1}{2}} = 3^3a^{\frac{3}{3}} + c^{\frac{3}{6}} = (3a^{\frac{1}{3}})^3 + (c^{\frac{1}{6}})^3 = (3a^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{6}})((3a^{\frac{1}{3}})^2 - 3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}} + c^{\frac{2}{6}}) =$

$= (3a^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{6}})(9a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}} + c^{\frac{1}{3}})$.

66. 1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{4}} - b^{\frac{2}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{4}} - b^{\frac{2}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{m + 2\sqrt{mn} + n} = \dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2} = \dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}})^2} = \dfrac{1}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{c - 2c^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{c} - 1} = \dfrac{(c^{\frac{1}{2}} - 1)^2}{\sqrt{c} - 1} = \dfrac{(c^{\frac{1}{2}} - 1)^2}{c^{\frac{1}{2}} - 1} = c^{\frac{1}{2}} - 1$.

67. $\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2c^2 - 4cb}{c - b} = \dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2c^2 - 4cb}{(c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(c^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})} =$

$$=\frac{c^{\frac{3}{2}}(c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})+cb^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})+2c^2-4cb}{(c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}=\frac{c^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+cb^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+2c^2-4cb}{(c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{c^2-c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+cb+2c^2-4cb}{(c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}=\frac{3c^2-3cb}{c-b}=\frac{3c\left(c-b\right)}{c-b}=3c\,.$$

68. 1) $2^{\sqrt{5}}\cdot 2^{-\sqrt{5}}=2^{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=2^0=1$;

2) $3^{2\sqrt{2}}:9^{\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}:3^{2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\cdot 3^{-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=3^0=1$;

3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3^2}}=5^3=125$;

4) $((0,5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}=(0,5)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=(0,5)^{\sqrt{4^2}}=(0,5)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

69. 1) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}=2^{2-3\sqrt{5}}\cdot(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 2^{3\sqrt{5}}=2^{2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}}=2^2=4$;

2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}=3^{1+2\sqrt[3]{2}}:(3^{\sqrt[3]{2}})^2=3^{1+2\sqrt[3]{2}}:3^{2\sqrt[3]{2}}=3^{1+2\sqrt[3]{2}}\cdot 3^{-2\sqrt[3]{2}}=$

$=3^{1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}}=3^1=3$;

3) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}=5^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=5^{1-2}=5^{-1}=\frac{1}{5}$;

4) $5^{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}-(\sqrt{5})^0=5^{1-5}-5^{\frac{0}{2}}=5^{-4}-5^0=\frac{1}{5^4}-1=\frac{1}{625}-1=\frac{1-625}{625}=-\frac{624}{625}$.

70. 1) $2^{1-2\sqrt{2}}\cdot 4^{\sqrt{2}}=2^{1-2\sqrt{2}}\cdot(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{1-2\sqrt{2}}\cdot 2^{2\sqrt{2}}=2^{1-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=2^1=2$;

2) $3^{2-3\sqrt{3}}\cdot 27^{\sqrt{3}}=3^{2-3\sqrt{3}}\cdot(3^{\sqrt{3}})^3=3^{2-3\sqrt{3}}\cdot 3^{3\sqrt{3}}=3^{2-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}}=3^2=9$;

3) $9^{1+\sqrt{3}}\cdot 3^{1-\sqrt{3}}\cdot 3^{-2-\sqrt{3}}=(3^2)^{1+\sqrt{3}}\cdot 3^{1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}=3^{2+2\sqrt{3}}\cdot 3^{-1-2\sqrt{3}}=$

$=3^{2+2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}}=3^1=3$;

4) $4^{3+\sqrt{2}}\cdot 2^{1-\sqrt{2}}\cdot 2^{-4-\sqrt{2}}=(2^2)^{3+\sqrt{2}}\cdot 2^{1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}}=2^{6+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}}=2^3=8.$

71. 1) $\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{10^{2+\sqrt{7}}\cdot 5^{1+\sqrt{7}}}=\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{10^{2+\sqrt{7}}\cdot 5^{(2+\sqrt{7})-1}}=\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{(2\cdot 5)^{2+\sqrt{7}}\cdot 5^{-1}}=\frac{1}{5^{-1}}=(5^{-1})^{-1}=$

$=5^{(-1)\cdot(-1)}=5^1=5$;

2) $\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}=\frac{6^2\cdot 6^{1+\sqrt{5}}}{2\cdot 2^{1+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}=\frac{36}{2}\cdot\frac{6^{1+\sqrt{5}}}{(2\cdot 3)^{1+\sqrt{5}}}=\frac{36}{2}\cdot\frac{6^{1+\sqrt{5}}}{(6)^{1+\sqrt{5}}}=\frac{36}{2}=18$;

3) $(25^{1+\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}})\cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}=(5^2)^{1+\sqrt{2}}\cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}}\cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}=$

$=5^{2+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}}=5^1-5^{-1}=5-\frac{1}{5}=4\frac{4}{5}$;

4) $(2^{2\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1})\cdot 2^{-2\sqrt{3}}=2^{2\sqrt{3}}\cdot 2^{-2\sqrt{3}}-(2^2)^{\sqrt{3}-1}\cdot 2^{-2\sqrt{3}}=$

$=2^{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}-2^{2\sqrt{3}-2}\cdot 2^{-2\sqrt{3}}=2^0-2^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}}=1-2^{-2}=1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

72. 1) $3^{\sqrt{71}} > 3^{\sqrt{69}}$, так как $\sqrt{71} > \sqrt{69}$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} = 3^{-\sqrt{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{-\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{3}} < 3^{-\sqrt{2}}$, так как $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$;

3) $4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$, так как $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$; 4) $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$, так как $\sqrt{3} > 1,7$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} = 2^{-1,4}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}}$; $2^{-1,4} > 2^{-\sqrt{2}}$, так как $-1,4 > -\sqrt{2}$;

6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} = 9^{-\pi}$; $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14} = 9^{-3,14}$; $9^{-\pi} < 9^{-3,14}$, так как $-3,14 > -\pi$.

73. 1) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < 1$; 2) $(0,013)^{-1} = \left(\frac{13}{1000}\right)^{-1} = \frac{1000}{13} = 76\frac{2}{13} > 1$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{5} = \left(\frac{7}{2}\right)^{-5} = (3,5)^{-5} < 1 = (3,5)^0$, так как $-5 < 0$;

4) $27^{1,5} = (3^3)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{9}{2}} > 1 = 3^0$, так как $4\frac{1}{2} > 0$;

5) $2^{-\sqrt{5}} < 1 = 2^0$, так как $-\sqrt{5} < 0$;

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} = 2^{-\sqrt{3}} < 1 = 2^0$, так как $-\sqrt{3} < 0$;

7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2-\sqrt{5}}$; $1 < \frac{4}{\pi}$; $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$; значит, $2-\sqrt{5} < 0$, а $\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2-\sqrt{5}} < 1 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{0}$;

8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3} = 3^{3-\sqrt{8}}$; $3 = \sqrt{9} > \sqrt{8}$, значит, $3-\sqrt{8} > 0$, то есть $3^{3-\sqrt{8}} > 1 = 3^0$.

74. 1) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a^1 = a$; 2) $a^{\sqrt{3}-1} \cdot a^{\sqrt{3}+1} = a^{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1} = a^{2\sqrt{3}}$;

3) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} : b^2 = b^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} \cdot b^{-2} = b^3 \cdot b^{-2} = b^{3-2} = b^1 = b$.

75. 1) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$, так как 3>2; 2) $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} < \sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$, так как 7>5.

76. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = (16)^{\frac{3}{4}} + (30^4)^{\frac{1}{4}} -$

$-\left(\frac{224+19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} + 30 - \left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^3 + 30 - \frac{3}{2} = 8 + 30 - 1,5 = 36,5$;

2) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{2}{3}} - (2^3)^{-\frac{4}{3}} = (10^3)^{\frac{1}{3}} -$

$$-2^{-2}\cdot 2^4-2^{-4}=10-2^{4-2}-\frac{1}{2^4}=10-2^2-0{,}0625=9{,}9375-4=5{,}9375;$$

3) $$27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\frac{3}{8}\right)^{-1\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{(-2)^2}+\left(\frac{24+3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=3^2-\frac{1}{4}+\left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{-\frac{1}{3}}=9-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9\cdot 12-3+2\cdot 4}{12}=\frac{108-3+8}{12}=\frac{113}{12}=9\frac{5}{12};$$

4) $$(-0{,}5)^{-4}-625^{0{,}25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{-2}\right)^{-4}-(5^4)^{\frac{1}{4}}-$$

$$-\left(\frac{8+1}{4}\right)^{-1\frac{2+1}{2}}=\frac{432-135-8}{27}=\frac{289}{27}=10\frac{19}{27}.$$

77. 1) $$(a^4)^{-\frac{3}{4}}\cdot(b^{-\frac{2}{3}})^{-6}=a^{-3}\cdot b^{\frac{2\cdot 6}{3}}=a^{-3}\cdot b^4=\frac{b^4}{a^3};$$

2) $$\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^{\frac{1}{3}}=(a^6\cdot b^3)^{\frac{1}{3}}=a^2\cdot b.$$

78. 1) $$\frac{a^{\frac{4}{3}}(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})}=\frac{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}(1+a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}(a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}+1)}=\frac{a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}(1+a)}{a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}(a+1)}=\frac{a}{a^0}=\frac{a}{1}=a;$$

2) $$\frac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}})}=\frac{b^{\frac{1}{5}}(b^{\frac{4}{5}}-b^{-\frac{1}{5}})}{b^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{2}{3}})}=\frac{b^{\frac{1}{5}}\cdot b^{-\frac{1}{5}}(b^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}-1)}{b^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}-1)}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}}(b-1)}{b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}(b-1)}=\frac{b^0}{b^0}=\frac{1}{1}=1;$$

3) $$\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^{-2}}}=\frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}\cdot b^{-1}-1)}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-1}(a^2-b)}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}};$$

4) $$\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{3}{6}}+b^{\frac{2}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{2}{6}}(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=$$

$$=\frac{a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{2}{6}}(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{2}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}.$$

79. 1) $$(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}})\cdot\sqrt[3]{6}=3^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{6}{3}}-3^{\frac{6}{3}})\sqrt[3]{6}=6^{-\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}(2^2-3^2)=$$

$$=6=4-9=-5;$$

2) $$(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}})\sqrt[4]{1000}=(5^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{3}{4}})\cdot 10^{\frac{3}{4}}=$$

$$=2^{-\frac{3}{4}}\cdot 5^{-\frac{3}{4}}(5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}})\cdot 10^{\frac{3}{4}}=10^{-\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{3}{4}}(5-2)=10^{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}\cdot 3=10^0\cdot 3=1\cdot 3=3.$$

80. 1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{9}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^4}} = a^{\frac{1}{9}}\cdot a^{\frac{4}{6\cdot3}} = a^{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}} = a^{\frac{1}{3}}$;

2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}} = b^{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^5}} = b^{\frac{1}{12}}\cdot b^{\frac{5}{3-4}} = b^{\frac{1}{12}+\frac{5}{12}} = b^{\frac{1}{2}}$;

3) $(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}})\sqrt[6]{ab^4} = (a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}})a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{6}} = (a^{\frac{2}{6}}b^{-\frac{4}{6}}+a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}})a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{6}} =$

$= a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{4}{6}}(a^{\frac{3}{6}}+b^{\frac{3}{6}})a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) = a^0b^0(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$;

4) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}) = (a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\times$

$\times((a^{\frac{1}{3}})^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2) = (a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3 = a+b$.

81. 1) $(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}):(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{a}(a-2\sqrt{ab}+b):(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2 =$

$=\frac{1}{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2:(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = \frac{1}{a}$;

2) $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}):(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}) = (a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}):(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\cdot(2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}) =$

$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}::(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}:(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})$;

3) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}(1-a^{\frac{8}{4}})}{a^{\frac{1}{4}}(1-a^{\frac{4}{4}})}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}(1-b^{\frac{4}{2}})}{b^{-\frac{1}{2}}(b^{\frac{2}{2}}+1)} = \frac{1-a^2}{1-a}-$

$-\frac{b^2-1}{1+b} = \frac{(1-a)(1+a)}{1+a}-\frac{(1-b)(1+b)}{1+b} = 1+a-1+b = a+b$;

4) $\frac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a-1b}}-\frac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{1}{6}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{2}{2}}-b)}{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}-$

$-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{3}{3}}-b)}{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{3}{6}}-b^{\frac{1}{2}})} = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} =$

$a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}} - -a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}} = 2b^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{b}$.

82. 1) $\frac{m^{\sqrt{3}}n^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}} = \frac{(mn)^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}} = \frac{(mn)^{\sqrt{3}}}{(mn)^2(mn)^{\sqrt{3}}} = \frac{1}{(mn)^2}$;

2) $\frac{x^{\sqrt{7}}\cdot y^{\sqrt{7}+1}}{(xy)^{\sqrt{7}}} = \frac{x^{\sqrt{7}}\cdot y^{\sqrt{7}}\cdot y}{(xy)^{\sqrt{7}}} = \frac{(xy)^{\sqrt{7}}\cdot y}{(xy)^{\sqrt{7}}} = y$;

3) $(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}) = ((a^{\sqrt{2}})^2-(b^{\sqrt{3}})^2) = a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}$;

4) $(2a^{-0,5}-\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}})(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}+2a^{-0,5}) = (2a^{-0,5})^2-(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}})^2 = 4a^{-1}-\frac{1}{9}b^{-2\sqrt{3}}$.

83. 1) $(a^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}=a^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=a^{1-2}=a^{-1}$;

2) $(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}})^{-3}\cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=m^{\frac{3\sqrt{5}-3}{1+\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{2}}=m^{\frac{6\sqrt{5}-6+3\sqrt{5}+3\cdot 5}{2(1+\sqrt{5})}}=m^{\frac{9}{2}}=m^{4,5}$;

3) $(a^{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}})^{3\sqrt{4}-3\sqrt{6}+3\sqrt{9}}=a^{3\sqrt{8}-3\sqrt{12}+3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-3\sqrt{18}+3\sqrt{27}}=a^{3\sqrt{2^3}+3\sqrt{3^3}}=a^{2+3}=a^5$;

4) $(a^{3\sqrt{9}+3\sqrt{3}+1})^{1-3\sqrt{3}}=a^{(1-3^{\frac{1}{3}})(3^{\frac{2}{3}}+1\cdot 3^{\frac{1}{3}}+1)}=a^{1^3-(3^{\frac{1}{3}})^3}=a^{-2}$.

84. 1) $5^{2x}=5^4;\quad 2x=4;\quad x=2$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1};\quad 2x=-1;\quad x=-\frac{1}{2}$;

3) $9^x=3^{2\sqrt{2}};\quad 3^{2x}=3^{2\sqrt{2}};\quad 2x=2\sqrt{2};\quad x=\sqrt{2}$;

4) $16^x=2^{8\pi};\quad 2^{4x}=2^{8\pi};\quad 4x=8\pi;\quad x=2\pi$.

85. 1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7};\quad 7^{x\sqrt{3}}=7^{\frac{1}{2}};\quad x\sqrt{3}=\frac{1}{2};\quad x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$;

2) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt{5};\quad 5^{2x\sqrt{2}}=5^{1\frac{1}{2}};\quad 2x\sqrt{2}=\frac{3}{2};\quad x=\frac{3}{4\sqrt{2}}$;

3) $\left(\sqrt{2}\right)^x=2\sqrt{2};\quad 2^{\frac{1}{2}x}=2^{1\frac{1}{2}};\quad 2^{\frac{x}{2}}=2^{\frac{3}{2}};\quad \frac{x}{2}=\frac{3}{2};\quad x=3$;

4) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x}=3\sqrt{3};\quad 3^{\frac{1}{2}\cdot 3x}=3^{1\frac{1}{2}};\quad 3^{\frac{3x}{2}}=3^{\frac{3}{2}};\quad \frac{3x}{2}=\frac{3}{2};\quad x=1$.

86. 1) $\sqrt[3]{10}=\sqrt[15]{10^5}=\sqrt[15]{100000}>\sqrt[5]{20}=\sqrt[15]{(20)^3}=\sqrt[15]{8000}$;

2) $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}<\sqrt[3]{7}=\sqrt[12]{7^4}=\sqrt[12]{2401}$;

3) $\sqrt{17}=\sqrt[6]{17^3}=\sqrt[6]{4913}>\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$;

4) $\sqrt[4]{13}=\sqrt[20]{13^5}=\sqrt[20]{371293}>\sqrt[5]{23}=\sqrt[20]{23^4}=\sqrt[20]{279841}$.

87. 1) $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{2a^2}{a-b}=\frac{a^{\frac{3}{2}}(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})-ab^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})}{b-a}+\frac{2a^2}{a-b}=$

$=\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}-a^{1+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-ab^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+2a^2}{b-a}=\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^2-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-ab+2a^2}{b-a}=\frac{a^2-ab}{b-a}=\frac{a(a-b)}{-(a-b)}=-a$;

2) $\frac{3xy-y^2}{x-y}-\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{3xy-y^2}{x-y}-$

$-\frac{y\sqrt{xy}+y^2+yx-y\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{3xy-y^2-y^2-xy}{x-y}=\frac{2xy-2y^2}{x-y}=\frac{2(x-y)y}{x-y}=2y$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a+b}=\frac{-3\sqrt[3]{ab}}{a+b}$;

4)

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=2\sqrt[3]{b}\ .$$

88. 1) $$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{1+\frac{1}{3}}+ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b-b^{\frac{1}{3}+1}+ab^{\frac{1}{3}}-ba^{\frac{1}{3}}+b^{1+\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}=\frac{-2ba^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}};$$

2) $$\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{(a+b)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{a+b}-\frac{(a-b)(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})}{a-b}=$$

$$=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}=2b^{\frac{1}{3}};$$

3) $$\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a-b}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a-b}=\frac{-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a-b};$$

4) $$\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a+b}=\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a+b}=\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a+b}\ .$$

89. 1) $$\frac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\frac{(x+y)(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})}{x+y}+$$

$$+\frac{(x-y)(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})}{x-y}-\frac{(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}};$$

2) $$\frac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\frac{a^2-b^2}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}=\frac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\frac{(a+b)(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2+b^2-2ab(a+b)(a+b-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab+a^2+b^2+ab+ab-2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{2(a^2+b^2-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}})}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=\frac{2(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=2(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}});$$

3) $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}+1}\right):\left(4x^{\frac{1}{3}}+4+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}{x+1}\right):$

$:\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\left(\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)^2+4\cdot x^{\frac{1}{3}}+1\right)\right)=\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\left(2x^{\frac{1}{3}}+1\right)^2\right)=$

$=\dfrac{4x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(2x^{\frac{1}{3}}+1)^2}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x+1}$.

90. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов: S=a(+ +=$\frac{p}{100})^t$, где a — первоначальная сумма вклада, p — число процентов начисляемых за год, t — число лет: S=5000(1+$\frac{2}{100})^3$ =5000(1,02)^3=5306,04=5306 р. 4 коп.

91. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов: $S=a(1+\frac{p}{100})^t$ $a=2000р;$ $p=3;$ $t=2\frac{7}{12}$.

$S=200(1+\dfrac{3}{100})^{2\frac{7}{12}}=2000\cdot(1,03)^{\frac{31}{12}}=2000\cdot 1,07935=2158,7$ =185 р. 70 коп.

92. 1) $(0,645:0,3-1\frac{107}{180})\cdot(4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\cdot 1,96)=\left(\dfrac{0,645\cdot 10}{3}-\dfrac{287}{180}\right)\cdot\left(\dfrac{4\cdot 100}{625}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{196}{7\cdot 100}\right)=$

$=\left(\dfrac{2,15\cdot 180-287}{180}\right)\times(0,64-0,2+0,28)=\dfrac{387-287}{180}\cdot 1,12=\dfrac{100}{180}\cdot\dfrac{112}{100}=\dfrac{28}{45}$;

2) $(\frac{1}{2}-0,375):0,125+\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{12}\right):(0,358-0,108)=(0,5-0,375):$

$:0,125+\dfrac{10-7}{12}:0,25=0,125:0,125+\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{4}{1}=1+1=2$.

93. 1) $1,3(1)=x;$ $100x=131,(1);$ $10x=13,(1)$;

$100x-10x=131,(1)-13,(1)=118$; $\quad 90x=118;$ $x=\dfrac{118}{90}=\dfrac{59}{45}=1\dfrac{14}{45}$;

2) $2,3(2)=x;$ $10x=23,(2);$ $100x=232,(2)$;

$100x-10x=232,(2)-23,(2)=209$; $\quad 90x=209;$ $x=\dfrac{209}{90}=2\dfrac{29}{90}$;

3) $0,(248)=x;$ $1000\cdot x=24,8(248)$; $\quad 999\cdot x=248;$ $x=\dfrac{248}{999}$;

4) $0,(34)=x;$ $100\cdot x=34,(34)$;

$100\cdot x-x=34,(34)-0,(34)=34$; $\quad 99\cdot x=34;$ $x=\dfrac{34}{99}$.

94. 1) $48^\circ=1;$ $10^{-2}=\dfrac{1}{10^2}=\dfrac{1}{100}=0,01$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}=1{,}5;\ (0{,}3)^{-3}=\left(\frac{3}{10}\right)^{-3}=\left(\frac{10}{3}\right)^{3}=\frac{1000}{9}=111\frac{1}{9};$

$(-1{,}2)^{-2}=\left(-\frac{12}{10}\right)^{-2}=\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}=\frac{25}{36};\qquad \left(2\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{9}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{9}\right)^{2}=\frac{16}{81};$

2) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3;\ \sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3;\ \sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2;$

$\sqrt[6]{8^2}=\sqrt[6]{(2^3)^2}=\sqrt[6]{2^6}=2;\ \sqrt[8]{16^2}=\sqrt[8]{(2^4)^2}=\sqrt[8]{2^8}=2;$

$\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}=\sqrt[3]{(3^2)^3}=3^2=9;$

3) $8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2;\ \ 27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9;\ \ 10000^{\frac{1}{4}}=(10^4)^{\frac{1}{4}}=10;$

$32^{\frac{2}{5}}=(2^5)^{\frac{2}{5}}=2^2=4;\ \ 32^{-\frac{3}{5}}=(2^5)^{-\frac{3}{5}}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};$

$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{9}{16}.$

95. 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}=\sqrt[3]{(5\cdot 7)^3}=5\cdot 7=35;\ \sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{6^4}=6;$

$\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}=\sqrt[4]{\frac{125}{8}\cdot\frac{5}{2}}=\sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^4}=\frac{5}{2}=2{,}5;$

2) $56^{\circ}:8^{-2}=1\cdot 8^2=1\cdot 64=64;\qquad 16^{\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}\cdot(5^2)^{\frac{1}{2}}=2\cdot 5=10;$

$\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}:9^{\frac{1}{2}}=15:(3^2)^{\frac{1}{2}}=15:3=5;\qquad 8^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}:16^{-1}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{16}\cdot 16=2;$

3) $\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{4}}}{5^2}=5^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\cdot 5^{-2}=\frac{1}{25};\qquad \frac{7^{\frac{7}{3}}\cdot 7^{-\frac{4}{3}}}{7^2}=7^{\frac{7}{3}-\frac{4}{3}}\cdot 7^{-2}=7^{1-2}=7^{-1}=\frac{1}{7};$

$\frac{(0{,}3)^{0{,}3}\cdot(0{,}3)^{-1}}{(0{,}3)^{1{,}3}}=(0{,}3)^{0{,}3-1-1{,}3}=(0{,}3)^{-2}=\frac{1}{(0{,}3)^2}=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}.$

96. 1) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3\cdot 2}{4}=-\frac{3}{4};$

2) $(\frac{1}{27}\cdot 125^{-1})^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3^3}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot((5^3)^{-1})^{-\frac{1}{3}}=(3^{-3})^{-\frac{1}{3}}\cdot(5^{-3})^{-\frac{1}{3}}=3\cdot 5=15;$

3) $27^{\frac{2}{3}}+9^{-1}=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{9}=3^2+\frac{1}{9}=9+\frac{1}{9}=9\frac{1}{9};$

4) $(0{,}01)^{-2}:100^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}\cdot 100^{-\frac{1}{2}}=(100)^2\cdot(10^2)^{\frac{1}{2}}=10000\cdot 10=100000;$

5) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}=\left(\left(\frac{8}{9}\right)^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{8}=\frac{9}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{45}{64}$;

6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{9}{16}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{9}{16}=\frac{81}{256}$.

97. 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 9}{2\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$;

2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{4}{4}}=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{27}{4}}=\sqrt[4]{\frac{3\cdot 27}{4\cdot 4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^{4}}=\frac{3}{2}=1{,}5$;

3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}=\sqrt[4]{\frac{125}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}=\sqrt[4]{\frac{125}{8}:\frac{2}{5}}=\sqrt[4]{\frac{125\cdot 5}{8\cdot 2}}=\sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^{4}}=\frac{5}{2}=2{,}5$;

4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{45}{4}}:\sqrt[3]{\frac{10}{3}}=\sqrt[3]{\frac{45}{4}:\frac{10}{3}}=\sqrt[3]{\frac{45\cdot 3}{4\cdot 10}}=\sqrt[3]{\frac{9\cdot 3}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$;

5) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^{2}=(\sqrt[6]{27})^{2}=(\sqrt[6]{3^{3}})^{2}=\sqrt[6]{3^{6}}=3$;

6) $(\sqrt{\sqrt[3]{16}})^{2}=(\sqrt[6]{16})^{3}=(\sqrt[6]{4^{2}})^{3}=\sqrt[6]{4^{6}}=4$.

98. 1) $1^{3{,}75}=1$; $2^{-1}=\frac{1}{2}=0{,}5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^{3}=8$, т.к. $8>1>0{,}5$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}>1^{3{,}75}>2^{-1}$;

2) $98^{0}=1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{7}$, $32^{\frac{1}{5}}=(2^{5})^{\frac{1}{5}}=2$, т.к. $2\frac{1}{7}>2>1$, то $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}>32^{\frac{1}{5}}>98^{0}$.

99. 1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}>\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$, т.к. $0{,}88<1$, $\frac{6}{11}<1$ и $0{,}88>\frac{6}{11}$, а $\frac{1}{6}>0$;

2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}<(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$, т.к. $\frac{5}{12}<1$, $0{,}41<1$ и $\frac{5}{12}>0{,}41$, а $-\frac{1}{4}<0$;

3) $(4{,}09)^{3\sqrt{2}}<\left(4\frac{3}{25}\right)^{3\sqrt{2}}=(4{,}12)^{3\sqrt{2}}$, т.к. $4{,}09<4{,}12$, а $\sqrt[3]{2}>0$;

4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}=\left(1\frac{1}{11}\right)^{\sqrt{5}}>\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}=\left(1\frac{1}{12}\right)^{\sqrt{5}}$, т.к. $1\frac{1}{11}>1\frac{1}{12}$, а $\sqrt{5}>0$.

100. 1) $\frac{a^{1\frac{1}{2}}a^{-0{,}5}}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=a^{1-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$; 2) $\frac{a^{-3}a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{-3+\frac{7}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=a^{-1}$;

3) $(a^{2{,}5})^{2}\sqrt[5]{a}=a^{5}\cdot a^{\frac{1}{5}}=a^{5+\frac{1}{5}}=a^{5\frac{1}{5}}$; 4) $\sqrt[7]{a^{2}}(a^{\frac{3}{14}})^{2}=a^{\frac{2}{7}}\cdot a^{\frac{3}{7}}=a^{\frac{2}{7}+\frac{3}{7}}=a^{\frac{5}{7}}$

101. 1) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{x^{-2\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}=x^{-2\sqrt{2}}\cdot(x^{-(-\sqrt{2}-1)})^{\sqrt{2}+1}=x^{-2\sqrt{2}}\times(x^{(\sqrt{2}+1)})^{\sqrt{2}+1}=$

$=x^{-2\sqrt{2}}\cdot x^{2+1+2\sqrt{2}}=x^{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=x^3$;

2) $\left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}=(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}+1}\cdot(b^{-(\sqrt{3}-1)})^{\sqrt{3}+1}\cdot a^{-1-\sqrt{3}}\cdot b^2=$

$=a^{3+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}\cdot b^{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}\cdot b^2=a^2b^{1-3+2}=a^2$.

102. 1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt[7]{\left(\frac{3-2}{6}\right)^2}=\sqrt[7]{\left(\frac{1}{6}\right)^2}>\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt[7]{\left(\frac{4-3}{12}\right)^2}=$

$=\sqrt[7]{\left(\frac{1}{12}\right)^2}$, т.к. $\frac{1}{6}>\frac{1}{12}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}=\sqrt[5]{\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)^3}=\sqrt[5]{\left(\frac{25-24}{20}\right)^3}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{20}\right)^3}>$

$>\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{6}\right)^3}=\sqrt[5]{\left(\frac{7}{6}-\frac{8}{6}\right)^3}=\sqrt[5]{\left(\frac{49-48}{42}\right)^3}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{42}\right)^3}$, т.к. $\frac{1}{20}>\frac{1}{42}$.

103. 1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; $2x=\frac{1}{5}$; $x=\frac{1}{5\cdot 2}=\frac{1}{10}=0{,}1$;

2) $3^x=27$; $3^x=3^3$; $x=3$; 3) $7^{3x}=7^{10}$; $3x=10$; $x=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$;

4) $2^{2x+1}=32$; $2^{2x+1}=2^5$; $2x+1=5$; $2x=4$; $x=2$;

5) $2^{2+x}=4$; $4^{2+x}=4^0$; $2+x=0$; $x=-2$.

104. 1) $\frac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20}=\frac{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{2}}-16)}{5(y^{\frac{1}{4}}+4)}=\frac{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{2}}-4)(y^{\frac{1}{2}}+4)}{5(y^{\frac{1}{4}}+4)}=\frac{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{2}}-4)}{5}$;

2) $\frac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}=\frac{(a^{\frac{2}{5}})^2-(b^{\frac{2}{5}})^2}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}=\frac{(a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}})-(a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}})}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}=a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}}$.

105. 1) $\frac{ab^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{b^{\frac{1}{2}}(ab-1)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1)(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+1)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}=b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1)$;

2) $\frac{b}{a-b}+\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a\frac{1}{2}+b\frac{1}{2}}=\frac{b}{(a\frac{1}{2}-b\frac{1}{2})(a\frac{1}{2}+b\frac{1}{2})}+\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a\frac{1}{2}+b\frac{1}{2}}=\frac{b+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b}{a-b}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$.

106. 1) $b_2=-81$; $S_2=162$; $S_2=b_1+b_2=b_1-81=162$;

$b_1=243;\ \ b_2=b_1\cdot q;\ \ q=\dfrac{b_2}{b_1}=-\dfrac{81}{243}=-\dfrac{1}{3};\ \ |q|=\dfrac{1}{3}<1;$

2) $b_2=33,\ \ S_2=67;\ \ S_2=67=b_1+b_2=b_1+33;$

$b_1=34;\ \ q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{33}{34};\qquad |q|=\dfrac{33}{34}<1;$

3) $b_1+b_2=130;$

$b_1-b_3=120;\ \begin{cases} b_1+b_1\cdot q=130 \\ b_1-b_1\cdot q^2=120 \end{cases};\ \begin{cases} b_1=\dfrac{120}{1-q^2} \\ \dfrac{120}{1-q^2}+q\dfrac{120}{1-q^2}=130 \end{cases}$, значит, $|q|\neq 1;$

$120+120q=130-130q^2;\quad 13q^2+12q-1=0;$

$q=\dfrac{-12+\sqrt{144+5^2}}{26}=\dfrac{1}{13}$ или q=–1, чего быть не может, значит, $|q|=\dfrac{1}{13}<1;$

4) $\begin{cases} b_2+b_4=68 \\ b_2-b_4=60 \end{cases};\qquad 2b_2=68+60=128;\ \ b_2=64;$

$b_2-(-b_4)=68-60=8;\ 2b_4=8;\ \ b_4=4;\ \ b_2=b_1-q=64;$

$b_4=b_1-q^3=4,$ значит, $\dfrac{b_4}{b_2}=\dfrac{b_1q^3}{b_1q}=\dfrac{4}{64};\ \ q^2=\dfrac{12}{16},$ значит, $|q|=\dfrac{1}{4}<1.$

107. 1) $1{,}10(209)=x;\ \ 110,(209)=100\cdot x;\ \ 100000\cdot x=110209,(209);$

$100000\cdot x-100\cdot x=110209,(209)-110,(209);$

$110099=99900x;\ \ x=\dfrac{110099}{99900}=1\dfrac{10199}{99900};$

2) $0{,}108(32)=x;\ \ 108,(32)=100\cdot x;\ \ 108{,}32(32)=100000\cdot x;$

$100000\cdot x-1000\cdot x=10832,(32)-108,(32);$

$10724=99000\cdot x;\ \ x=\dfrac{10724}{99000}=\dfrac{2681}{24750}.$

108. $b_n>0;\ \ b_1+b_2+b_3=39;\ \ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}=\dfrac{13}{27};\ \ |q|<1;$

$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=39 \\ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_1\cdot q}+\dfrac{1}{b_1\cdot q^2}=\dfrac{13}{27} \end{cases};\ \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=39 \\ q^2+q+1=\frac{13}{27}b_1\cdot q^2 \end{cases};\ (1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2})\cdot\dfrac{27}{13}=\dfrac{39}{1+q+q^2};$

$(1+q+q^2)^2=\dfrac{169\cdot q^2}{3};\ 1+q+q^2=\dfrac{13\cdot q}{3}$ или $1+q+q^2=-\dfrac{13\cdot q}{3};$

$3q^2-10q+3=0;$ или $3q^2-16q+3=0$

$q_1=\dfrac{10+8}{6};\ q_1=3>1,$ или $q_3=\dfrac{10-8}{6}=\dfrac{1}{3};\ \ q_4=\dfrac{-16+\sqrt{220}}{6}<0;$

$q_2=\dfrac{-16-\sqrt{220}}{6}<0;$ значит, $q=\dfrac{1}{3};$

$$b_1 = \frac{39}{1+q+q^2} = \frac{39}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{39 \cdot 9}{9+3+1} = 27; \qquad S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27 \cdot 3}{2} = 40{,}5.$$

109. $\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{43+\sqrt{43^2-1800}}{2}}+\sqrt{\frac{43-\sqrt{43^2-1800}}{2}}+$

$+\sqrt{\frac{43+\sqrt{43^2-1800}}{2}}-\sqrt{\frac{43-\sqrt{43^2-1800}}{2}}=2\sqrt{\frac{43-\sqrt{1849-1800}}{2}}=2\sqrt{\frac{43+\sqrt{49}}{2}}=$

$=2\sqrt{\frac{43+7}{2}}=2\sqrt{\frac{50}{2}}=2\sqrt{25}=10\cdot$

110. $a=(4-3\sqrt{2})^2+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{5}=16-24\sqrt{2}+18+$

$+8\left(\sqrt{\frac{34+\sqrt{1156-1152}}{2}}-\sqrt{\frac{34+\sqrt{1156-1152}}{2}}\right)-\sqrt{5}=34-$

$-24\sqrt{2}+8\cdot(3\sqrt{2}-4)-\sqrt{5}=34-24\sqrt{2}+24\sqrt{2}-32-\sqrt{5}=\ =2-\sqrt{5}$ **;**

$2-\sqrt{5}<0$, так как $2<\sqrt{5}$, значит, $a<0$.

111. 1) $a=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{5}{3+2\sqrt{2}};\ \ \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}>3{,}9;\ \ \frac{5}{3+2\sqrt{2}}>0{,}8;$

$b=\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}<3{,}4;$ значит, $b<3{,}4<4{,}7<a$, значит, $b<a$;

2) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3};\ \ \sqrt{2}<1{,}4143;\ \ \sqrt{3}<1{,}7321;\ \ a<3{,}1464<3{,}1622<\sqrt{10}=b,$
значит, $a<b$;

3) $a=5-\sqrt{5};\ \ \sqrt{15}<3{,}873;\ \ a>1{,}127;\ \ \sqrt{17}<4{,}124;\ \ b<1{,}124<1{,}127<a,$
значит, $b<a$;

4) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12};\ \ \sqrt{13}<3{,}604;\ \ \sqrt{12}>3{,}464;\ \ \sqrt{11}<3{,}317;$
$a<0{,}14<0{,}147<b$.

112. 1) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}=-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

2) $\frac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}(5-\sqrt{10})}{(5-\sqrt{10})(5+\sqrt{10})}=\frac{\sqrt{5}(5-\sqrt{10})}{25-10}=\frac{\sqrt{5}(5-\sqrt{10})}{15}=$

$=\frac{5\sqrt{5}(\sqrt{5})^2\cdot\sqrt{2}}{15}=\frac{5\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{15}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$;

3) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(2)^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$; 4) $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{27}}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$;

5) $\frac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}=\frac{3(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})}=\frac{3(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$

$=\frac{3(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{3(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}=(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$;

6) $\frac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{11((\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})((\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)}=\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{3+2}=\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$;

7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{2}+2-3)}=$

$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$;

8) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})((\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2)}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$.

113. 1) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})=(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})\times$

$\times((\sqrt[3]{7})^2+\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2)=(\sqrt[3]{7})^3-(\sqrt[3]{4})^3=7-4=3$;

2) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})=((\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5}))\times$

$\times(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})=(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{2})^5=2+5=7$.

114. 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=$

$=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{y}$;

2) $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=$

$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{y^2}=2\sqrt[3]{xy}$;

3) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}=\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[4]{x}$;

4) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}-1=\frac{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-1=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-$

$-1=\frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{xy}}-1=\frac{x+y+\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$.

115. 1) $\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^3=\left(\frac{ab(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^3=\frac{a^3b^3}{b}=a^2b^2$;

2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\frac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})\cdot\sqrt[3]{ab}((\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{b})^2)}{\sqrt[3]{ab}\cdot(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}=$

$=\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\times\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}})}=1$;

4) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})((a^{\frac{2}{3}})^2-\sqrt[3]{a^2b^2}+(b^{\frac{2}{3}})^2)}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}=$

$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})((a^{\frac{2}{3}})^2-\sqrt[3]{a^2b^2}+(b^{\frac{2}{3}})^2)=a^2+b^2$.

116. 1) $\left(\dfrac{4a^2-9a^{-2}}{2a-3a^{-1}}+\dfrac{4a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2=\left(\dfrac{(2a-3a^{-1})(2a+3a^{-1})}{2a-3a^{-1}}+\dfrac{4a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2=$

$=\left(\dfrac{(2a-3a^{-1})(a-a^{-1})a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2=\left(\dfrac{2a--2+3-3a^{-2}+a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2=$

$=\left(\dfrac{3a^2-3}{a-a^{-1}}\right)^2=\left(\dfrac{3a(a-a^{-1}}{a-a^{-1}}\right)^2=(3a)^2=9a^2$;

2) $\left(\dfrac{1}{(a+b)^{-2}}+\left(\dfrac{a-b}{a^3+b^3}\right)^{-1}\right)\cdot(ab)^{-1}=((a+b)^2-\dfrac{a^3+b^3}{a-b})\cdot\dfrac{1}{ab}=$

$=(a+b)^2-\dfrac{a^3-ab^2+ba^2-b-a^3+b^3}{(a-b)\cdot ab}=\dfrac{ab(a-b)}{ab(a-b)}=1$.

117. 1) $\left(\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2+(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}{a+\sqrt{ab}}\right)^5\cdot\sqrt[3]{a^{10}\sqrt{a}}=\left(\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)^5\cdot\sqrt[6]{a^{21}}=$

$=\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}}\right)^5\cdot a^{\frac{21}{6}}==32\cdot a^{\frac{21}{6}-\frac{5}{2}}=32\cdot a^{\frac{21}{6}-\frac{15}{6}}=32a$;

2) $\left(\dfrac{a-a^{-1}}{(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}+1)}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}=\left(\dfrac{a-a^{-1}}{(\sqrt[3]{a^{-1}}+1)^2-a^{\frac{2}{3}}}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}=$

$=\left(\dfrac{a-a^{-1}+a^{-1}+2a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{a^{-1}}-a^{\frac{2}{3}}+1}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}=(a^{\frac{1}{3}})^{-3}=a^{-1}$;

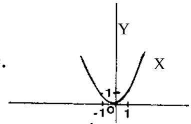
3) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{ab\sqrt[3]{a}+b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}}\right)\cdot\dfrac{1}{a+b}=\left(\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{ab(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}}\right)\cdot$

$\cdot\dfrac{1}{a+b}=(a+\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab})\cdot\dfrac{1}{a+b}=1$.

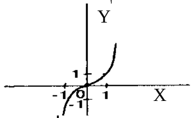
118. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1}=$

$=\sqrt[3]{1-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+6}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2}=2$

119. 1) $y = x^6$; область определения — R; множество значений — неотрицательные числа, т.е. $y \geq 0$.

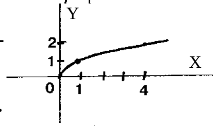


2) $y = x^5$; область определения — множество R; множество значений — множество R.



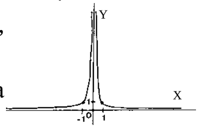
3) $y = x^{\frac{1}{2}}$; область определения — неотрицательные числа $x \geq 0$;

множество значений — неотрицательные числа $y \geq 0$.



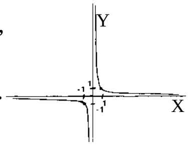
4) $y = x^{-2}$; область определения — множество R, кроме $x = 0$;

множество значений — положительные числа $y > 0$.



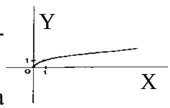
5) $y = x^{-2}$; область определения — множество R, кроме $x = 0$;

множество значений — множество R, кроме $y = 0$.



6) $y = x^{\frac{1}{3}}$; область определения — неотрицательные числа $x \geq 0$;

множество значений — неотрицательные числа $y \geq 0$.



120. 1) $p = \sqrt{7}$ — возрастающая при $x > 0$;

2) $p = \frac{3}{\pi}$; $\pi > 3{,}14$; $\frac{3}{\pi} < 1$ — возрастающая при $x > 0$;

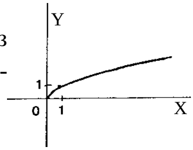
3) $p = 1 - \sqrt{3}$; $\sqrt{3} > 1$; $1 - \sqrt{3} < 0$ — убывает при $x > 0$;

4) $p = \frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi} > 0$ — возрастает при $x > 0$;

5) $p = 3 - \pi$; $3 - \pi < 0$ — убывает при $x > 0$;

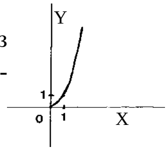
6) $p = 0,(3)$; — возрастает при $x > 0$.

121. 1) График функции $y = x^{\frac{2}{5}}$ проходит через точку (0; 0) расположен выше оси OX, функция возрастающая.



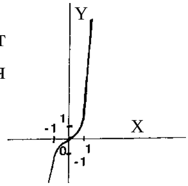
x	1	32
y	1	4

2) $y = x^{\frac{5}{2}}$ — график этой функции проходит через точку (0; 0) расположен выше оси OX, функция возрастающая.



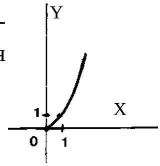
x	1	4
y	1	32

3) $y = x^{-5} = x^{\frac{1}{5}}$ — график этой функции проходит через точку (1; 1) расположен выше оси OX, функция убывающая.



x	0,5	4
y	32	1/32

4) $y = x^{\sqrt{3}}$ — график этой функции проходит через точку (0; 0) расположен выше оси OX, функция возрастающая.



x	1
y	1

122. 1) $4{,}1^{2{,}7}$ сравнить с 1, $1 = (4{,}1)^0$; $4{,}1^{2{,}7} > (4{,}1)^0$;

2) $(0{,}2)^{0{,}3} < 1 = (0{,}2)^0$, так как $0{,}2 < 1$;

3) $(0{,}7)^{9{,}1} < 1 = (0{,}7)^0$, так как $0{,}7 < 1$, а $9{,}1 > 0$;

4) $\sqrt{3^{9{,}1}} = 3^{\frac{0{,}2}{2}} = 3^{0{,}1} > 1 = 3^0$, так как $0{,}1 > 0$.

123. 1) $y = x^{\sqrt{2}}$; $x^{\sqrt{2}} = x^1$, при $x = 0$ или $x = 1$, так как $\sqrt{2} > 1$, то на промежутке (0, 1), $x^{\sqrt{2}} < x$, а при $x > 1$, $x^{\sqrt{2}} > x$;

2) $y = x^{\pi}$; $x^{\pi} = x^1$, при $x = 0$ или $x = 1$, так как $\pi > 1$, то на промежутке (0, 1), $x^{\pi} < x$, а при $x > 1$, $x^{\pi} > x$.

124. 1) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$; $x^{\frac{1}{\pi}} = x^1$, при $x = 0$ или $x = 1$, так как $\dfrac{1}{\pi} > 1$, то на промежутке (0, 1), $x^{\frac{1}{\pi}} > x$, а при $x > 1$, $x^{\frac{1}{\pi}} < x$;

2) $y = x^{\sin 45^\circ}$; $x^{\sin 45^\circ} = x^1$, при $x = 0$ или $x = 1$, так как $\sin 45^\circ < 1$, то на промежутке (0, 1), $x^{\sin 45^\circ} > 0$, а при $x > 1$, $x^{\sin 45^\circ} < x$.

125. 1) $3{,}1^{7{,}2} < 4{,}3^{7{,}2}$, т.к. $3{,}1 < 4{,}3$; 2) $\left(\dfrac{10}{11}\right)^{2{,}3} < \left(\dfrac{12}{11}\right)^{2{,}3}$, т.к. $\left(\dfrac{10}{11}\right) < \left(\dfrac{12}{11}\right)$;

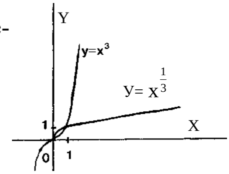
3) $(0{,}3)^{0{,}3} < (0{,}2)^{0{,}3}$, т.к. $0{,}3 < 0{,}2$; 4) $2{,}5^{-3{,}1} < \left(\dfrac{1}{2{,}5}\right)^{0{,}3}$, т.к. $2{,}5^{-3{,}1} = \dfrac{1}{2{,}6}$;

5) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{-2} = \left(\dfrac{9}{7}\right)^2 > \left(\dfrac{8}{10}\right)^{-2} = \left(\dfrac{8}{10}\right)^2$, т.к. $\dfrac{9}{7} > \dfrac{8}{10}$;

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$, т.к. $\frac{14}{15} < \frac{15}{16}$;

7) $(4\sqrt{3})^{\frac{2}{5}} > (3\sqrt{4})^{\frac{2}{5}}$, т.к. $4\sqrt{3} > 3\sqrt{4} = 6$;

8) $\left(2\sqrt[3]{6}\right)^{-0,2} = \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{6}}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}\right)^{0,2} = \left(6\sqrt[3]{2}\right)^{-0,2}$, т.к. $\frac{1}{2\sqrt[3]{6}} > \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$.

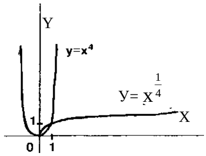


126. 1) $y = x^3$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;

$y = x^{\frac{1}{3}}$ — область определения — $x \geq 0$;

множество значений — $y \geq 0$;

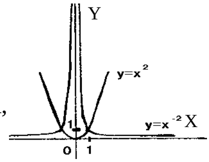


2) $y = x^4$ — область определения — множество R;

множество значений — $y \geq 0$;

$y = x^{\frac{1}{4}}$ — область определения — $x \geq 0$;

множество значений — $y \geq 0$;

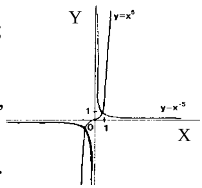


3) $y = x^2$ — область определения — множество R;

множество значений — $y \geq 0$;

$y = x^{-2}$ — область определения — множество R, кроме $x = 0$;

множество значений — $y \geq 0$;



4) $y = x^5$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;

$y = x^{-5}$ — область определения — множество R, кроме $x = 0$;

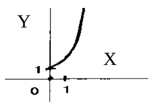
множество значений — множество R, кроме $y = 0$.

127. 1) $y = x^{1-\pi}$, т.к. $\pi > 1$, то $1 - \pi < 0$;

$x^{1-\pi} = x^1$, если $x = 1$, т.к. $1 - \pi < 1$, то на промежутке (0; 1), $x^{1-\pi} > x$, а при $x > 1$ $x^{1-\pi} < x$;

2) $y = x^{1-\sqrt{2}}$, т.к. $\sqrt{2} > 1$, то $1 - \sqrt{2} < 0$;

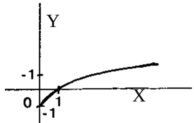
$x^{1-\sqrt{2}} = x^1$, если $x = 1$, т.к. $1 - \sqrt{2} < 1$, то на промежутке (0; 1), $x^{1-\sqrt{2}} > x$, а при $x > 1$, $x^{1-\sqrt{2}} < x$.



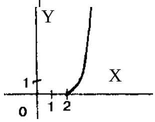
128. 1) $y = x^{\pi+1}$ область определения — $x \geq 0$;

множество значений — $y \geq 1$;

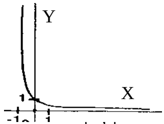
2) $y = x^{\frac{1}{\pi}-1}$ область определения — $x \geq 0$;
множество значений — $y \geq -1$;



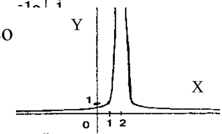
3) $y = (x-2)^{\pi}$ область определения — $x \geq 2$;
множество значений — $y \geq 0$;



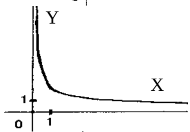
4) $y = (x+1)^{-\sqrt{2}}$ область определения — $x > -1$;
множество значений — $y > 0$;



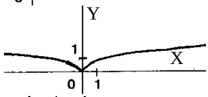
5) $y = (x-2)^{-2}$ область определения — множество R, кроме $x = 2$;
множество значений — $y > 0$;



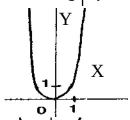
6) $y = \dfrac{2}{x^{\sqrt{2}}}$ область определения — $x > 0$;
множество значений — $y > 0$.



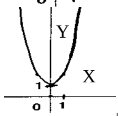
129. 1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$ область определения — множество R;
множество значений — $y \geq 0$;



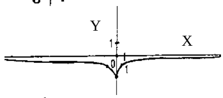
2) $y = |x|^{5}$ область определения — множество R;
множество значений — $y \geq 0$;



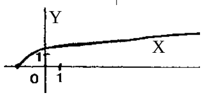
3) $y = |x|^{3} + 1$ область определения — множество R;
множество значений — $y \geq 1$;



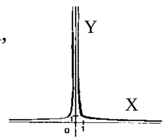
4) $y = |x|^{\frac{1}{5}} - 2$ область определения — множество R;
множество значений — $y \geq -2$;



5) $y = |x+2|^{\frac{1}{5}}$ область определения — множество R;
множество значений — $y \geq -2$;



6) $y = |2x|^{-3}$ область определения — множество R, кроме $x = 0$;
множество значений — $y > 0$.



130. 1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{\frac{3}{5}}$; область определения функции $y = x^{\frac{3}{5}}$ — $x \geq 0$;

$\sqrt[5]{x} = x^{\frac{3}{5}}$; $x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{5}}$; $x = x^3$ — при $x = 0$, $x = 1$, или $x = -1$, но $x = -1$ — не входит в область определения, значит, точки пересечения графиков (0; 0) и (1; 1).

2) $y = \sqrt[7]{x}$ и $y = x^{\frac{5}{7}}$; область определения функции $x \geq 0$;

$\sqrt[7]{x} = x^{\frac{5}{7}}$; $x = x^5$ — при $x = 0$, $x = 1$, или $x = -1$, но $x = -1$ — не входит в область определения, значит, точки пересечения графиков (0; 0) и (1; 1).

131. 1) $y = 3x - 1$ — обратима, т.к. каждое свое значение функция принимает один раз.

2) $y = x^2 + 7$ — не обратима, т.к., например, значение 8 она принимает при $x = 1$ или $x = -1$.

3) $y = \frac{1}{x}$ — обратима, т.к. каждое свое значение функция принимает один раз.

4) $y = \sqrt{x}$ — обратима, т.к. каждое свое значение функция принимает один раз.

5) $y = x^4$ — не обратима, т.к., например, значение 1 она принимает при $x = 1$ или $x = -1$.

6) $y = x^4$, $x < 0$ — обратима, т.к. каждое свое значение функция принимает один раз.

132. 1) $y = 2x - 1$; $x = \frac{1}{2}(y + 1)$, значит, функция $x = \frac{1}{2}(x + 1)$ — обратная к данной.

2) $y = -5x + 4$; $x = \frac{1}{5}(4 - y)$, значит, функция $x = \frac{1}{5}(4 - x)$ — обратная к данной.

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; $x = 3y + 2$, значит, функция $y = 3x + 2$ — обратная к данной.

4) $y = \frac{3x - 1}{2}$; $x = \frac{1}{3}(2y + 1)$, значит, функция $y = \frac{1}{3}(2x + 1)$ — обратная к данной.

5) $y = x^3 + 1$; $x = \sqrt[3]{y - 1}$, значит, функция $y = \sqrt[3]{x - 1}$ — обратная к данной.

6) $y = x^3 - 3$; $x = \sqrt[3]{y + 3}$, значит, функция $y = \sqrt[3]{x + 3}$ — обратная к данной.

133. 1) $y = -2x + 1$ — область определения — множество R;
множество значений — множество R;
область определения обратной функции — множество R;
множество значений обратной функции — множество R;

2) $y = \frac{1}{4}x - 7$ — область определения — множество R;
множество значений — множество R;
область определения обратной функции — множество R;
множество значений обратной функции — множество R;

3) $y = x^3 - 1$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;
область определения обратной функции — множество R;
множество значений обратной функции — множество R;

4) $y = (x-1)^3$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;
область определения обратной функции — множество R;
множество значений обратной функции — множество R;

5) $y = \frac{2}{x}$ — область определения — множество R, кроме $x = 0$;

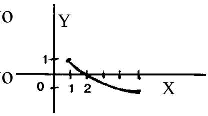
множество значений — множество R, кроме $y = 0$;
область определения обратной функции — множество R, кроме x = 0;
множество значений обратной функции — множество R, кроме y = 0;

6) $y = \frac{3}{x-4}$ — область определения — множество R, кроме $x = 4$;

множество значений — множество R, кроме $y = 0$;
область определения обратной функции — множество R, кроме x > 0;
множество значений обратной функции — множество R, кроме y = 4.

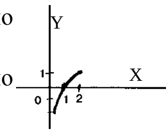
134. Т.к. график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой y=x.

а) точка симметричная точке (1, 1) относительно прямой $y = x$ — точка (1,1).



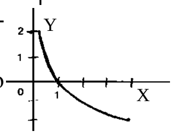
Точка симметричная точке (0, 2) относительно прямой y=x — точка (2, 0).

б) точка симметричная точке (0, 1) относительно прямой $y = x$ — точка (1,0).



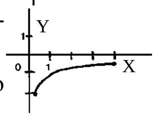
Точка симметричная точке (1, 2) относительно прямой $y = x$ — точка (2, 1).

в) точка симметричная точке (— 2, 4) относительно прямой $y = x$ — точка (4, — 2).



Точка симметричная точке (0, 1) относительно прямой $y = x$ — точка (1, 0).

г) точка симметричная точке (— 1, 1) относительно прямой $y = x$ — точка (1, — 1).



Точка симметричная точке ($-\frac{1}{2}$, 4) относительно прямой $y = x$ — точка (4, $-\frac{1}{2}$).

135. 1) $y = -x^3$; $x = \sqrt[3]{-y} = -\sqrt[3]{y}$, значит, функция $x = -\sqrt[3]{y}$ — обратная к функции $y = -x^3$, и данные функции взаимно обратимы.

2) $y = -x^5$; $x = \sqrt[5]{-y} = -\sqrt[5]{y}$, значит, функция $x = -\sqrt[5]{y}$ — обратная к функции $y = -x^5$, и данные функции не являются взаимно обратимыми.

3) $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$; $x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, значит, функция $x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ — обратная к функции $y = x^{-3}$, и данные функции взаимно обратимы.

4) $y = \sqrt[5]{x^3}$; $y = \sqrt[3]{x^5} = y\sqrt[3]{x^2}$, значит, функция $y = x\sqrt[3]{x^2}$ — обратная к функции $y = \sqrt[5]{x^3}$, и данные функции взаимно обратимы.

136. 1) $y = -x\frac{1}{2}$; $\begin{cases} y \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$; $x = y^2$, значит, функция $y = x^2$ является обратной к данной при $x \le 0$.

2) $y = -x^{\frac{3}{5}}$; $x = \sqrt[3]{-y^5} = -\sqrt[3]{y^5}$, значит, функция $x = -\sqrt[3]{y^5}$ является обратной к данной.

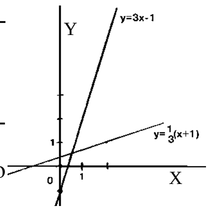
3) $y = x^{\frac{3}{2}}$; $\begin{cases} y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$; $x = \sqrt[3]{y^2}$, значит, функция $x = \sqrt[3]{y^2}$ является обратной к данной при $x \ge 0$.

4) $y = -x^{\frac{1}{3}}$; $x = (-y)^3 = -y^3$, значит, функция $y = -x^3$ является обратной к данной.

137. 1) y = 3x – 1 — область определения — множество R;

множество значений — множество R;

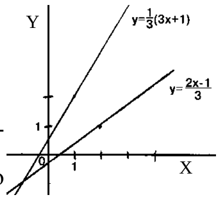
$x = \frac{1}{3}(y+1)$, значит, функция $y = \frac{1}{3}(x+1)$ — обратная к данной — область определения — множество R, множество значений — множество R.



2) $y = \frac{2x-1}{3}$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;

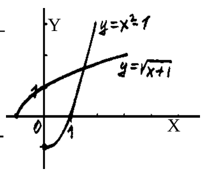
$x = \frac{1}{2}(3y+1)$, значит, функция $y = \frac{1}{2}(3x+1)$ — обратная к данной — область определения — множество R, множество значений — множество R.



3) $y = x^2 - 1$, при $x \ge 0$ — область определения — множество R;

множество значений — $y \ge -1$;

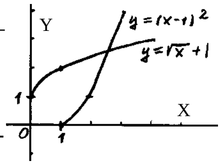
$x = \sqrt{y+1}$, значит, функция $y = \sqrt{x+1}$ — обратная к данной — область определения — $x \ge -1$, множество значений — $y \ge 0$.



4) $y=(x-1)^2$, при $x \ge 1$ — область определения — $x \ge -1$;

множество значений — $y \ge 0$;

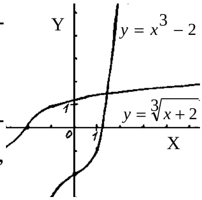
$x=\sqrt{y}+1$, значит, функция $y=\sqrt{x}+1$ — обратная к данной — область определения — $x \ge 0$, множество значений — $y \ge 1$.



5) $y=x^3-2$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;

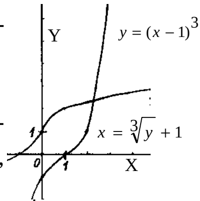
$x=\sqrt[3]{y+2}$, значит, функция $y=\sqrt[3]{x+2}$ — обратная к данной — область определения — множество R, множество значений — множество R.



6) $y=(x-1)^3$ — область определения — множество R;

множество значений — множество R;

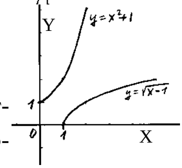
$x=\sqrt[3]{y}+1$, значит, функция $y=\sqrt[3]{x}+1$ — обратная к данной — область определения — множество R, множество значений — множество R.



7) $y=\sqrt{x-1}$ — область определения — $x \ge 1$;

множество значений — $y \ge 0$;

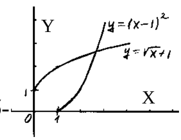
$x=y^2+1$, значит, функция $y=x^2+1$ — обратная к данной — область определения — $x \ge 0$, множество значений — $y \ge 1$.



8) $y=\sqrt{x}+1$ — область определения — $x \ge 0$;

множество значений — $y \ge 1$;

$x=(y-1)^2$, значит, функция $y=(x-1)^2$ — обратная к данной — область определения — $x \ge 1$, множество значений — $y \ge 0$.



138. 1) $(x+7)\cdot 3=2x+14$; $3x+21=2x+14$; $x+7=0$; $x=-7$.

2) $x^2+\dfrac{1}{x^2-4}=4+\dfrac{1}{x^2-4}$; $x^2-4=0$, но решения этого уравнения обращают знаменатели дробей исходного уравнения в 0, значит решений нет.

3) $\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{1-2x}{x^2-1}$, умножая обе части данного уравнения на x^2-1 мы можем прибрести новые корни, значит, необходимо выполнить проверку.

$x-2=1-2x$; $3x=3$; $x=1$, но при $x=1$ знаменатель дробей в исходном уравнении обращается в 0, значит корней нет.

4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)}=\frac{2}{x+2}$; $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)}-\frac{2}{x+2}=0$; $5x-15-2x+6=0$; $3x=9$; $x=3$, но при $x=3$ знаменатель дробей в исходном уравнении превращается в 0, значит корней нет.

139. 1) $3x-7=5x+5$ равносильно уравнению $2x+12=0$, т.к. каждое из них имеет единственный корень $x=-6$.

2) $\frac{1}{5}(2x-1)$; $2x-1=5$; $2x=6$; $x=3$;

$\frac{3x-1}{8}=1$; $3x-1=8$; $3x=9$; $x=3$, значит, данные уравнения равносильны.

3) $x^2-3x+2=0$; $D=9-8=1$; $x=\frac{3+1}{2}=2$ или $x=1$.

$x^2+3x+2=0$; $D=9-8=1$; $x=\frac{-3+1}{2}=-1$ или $x=-2$, значит, данные уравнения не равносильны.

4) $(x-5)^2=3(x-5)$; $x^2-10x+25=3x-15$; $x^2-13x+40=0$;

$D=169-160=9$; $x=\frac{13+3}{2}=8$ или $x=5$.

$x-5=3$; $x=8$, значит, данные уравнения не равносильны.

5) $x^2-1=0$; $x^2=1$; $x=1$ или $x=-1$;

$2^{x-1}=0$ — не имеет действительных корней, значит, данные уравнения не равносильны.

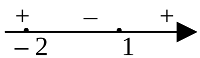
6) $|x-2|=-3$ — не имеет действительных корней,

$3^x=(-1)^3$ — не имеет действительных корней, значит, данные уравнения равносильны.

140. 1) $2x-1\ge 2$; $2x\ge 3$; $x\ge 1{,}5$.

$2(x-1)\ge 1$; $x-1\ge 0{,}5$; $x\ge 1{,}5$, значит, данные неравенства равносильны.

2) $(x-1)(x+2)<0$. Решая это неравенство методом интервалов получаем:



$-2<x<1$

$x^2+x<2$; $x^2+x-2<0$; решим уравнение $x^2+x-2=0$; $D=1+8=9$; $x=\frac{-1+3}{2}=1$ или $x=-2$. Ветви этой параболы направлены вверх, значит, $x^2+x-2<0$ при $-2<x<1$, значит, данные неравенства равносильны.

3) $(x-2)(x+1)<3x+3$; $x^2+x-2x-2-3x-3<0$; $x^2-4x-5<0$; решим уравнение $x^2-4x-5=0$, $x=\frac{4+6}{2}=5$ или $x=-1$, ветви этой параболы направлены вверх, значит, $x^2-4x-5<0$ при $-1<x<5$.

$x-2<3$; $x<5$, значит, данные неравенства не равносильны.

4) $x(x+3)\geq 2x$; $x^2+3x-2x\geq 0$; $x(x+1)\geq 0$;

$x\geq 0$ и $x\leq -1$;

$x^2(x+3)\geq 2x^2$; $x^2(x+3-2)\geq 0$ $x^2(x+1)\geq 0$, т.к. $x^2\geq 0$,

то $x+1\geq 0$; $x\geq -1$, значит, данные неравенства не равносильны.

141. 1) $x-3=0$; $x=3$;

$x^2-5x+6=0$, корни этого уравнения $x=3$ и $x=2$. Значит, второе уравнение является следствием первого.

2) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$; $\begin{cases}x^2-3x+2=0\\x-1\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-2)(x-1)=0\\x-1\neq 0\end{cases}$. Значит, это уравнение имеет единственный корень x = 2, а уравнение $x^2-3x+2=0$ имеет два корня $x=1$ и $x=2$, значит второе уравнение является следствием первого.

142. 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{4x}{x^2-1}$; $\frac{x(x-1)+2x(x+1)}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$;

$\frac{x^2-x+2x^2+2x-4x}{x^2-1}=0$; $\frac{3x^2-3x}{x^2-1}=0$; $\frac{3x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$; $\frac{3x}{x+1}=0$; $x=0$;

2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$; $\frac{x-1-1}{x-2}-\frac{2}{x}=0$; $\frac{x-2}{x-2}-\frac{2}{x}=0$; $1-\frac{2}{x}=0$; $\frac{x-2}{x}=0$;

$x=2$;

3) $(x-3)(x-5)=3(x-5)$; $(x-3)(x-5)-3(x-5)=0$;

$(x-3-3)(x-5)=0$; $(x-6)(x-5)=0$; $x=6$ или $x=5$;

4) $(x-2)(x^2+1)=2(x^2+1)$; $(x-2)(x^2+1)-2(x^2+1)=0$;

$(x-2-2)(x^2+1)=0$; $(x-4)(x^2+1)=0$; $x=4$, т.к. $x^2+1=0$ не имеет действительных корней.

143. 1) $\frac{x+3}{2+x^2}<3$; $\frac{x+3-3(2+x^2)}{2+x^2}<0$; $\frac{x+3-6-3x^2}{2+x^2}<0$;

$\frac{-3x^2+x-3}{2+x^2}<0$; $\frac{3x^2-x+3}{2+x^2}>0$; т.к. $2+x^2>0$, найдем где $3x^2-x+3>0$

решим $3x^2-x+3=0$; $D=1-36=35<0$, т.к. ветви этой параболы направлены вверх, то она не пересекает ось абсцисс, и $3x^2-x+3>0$ при $x\in R$.

2) $\frac{x-2}{5-x}>1$; $\frac{x-2-5+x}{5-x}>0$; $\frac{2x-7}{5-x}>0$;

$$\begin{cases} 2x-7>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x-7<0 \\ 5-x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3,5 \\ x<5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<3,5 \\ x>5 \end{cases}$$ Эта система не имеет решений.

Значит $3,5<x<5$.

144. 1) $|2x-1|=3;$ $2x-1=3$ или $2x-1=-3$; $x=2$ или $x=-1$;

$2x-1=3;$ $x=2$, значит, эти уравнения не равносильны.

2) $\frac{3x-2}{3}-\frac{4-x}{2}-\frac{3x-5}{6}=2x-2;$ $\frac{6x-4-12+3x-3x+5-12x+12}{6}=0;$

$\frac{1-6x}{6}=0;$ $x=\frac{1}{6}$; $2x+3=\frac{10}{3};$ $2x=\frac{1}{3};$ $x=\frac{1}{6}$.

Значит данные уравнения равносильны.

145. 1) $2x-1=4-1,5x;$ $3,5x=5;$ $x=1\frac{3}{7}$;

$3,5x-5=0;$ $3,5x=5;$ $x=1\frac{3}{7}$, значит, данные уравнения равносильны.

2) $x(x-1)=2x+5;$ $x^2-x-2x-5=0;$ $x^2-3x-5=0$. Поскольку в ходе этих преобразований мы данное уравнение не умножали и не делили на переменную, то мы не потеряли и не приобрели корней, значит, данные уравнения равносильны.

3) $2^{3x+1}=2^{-3};$ $3x+1=-3$, значит, данные уравнения равносильны.

4) $\sqrt{x+2}=3;$ $(\sqrt{x+2})^2=(3)^2;$ $x+2=9;$ $x=7$, делаем проверку $\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$, значит, данные уравнения равносильны.

146. 1) $|x|=\sqrt{5};$ $x=\sqrt{5}$ или $x=-\sqrt{5}$;

$\sqrt{x^2}=5;$ $x^2=25;$ $x=5$ или $-\sqrt{5}$, все корни различны, значит, ни одно из данных уравнений не является следствием другого.

2) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-3}{x+2};$ $\begin{cases} (x-2)(x+2)=(x-3)(x+3) \\ x+3\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases};$ $\begin{cases} x^2-4=x^2-9 \\ x+3\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases}.$

Эта система не имеет действительных решений.

$(x-2)(x+2)=(x-3)(x+3)$, это уравнение не имеет действительных решений, значит, каждое из данных уравнений является следствием другого.

147. $\frac{1}{3x+1}-\frac{2}{3x-1}-\frac{5x}{9x^2-1}=\frac{3x^2}{1-9x^2};$ $\frac{3x-1-2(3x+1)-5x}{9x^2-1}-\frac{3x^2}{1-9x^2}=0;$

$\frac{-2x-1-6x-2+3x^2}{9x^2-1}=0;$ $\frac{3x^2-8x-3}{9x^2-1}=0$;

$3x^2-8x-3=0$; $x=3$ или $x=-\frac{1}{3}$, но при $x=-\frac{1}{3}$ знаменатель исходной дроби обращается в 0, значит $x=3$.

148. 1) $\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+4}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$; $\frac{3(x+1)-(4x-1)(x-1)-(x^2+5)+5(x^2-1)}{x^2-1}=0$;

$\frac{3x+3-4x^2+4x+x-1-x^2-5+5x^2-5}{x^2-1}=0$; $\frac{8x-8}{x^2-1}=0$; $8x=8$; $x=1$, но при $x=1$ знаменатель обращается в 0, значит, действительных корней нет.

2) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(3+x)}{4-x^2}$; $\frac{(x+2)^2-x(x-4)-(x-2)^2-4(3+x)}{x^2-4}=0$;

$\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-x^2+4x-4-12-4x}{x^2-4}=0$; $\frac{-x^2+8x-12}{x^2-4}=0$; $\frac{x^2-8x+12}{x^2-4}=0$;

$x^2-8x+12=0$; $x=6$ или $x=2$, но при $x=2$ знаменатель обращается в 0, значит $x=6$.

149. 1) $x^3-3x^2+2x-6>2x^3-x^2+4x-2$;

$x^3-3x^2+2x-6-2x^3+x^2-4x+2>0$; $-x^3-2x^2-2x-4>0$;

$x^3+2x^2+2x+4<0$; $x^2(x+2)+2(x+2)<0$; $(x^2+2)(x+2)<0$.

Т.к. $x^2+2>0$ для любого действительного x, значит, x + 2 < 0 $x<-2$.

2) $x^3-3x^2-4x+12>-3x^3+x^2+12x-4$;

$x^3-3x^2-4x+12+3x^3-x^2-12x+4>0$; $4x^3-4x^2-16x+16>0$;

$2x^3-2x^2-8x+8>0$; $x^3-x^2-4x+4>0$; $x^2(x-1)-4(x-1)>0$;

$(x^2-4)(x-1)>0$; $(x-2)(x+2)(x-1)>0$.

– + – +

– 2 1 2 x

Решая это неравенство методом интервалов получаем: $-2<x<1$ и $x>2$.

150. 1) $(x-3)^{x^2-x-2}=1$; $\begin{cases}(x-3)^{x^2-x-2}=(x-3)^0\\ x-3\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x-2=0\\ x\neq 3\\ x-3=1\end{cases}$; $x_1=2$ или $x_2=-1$ или $x_3=4$.

2) $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$; $\begin{cases}(x^2-x-1)^{x^2-1}=(x^2-x-1)^0\\ x^2-x-1\neq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}x^2-1=0\\ x^2-x-1=1\\ x^2-x-1\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)(x+1)=0\\ (x-2)(x+1)=1\\ x^2-x-1\neq 0\end{cases}$. Итак, $x_1=1$; $x_2=-1$ или $x_3=2$.

3) $(x+3)^{x^2-4}=(x+3)^{-3x}$;

$\begin{cases} x+3=1 \\ x+3=0 \\ x^2-4=-3x \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-3 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}$. Итак, $x_1=-4$, $x_2=-3$, $x_3=-2$, $x_4=1$.

4) $(x+3)^{x^2-3}=(x+3)^{2x}$;

$\begin{cases} x^2-3=2x \\ x+3=0 \\ x+3=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x_1=-3 \\ x_2=-2 \end{cases}$. Итак, $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=-1$, $x_4=3$.

151. 1) $\sqrt{x}=2$; $(\sqrt{x})^2=2^2$; $x=4$; 2) $\sqrt{x}=7$; $(\sqrt{x})^2=7^2$; $x=49$;

3) $\sqrt[3]{x}=2$; $(\sqrt[3]{x})^3=2^3$; $x=8$; 4) $\sqrt[3]{x}=-3$; $(\sqrt[3]{x})^3=-3^3$; $x=-27$;

5) $\sqrt[3]{1-3x}=0$; $(\sqrt[3]{1-3x})^3=0^3$; $1-3x=0$; $x=\frac{1}{3}$;

6) $\sqrt[4]{x}=1$; $(\sqrt[4]{x})^4=1^4$; $x=1$;

7) $\sqrt[4]{2-x}=0$; $(\sqrt[4]{2-x})^4=0^4$; $2-x=0$; $x=2$.

152. 1) $\sqrt{x+1}=3$; $(\sqrt{x+1})^2=3^2$; $x+1=9$; $x=8$;

2) $\sqrt{x-2}=5$; $(\sqrt{x-2})^2=5^2$; $x-2=25$; $x=27$;

3) $\sqrt{4+x}=\sqrt{2x-1}$; $(\sqrt{4+x})^2=(\sqrt{2x-1})^2$; $4+x=2x-1$; $x=5$.

153. 1) $\sqrt[3]{2x+3}=1$; $(\sqrt[3]{2x+3})^3=1^3$; $2x+3=1$; $x=-1$;

2) $\sqrt[3]{1-x}=2$; $(\sqrt[3]{1-x})^3=2^3$; $1-x=8$; $x=-7$;

3) $\sqrt[3]{3x^2-3}=\sqrt[3]{8x}$; $(\sqrt[3]{3x^2-3})^3=(\sqrt[3]{8x})^3$; $3x^2-3=8x$;

$3x^2-3-8x=0$; $x_1=3$; $x_2=-\frac{1}{3}$.

154. 1) $x+1=\sqrt{1-x}$; $(x+1)^2=(\sqrt{1-x})^2$; $x^2+2x+1=1-x$;

$x^2+3x=0$; $x(x+3)=0$; $x_1=0$, $x_2=-3$;

Проверка показывает, что $x_2=-3$ — посторонний корень, значит, x=0.

2) $x=1+\sqrt{x+11}$; $(x-1)^2=(\sqrt{x+11})^2$; $x^2-2x+1=x+11$;

$x^2-3x-10=0$; $x_1=5$, $x_2=-2$;

Проверка показывает, что $x_2=-3$ — посторонний корень, значит, x=5.

3) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$; $(\sqrt{x+3})^2=(\sqrt{5-x})^2$; $x+3=5-x$; $2x=2$; $x=1$;

4) $\sqrt{x^2-x-3}=3$; $(\sqrt{x^2-x-3})^2=3^2$; $x^2-x-3=9$; $x^2-x-12=0$; $x_1=4$; $x_2=-3$;

155. 1) $\sqrt{x}-x=-12$; $\sqrt{x}=x-12$; $(\sqrt{x})^2=(x-12)^2$; $x=x^2-24x+144$;

$x^2-25x+144=0;\ \ x_1=16,\ \ x_2=9$.

Проверка показывает, что $x_2=9$ — посторонний корень, значит, x=16.

2) $x+\sqrt{x}=2(x-1);\ \ \sqrt{x}=2x-2-x;\ \ \sqrt{x}=x-2;\ \ (\sqrt{x})^2=(x-2)^2$;

$x^2-5x+4=0;\ \ x_1=4,\ x_2=1$.

Проверка показывает, что $x_2=1$ — посторонний корень, значит, $x=4$.

3) $\sqrt{x-1}=x-3;\ \ x-1=x^2-6x+9;\ \ x^2-7x+10=0;\ \ x_1=5,\ x_2=2$;

Проверка показывает, что $x_2=2$ — посторонний корень, значит, x=5.

4) $\sqrt{6+x-x^2}=(1-x);\ \ (\sqrt{6+x-x^2})^2=(1-x)^2$;

$6+x-x^2=x^2-2x+1;\ \ 2x^2-3x-5=0;\ \ x_1=2{,}5,\ x_2=-1$.

Проверка показывает, что $x_1=2{,}5$ — посторонний корень, значит, $x=-1$.

156. 1) $\sqrt{2x-34}=1+\sqrt{x};\ \ (\sqrt{2x-34})^2=(1+\sqrt{x})^2;\ \ 2x-34=1+2\sqrt{x}+x$;

$x-35=2\sqrt{x};\ \ (x-35)^2=(2\sqrt{x})^2;\ \ x^2-70x+1225=4x$;

$x^2-74x+1225=0;\ \ x=49,\ x_2=25$.

Проверка показывает, что $x_2=25$ — посторонний корень, значит, x = 49.

2) $\sqrt{5x}+\sqrt{14-x}=8;\qquad (\sqrt{5x}+\sqrt{14-x})^2=8^2$;

$5x+2\sqrt{5x(14-x)}+14-x=64;\ \ \sqrt{70x-5x^2}=25-2x$;

$(\sqrt{70x-5x^2})^2=(25-2x)^2;\ \ 70x-5x^2=625-100x+4x^2$;

$9x^2-170x+625=0;\ \ x_1=5,\ x_2=3\frac{8}{9}$.

Проверка показывает, что $x_2=3\frac{8}{9}$ — посторонний корень, значит, x = 5.

3) $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6;\ \ (\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x})^2=6^2$;

$15+x+2\sqrt{(15+x)(3+x)}+3+x=36;\ \ (\sqrt{45+18x+x^2})^2=(9-x)^2$;

$45+18x+x^2=81-18x+x^2;\ \ x=1$.

4) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1;\ \ (\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x})^2=1^2$;

$3-2x-2\sqrt{(3-2x)(1-x)}+1-x=1;\ \ (2\sqrt{3-5x+2x^2})^2=(3x-3)^2$;

$12-20x+8x^2=9x^2-18x+9;\ \ x^2+2x-3=0;\ \ x_1=1,\ x_2=-3$.

157. 1) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^3+x^2}=0;\ \ \sqrt{x^2+1}=-\sqrt{x^3+x^2}$;

$(\sqrt{x^2+1})^2=(-\sqrt{x^3+x^2})^2;\ \ x^2+1=x^3+x^2;\ \ x^3=1;\ \ x=1$.

Проверка показывает, что $x=1$ — посторонний корень, значит, данное уравнение не имеет действительных корней.

2) $\sqrt[3]{1+x^4}=\sqrt[3]{1+x^2}$; $(\sqrt[3]{1+x^4})^3=(\sqrt[3]{1+x^2})^3$; $1+x^4=1+x^2$;

$x^2(x^2-1)=0$; $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$.

158. 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$; $(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})^2=2^2$;

$5-x-2\sqrt{25-x^2}+5+x=4$; $(3)^2=(\sqrt{25-x^2})^2$; $9=25-x^2$;

$x^2=16$; $x_1=4$, $x_2=-4$.

Проверка показывает, что $x_1 = 4$ — посторонний корень, значит, $x = -4$.

2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$; $(\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x})^2=1^2$;

$12+x-2\sqrt{12-11x-x^2}+1-x=1$; $6=\sqrt{12-11x-x^2}$;

$x^2+11x+24=0$; $x_1=-3$, $x_2=-8$.

Проверка показывает, что $x = -8$ — посторонний корень, значит, $x = -3$.

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$; $(\sqrt{x-2})^2=(-\sqrt{x+6})^2$; $x-2=x+6$;

$-2\neq 6$ — неверное равенство, значит, данное уравнение не имеет корней.

4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$; $(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})^2=9^2$;

$x+7+2\sqrt{x^2+5x-14}+x-2=81$; $(\sqrt{x^2+5x-14})^2=(38-x)^2$;

$x^2+5x-14=1444-76x+x^2$; $81x=1458$; $x=18$.

159. 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$; $(\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x})^2=(\sqrt{x+4})^2$;

$1-2x-2\sqrt{13-25x-2x^2}+13+x=x+4$; $(\sqrt{13-25x-2x^2})^2=(5-x)^2$;

$13-25x-2x^2=25-10x+x^2$;

$3x^2+15x+12=0$; $x^2+5x+4=0$; $x_1=-1$, $x_2=-4$.

Проверка показывает, что $x = -1$ — посторонний корень, значит, $x = -4$.

2) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$; $(\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x})^2=(\sqrt{15+2x})^2$;

$7x+1-2\sqrt{41x-7x^2+6}+6-x=15+2x$;

$(2x-4)^2=(\sqrt{41x-7x^2+6})^2$; $4x^2-16x+16=41x-7x^2+6$;

$11x^2-57x+10=0$; $x_1=5$, $x_2=\frac{2}{11}$.

Проверка показывает, что $x_2=\frac{2}{11}$ — посторонний корень, значит, $x = 5$.

160. 1) $\sqrt[3]{x-2}=2$; $(\sqrt[3]{x-2})^3=2^3$; $x-2=8$; $x=10$.

2) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3(x+7)}$; $(\sqrt[3]{2x+7})^3=(\sqrt[3]{3(x+7)})^3$; $2x+7=3x-3$; $x=10$.

3) $\sqrt[4]{25x^2-144}=x$; $(\sqrt[4]{25x^2-144})^4=x^4$; $25x^2-144=x^4$;

$x^4-25x^2+144=0$; $x_1^2=16$, $x_2^2=9$; $x_1=4$, $x_2=-4$, $x_3=3$, $x_4=-3$.

Проверка показывает, что $x_2 = -4$, $x_4 = -3$ — посторонние корни, значит, $x = 4$или $x = 3$.

4) $x^2 = \sqrt{19x^2 - 34}$; $(x^2)^2 = (\sqrt{19x^2 - 34})^2$; $x^4 = 19x^2 - 34$;

$x^4 - 19x^2 + 34 = 0$; $x_{1,2}^2 = 2$, $x_{3,4}^2 = 17$; $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$,

$x_3 = -\sqrt{17}$, $x_4 = \sqrt{17}$.

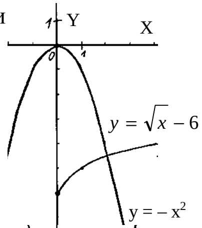
161. 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$; $(\sqrt[3]{x^3-2})^3=(x-2)^3$; $x^3-2=x^3-8-6x^2+12x$;

$x^2-2x+1=0$; $x=1$

2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16-5}=x-2$; $(\sqrt[3]{x^3-5x^2+16-5})^3=(x-2)^3$;

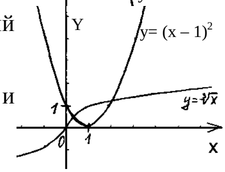
$x^3-5x^2+16-5=x^3-8-6x^2+12x$; $x^2+4x+3=0$; $x_1=-1$, $x_2=-3$.

162. 1) Построим на одном рисунке графики функций $y=\sqrt{x}-6$ и $y=-x^2$.



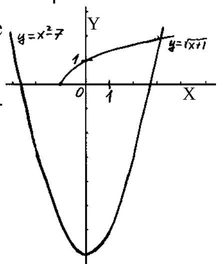
Графики пересекаются в одной точке $x\approx 2{,}1$.

2) Построим на одном рисунке графики функций $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=(x-1)^2$.



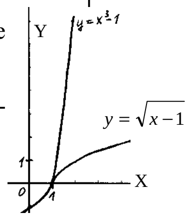
Графики пересекаются в двух точках $x_1\approx 0{,}5$ и $x_2\approx 2{,}1$.

3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$. Построим на одном рисунке графики функций $y=\sqrt{x+1}$ и $y=x^2-7$.



Графики пересекаются в одной точке $x=3$, точность проверяется равенством $\sqrt{3+1}=2=$ $=3^2-7=9-7$.

4) $x^3-1=\sqrt{x-1}$. Построим на одном рисунке графики функций $y=x^3-1$ и $y=\sqrt{x-1}$.



Графики пересекаются в одной точке $x=1$, точность проверяется равенством $1^3-1=1-1=0=$ $=\sqrt{1-1}$.

163. 1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$; $(\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}})^2=(x+2)^2$;

$4x+2\sqrt{3x^2+4}=x^2+4x+4$; $(2\sqrt{3x^2+4})^2=(x^2+4)^2$;

$12x^2+16=x^4+8x^2+16$; $x^2(x^2-4)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$; $(3-x)^2=(\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}})^2$;

$9-6x+x^2=9-\sqrt{36x^2-5x^4}$; $(\sqrt{36x^2-5x^4})^2=(6x-x^2)^2$;

$36x^2-5x^4=36x^2-12x^3+x^4$; $12x^3-6x^4=0$; $x^3(2-x)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$.

3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$; $(\sqrt{x^2+3x+12})^2=(2+\sqrt{x^2+3x})^2$;

$x^2+3x+12=4+4\sqrt{x^2+3x}+x^2+3x$; $(2)^2=(\sqrt{x^2+3x})^2$; $x^2+3x-4=0$;
$x_1=1$, $x_2=-4$.

4) $\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+5x+3}=1$; $(\sqrt{x^2+5x+10})^2=(1+\sqrt{x^2+5x+3})^2$;

$x^2+5x+10=1+2\sqrt{x^2+5x+3}+\ x^2+5x+3$; $(3)^2=(\sqrt{x^2+5x+3})^2$;

$9=x^2+5x+3$; $x^2+5x-6=0$; $x_1=1$, $x_2=-6$.

164. 1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a$; $(\sqrt{x^2-2-2})^2=a^2$; $x^2-2-(2+a^2)=0$;

$D=1+8+4a^2=9+4a^2$; $x_1=\dfrac{1+\sqrt{9+4a^2}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{9+4a^2}}{2}$ при $a<0$ действительных корней нет, при $a\ge 0$ проверка показывает, что $x_2=\dfrac{1-\sqrt{9+4a^2}}{2}$ — посторонний корень, значит, $x=\dfrac{1+\sqrt{9+4a^2}}{2}$.

2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2}=a-1$; $(\sqrt{x^2+2})^2=(a-1)^2$;

$x^2+2x-a^2+2a-1=0$; $D=4+4a^2-8a+4=4a^2-8a+8$;

$x_1=\dfrac{-2+2\sqrt{a^2-2a+2}}{2}=\sqrt{a^2-2a+2}-1$, $x_2=-1-\sqrt{a^2-2a+2}$,

при $a<1$ действительных корней нет, при $a\ge 1$ проверка показывает, что $x_2=-1-\sqrt{a^2-2a+2}$ — посторонний корень, значит, $x=\sqrt{a^2-2a+2}-1$.

165. 1) $\begin{cases}3-x\le 2\\ 2x+1\le 4\end{cases}$; $\begin{cases}1\le x\\ x\le 1{,}5\end{cases}$, значит, $1\le x\le 1{,}5$.

2) $\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ x>2\end{cases}$; решение первого неравенства $x\ge 1$ и $x\le -1$, значит, x>2.

3) $\begin{cases}9-x^2\le 0\\ x+5<0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2\ge 9\\ x<-5\end{cases}$; решение первого неравенства $x\ge 3$ и $x\le -3$, значит, $x<-5$.

166. 1) $\sqrt{x}>2$; $(\sqrt{x})^2>(2)^2$; $x>4$;

2) $\sqrt{x}<3$; $\begin{cases}(\sqrt{x})^2<(2)^2\\ x\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x<9\\ x\ge 0\end{cases}$; $0\le x<9$;

3) $\sqrt[3]{x}\ge 1$; $(\sqrt[3]{x})^3\ge 1^3$; $x\ge 1$;

4) $\sqrt[3]{2x}<3$; $(\sqrt[3]{2x})^3<(3)^3$; $2x<27$; $x<13{,}5$;

5) $\sqrt{3x} > 1$; $\begin{cases}(\sqrt{3x})^2 > (1)^2\\ 3x \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}3x > 1\\ 3x \ge 0\end{cases}$; $x > \frac{1}{3}$;

6) $\sqrt{2x} \le 2$; $\begin{cases}(\sqrt{2x})^2 \le (2)^2\\ 2x \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}2x \le 4\\ x \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x \le 2\\ x \ge 0\end{cases}$; $0 \le x \le 2$.

167. 1) $\sqrt{x-2} > 3$; $\begin{cases}(\sqrt{x-2})^2 > (3)^2\\ x-2 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x-2 > 9\\ x \ge 2\end{cases}$; $\begin{cases}x-2 > 11\\ x \ge 2\end{cases}$; $x > 11$;

2) $\sqrt{x-2} < 1$; $\begin{cases}(\sqrt{x-2})^2 < (1)^2\\ x-2 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x-2 < 1\\ x \ge 2\end{cases}$; $\begin{cases}x < 3\\ x \ge 2\end{cases}$; $2 \le x < 3$;

3) $\sqrt{3-x} < 5$; $\begin{cases}(\sqrt{3-x})^2 < 5^2\\ 3-x \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}3-x < 25\\ x \le 3\end{cases}$; $\begin{cases}x > -22\\ x \le 3\end{cases}$; $-22 < x \le 3$;

4) $\sqrt{4-x} > 3$; $\begin{cases}(\sqrt{4-x})^2 > 3^2\\ 4-x \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}4-x > 9\\ x \le 4\end{cases}$; $\begin{cases}x < -5\\ x \le 4\end{cases}$; $-22 < x \le 3$;

5) $\sqrt{2x-3} > 4$; $\begin{cases}(\sqrt{2x-3})^2 > 4^2\\ 2x-3 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}2x-3 > 16\\ 2x \ge 3\end{cases}$; $\begin{cases}x > 9{,}5\\ x \ge 1{,}5\end{cases}$; $x > 9{,}5$;

6) $\sqrt{x+1} > \frac{2}{3}$; $\begin{cases}(\sqrt{x+1})^2 > (\frac{2}{3})^2\\ x+1 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x+1 > \frac{4}{9}\\ x \ge -1\end{cases}$; $\begin{cases}x \ge -\frac{5}{9}\\ x \ge -1\end{cases}$; $x \ge -\frac{5}{9}$;

7) $\sqrt{3x-5} < 5$; $\begin{cases}(\sqrt{3x-5})^2 < 5^2\\ 3x-5 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}3x-5 < 25\\ x \ge 1\frac{2}{3}\end{cases}$; $\begin{cases}x < 10\\ x \ge 1\frac{2}{3}\end{cases}$; $1\frac{2}{3} \le x < 10$;

8) $\sqrt{4x+5} \le \frac{1}{2}$; $\begin{cases}(\sqrt{4x+5})^2 \le (\frac{1}{2})^2\\ 4x+5 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}4x+5 \le \frac{1}{4}\\ x \ge 1\frac{1}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}x \le 1{,}1875\\ x \ge -1{,}25\end{cases}$;

$-1{,}25 \le x < -1{,}1875$.

168. 1) $\sqrt{x^2-1} > 1$; $\begin{cases}(\sqrt{x^2-1})^2 > 1^2\\ x^2-1 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-1 > 1^2\\ x^2 \ge 1\end{cases}$; $\begin{cases}x^2 > 2\\ x^2 \ge 1\end{cases}$

равносильно $x^2 > 2$, значит, $x < -\sqrt{2}$ и $x > \sqrt{2}$.

2) $\sqrt{1-x^2} < 1$; $\begin{cases}(\sqrt{1-x^2})^2 < 1^2\\ 1-x^2 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}1-x^2 < 1^2\\ x^2 \le 1\end{cases}$; $\begin{cases}x^2 > 0\\ x^2 \le 1\end{cases}$; $\begin{cases}x^2 \ne 0\\ x^2 \le 1\end{cases}$;

решение второго неравенства $-1 \le x \le 1$, значит, $-1 \le x < 0$ и $0 < x \le 1$.

3) $\sqrt{25-x^2} > 4$; $\begin{cases}(\sqrt{25-x^2})^2 > 4^2\\ 25-x^2 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}25-x^2 > 16\\ 25-x^2 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2 < 9\\ x^2 \le 25\end{cases}$;

равносильно $x^2 < 9$, значит, $-3 < x < 3$.

4) $\sqrt{25-x^2}<4;$ $\begin{cases}(\sqrt{25-x^2})^2<4^2\\25-x^2\ge 0\end{cases};$ $\begin{cases}25-x^2<16\\x^2\le 25\end{cases};$ $\begin{cases}x^2<9\\x^2\le 25\end{cases};$

значит, $-5\le x<-3$ и $3<x\le 5$.

169. 1) $\sqrt{2x^2+3x-2}>0$, равносильно $2x^2+3x-2>0$, значит, $x<-2$ и $x>\frac{1}{2}$.

2) $\sqrt{2+x-x^2}>-1$, равносильно $2+x-x^2\ge 0$, значит, $-1\le x\le 2$.

3) $\sqrt{6x-x^2}<\sqrt{5};$ $\begin{cases}(\sqrt{6x-x^2})^2<(\sqrt{5})^2\\6x-x^2\ge 0\end{cases};$ $\begin{cases}6x-x^2<5\\x(6-x)\ge 0\end{cases};$

решения первого неравенства $x<1$ и $x>5$;

решения второго неравенства $0\le x\le x$, значит, $0\le x<1$ и $5<x\le 6$.

4) $\sqrt{x^2-x}>\sqrt{2};$ $\begin{cases}(\sqrt{x^2-x})^2>(\sqrt{2})^2\\x^2-x\ge 0\end{cases};$ $\begin{cases}x^2-x>2\\x(x-1)\ge 0\end{cases};$

решения первого неравенства $x<-1$ и $x>2$;

решения второго неравенства $x\le 0$ и $x\ge 1$, значит, $x<-1$ и $x>2$.

5) $\sqrt{x^2+2x}>-3-x^2;$ найдем x, при которых $x^2+2x\ge 0$, это $x\le -2$ и $x\ge 0$. При этих x существует левая часть неравенства, а правая часть отрицательна для любого действительного x, значит, $x\le -2$ и $x\ge 0$.

6) $\sqrt{4x-x^2}>-2-3x^2;$ найдем x, при которых $4x-x^2\ge 0$, это $0\le x\le 4$. При этих x существует левая часть неравенства, а правая часть отрицательна для любого действительного x, значит, $0\le x\le 4$.

170. 1) $\sqrt{x+2}>\sqrt{4-x};$ $\begin{cases}(\sqrt{x+2})^2>(\sqrt{4-x})^2\\x+2\ge 0\\4-x\ge 0\end{cases};$ $\begin{cases}x>1\\x\ge -2\\x\le 4\end{cases};$ $1<x\le 4$;

2) $\sqrt{3+2x}\ge\sqrt{x+1};$ $\begin{cases}(\sqrt{3+2x})^2\ge(\sqrt{x+1})^2\\3+2x\ge 0\\x+1\ge 0\end{cases};$ $\begin{cases}x\ge -2\\x\ge 1{,}5\\x\ge -1\end{cases};$ $x\ge -1$;

3) $\sqrt{2x-5}<\sqrt{5x+4};$ $\begin{cases}(\sqrt{2x-5})^2<(\sqrt{5x+4})^2\\2x-5\ge 0\\5x+4\ge 0\end{cases};$ $\begin{cases}x>-3\\x\ge 2{,}5\\x\ge -0{,}8\end{cases};$ $x\ge 2{,}5$;

4) $\sqrt{3x-2}>x-2;$ при $x\ge\frac{2}{3}$ существует левая часть, правая часть меньше 0 при $x<2$, значит $\frac{2}{3}\le x<2$ входит в ответ;

$$\begin{cases}(\sqrt{3x-2})^2 > (x-2)^2\\ x \ge 2\end{cases};\quad \begin{cases}3x-2 > x^2-4x+4\\ x \ge 2\end{cases};\quad \begin{cases}x^2-7x+6<0\\ x\ge 2\end{cases},$$

значит, $2 \le x < 6$, объединяем ответ и имеем $\frac{2}{3} \le x < 6$;

5) $\sqrt{5x+11} > x+3$; при $x \ge -2{,}2$ существует левая часть неравенства, при $x \ge -2{,}2$ правая часть больше 0, значит,

$$\begin{cases}(\sqrt{5x+11})^2 > (x+3)^2\\ x \ge -2{,}2\end{cases};\quad \begin{cases}5x+11 > x^2+6x+9\\ x \ge -2{,}2\end{cases};\quad \begin{cases}x^2+x-2<0\\ x \ge -2{,}2\end{cases},$$

значит, $-2 \le x < 1$;

6) $\sqrt{3-x} > \sqrt{3x-5}$; $\begin{cases}(\sqrt{3-x})^2 > (\sqrt{3x-5})^2\\ 3-x \ge 0\\ 3x-5 \ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x > 2\\ x \le 3\\ x \ge \frac{5}{3}\end{cases}$; $2 < x \le 3$.

171. 1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \sqrt{x-1}$, при $x \ge 1$ существуют обе часть этого неравенства, и обе не отрицательны, значит, $\begin{cases}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2 < (\sqrt{x-1})^2\\ x \ge 1\end{cases}$;

$$\begin{cases}x+1-2\sqrt{x^2+x}+x < x-1\\ x \ge 1\end{cases};\quad \begin{cases}x+2 < 2\sqrt{x^2+x}\\ x \ge 1\end{cases};\quad \begin{cases}(x+2)^2 < (2\sqrt{x^2+x})^2\\ x \ge 1\end{cases};$$

$$\begin{cases}x^2+4x+4 < 4x^2+4x\\ x \ge 1\end{cases};\quad \begin{cases}3x^2 > 4\\ x \ge 1\end{cases};\quad x > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2) $\sqrt{x+3} < \sqrt{7-x} + \sqrt{10-x}$; $\begin{cases}(\sqrt{x+3})^2 < (\sqrt{7-x}+\sqrt{10-x})^2\\ x+3 \ge 0\\ 7-x \ge 0\\ 10-x \ge 0\end{cases}$;

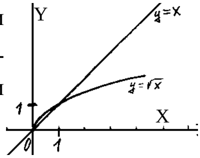
$$\begin{cases}x+3 < 7-x+2\sqrt{70-17x+x^2}+10-x\\ x \ge -3\\ x \le 7\end{cases};\quad \begin{cases}3x-4 < 2\sqrt{70-17x+x^2}\\ x \ge -3\\ x \le 7\end{cases},$$

при $-3 \le x < 4\frac{2}{3}$ левая часть неравенства меньше 0, значит, неравенство выполнено,

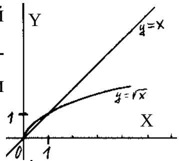
$$\begin{cases}(3x-4)^2 < (2\sqrt{70-17x+x^2})^2\\ x \ge 4\frac{2}{3}\\ x \le 7\end{cases};\quad \begin{cases}9x^2-84x+196 < 280-68x+4x^2\\ x \ge 4\frac{2}{3}\\ x \le 7\end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x^2-16x-84<0 \\ x \ge 4\dfrac{2}{3} \\ x \le 7 \end{cases}$$; значит, $4\dfrac{2}{3} \le x < 6$, объединяя ответ, получаем $-3 \le x < 6$.

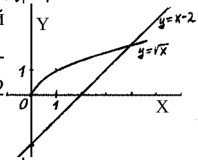
172. 1) На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x$, из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках, и график функции $y = x$ лежит ниже графика $y=\sqrt{x}$ при $0 \le x \le 1$.



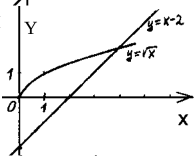
2) На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x$, из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках, и график функции $y=\sqrt{x}$ лежит ниже графика $y=\sqrt{x}$ при $x>1$.



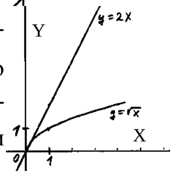
3) На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x-2$, из рисунка видно, что графики пересекаются в одной точке, и график функции $y = x - 2$ лежит ниже графика функции $\sqrt{x}$ при $0 \le x < 4$.



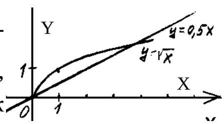
4) На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x-2$, из рисунка видно, что графики пересекаются в одной точке, и график функции $y = \sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y = x - 2$ при $x \ge 4$.



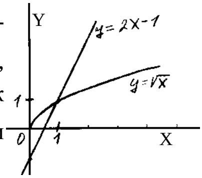
173. 1) $\sqrt{x} \le 2x$. На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y = 2x$, из рисунка видно, что гра-фики пересекаются в одной точке, график функции $y=\sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y = 2x$ при $x \ge 0$.



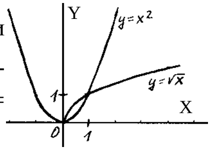
2) $\sqrt{x} \le 0{,}5x$. На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $\sqrt{x} \le 0{,}5x$, из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках, и график функции $y=\sqrt{x}$ лежит выше графика функции $\sqrt{x} \le 0{,}5x$; при $0 < x < 4$.



3) $\sqrt{x} \le 2x - 1$. На одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x - 1$, из рисунка видно, что графики пересекаются в одной точке, и график функции $y = \sqrt{x}$ лежит выше графика функции $y = 2x - 1$; при $0 \le x \le 1$.



4) $\sqrt{x} \le x^2$. На одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y \le x^2$, из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках, и график функции $y = \sqrt{x}$ лежит выше графика функции $y \le x^2$ при $0 \le x \le 1$.



174. 1) $\sqrt{x-1} < a$, при $a \le 0$ неравенство не имеет действительных решений, при $a > 0$,

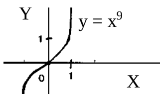
$$\begin{cases}(\sqrt{x-1})^2 < a^2 \\ x - 1 \ge 0\end{cases};\quad \begin{cases}x - 1 < a^2 \\ x \ge 1\end{cases};\quad \begin{cases}x < a^2 + 1 \\ x \ge 1\end{cases};\quad 1 \le x < a^2 + 1.$$

2) $\sqrt{2ax - x^2} \ge a - x$, $a \le 0$ $\begin{cases}(\sqrt{2ax - x^2})^2 \ge (a - x)^2 \\ 2ax - x^2 \ge 0\end{cases}$;

$$\begin{cases}2ax - x^2 \ge a^2 - 2ax + x^2 \\ x(2a - x) \ge 0\end{cases};\quad \begin{cases}2x^2 - 4ax + a^2 \le 0 \\ x(2a - x) \ge 0\end{cases};\quad \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2}) \le x \le 0.$$

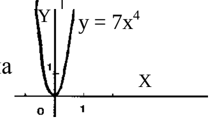
175. 1) $y = x^9$, область определения — множество R;

множество значений — множество R;



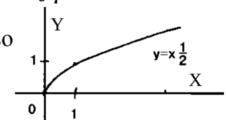
2) $y = 7x^4$, область определения — множество R;

множество значений — неотрицательные числа $y \ge 0$;



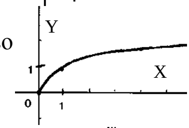
3) $y = x^{\frac{1}{2}}$, область определения — множество $x \ge 0$;

множество значений — $y \ge 0$;



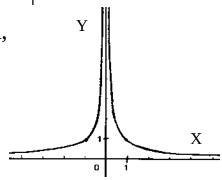
4) $y = x^{\frac{1}{3}}$, область определения — множество $x \ge 0$;

множество значений — $y \ge 0$;



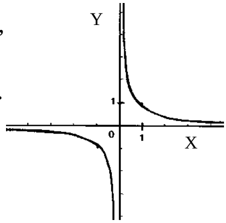
5) $y = x^{-2}$, область определения — множество R, кроме $x = 0$;

множество значений — $y > 0$;



6) $y = x^{-3}$, область определения — множество R, кроме $x = 0$;

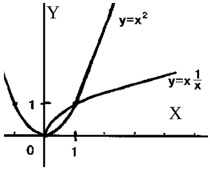
множество значений — множество R, кроме $y = 0$.



176. при $x = 0$; $x^2 = x^{\frac{1}{2}} = 0$;

при $x = 0{,}5$; $x^2 = 0{,}25 < \sqrt{0{,}5} = x^{\frac{1}{2}}$;

при $x = 1$; $x^2 = x^{\frac{1}{2}} = 1$;



при $x = \frac{3}{2}$; $x^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} > \sqrt{1{,}5} = x^{\frac{1}{2}}$; при $x = 2$; $x^2 = 4 > \sqrt{2} = x^{\frac{1}{2}}$;

при $x = 3$; $x^2 = 9 > \sqrt{3} = x^{\frac{1}{2}}$; при $x = 4$; $x^2 = 16 > 2 = x^{\frac{1}{2}}$;

при $x = 5$; $x^2 = 25 > \sqrt{5} = x^{\frac{1}{2}}$.

177. 1) Т.к. $0{,}3 < 1$, а $\pi > 3{,}1415 > \frac{2}{3} > 0{,}5$,

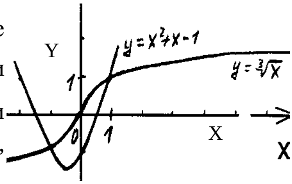
то $0{,}3^{\pi} < 0{,}3^{3{,}1415} < 0{,}3^{\frac{2}{3}} < 0{,}3^{0{,}5}$.

2) Т.к. $\pi > 1{,}9 > \sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pi > 0$, $\pi^{\pi} > 1{,}9^{\pi} > \sqrt{2^{\pi}} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$.

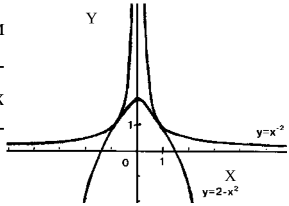
3) Т.к. $5 > 1$, а $\frac{1}{3} > -0{,}7 > -2 > -2{,}1$, то $5^{\frac{1}{3}} > 5^{-0{,}7} > 5^{-2} > 5^{-2{,}1}$.

4) Т.к. $-\frac{2}{3} < 0$, а $\pi > \sqrt{2} > 1{,}3 > 0{,}5$, то $\pi^{-\frac{2}{3}} < \sqrt{2}^{-\frac{2}{3}} < 1{,}3^{-\frac{2}{3}} < \; < 0{,}5^{-\frac{2}{3}}$.

178. 1) $\sqrt[3]{x} = x^2 + x - 1$; на одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^2 + x - 1$ из рисунка видно, что графики пересекаются в точках (1, 1) и – 1, – 1), значит, $x = 1$ и $x = -1$ — решения данного уравнения.



2) $x^{-2} = 2 - x^2$; на одном рисунке построим графики функций $y = x^{-2}$ и $y = 2 - x^2$ из рисунка видно, что графики пересекаются в точках (– 1, – 1) и (1, 1), значит, $x = -1$ и $x = 1$ — решения данного уравнения.



179. 1) $y=\sqrt[3]{1-x}$; область определения — множество R.

2) $y=(2-x^2)^{\frac{3}{5}}$; $2-x^2\geq 0$, значит, область определения — $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$.

3) $y=(3x^2+1)^{-2}$;область определения — множество R.

4) $y=\sqrt{x^2-x-2}$;область определения: $x^2-x-2\geq 0$, значит, $x\leq -1$ и $x\geq 2$.

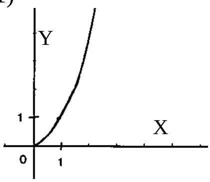
180. 1) $y=0{,}6x+3$; $x=2y-6$, значит, функция $y=2x-6$ — обратная к данной, ее область определения — множество R, множество значений — множество R.

2) $y=\frac{2}{x-3}$; $x=\frac{2}{y}+3$, значит, функция $y=\frac{2}{x}+3$ — обратная к данной, ее область определения — множество R, кроме $x=0$, множество значений — множество R, кроме $y=3$.

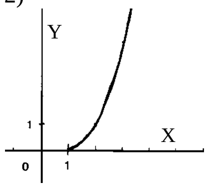
3) $y=(x+2)^2$; $x=\sqrt[3]{y}-2$, значит, функция $y=\sqrt[3]{x}-2$ — обратная к данной, ее область определения — множество R, множество значений — множество R.

4) $y=x^3-1$; $x=\sqrt[3]{y+1}$, значит, функция $y=\sqrt[3]{x+1}$ — обратная к данной, ее область определения — множество R, множество значений — множество R.

181. 1)



2)



182. 1) $2^{x^2+3x}=2^2$, значит, $x^2+3x=2$, значит, данные уравнения равносильны.

2) $\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{2}$; $x^2+3x-2=0$; $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ и $x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, значит, данные уравнения равносильны.

3) $(\sqrt[3]{x+18})^3=(\sqrt[3]{2-x})^3$; $x+18=2-x$; $x=-8$, значит, данные уравнения равносильны.

183. 1) $\sqrt{3-x}=2$; $(\sqrt{3-x})^2=2^2$; $3-x=4$; $x=-1$.

2) $\sqrt{3x+1}=8$; $3x+1=8^2$; $3x+1=64$; $x=21$.

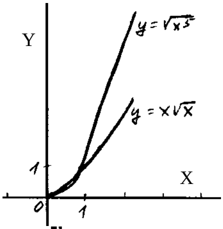
3) $\sqrt{3-4x}=2x$; $3-4x=4x^2$; $4x^2+4x-3=0$;

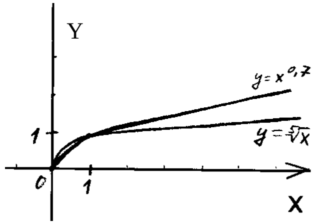
$x_1=\frac{-4+8}{8}=0{,}5$ и $x_2=\frac{-4-8}{8}=-1{,}5$, проверка показывает, что $x=-1{,}5$ — посторонний корень, значит, $x=0{,}5$.

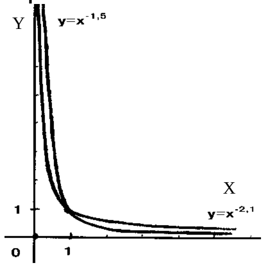
4) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; $5x-1+3x^2=9x^2$; $6x^2-5x+1=0$; $x_1=\frac{5+1}{12}=0{,}5$ и $x_2=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$.

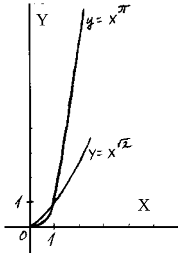
5) $\sqrt[3]{x^2-17}=2$; $x^2-17=8$; $x^2=25$; $x_{1,2}=\pm 5$.

6) $\sqrt[4]{x^2+17}=3$; $x^2+17=81$; $x^2=64$; $x_{1,2}=\pm 8$.

184. 1)


2)


3)


4)


185. 1) $y=\dfrac{10-3x}{x-4}$; $\begin{cases} xy-4y=10-3x \\ x\neq 4 \\ y\neq -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{10+4y}{y+3} \\ x\neq 4 \\ y\neq -3 \end{cases}$, т.е. функции взаимообратные.

2) $y=\dfrac{3x-6}{3x-1}$; $\begin{cases} 3xy-y=3x-6 \\ x\neq \frac{1}{3} \\ y\neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{y-6}{3y-3} \\ x\neq \frac{1}{3} \\ y\neq 1 \end{cases}$, т.е. функции взаимообратные.

3) $y=5(1-x)^{-1}$; $\begin{cases} 1-x=\frac{5}{y} \\ x\neq 1 \\ y\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=(y-5)y^{-1} \\ x\neq 1 \\ y\neq 0 \end{cases}$, т.е. функции не взаимообратные.

4) $y=\dfrac{2-x}{2+x}$; $\begin{cases} 2y+yx=2-x \\ x\neq -2 \\ y\neq -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{2(1-2y)}{y+1} \\ x\neq -2 \\ y\neq -1 \end{cases}$, т.е. функции не взаимообратные.

186. 1) $y=2+\sqrt{x+2}$; $y-2=\sqrt{x+2}$; $x=y^2-4y+2$, значит, $y=x^2-4y+2$ — функция обратной к данной, ее область определения — $x\geq 2$, множество значений — $y\geq -2$.

2) $y=2-\sqrt{x+4}$; $\sqrt{x+4}=2-y$; $x=y^2-4y$, значит, $y=x^2-4$ — функция обратной к данной, ее область определения — $x\leq 2$, множество значений — $y\geq -4$.

3) $y=\sqrt{3-x}-1$; $y+1=\sqrt{3-x}$; $x=2-y^2-2y$, значит, $y=2-x^2-2x$ — функция обратной к данной, ее область определения — $x\geq -1$, множество значений — $y\leq 3$.

4) $y=\sqrt{1-x}+3$; $y-3=\sqrt{1-x}$; $x=6y-y^2-8$; значит, $y=6x-x^2-8$ — функция обратной к данной, ее область определения — $x\geq 3$, множество значений — $y\leq 1$.

187. 1) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$; $x-4=x-3-2\sqrt{2x^2-7x+3}+2x=1$; $\sqrt{2x^2-7x+3}=x$; $2x^2-7x+3=x^2$; $x^2-7x+3=0$; $x_1=\frac{7+\sqrt{37}}{2}$ и $x_2=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$, проверка показывает, что $x_2=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$ — посторонний корень, значит, $x=\frac{7+\sqrt{37}}{2}$.

2) $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{x}$; $4x+12=2\sqrt{2x^2+7x}+2x+7$; $x+5=2\sqrt{2x^2+7x}$;

$x^2+25+10x=8x^2+28x$; $7x^2+18x-25=0$; $x_1=1$ и $x_2=-3\frac{4}{7}$, проверка показывает, что $x=-3\frac{4}{7}$ — посторонний корень, значит, $x=1$.

3) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$; $x-3=2x+1+x+4-2\sqrt{2x^2+9x+4}$;

$x+4=\sqrt{2x^2+9x+4}$; $x^2+8x+16=2x^2+9x+4$; $x^2+x-12=0$; $x_1=3$ и $x_2=-4$, проверка показывает, что $x_2=-4$ — посторонний корень, значит, $x=3$.

4) $\sqrt{9-2x}=2\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}$; $9-2x=16-4x+1-x-4\sqrt{x^2-5x+4}$; $4\sqrt{x^2-5x+4}=8-3x$; $16x^2-80x+64=64-48x+9x^2$; $7x^2-32x=0$; $x_1=0$ и $x_2=4\frac{4}{7}$, проверка показывает, что $x_2=4\frac{4}{7}$ — посторонний корень, значит, $x=0$.

188. 1) $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}=0$; $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+4=2-\sqrt[4]{x+4}$;

$(2-\sqrt[4]{x+4})^2=2-\sqrt[4]{x+4}$; $2-\sqrt[4]{x+4}=0$ или $1-\sqrt[4]{x+4}=0$;

$x+4=16$ или $x+4=1$; $x_1=12$ или $x_2=-3$.

2) $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$; $\sqrt{x-3}-4\sqrt[4]{x-3}+4=8-4\sqrt[4]{x-3}$;

$(2-\sqrt[4]{x-3})^2-(2-\sqrt[4]{x-3})-6=0$; пусть $2-\sqrt[4]{x-3}=a$, значит,

$a^2-a-6=0$, $a=3$ или $a=-2$, значит, $\sqrt[4]{x-3}=4$ или $\sqrt[4]{x-3}=-1$;

$\sqrt[4]{x-3}=4$ или $\sqrt[4]{x-3}=-1$; $x-3=256$, $x=259$. Нет действительных корней.

3) $\sqrt[6]{1-x}-5\sqrt[3]{1-x}=-6$; $\sqrt[6]{1-x}=a$; $5a^2-a-6=0$, $a=1{,}2$ и $a=-1$ — посторонний корень; $\sqrt[6]{1-x}=1{,}2$; $1-x=2{,}985984$; $x=-1{,}985984$.

4) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=2$; $\sqrt{x^2+3x}=2$; $a^2+a-2=0$, $a=1$ и $a=-2$ — посторонний корень;

$\sqrt{x^2+3x}=1$; $x^2+3x-1=0$; $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

5) $\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}=2$; $\begin{cases}\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}=2\sqrt{3-x}-2\sqrt{3+x}\\ x\neq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}3\sqrt{3+x}=\sqrt{3-x}\\ x\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}27+9x=3-x\\ x\neq 0\end{cases}$; $x=-2{,}4$.

6) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$;

$\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}=1$; $\quad\left|\sqrt{x+2}-2\right|+\left|\sqrt{x+2}-3\right|=1$;

$\sqrt{x+2}-2\ge 0$ или $\sqrt{x+2}-3>0$; $\quad x\ge 2 \quad x>7$;

$\sqrt{x+2}-2<0 \quad \sqrt{x+2}-3\le 0$; $\quad -2\le x<2 \quad -2\le x\le 7$.

Если $-2\le x<2$, тогда, $\sqrt{x+2}-2+3-\sqrt{x+2}=1$; $\sqrt{x+2}=2$; $x=2$.

Если $-2\le x\le 7$, тогда, $\sqrt{x+2}-2+\sqrt{x+2}-3=1$; $\sqrt{x+2}=3$; $x=7$.

189. 1) $\sqrt{x+1}<x-1$; $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ x+1<x^2-2x+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ x(x-3)>0 \end{cases}$; $x>3$.

2) $\sqrt{1-x}<x+1$; $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x>x^2+2x+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x<1 \\ x(x+3)<0 \end{cases}$; $-3<x<0$.

Но при $x\le-3$; $x+1<0$, значит, это множество удовлетворяет неравенство и $x<0$.

3) $\sqrt{3x-2}<x-2$; $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 3x-2>x^2-4x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} x>\frac{2}{3} \\ (x-1)(x-6)<0 \end{cases}$; $1<x<6$. Но при $\frac{2}{3}<x\le1$;

$x-2<0$, значит, это множество тоже удовлетворяет неравенству и $\frac{2}{3}<x<6$.

4) $\sqrt{2x+1}\le x+1$; $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ 2x+1\le x^2+2x+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x\ge-\frac{1}{2} \\ x\ge 1 \\ x^2\ge 0 \end{cases}$; $x\ge-\frac{1}{2}$.

190. 1) $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\le 0$; $\begin{cases} x^2-13x+40\le 0 \\ 19x-x^2-78>0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-8)(x-5)\le 0 \\ (x-13)(x-6)>0 \end{cases}$; $6<x\le 8$.

2) $\dfrac{\sqrt{x^2+7x-4}}{x+4}<\dfrac{1}{2}$; $\begin{cases} x+4>0 \\ x^2+7x-4\ge 0 \\ 2\sqrt{x^2+7x-4}<x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} x>4 \\ 2(x+4)(x-0,5)\ge 0 \\ 8x^2+28x-16<8x^2+28x+16 \end{cases}$;

$\begin{cases} x\ge 0 \\ 7x^2+20x-32<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\ge 0 \\ (x+4)(x-1\frac{1}{7})<0 \end{cases}$; $0,5\le x<1\frac{1}{7}$. Но, если $x<-4$, левая часть

неравенства меньше 0 и неравенство выполняется, значит, $x<-4$ и $0,5\le x<1\frac{1}{7}$.

3) $\sqrt{3+x}>|x-3|$; $\begin{cases} 3+x>0 \\ 3+x>x^2-6x+9 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-3 \\ x^2-7x+6<0 \end{cases}$; $1<x<6$.

4) $\sqrt{3+x}>\sqrt{7+x}+\sqrt{10+x}$; $\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ 7+x\ge 0 \\ 10+x\ge 0 \\ 3-x<7+x+10+x+2\sqrt{x^2+17x+70} \end{cases}$;

$$\begin{cases} x \le 3 \\ x \ge 7 \\ -14-3x < 2\sqrt{x^2+17x+70} \end{cases}; \quad \begin{cases} -7 \le x \le 3 \\ 14+3x \le 0 \\ 196+84x+9x^2 < 4x^2+68x+280 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -7 \le x \le 3 \\ x \le -4\frac{2}{3} \\ 5x^2+16x-84<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -7 \le x \le 3 \\ x < -4\frac{2}{3} \\ -6<x<2{,}8 \end{cases}; \quad -6<x\le -4\frac{2}{3}.$$ Но при $-4\frac{2}{3}<x\le 3$ $-14-3x<0$,

а значит, это множество удовлетворяет данному уравнению, значит, $-6<x\le 3$.

191. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$, при $a\le 0$ действительных решений нет, значит, $a>0$.

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-6 \ge 0 \\ x-2+x-6+2\sqrt{x^2-8x+12} < a^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \ge 6 \\ \sqrt{x^2-8x+12} < 4+\frac{a^2}{2}-x; \\ x^2-8x+12 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 6 \\ x^2-8x+12<16+\frac{a^4}{4}+4a^2+(8+a^2)x+x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \ge 6 \\ a^2x<\frac{16+a^4+16a^2}{4}, \\ x^2-8x+12 \ge 0 \end{cases}$$ значит,

если $a\le 2$, то действительных решений нет, если $a>2$, то $6 \le x < \frac{a^4+16a^2+16}{4a^2}$.

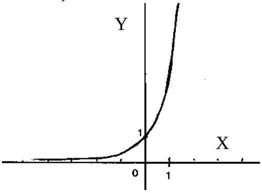
2) $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$; $\begin{cases} a^2-x^2 \ge 0 \\ \sqrt{a^2-x^2} > -2x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 \le a^2 \\ a^2-x^2>4x^2; \\ -2x \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \le a^2 \\ x \le 0 \\ x^2<\frac{a^2}{5} \end{cases}$;

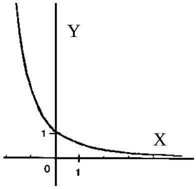
$$\begin{cases} -|a| \le x \le |a| \\ x \le 0 \\ -\frac{|a|}{5}<x<\frac{|a|}{5} \end{cases};$$ если $a=0$, то нет решений, если $a \ne 0$, то $-\frac{|a|}{5}<x\le 0$.

Но неравенство верно и при $0 \le x \le |a|$, значит, $-\frac{|a|}{5}<x\le |a|$.

Глава III. Показательная функция

192. 1) 2)

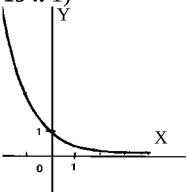


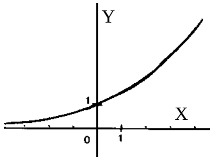


193. 1) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \approx 1,73$; 2) $3^{\frac{2}{3}} \approx 2$;

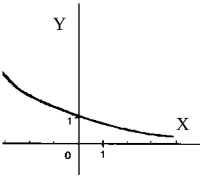
3) $\dfrac{1}{3} = 3^{-\frac{1}{2}} \approx 0,58$; 4) $3^{-1,5} \approx 0,19$.

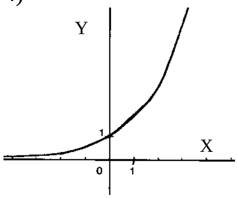
194. 1) 2)





3) 4)





195. 1) $1,7^3 > 1 = (1,7)^0$, т.к. $1,7^3 > 1$; $3 > 0$;

2) $0,3^2 < 1 = (0,3)^0$, т.к. $0,3^3 < 1$; $2 > 0$;

3) $3,2^{1,5} < 3,2^{1,6}$, т.к. $3,2 > 1$; $1,6 > 1,5$;

4) $0,2^{-3} < 0,2^{-2}$, т.к. $0,2 < 1$; $-3 < -2$;

5) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1,4}$, т.к. $\dfrac{1}{5} < 1$; $\sqrt{2} > 1,4$;

6) $3^{\pi} < 3^{3,14}$, т.к. $3 > 1$; $\pi > 3,14$.

196. 1) $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1 = (0,1)^0$, т.к. $0,1 < 1$; $\sqrt{2} > 0$;

2) $(3,5)^{0,1} > 1 = (3,5)^0$, т.к. $3,5 > 1$; $0,1 > 0$;

3) $\pi^{-2,7} < 1 = \pi^0$, т.к. $\pi > 1$; $-2,7 < 0$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2} > 1 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{0}$, т.к. $\dfrac{\sqrt{5}}{5} < 1$; $-1,2 < 0$.

197. 1) $y=2^x$ и $y=8$; $2^x=8$; $2^x=2^3$; $x=3$, значит, точка пересечения графиков (3; 8).

2) $y=3^x$ и $y=\frac{1}{3}$; $3^x=\frac{1}{3}$; $3^x=3^{-1}$; $x=-1$, значит, точка пересечения графиков (– 1; $\frac{1}{3}$).

3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y=\frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $x=2$, значит, точка пересечения графиков (2; $\frac{1}{16}$).

4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=9$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $x=-2$, значит, точка пересечения графиков (– 2; 9).

198. 1) $5^x=\frac{1}{5}$; $5^x=5^{-1}$; $x=-1$;

2) $7^x=49$; $7^x=7^2$; $x=2$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $x=-\frac{1}{2}$;

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\sqrt[3]{7}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^x=7^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $x=-\frac{1}{3}$.

199. 1) $y=(0{,}3)^{-x}=\left(\frac{3}{10}\right)^{-x}=\left(\frac{10}{3}\right)^x=\left(3\frac{1}{3}\right)^x$; $3\frac{1}{3}>1$, значит, данная функция является возрастающей.

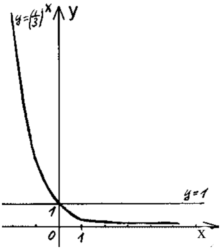
2) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x}=7^x$; $7>1$, значит, данная функция является возрастающей.

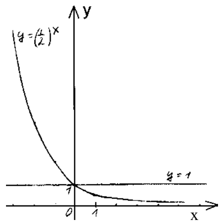
3) $y=1{,}3^{-2x}=\left(\frac{1}{1{,}3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{1{,}69}\right)^x$; $\frac{1}{1{,}69}<1$, значит, данная функция является убывающей.

4) $y=(0{,}7)^{-3x}=\left(\frac{1}{0{,}7}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{0{,}343}\right)^x$; $\frac{1}{0{,}343}>1$, значит, данная функция является возрастающей.

200. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x>1=\left(\frac{1}{3}\right)^0$, из графика видно, что $\left(\frac{1}{3}\right)^x>1$, при $x<0$.

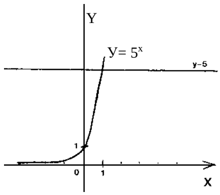
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$, из графика видно, что $\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$, при $x>0$.

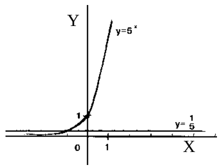




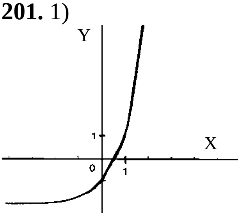
3) $5^x > 5$, из графика видно, что $5^x > 5$, при $x > 1$.

4) $5^x < \frac{1}{5} = 5^{-1}$, из графика видно, что $5^x < 5^{-1}$, при $x < -1$.

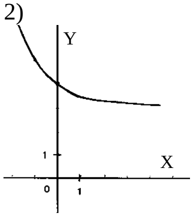




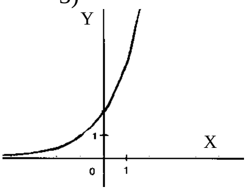
201. 1)



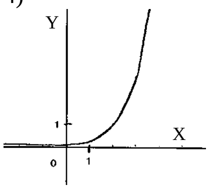
2)



3)



4)

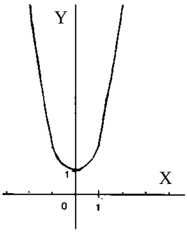


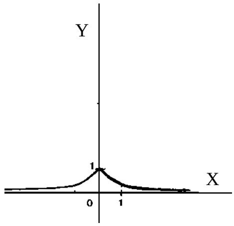
202. $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, если точка ($x_o$; y_o) принадлежит графику функции $y = 2^x$, то точка (– x_o; y_o) принадлежит графику функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, а точки ($x_o$; y_o) и (– x_o; y_o) симметричны относительно оси ординат, значит данные графики симметричны относительно оси ординат.

203. Так как функция 2^x — возрастающая функция, то на отрезке [– 1; 2] наименьшее значение она принимает при $x = -1$; а наибольшее при $x = 2$, значит, наименьшее значение $y(-1) = 2^{-1} = 0{,}5$, а наибольшее $y(2) = 2^2 = 4$.

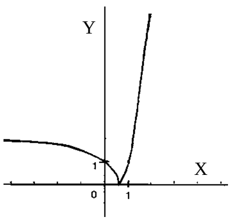
204. Поскольку функция $y = 2^{|x|}$ симметрична относительно оси ординат, а на отрезке [0; 1] $2^{|x|} = 2^x$, функция 2^x — возрастающая, значит, данная функция принимает наименьшее значение при $x = 0$, $y(0) = 2^0 = 1$, и наибольшее при $x = 1$ или $x = -1$, $y(-1) = 2^1 = 2$.

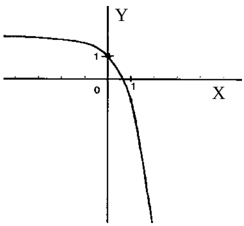
205. 1) 2)





3) 4)





206. $T = 1;\ \ t_1 = 1{,}5,\ \ t_2 = 3{,}5,\ \ m_0 = 250$;

$$m(t_1) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 250 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1{,}5}{1}} \approx 88{,}42\ ;$$

$$m(t_2) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{T}} = 250 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3{,}5}{1}} \approx 22{,}12\ .$$

207. Пусть a — прирост деревьев за первый год, b — за второй год, c — за 3-й год, d — за четвертый год, e — за пятый год, тогда $a = 4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04$, $b = (4 \cdot 10^5 + a) \cdot 0{,}04$; $c = (4 \cdot 10^5 + b) \cdot 0{,}04$; $d = (4 \cdot 10^5 + c) \cdot 0{,}04$; $e = (4 \cdot 10^5 + d) \cdot 0{,}04$, тогда через пять лет можно будет заготовить $4 \cdot 10^5(a + b + c + d + e) \approx 4{,}87 \cdot 10^5$ м^3.

208. 1) $4^{x-1} = 1;\ \ 4^{x-1} = 4^0;\ \ x - 1 = 0;\ \ x = 1$;

2) $0{,}3^{3x-2} = 1;\ \ 0{,}3^{3x-2} = 0{,}3^0;\ \ 3x - 2 = 0;\ \ x = \frac{2}{3}$;

3) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}};\ \ 2x = 4\sqrt{3};\ \ x = 2\sqrt{3}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2};\ \ 3x = -2;\ \ x = -\frac{2}{3}$.

209. 1) $27^x=\frac{1}{3}$; $(3^3)^x=3^{-1}$; $3^{3x}=3^{-1}$; $3x=-1$; $x=-\frac{1}{3}$;

2) $400^x=\frac{1}{20}$; $(20^2)^x=20^{-1}$; $2x=-1$; $x=-0{,}5$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; $5^{-x}=5^2$; $-x=2$; $x=-2$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^4$; $x=4$.

210. 1) $3\cdot 9^x=81$; $(3^2)^x=27$; $3^{2x}=3^3$; $2x=3$; $x=1{,}5$;

2) $2\cdot 4^x=64$; $(2^2)^x=32$; $2^{2x}=2^5$; $2x=5$; $x=2{,}5$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; $3^{x+\frac{1}{2}+x-2}=3^0$; $2x-1{,}5=0$; $x=0{,}75$;

4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$; $0{,}5^{x+7+1-2x}=0{,}5^{-1}$; $8-x=-1$; $x=9$;

5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; $0{,}6^{x+3}=0{,}6^{2x-5}$; $x+3=2x-5$; $x=8$;

6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$; $6^{3x-1}=6^{1-2x}$; $3x-1=1-2x$; $x=\frac{2}{5}$.

211. 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; $3^{2x}(\frac{1}{3}+1)=108$; $3^{2x}\cdot\frac{4}{3}=108$; $3^{2x}=81$; $3^{2x}=3^4$; $2x=4$; $x=2$;

2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$; $2^{3x}(4-\frac{1}{4})=30$; $2^{3x}\cdot\frac{15}{4}=30$; $2^{3x}=8$; $2^{3x}=2^3$; $3x=3$; $x=1$;

3) $2^{x+11}+2^{x-1}+2^x=28$; $2^x(2+\frac{1}{2}+1)=28$; $2^x\cdot\frac{7}{2}=28$; $2^x=8$; $2^x=2^3$; $x=3$;

4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$; $3^x(\frac{1}{3}-1+3)=63$; $3^x\cdot\frac{7}{3}=63$; $3^x=27$; $3^x=3^3$; $x=3$.

212. 1) $5^x=8^x$; $\frac{5^x}{8^x}=1$; $\left(\frac{5}{8}\right)^x=\left(\frac{5}{8}\right)^0$; $x=0$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}=1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^0$; $x=0$;

3) $3^x=5^{2x}$; $\frac{3^x}{25^x}=1$; $\left(\frac{3}{25}\right)^x=\left(\frac{3}{25}\right)^0$; $x=0$;

4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$; $4^x=\left(\sqrt{3}\right)^x$; $\frac{4^x}{(\sqrt{3})^x}=1$; $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^x=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^0$; $x=0$.

213. 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; $3^x=t$; $t^2-4t+3=0$;

$t=1$ и $t=3$; $3^x=3$; $x^1=1$ или $3^x=1$; $3^x=3^0$; $x=0$;

2) $16^x - 17\cdot 4^x + 16 = 0;\ \ 4^x = t;\ \ t^2 - 17t + 16 = 0$;

$t = 1$ и $t = 16;\ \ 4^x = 1;\ \ 4^x = 4^0;\ \ x = 0$ или $4^x = 16;\ 4^x = 4^2;\ \ x = 2$;

3) $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0;\ \ 5^x = t;\ \ t^2 - 6t + 5 = 0$;

$t = 1$ и $t = 5;\ \ 5^x = 5;\ \ x = 1$ или $5^x = 1;\ \ 5^x = 5^0;\ \ x = 0$;

4) $64^x - 8^x - 56 = 0;\ \ 8^x = t;\ \ t^2 - t - 56 = 0$;

$t = 8$; $8^x = 8;\ \ x = 1$ или $t = -7;\ \ 8^x = -7$ — посторонний корень.

214. 1) $3^{x^2+x-12} = 1;\ \ 3^{x^2+x-12} = 3^0;\ \ x^2 + x - 12 = 0$; $x = 3$ или $x=-4$;

2) $2^{x^2-7x+10} = 1;\ \ 2^{x^2-7x+10} = 2^0;\ \ x^2 - 7x + 10 = 0$; $x = 5$ или $x = 2$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4;\ \ 2^{\frac{x-1}{x-2}} = 2^2;\ \ \dfrac{x-1}{x-2} = 2;\ \ \begin{cases} x \ne 2 \\ x - 1 = 2x - 4 \end{cases};\ \ x = 3$;

4) $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}};\ \ 2^{-\frac{1}{x}} = 2^{\frac{2}{x+1}};\ \ -\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x+1};\ \ \begin{cases} -x - 1 = 2x \\ x \ne 0 \\ x \ne -1 \end{cases};\ \ x = -\dfrac{1}{3}$.

215. 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1} = 1;\ \ 0{,}3^{x^3-x^2+x-1} = 0{,}3^0;\ \ x^3 - x^2 + x - 1 = 0$;

$x^2(x-1) + (x-1) = 0;\ \ (x^2+1)(x-1) = 0;\ \ x = 1$;

2) $\left(2\dfrac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = 1;\ \ \left(2\dfrac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = \left(2\dfrac{1}{3}\right)^0;\ x^2 + 2x - 3 = 0$; $x = 1$ или $x = -3$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5{,}1\sqrt{5{,}1};\ \ 5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5{,}1^{\frac{3}{2}};\ \ \dfrac{1}{2}(x-3) = \dfrac{3}{2};\ \ x = 6$;

4) $100^{x^2-1} = 10^{1-5x};\ \ 10^{2x^2-2} = 10^{1-5x};\ \ 2x^2 - 2 = 1 - 5x;$

$2x^2 + 5x - 3 = 0,\ \ x = 0{,}5$ или $x = -3$.

216. 1) $10^x = \sqrt[3]{100};\ \ 10^x = 10^{\frac{2}{3}};\ \ x = \dfrac{2}{3}$;

2) $10^x = \sqrt[5]{10000};\ \ 10^x = 10^{\frac{4}{5}};\ \ x = \dfrac{4}{5}$;

3) $225^{2x^2-24} = 15;\ \ 15^{4x^2-48} = 15;\ \ 4x^2 - 48 = 1$; $4x^2 = 49;\ \ x_{1,2} = \pm 3{,}5$;

4) $10^x = \sqrt[4]{10000};\ \ 10^x = 10^{-1};\ \ x = -1$;

5) $(\sqrt{10})^x = 10^{x^2-x};\ \ 10^{\frac{x}{2}} = 10^{x^2-x};\ \ \dfrac{x}{2} = x^2 - x;\ \ x_1 = 0$ и $x_2 = 1{,}5$;

6) $100^{x^2-1} = 10^{1-5x};\ \ 10^{2x^2-2} = 10^{1-5x};\ \ 2x^2 - 2 = 1 - 5x;$

$2x^2 + 5x - 3 = 0,\ \ x = 0{,}5$ или $x = -3$.

217. 1) $2^{x^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; $2^{x^2}\cdot 2^{-\frac{1}{4}x}=2^{\frac{3}{4}}$; $x^2-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}$; $x^2-x-3=0$; $x=1$ или $x=-\frac{3}{4}$.

2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$; $5^{0,1x}\cdot 5^{0,06}=5^{x^2}$; $0,1x+0,06=x^2$;

$100^2-10x-6=0$; $50x^2-5x-3=0$; $x=0,3$ или $x=-0,2$.

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; $\sqrt{1-x}-1=2x$; $1-x=4x^2+4x+1$;

$x(4x+5)=0$; $x_1=0$ и $x_2=-1\frac{1}{4}$ — посторонний корень, значит, $x=0$.

4) $0,7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0,7^{-2}=0,7^{\sqrt{x}}$; $\sqrt{x+12}-2=\sqrt{x}$; $x+12=x+4\sqrt{x}+4$; $8=4\sqrt{x}$; $2=\sqrt{x}$; $x=4$.

218. 1) $7^x-7^{x-1}=6$; $7^x(1-\frac{1}{7})=6$; $7^x\cdot\frac{6}{7}=6$; $7^x=7$; $x=1$;

2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$; $3^{2y}(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{81})=315$; $3^{2y}\cdot\frac{35}{81}=315$; $9^y=9^3$; $y=3$;

3) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; $5^{3x}(1+\frac{3}{25})=140$; $5^{3x}\cdot\frac{28}{25}=140$; $5^{3x}=5^3$; $3x=3$; $x=1$;

4) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$; $6=2^x(5-\frac{3}{2}-2)$; $6=2^x\cdot 1,5$; $4=2^x$; $2^x=2^2$; $x=2$.

219. 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; $7^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; $\frac{7^{x-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}}=1$; $(21)^{x-2}=(21)^0$; $x-2=0$; $x=2$;

2) $2^{x-3}=3^{3-x}$; $2^{x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$; $\frac{2^{x-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}}=1$; $6^{x-3}=6^0$; $x-3=0$; $x=3$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; $\frac{(\sqrt[4]{3})^{x+2}}{5^{x+2}}=1$; $\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{5}\right)^{x+2}=\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{5}\right)^0$; $x+2=0$; $x=-2$;

4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$; $2^{x-3}=9^{x-3}$; $\frac{2^{x-3}}{9^{x-3}}=1$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{x-3}=\left(\frac{2}{9}\right)^0$; $x-3=0$; $x=3$.

220. 1) $(0,5)^{x^2-4x+3}=(0,5)^{2x^2+x+3}$; $x^2-4x+3=2x^2+x+3$; $x^2-5x=0$; $x(x+5)=0$; $x=0$ или $x=-5$;

2) $(0,1)^{3+2x}=(0,1)^{2-x^2}$; $3+2x=2-x^2$; $x^2+2x+1=0$; $(x+1)^2=0$; $x=-1$;

3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; $\sqrt{x-6}=x$; $x-6=x^2$; $x^2-x+6=0$ не имеет действительных корней;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$; $x=\sqrt{2-x}$; $x^2=2-x$; $x^2+x-2=0$; $x=-2$ — посторонний корень, значит, $x=1$.

221. 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; $|x-2|=|x+4|$.

Если $x \le -4$, то $2-x=-x-4$; $2=-4$ — нет действительных решений.

Если $-4<x<2$, то $2-x=x+4$; $x=-1$.

Если $x>2$, то $x-2=x+4$ — нет действительных решений, значит, $x=-1$.

2) $1{,}5^{|5-x|}=1{,}5^{|x-1|}$; $|5-x|=|x-1|$; $x=3$.

3) $3^{|x+1|}=3^{2-|x|}$; $|x+1|=2-|x|$; $x_1=-1{,}5$ и $x_2=0{,}5$.

4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$; $|x|=|2-x|-1$; $x=0{,}5$.

222. 1) $3^{x-3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot 7^x$; $3^x(27+1)=7^x(7+5)$; $3^x\cdot 7=7^x\cdot 3$;

$3^{x-1}=7^{x-1}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^0$; $x=1$;

2) $3^{x+4}+3\cdot 5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$; $3^{x+3}(3-1)=5^{x+3}(5-3)$;

$3^{x+3}\cdot 2=5^{x+3}\cdot 2$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3}=\left(\frac{3}{5}\right)^0$; $x=-3$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$; $2^{3-x}(2^5-11)=7^{3-x}(7-1)$;

$2^{3-x}\cdot 7=7^{3-x}\cdot 2$; $2^{2-x}=7^{2-x}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{2-x}=\left(\frac{2}{7}\right)^0$; $x=2$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}$; $2^x(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})=$

$=3^x(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{1}{3})$; $2^x\cdot\frac{21}{x}=3^x\cdot\frac{14}{27}$; $2^{x-4}=3^{x-4}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^0$; $x=4$.

223. 1) $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$; $2^x=t$; $8t^x-6t+1=0$;

$t=\frac{1}{2}$ и $t=\frac{1}{4}$; $2^x=\frac{1}{2}$; $x_1=-1$; $2^x=\frac{1}{4}$; $x_2=-2$;

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$; $t^2+t-6=0$;

$t=-3$ — посторонний корень; $t=2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$; $x=-1$;

3) $13^{2x+1}-13^{x-12}=0$; $13^x=t$; $13\cdot t^2-t-12=0$;

$t=-\frac{12}{13}$ — посторонний корень, $t=1$; $13^x=13^0$; $x=0$;

4) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$; $3^x=t$; $3t^2-10t+3=0$;

$t=3$ или $t=\frac{1}{3}$; $3^x=3$; $x_1=1$; $3^x=\frac{1}{3}$; $3^x=3^{-1}$; $x_2=-1$;

5) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$; т.к. $2^x\ne 0$, то $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$; $2^x=t$;

$t^2-6t+8=0$; $t_1=4$ и $t_2=2$; $2^x=4$; $x_1=2$; $2^x=2$; $x_2=1$;

6) $5^{3x+1}+34\cdot5^{2x}-7\cdot5^x=0$; т.к. $5^x\neq0$, то $5\cdot5^{2x}+34\cdot5^x-7=0$;

$5^x=t$; $5t^2+34t-7=0$;

$t=-7$ — посторонний корень, $t=\frac{1}{5}$; $5^x=\frac{1}{5}$; $x=-1$.

224. $q=\frac{3,25}{6,5}=0,5$; $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{6,5}{1-0,5}=13$;

$2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=13$; $2^x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=13$; $2^x\cdot\frac{13}{16}=13$; $2^x=16$; $2^x=2^4$; x=4.

225. 1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; $3^{2(x+3)}=2^{x+3}$; $9^{x+3}=2^{x+3}$; $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3}=\left(\frac{9}{2}\right)^0$; x+3=0; x=–3;

2) $2^{x-2}=4^{2x-4}$; $5^{x-2}=4^{2(x-2)}$; $5^{x-2}=16^{x-2}$; $\left(\frac{5}{16}\right)^{x-2}=\left(\frac{5}{16}\right)^0$; x–2=0; x=2;

3) $2^x\cdot3^x=36^{x^2}$; $(2\cdot3)^x=6^{2x^2}$; $2x^2=x$; $x(2x-1)=0$; $x=0$ или $x=\frac{1}{2}$;

4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$; $3^{-2\sqrt{x-1}}=3^{-3}$; $-2\sqrt{x-1}=-3$; $\sqrt{x-1}=1,5$; x–1=2,25; x=3,25;

226. 1) $4\cdot9^x-13\cdot6^x+9\cdot4^x=0$; $4\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x-13\left(\frac{2}{3}\right)^x+9=0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$;

$4t^2-13t+9=0$; $t_1=1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$; $x_1=0$; $t_2=\frac{9}{4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $x_2=2$;

2) $16\cdot9^x-25\cdot12^x+9\cdot16^x$; $16\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^x-25\left(\frac{3}{4}\right)^x+9=0$;

$\left(\frac{3}{4}\right)^x=t$; $16t^2-25t+9=0$; $t_1=1$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x=1$; $x_1=0$; $t_2=\frac{9}{16}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $x_2=2$

227. 1) Т.к. функция $y_1=4^x$ — возрастающая и функция $y_1=25^x$ — тоже возрастающая, значит, $y_1+y_2=4^x+25^x$ — возрастающая функция, и каждое свое значение принимает только один раз, значит x=1 — единственный корень уравнения $4^x+25^x=29$.

2) Т.к. функция $y_1=7^x$ — возрастающая, и функция $y_2=18^x$ — возрастающая, то $y_1+y_2=7^x+18^x$ — возрастающая функция, и каждое свое значение принимает только один раз, значит x=1 — единственный корень уравнения $7^x+18^x=25$.

228. 1) $3^x>9$; $3^x>3^2$; $x>2$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $x<2$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2$; $2^{-2x}<2^1$; $-2x<1$; $x>-\frac{1}{2}$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$; $2^{2x} < 2^{-1}$; $2x < -1$; $x < -\frac{1}{2}$;

5) $2^{3x} \ge \frac{1}{2}$; $2^{3x} \ge 2^{-1}$; $3x \ge -1$; $x \ge -\frac{1}{3}$;

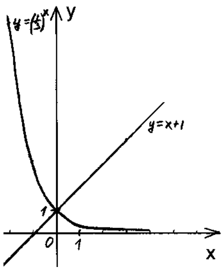
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \le \frac{1}{9}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $x-1 \ge 2$; $x \ge 3$.

229. 1) $5^{x-1} \le \sqrt{5}$; $5^{x-1} \le 5^{\frac{1}{2}}$; $x-1 \le \frac{1}{2}$; $x \le 1{,}5$;

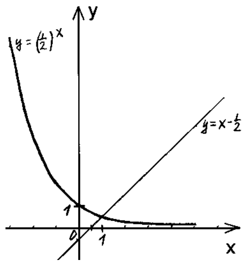
2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; $3^{\frac{x}{2}} > 3^2$; $\frac{x}{2} > 2$; $x > 4$;

3) $3^{x^2-4} \ge 1$; $3^{x^2-4} \ge 3^0$; $x^2 - 4 \ge 0$; $x \le -2$ и $x \ge 2$;
4) $5^{2x-18} < 1$; $5^{2x-18} < 5^0$; $x^2-9<0$; $-3<x<3$.

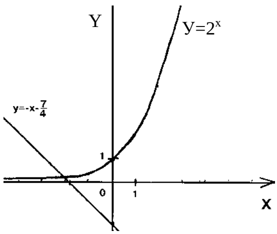
230. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x+1$, из графика видно, что графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x+1$ пересекаются при $x=0$.



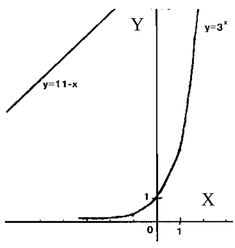
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$, из рисунка видно, что графики функций $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = x - \frac{1}{2}$ пересекаются при $x=1$.



3) $2^x = -x - \frac{7}{4}$, из рисунка видно, что графики функций $y = 2^x$ и $y = -x - \frac{7}{4}$ пересекаются при x = –2.



4) $3^x = 11 - x$, из рисунка видно, что графики функций $y = 3^x$ и $y = 11 - x$ пересекаются при $x = 2$.



231. 1) $2^{-x^2+3x}<4$; $2^{-x^2+3x}<2^2$; $-x^2+3x<2$; $x^2-3x+2>0$ $x<1$ и $x>2$;

2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2+3x}\ge\frac{9}{7}$; $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2+3x}\ge\left(\frac{7}{9}\right)^{-1}$; $2x^2-3x+1\le 0$; $\frac{1}{2}\le x\le 1$;

3) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x}<\frac{121}{169}$; $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x}<\left(\frac{13}{11}\right)^{-2}$; $x^2-3x+2<0$; $1<x<2$;

4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x}\le 7\frac{1}{9}$; $\left(\frac{8}{3}\right)^{6x^2+x}\le\frac{64}{9}$; $6x^2+x\le 0$; $-\frac{2}{3}\le x\le\frac{1}{2}$.

232. 1) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$; $3^x(9+\frac{1}{3})<28$; $3^x\cdot\frac{28}{3}<28$; $3^x<3$; $x<1$;

2) $2^{x-1}+2^{x+3}>17$; $2^x(\frac{1}{2}+8)>17$; $2^x\frac{17}{2}>17$; $2^x>2$; $x>1$;

3) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\ge 448$; $2^{2x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\ge 448$; $2^{2x}\cdot\frac{7}{8}\ge 448$;

$2^{2x}\ge 512$; $2^{2x}\ge 2^9$; $2^{2x}\ge 9$; $x\ge 4{,}5$;

4) $5^{3x+1}-5^{3x-3}\le 624$; $5^{3x}(5-\frac{1}{125})\le 624$; $5^{3x}\cdot\frac{624}{125}\le 624$; $5^{3x}\le 125$;

$5^{3x}\le 5^3$; $3x\le 3$; $x\le 1$.

233. 1) $9^x-3^x-6>0$; $3^x=t$; $t^2-t-6>0$; $t<-2$ — нет действительных решений, $t>3$; $x>1$, значит, целые решения данного неравенства на отрезке [– 3; 3] – $x_1=2$, $x_2=3$.

2) $4^x-2^x<12$; $2^x=t$; $t^2-t-12<0$; $-3<t<4$; $2^x<4$; $2^x<2$; $x<2$, значит, целые решения данного неравенства на отрезке [– 3; 3] – $x_1=-3$, $x_2=-2$; $x_3=-1$; $x_4=0$; $x_5=1$.

3) $5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1>12$; $5^x=t$; $5t^2+4t-1>0$; $t<-1$ — нет действительных решений, $t>\frac{1}{5}$; $5^x>\frac{1}{5}$; $5^x>5^{-1}$; $x>-1$, значит, целые решения данного неравенства на отрезке [– 3; 3] – $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$.

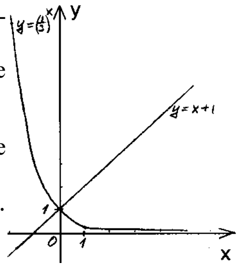
4) $3\cdot 9^x+11\cdot 3^x<4$; $3^x=t$; $3t^2+11t-4<0$; $-4<t<\frac{1}{3}$; $3^x<\frac{1}{3}$; $3^x>3^{-1}$; $x<-1$, значит, целые решения данного неравенства на отрезке [– 3; 3] – $x_1=-2$; $x_2=-3$.

234. 1) $y=\sqrt{25^x-5^x}$, область определения — $25^x-5^x\ge 0$

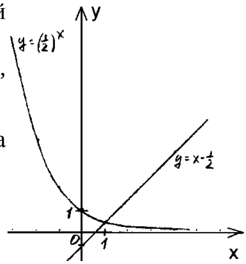
$5^x(5^x-1)\ge 0$; $5^x\ge 1$; $5^x\ge 5^0$; $x\ge 0$.

2) $y=\sqrt{4^x-1}$, область определения — $4^x-1\ge 0$; $4^x\ge 1$; $4^x\ge 4^0$; $x\ge 0$.

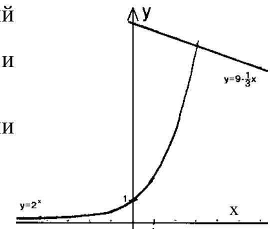
235. Значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+12$, при $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x + 12$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12 > 0$; $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $t^2 - t - 12 > 0$; $t<-3$ — не имеет действительных решений, значит, $t > 4$; $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$; $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $x < -2$.



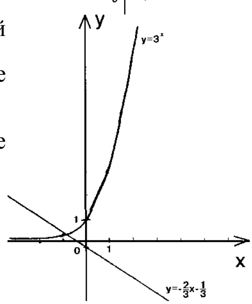
236. 1) Из рисунка видно, что графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x + 1$ пересекаются в точке (0; 1), и график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ лежит выше графика функции $y = x + 1$ при $x < 0$. Ответ: $x \le 0$.



2) Из рисунка видно, что графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = x - \frac{1}{2}$ пересекаются в точке (0; $\frac{1}{2}$), и график функции $y = x - \frac{1}{2}$ лежит выше графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ при $x > 1$.

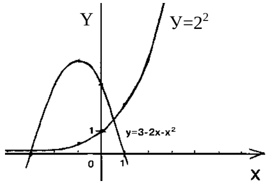


3) Из рисунка видно, что графики функций $y = 2^x$ и $y = 9 - \frac{1}{3}x$ пересекаются в точке (3; 8), и график функции $y = 9 - \frac{1}{3}x$ лежит выше функции $y = 2^x$ при $x < 3$. Ответ: $x \le 3$.

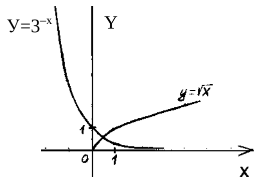


4) Из рисунка видно, что графики функций $y = 3^x$ и $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ пересекаются в точке (–1; $\frac{1}{3}$), и график функции $y = 3^x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ при $x > -1$.

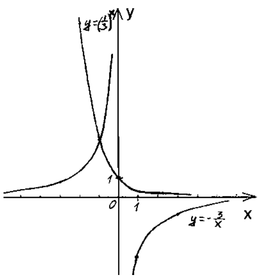
237. 1) Графики функций $x=2^x$ и $y=3-2x-x^2$ пересекаются при $x_1 \approx -3;\ x_2 \approx \frac{2}{3}$.



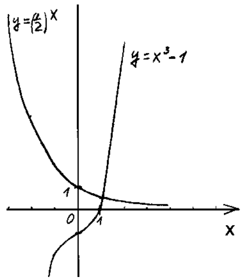
2) Графики функций $y=3^{-x}$ и $y=\sqrt{x}$ пересекаются при $x_1 \approx \frac{1}{3}$.



3) Графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=-\frac{3}{x}$ пересекаются при $x=-1$.



4) Графики функций $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y=x^{3-1}$ пересекаются при $x \approx 1\frac{1}{3}$.



238. 1) $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x;\ \sqrt{x+6} > x;\ \begin{cases} x > -6 \\ x \ge 0 \\ x+6 > x^2 \end{cases};\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases};\ \begin{cases} x \ge 0 \\ -2 < x < 3 \end{cases};$

$0 \le x < 3$, но при $-6 < x \le 0$ данное неравенство выполняется, значит, $-6 < x < 3$.

2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}} > 0{,}3^x;\ \sqrt{30-x} < x;\ \begin{cases} x > 0 \\ 30-x \ge 0 \\ 30-x < x^2 \end{cases};\ \begin{cases} 0 < x \le 30 \\ x^2 + x - 30 > 0 \end{cases};\ \begin{cases} 0 < x \le 30 \\ x > 5 \end{cases};$ $5 < x \le 30$.

239. 1) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1{,}5;\ \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2{,}5\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1{,}5 > 0;$

$t=\left(\frac{2}{5}\right)^x;\ \ t^2 - 1{,}5t - 2{,}5 > 0;\ \ t < -1$ — не имеет действительных решений, значит, $t > 2{,}5;\ \left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{5}{2};\ \ x < -1$.

2) $25 \cdot 0{,}04^{2x} > 0{,}2^{x(3-x)};\ \left(\frac{1}{25}\right)^{-1} \cdot 0{,}2^{4x} > 0{,}2^{3x-x^2};\ 0{,}04^{-1} \cdot 0{,}2^{4x} > 0{,}2^{3x-x^2};$

$0,2^{4x-2} > 0,2^{3x-x^2}$; $4x-2 < 3x-x^2$; $x^2+x-2<0$; $-2<x<1$.

3) $\dfrac{4^x}{4^x-3^x} < 4$; $\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x} < 4$; $\begin{cases} 1 < 4-4\left(\frac{3}{4}\right)^x \\ 1 \neq \left(\frac{3}{4}\right)^x \end{cases}$; $\begin{cases} 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x < 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x < \frac{3}{4}; \\ x \neq 0 \end{cases}$ $x>1$;

если $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^x < 0$, то данное неравенство выполняется, т.е. $x<0$.

4) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 32\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0$; $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 32\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x^2-1}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\left(x^2-1\right)}\cdot 2^5$;

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x^2-3-5}\cdot 2^5$; $2x > 3x^2-8$; $3x^2-2x-8<0$; $-\dfrac{4}{3} < x < 2$.

240. 1) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 5^{x+y}=25 \end{cases}$; $\begin{cases} y=2x-1 \\ 5^{x+2x-1}=5^2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=2x-1 \\ 3x-1=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} x-y=2 \\ 3^{x^2+y}=\frac{1}{9} \end{cases}$; $\begin{cases} y=x-2 \\ 3^{x^2+x-2}=3^{-2} \end{cases}$; $\begin{cases} y=x-2 \\ x^2+x-2=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x-2 \\ x(x+1)=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=x-2 \\ x=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=x-2 \\ x=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2^{x-y}=8 \end{cases}$; $\begin{cases} y=1-x \\ 2^{x-1+x}=2^3 \end{cases}$; $\begin{cases} y=1-x \\ 2x-1=3 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3^{x-y}=81 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3-2y \\ 3^{3-2y-y}=3^4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3-2y \\ 3^{3-2y-y}=3^4 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-\frac{1}{3} \\ x=3\frac{2}{3} \end{cases}$.

241. 1) $\begin{cases} 4^x\cdot 2^y=32 \\ 3^{8x+1}=3^{3y} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{2x+y}=2^5 \\ 8x+1=3y \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 8x+3y+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=5-2x \\ 8x-15+16x+1=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=5-2x \\ 14x=14 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 3^{3x-2y}=81 \\ 3^{6x}\cdot 3^y=27 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{3x-2y}=3^4 \\ 3^{6x+y}=3^3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 6x+y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} y=3-6x \\ 3x-6+12x-4=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=3-6x \\ 15x=10 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-1 \end{cases}$.

242. 1) $\begin{cases} 2^x+2^y=6 \\ 2^x-2^y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\cdot 2^y=8 \\ 2^x+2^y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x=4 \\ 4+2^y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ 2x=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

2) $\begin{cases}3^x+3^y=8\\3^x-5^y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}2\cdot3^x=6\\3^x+5^y=8\end{cases}$; $\begin{cases}3^x=3\\3+5^y=8\end{cases}$; $\begin{cases}x=1\\5x=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

243. 1) $\begin{cases}5^x-5^y=100\\5^{x-1}-5^{y-1}=30\end{cases}$; $\begin{cases}5^x-5^y=100\\5^x+5^y=150\end{cases}$; $\begin{cases}2\cdot5^x=250\\5^x+5^y=150\end{cases}$;

$\begin{cases}5^x=125\\125+5^y=150\end{cases}$; $\begin{cases}5^x=5^3\\5^y=25\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$.

2) $\begin{cases}2^x-9\cdot3^y=7\\2^x\cdot3^y=\dfrac{8}{9}\end{cases}$; $\begin{matrix}2^x=u\\3^y=v\end{matrix}$; $\begin{cases}u-9v=7\\uv=\dfrac{8}{9}\end{cases}$; $\begin{cases}u=7+9v\\81v^2+63\cdot v-8=0\end{cases}$; ; $v=-\dfrac{8}{9}$ — не имеет действительных решений, значит,

$\begin{cases}u=7+9v\\v=\dfrac{1}{9}\end{cases}$; $\begin{cases}u=8\\3^y=3^{-2}\end{cases}$; $\begin{cases}2^x=2^3\\y=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$.

3) $\begin{cases}16^y-16^x=24\\16^{x+y}=256\end{cases}$; $\begin{cases}16^y-16^x=24\\x+y=2\end{cases}$; $\begin{cases}y=2-x\\16^{2-x}-16^x-24=0\end{cases}$; $16^x=t$;

$\begin{cases}y=2-x\\t^2+24t-256=0;\\16^x=t\end{cases}$ $t=-32$ — посторонний корень, значит, $t=8$;

$\begin{cases}y=2-x\\16^x=8\end{cases}$; $\begin{cases}y=2-x\\2^{4x}=2^3\end{cases}$; $\begin{cases}y=2-x\\4x=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\\y=1\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

4) $\begin{cases}3^x+2^{x+y+1}=5\\3^{x+1}-2^{x+y}=1\end{cases}$; $\begin{matrix}3^x=u\\2^{x+y}=v\end{matrix}$; $\begin{cases}u+2v=5\\3u-v=1\end{cases}$; $\begin{cases}u+2v=5\\6u-2v=2\end{cases}$; $\begin{cases}u+2v=5\\7u=7\end{cases}$;

$\begin{cases}u=1\\2v=4\end{cases}$; $\begin{cases}3^x=1\\v=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=0\\2^{x+y}=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=0\\2^y=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.

5) $\begin{cases}5^{x+1}\cdot3^y=75\\3^x\cdot5^{y-1}=3\end{cases}$; перемножая уравнения системы, получаем:

$\begin{cases}(3\cdot5)^{x+y}=225\\5^x\cdot3^y=15\end{cases}$; $\begin{cases}15^{x+y}=15^2\\5^x\cdot3^y=15\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=2\\5^x\cdot3^y=15\end{cases}$; $\begin{cases}x=2-y\\5^{2-y}\cdot3^y=15\end{cases}$;

$\begin{cases}x=2-y\\25\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^y=15\end{cases}$; $\begin{cases}x=2-y\\\left(\dfrac{3}{5}\right)^y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$; $\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$.

6) $\begin{cases}3^x\cdot2^y=4\\3^x\cdot2^y=9\end{cases}$; $\begin{cases}3^x\cdot2^y=4\\(3\cdot2)^{x+y}=36\end{cases}$; $\begin{cases}3^x\cdot2^y=4\\6^{x+y}=6^2\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=2\\3^x\cdot2^y=4\end{cases}$; $\begin{cases}x=2-y\\3^{2-y}\cdot2^y=4\end{cases}$;

$\begin{cases} x = 2 - y \\ 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 - y \\ \left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{4}{9} \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$.

244. 1) $\begin{cases} 5^{2x+1} > 625 \\ 11^{6x^2-10x} = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} 5^{2x+1} > 5^4 \\ 6x^2 - 10x = 9x - 15 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 1 > 4 \\ 6x^2 - 19x + 15 = 0 \end{cases}$; $x = 1{,}5$ — посторонний корень, т.к. он не удовлетворяет первенству, значит, $x = 1\frac{2}{3}$.

2) $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2-47} = 0{,}3^{-10x-7} \\ 3{,}7^{x^2} < 3{,}7^4 \end{cases}$; $\begin{cases} 10x^2 - 47x = -10x - 7 \\ x^2 < 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 10x^2 - 37x + 7 = 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$; x=3,5 — посторонний корень, т.к. он не удовлетворяет неравенству, значит, $x = 0{,}2$.

245. 1) $\begin{cases} (5^x)^y = 5^{21} \\ 5^x \cdot 5^y = 5^{10} \\ 3^x > 3^y \end{cases}$; $\begin{cases} 5^{xy} = 5^{21} \\ 5^{x+y} = 5^{10} \\ x > y \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 21 \\ x + y = 10; \\ x > y \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 - y \\ 10y - y^2 - 21 = 0; \\ x > y \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10 - y \\ y^2 - 10y - 21 = 0; \\ x > y \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$ — не удовлетворяет неравенству, значит, $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} (0{,}2^y)^x = 0{,}008 \\ (0{,}4)^y = (0{,}4)^{3{,}5-x} \\ 2^x \cdot 0{,}5^y < 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 0{,}2^{xy} = 0{,}2^3 \\ y = 3{,}5 - x \\ 2^x < 2^y \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 3 \\ y = 3{,}5 - x; \\ x < y \end{cases}$ $\begin{cases} 3{,}5x - x^2 = 3 \\ y = 3{,}5 - x \\ x < y \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 - 3{,}5x + 3 = 0 \\ y = 3{,}5 - x \\ x < y \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2 \end{cases}$ — не удовлетворяет неравенству, значит, $\begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 2 \end{cases}$.

246. 1) $4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$, т.к. $4 > 1$; $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$; 2) $2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7}$, т.к. 2>1; $\sqrt{3} < 1{,}7$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$, т.к. $\frac{1}{2} < 1$; $1{,}4 < \sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$, т.к. $\frac{1}{9} < 1$; $\pi < 3{,}14$.

247. 1) $2^{-\sqrt{5}} < 1 = 2^0$, т.к. $2 > 1$; $-\sqrt{5} < 0$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, т.к. $\frac{1}{2} < 1$; $\sqrt{3} > 0$;

3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2} < 1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^0$, т.к. $\frac{\pi}{4} < 1$; $\sqrt{5} - 2 > 0$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3} > 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$, т.к. $\frac{1}{3} < 1$; $\sqrt{8} - 3 < 0$.

248. 1) $y=0{,}78^x$; $0{,}78<1$; значит, $y=0{,}78^x$ — убывающая;

2) $y=1{,}69^x$; $1{,}69<1$; значит, $y=1{,}69$ — возрастающая;

3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^x$; $2>1$ значит, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ — возрастающая;

4) $y=4^x=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; $\frac{1}{4}<1$ значит, $y=4^x$ — убывающая.

249. 1) $y=5^x$ — возрастающая функция, значит, при $x\in[-1;2]$ ее значения находятся в промежутке $[y(-1);y(2)]$, т.е. в промежутке $\left[\frac{1}{5};25\right]$.

2) $y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ — возрастающая функция, значит, при $x\in[-1;2]$ ее значения находятся в промежутке $[y(2);y(-1)]$, т.е. в промежутке $\left[\frac{1}{25};5\right]$.

250. 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}$; $5x-7=-x-1$; $x=1$;

2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-5}$; $2x-3=x-5$; $x=-2$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; $5^{x^2-5x-6}=5^0$; $x^2-5x-6=0$; $x_1=-1$; $x_2=6$;

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$; $x^2-2x-2=1$; $x^2-2x-3=0$; $x_1=-1$; $x_2=3$.

251. 1) $2^x-2^{x-3}=18$; $2^x(1+\frac{1}{8})=18$; $2^x\cdot\frac{9}{8}=18$; $2^x=16$; $x=4$;

2) $3^x+4\cdot3^{x+1}=13$; $3^x(1+12)=13$; $3^x\cdot13=13$; $3^x=1$; $x=0$;

3) $2\cdot3^{x+1}-6\cdot3^{x-1}-3^x=9$; $3^x(6-2-1)=9$; $3^x\cdot3=9$; $3^x=3$; $x=1$;

4) $5^{x+1}+3\cdot5^{x-1}-6\cdot5^x+10=0$; $5^x(5+\frac{3}{5}-6)=-10$; $5^x\cdot\frac{2}{5}=10$;

$5^x=25$; $5^x=5^2$; $x=2$.

252. 1) $5^{2x}-5^x-600=0$; $5^x=t$; $t^2-t-600=0$; $t=-24$ — посторонний корень; $t=25$; $5^x=5^2$; $x=2$.

2) $9^x-3^x-6=0$; $3^x=t$; $t^2-t-6=0$; $t=-2$ — посторонний корень; $t=3$; $3^x=3$; $x=1$.

3) $3^x-9^{x-1}-810=0$; $t=3^x$; $t+\frac{1}{9}t^2-810=0$; $t^2+9t-7290=0$; $t=-90$ — посторонний корень; $t=81$; $3^x=3^4$; $x=4$.

4) $4^x+2^{x+1}-80=0$; $t=2^x$; $t^2+2t-80=0$; $t=-10$ — посторонний корень; $t=8$; $2^x=2^3$; $x=3$.

253. 1) $3^{x-2}>9$; $3^{x-2}>3^2$; $x-2>2$; $x>4$;

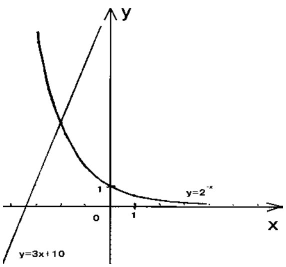
2) $2^{2x} < \frac{1}{25}$; $2^{2x} < 5^{-2}$; $2x < -2$; $x < -1$;

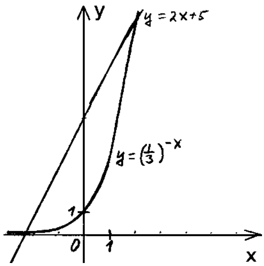
3) $0{,}7^{x^2+2x} < 0{,}7^3$; $x^2 + 2x > 3$; $x^2 + 2x - 3 > 0$; $x < -3$ и $x > 1$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \frac{1}{81}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^4$; $x^2 < 4$; $-2 < x < 2$.

254. 1) $2^{-x} = 3x + 10$, из рисунка видно, что графики функций $y = 2^{-x}$ и $y = 3x + 10$ пересекаются при $x = -2$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ =2x+5, из рисунка видно, что графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ и y=2x+5 пересекаются при $x \approx -2\frac{1}{3}$.

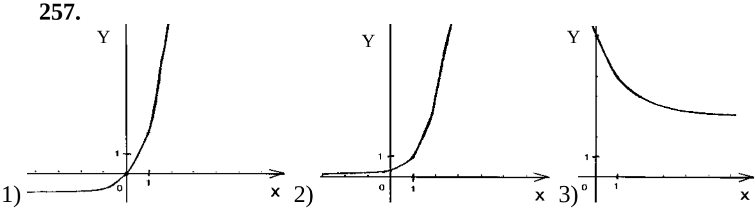




255. y=2^x; y=(1)=2; y=(2)=4; y=(3)=8;… действительно, при каждом натуральном *x*, большем предыдущего, значение функции y=2^x увеличивается в 2 раза, значит, данная функция при натуральных значениях x является геометрической прогрессией.

256. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов $S = a\left(1 + \frac{P}{100}\right)^t$, где t — число лет, в течение которых предприятие наращивало свою прибыль, т.е. $t = n - 1$, а $S = a\left(1 + \frac{P}{100}\right)^{n-1}$.

257.



258. 1) $0{,}6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{24-2x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$;

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+24=2x^2}=\left(\frac{3}{5}\right)^9$; $x+24-2x^2=9$; $2x^2-x-15=0$; x_1=–2,5; x_2=3.

2) $2^{4+\frac{x}{4}-5}=2^{\sqrt{x+1}}$; $\frac{x}{4}-5=\sqrt{x+1}$; $\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+1=x+1$; $\frac{x^2}{16}-\frac{3}{2}x=0$;

$x\left(\frac{x}{8}-3\right)=0$; $x=0$ — посторонний корень, значит, $x=24$.

259. 1) $2\cdot 3^{3x-1}+27^{x-\frac{2}{3}}=9^{x-1}+2\cdot 3^{2x-1}$; $\frac{2}{3}\cdot 3^{3x}+\frac{1}{9}^{3x}=\frac{1}{9}3^{2x}+\frac{2}{3}\cdot 3^{2x}$;

$3^{3x}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)3^{2x}$; $3^{3x}=3^{2x}$; $3x=2x$; $x=0$.

2) $2^{\sqrt{x}+2}=2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$; $2^{\sqrt{x}}\left(4-2-\frac{1}{2}\right)=12$; $2^{\sqrt{x}}\cdot\frac{3}{2}=12$; $2^{\sqrt{x}}=8$;

$2^{\sqrt{x}}=2^3$; $x=9$.

3) $22\cdot 9^{x-1}-\frac{1}{3}\cdot 3^{x+3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x+2}=4$; $\frac{22}{9}\cdot 9^x+3^x(3–9)–4=0$; $3^x=t$; $22t^2–54t–36=0$;

$t=-\frac{6}{11}$ — посторонний корень, значит, $t=3$; $3^x=3$; $x=1$.

4) $5\cdot 4^{x-1}-16^x+0{,}25\cdot 2^{2x+2}+7=0$; $\frac{5}{4}\cdot 4^x-16^x+4^x+7=0$; $4^x=t$ $t^2-(\frac{5}{4}+1)t-7=0$;

$4t^2-9t-28=0$; $t=-1{,}75$ — посторонний корень, значит, t=4 $4^x=4$; x=1.

260. 1) $2^{x+4}+2^{x+2}=5^{x+1}+3\cdot 5^x$; $2^x(16+4)=5^x(5+3)$; $2^x=\frac{8}{20}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{2}{5}$; x=1;

2) $5^{2x}–7^x–5^{2x}\cdot 17–7^x\cdot 17=0$; $5^{2x}(1–17)=7^x(1–17)$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x=1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^0$; x=0;

3) $2^{x-1}-3^{x^2}\cdot\frac{4}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $x^2=3$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$;

4) $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}9^{x+1}$; $4^x(3-24)=9^x(-\frac{9}{2}-27)$;

$\frac{4^x}{9^x}=\frac{63}{42}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{3}{2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2x}=\frac{3}{2}$; $-2x=1$; $x=-\frac{1}{2}$.

261. 1) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}}<1$; $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}}<8{,}4^0$; $\frac{x-3}{x^2+1}<0$;

2) x<3 $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}<10^{-3}(10^{3-x})^2$; $10^{x^2}<10^{6-2x-3}$; $x^2<3–2x$; $x^2+2x–3<0$; –3<x<1;

3) $\frac{4^x+2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^x$; $4^x-2\cdot 2^x+8<2^{3x}\cdot 2\cdot 2^{-x}$;

$2^{2x}–2\cdot 2^x+8–2\cdot 2^{2x}<0$; $2^{2x}+2\cdot 2^x–8>0$; $t=2^x$; $t^2+2t–8>0$; t<–4 — нет действительных корней, t>2; $2^x>2$; x>1;

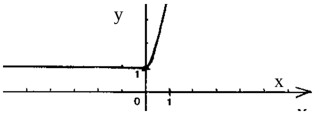
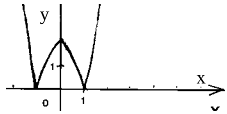
4) $\frac{1}{3^x+5}\le\frac{1}{3^{x+1}-1}$; $\begin{cases}3\cdot3^x-1\le3^x+5\\3^{x+1}-1>0\end{cases}$; $\begin{cases}2\cdot3^x\le6\\3^{x+1}-1>3^0\end{cases}$; $\begin{cases}3^x\le3\\x+1>0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le0\\x>-1\end{cases}$; $-1<x\le1$.

262. 1) $\begin{cases}2^{x-y}=128\\\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=\frac{1}{8}\end{cases}$; $\begin{cases}2^{x-y}=2^7\\\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\end{cases}$; $\begin{cases}x-y=7\\x-2y+1=3\end{cases}$;

$\begin{cases}x=7+y\\7+y-2y=2\end{cases}$; ; $\begin{cases}x=7+y\\y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=12\\y=5\end{cases}$.

2) $\begin{cases}2^x\cdot5^y=10\\5^y-2^x=3\end{cases}$; $\begin{matrix}u=2^x\\v-u=3\end{matrix}$; $\begin{cases}v=3+u\\3u+u^2-10=0\end{cases}$;

$u=-5$ — посторонний корень; $\begin{cases}u=2\\v=5\end{cases}$; $\begin{cases}2^x=2\\5^y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

263. 1)  2) 

264. 1) $\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt5}=5\cdot0,04^x$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+0,5+0,5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$; x+1=2x–1; $x=2$;

2) $4\cdot3^x-9\cdot2^x=5\cdot3^{\frac{x}{2}}\cdot2^{\frac{x}{2}}$; $4\left(\frac{3}{2}\right)^x-5\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}-9=0$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}=t$; $4t^2-5t-9=0$;

t=–1 — посторонний корень; $t=\frac{9}{4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{9}{4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $\frac{x}{2}=2$; $x=4$;

3) $2\cdot4^x-3\cdot10^x-5\cdot25^x=0$; $2\left(\frac{4}{25}\right)^x-3\left(\frac{2}{5}\right)^x-5=0$; $2\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-3\left(\frac{2}{5}\right)^x-5=0$;

$t=\left(\frac{2}{5}\right)^x$; $2t^2-3t-5=0$ t=–1 — посторонний корень; $t=\frac{5}{2}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; x=–1;

4) $4\cdot9^x+12^x-3\cdot16^x=0$; $4\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x-3=0$;

$\left(\frac{3}{4}\right)^x=t$; $4t^2+t-3=0$; t=–1 — посторонний корень, $t=\frac{3}{4}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{3}{4}$; x=1.

265. 1) $3^{|x-2|}<9$; $3^{|x-2|}<3^2$; $|x-2|<2$; $0<x<4$.
2) $4^{|x+1|}>16$; $4^{|x+1|}>4^2$; $|x+1|>2$; $x<-3$ и $x>1$.
3) $2^{|x-2|}>4^{|x+1|}$; $2^{|x-2|}>2^{2|x+1|}$; $|x-2|>2|x+1|$.
Если $x\ge2$, то $x-2>2x+2$, $x<-4$, следовательно, нет решений.
Если $-1<x<2$, то $2-x>2x+2$, $3x<0$, $x<0$, следовательно, $-1<x<0$.
Если $x\le-1$, то $2-x>-2x-2$, $x>-4$, следовательно, $-4<x\le-1$. Ответ: (–4; 0).
4) $5^{|x+4|}<25^{|x|}$; $5^{|x+4|}<5^{2|x|}$; $|x+4|<2|x|$; $x<-1\frac{1}{3}$ и $x>4$.

Глава IV. Логарифмическая функция

266. $\log^3 = 1$; $\log_3 y = 2\log_3 9 = 2$; $\log_3 81 = 4\cdot\log_3 3 = 4$; $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$;

$\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$; $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$; $\log_3\sqrt[3]{3} = \frac{1}{3}$; $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}} = -1{,}5$; $\log_3 9\sqrt[4]{3} = 2\frac{1}{4}$.

267. 1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\cdot\log_2 2 = 4$; 3) $\log_2 2 = 1$;

2) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6\cdot\log_2 2 = 6$; 4) $\log_2 1 = 0$.

268. 1) $\log_2\frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1\cdot\log_2 2 = -1$; 2) $\log_2\frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\cdot\log_2 2 = -3$;

3) $\log_2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\log_2 2 = \frac{1}{2}$; 4) $\log_3\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot\log_3 3 = -\frac{1}{4}$.

269. 1) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\cdot\log_3 3 = 3$; 3) $\log_3 3 = 1$;

2) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\cdot\log_3 3 = 4$; 4) $\log_3 1 = 0$.

270. 1) $\log_3\frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2\cdot\log_3 3 = -2$; 3) $\log_3\sqrt[3]{4} = \log_3 3^{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot\log_3 3 = \frac{1}{4}$;

2) $\log_3\frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1\cdot\log_3 3 = -1$; 4) $\log_3\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot\log_3 3 = -\frac{1}{4}$.

271. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{32} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = 5$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = -2$;

3) $\log_{0,5} 0{,}125 = \log_{0,5}(0{,}5)^3 = 3\cdot\log_{0,5} 0{,}5 = 3$;

4) $\log_{0,5}\frac{1}{2} = \log_{0,5}(0{,}5)^1 = 1\cdot\log_{0,5} 0{,}5 = 1$;

5) $\log_{0,5} 1 = \log_{0,5}(0{,}5)^0 = 0\cdot\log_{0,5} 0{,}5 = 0\cdot 1 = 1$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{2} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$.

272. 1) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4\cdot\log_5 5 = 4$; 2) $\log_6 216 = \log_6 6^3 = 3\cdot\log_6 6 = 3$;

3) $\log_4\frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2\cdot\log_4 4 = -2$; 4) $\log_5\frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3\cdot\log_5 5 = -3$.

273. 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3\cdot\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5} = -3$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = -3$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64}=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^3=3\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}=3$;

4) $\log_{\frac{1}{6}}36=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=-2\cdot\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{6}=-2$;

274. 1) $3^{\log_3 18}=18$; 2) $5^{\log_5 16}=16$;

3) $10^{\log_{10} 2}=2$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}=6$.

275. 1) $3^{5\log_3 2}=\left(3^{\log_3 2}\right)^5=2^5=32$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}\right)^6=2^6=64$;

3) $0,3^{2\log_{0,3}6}=(0,3^{\log_{0,3}6})^2=6^2=36$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}=\left(7^{\log_7 9}\right)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3$.

276. 1) $8^{\log_2 5}=2^{3\log_2 5}=(2^{\log_2 5})^3=5^3=125$;

2) $9^{\log_3 12}=3^{2\log_3 12}=(3^{\log_3 12})^2=12^2=144$;

3) $16^{\log_4 7}=4^{2\log_4 7}=(4^{\log_4 7})^2=7^2=49$;

4) $0,125^{\log_{0,5}1}=0,5^{3\log_{0,5}1}=(0,5^{\log_{0,5}1})^3=1^3=1$.

277. 1) $\log_6 x=3\cdot 1;\ \ \log_6 x=3\log_6 6;\ \ \log_6 x=\log_6 6^3;\ \ x=6^3=216$;

2) $\log_5 x=4\cdot 1;\ \ \log_5 x=4\log_5 5;\ \ \log_5 x=\log_5 5^4;\ \ x=5^4=625$;

3) $\log_2(5-x)=3\cdot 1;\ \ \log_2(5-x)=3\log_2 2;\ \ \log_2(5-x)=\log_2 2^3;$

$5-x=2^3;\ \ 5-x=8;\ \ x=-3$;

4) $\log_3(x+2)=3\cdot 1;\ \ \log_3(x+2)=3\log_3 3;\ \ \log_3(x+2)=\log_3 3^3;$

$x+2=3^3;\ \ x+2=27;\ \ x=25$;

5) $\log_{\frac{1}{6}}(0,5+x)=-1\cdot 1;\ \ \log_{\frac{1}{6}}(0,5+x)=-1\cdot\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{6};$

$\log_{\frac{1}{6}}(0,5+x)=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1};\ \ 0,5+x=6;\ \ x=5,5$.

278. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$ существует при $4-x>0;\ \ x<4$;

2) $\log_{0,2}(7-x)$ существует при $7-x>0;\ \ x<7$;

3) $\log_6\frac{1}{1-2x}$ существует при $\frac{1}{1-2x}>0;\ \ 1>2x;\ \ x<\frac{1}{2}$;

4) $\log_8\frac{5}{2x-1}$ существует при $\frac{5}{2x-1}>0;\ \ 2x-1>0;\ \ x<\frac{1}{2}$;

5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$ существует при $-x^2>0$ — не имеет действительных решений, значит $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$ — не существует;

6) $\log_{0,7}(-2x^3)$ существует при $-2x^3>0;\ \ x<0$.

279. 1) $\log_2\sqrt[4]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\log_2 2=\frac{1}{4}$;

2) $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}=\log_3 3^{-1,5}=-1,5\cdot\log_3 3=-1,5$;

3) $\log_{0,5}\frac{1}{\sqrt{32}}=\log_{0,5}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}\cdot\log_{0,5}0,5=2,5$;

4) $\log_7\frac{\sqrt[3]{7}}{49}=\log_7 7^{-2+\frac{1}{3}}=-1\frac{2}{3}\cdot\log_7 7=-1\frac{2}{3}$.

280. 1) $9^{2\log_3 5}=3^{4\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^4=5^4=625$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}=3^{-1\cdot\log_3 4}=(3^{\log_3 4})^{-1}=4^{-1}=\frac{1}{4}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}=2^{(-2)\cdot(-5)\log_2 3}=(2^{\log_2 3})^{10}=3^{10}=59049$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}}5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{(-3)(-4)\log_{\frac{1}{3}}5}=\left(\frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}}5}\right)^{12}=5^{12}$;

5) $10^{3-\log_{10}5}=\frac{10^3}{10^{\log_{10}5}}=\frac{1000}{5}=200$;

6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}}3}=\frac{1}{7}\cdot\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}}3}\right)^2=\frac{1}{7}\cdot 3^2=1\frac{2}{7}$.

281. 1) $\log_2(\log_3 81)=\log_2(\log_3 3^4)=\log_2(4(\log_3 3))=\log_2 2^2=2\cdot\log_2 2=2$;

2) $\log_3(\log_2 8)=\log_3(\log_2 2^3)=\log_3(3\cdot\log_2 2)=\log_3 3=1$;

3) $2\log_{27}(\log_{10}1000)=2\log_{27}(\log_{10}10^3)=2\log_{27}(3\log_{10}10)=$

$=2\log_{27}3=2\log_{27}27^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\log_{27}27=\frac{2}{3}$;

4) $\frac{1}{3}\log_9(\log_2 8)=\frac{1}{3}\log_9(\log_2 2^3)=\frac{1}{3}\log_9(3\log_2 2)=$

$=\frac{1}{3}\log_9 3=\frac{1}{3}\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\log_9 9=\frac{1}{6}$;

5) $3\log_2(\log_4 16)+\log_{\frac{1}{2}} 2=3\log_2(\log_4 4^2)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$

$=3\log_2(2\log_4 4)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=3\log_2 2-1=3-1=2$.

282. 1) $\log_x 27=3$; $\log_x 27=3\log_x x$; $\log_x 27=\log_x x^3$; $x^3=27$; $x^3=3^3$; $x=3$;

2) $\log_x \frac{1}{7}=-1$; $\log_x \frac{1}{7}=-1\cdot\log_x x$; $\log_x \frac{1}{7}=\log_x x^{-1}$; $\frac{1}{7}=\frac{1}{x}$; $x=7$;

3) $\log_x \sqrt{5}=-4$; $\log_x \sqrt{5}=-4\log_x x$; $\log_x \sqrt{5}=\log_x x^{-4}$; $\sqrt{5}=\frac{1}{x^4}$;

$x^4=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $x=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{8}}$.

283. 1) $\log_6(49-x^2)$ — существует при $49-x^2>0$; $-7<x<7$;

2) $\log_7(x^2+x-6)$ — существует при $x^2+x-6>0$; $x<-3$ и $x>2$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+7)$ — существует при $x^2+2x+7>0$, т.е. при любом x.

284. 1) $\log_3(1-x^3)$ — существует при $1-x^3>0$; $x^3<1$; $x<1$;

2) $\log_2(x^3+8)$ — существует при $x^3+8>0$; $x^3>-8$; $x>-2$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+x^2-6x)$ — существует при $x^3+x^2-6x>0$;

$x(x^2+x-6)>0$; $-3<x<0$ и $x>2$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$ — существует при $x^3+x^2-2x>0$;

$x(x^2+x-2)>0$; $-2<x<0$ и $x>1$.

285. 1) $2^x=5$; $x=\log_2 5$;

2) $1{,}2^x=4$; $x=\log_{1,2} 4$;

3) $4^{2x+3}=5$; $2x+3=\log_4 5$; $x=\frac{1}{2}(\log_4 5-3)$;

4) $7^{1-2x}=2$; $1-2x=\log_7 2$; $x=\frac{1}{2}(1-\log_7 2)$.

286. 1) $7^{2x}+7^x-12=0$; $7^x=t$; $t^2+t-12=0$; $t=-4$ — посторонний корень, $t=3$; $7^x=3$; $x=\log_7 3$;

2) $9^x-3^x-12=0$; $3^{2x}-3^x-12=0$; $3^x=t$; $t^2-t-12=0$; $t=-3$ — посторонний корень, $t=4$; $3^x=4$; $x=\log_3 4$.;

3) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$; $8^x=t$; $\frac{1}{8}t^2-8t+30=0$; $t^2-64t+240=0$; $t=4$;

$t_1 = 3;\ 8^x = 4;\ 2^{3x} = 2^2;\ 3x = 2;\ x_1 = \frac{2}{3};\quad t_2 = 60;\ 8^x = 60;\ x_2 = \log_8 60;$

4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 5\left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 = 0;\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = t;\ t^2 - 5t + 6 = 0;\ t_1 = 3\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3;\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1};$
$x_1 = -1;\ t_2 = 2;\ x_2 = \log_{\frac{1}{3}} 2.$

287. 1) $(3^x + 2^x)(3^x + 3\cdot 2^x) = 8\cdot 6^x;\ 3^{2x} + 3\cdot 6^x + 6^x + 3\cdot 2^{2x} - 8\cdot 6^x = 0;$
$3^{2x} - 4\cdot 6^x + 3\cdot 2^{2x} = 0;\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 = 0;\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = t;\ t^2 - 4t + 3 = 0;\ t_1 = 3;$
$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 3;\ x_1 = \log_{\frac{3}{2}} 3;\ t_2 = 1;\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1;\ x = \log_{\frac{3}{2}} 1;\ x_2 = 0$

2) $(3\cdot 5^x + 2{,}5\cdot 3^x)(2\cdot 3^x - 2\cdot 5^x) = 8\cdot 15^x;$
$6\cdot 15^x - 6\cdot 5^{2x} + 5\cdot 3^{2x} - 5\cdot 15^x - 8\cdot 15^x = 0;\ 5\cdot 3^{2x} - 7\cdot 15^x - 6\cdot 5^{2x} = 0;$
$5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 7\left(\frac{3}{5}\right)^x - 6 = 0;\ t = \left(\frac{3}{5}\right)^x;\ 5t^2 - 7t - 6 = 0;\ t = -0{,}6$ — посторонний корень, $t = 2;\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = 2;\ \log_{\frac{3}{5}} 2 = x.$

288. 1) $\log_x(2x-1)$ существует при $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases};\ \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases};\ \frac{1}{2} < x < 1$ и $x > 1;$

2) $\log_{x-1}(x+1)$ существует при $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1; \\ x + 1 > 0 \end{cases}\ \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2; \\ x > -1 \end{cases}\ 1 < x < 2$ и $x > 2.$

289. $9^x + 9a(1-a)3^{x-2} - a^3 = 0;\ 9^x + 9a(1-a)3^x - a^3 = 0;\ t = 3^x;$
$t^2 + a(1-a)t - a^3 = 0;\ t_{1,2} = \frac{a^2 - a \pm |a^2 + a|}{2}.$
При a>0, a=–1, то $x = \log_3 a^2$; если a<0, $a \neq -1$, то $x_1 = \log_3 a^2$, $x_2 = \log_3(-a)$.

290. 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 5\cdot 2 = \log_{10} 10 = 1;$

2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125 = \log_{10} 8\cdot 125 = \log_{10} 10^3 = 3\cdot\log_{10} 10 = 3;$

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} 2\cdot 72 = \log_{12} 12^2 = 2\cdot\log_{12} 12 = 2;$

4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 6\cdot\frac{3}{2} = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2.$

291. 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 15\cdot\frac{15}{16} = \log_2 2^4 = 4\cdot\log_2 2 = 4;$

2) $\log_5 75-\log_5 3=\log_5 \frac{75}{3}=\log_5 5^2=2\cdot\log_5 5=2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54-\log_{\frac{1}{3}} 2=\log_{\frac{1}{3}} \frac{54}{2}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=-3$;

4) $\log_8 \frac{1}{16}-\log_8 32=\log_8 \frac{1}{16\cdot 32}=\log_8 8^{-3}=-3\cdot\log_8 8=-3$.

292. 1) $\log_{13}\sqrt[5]{169}=\log_{13}13^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}\log_{13}13=\frac{2}{5}$;

2) $\log_{11}\sqrt[3]{121}=\log_{11}11^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_{11}11=\frac{2}{3}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{4}}=-\frac{5}{4}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=-1\frac{1}{4}$;

4) $\log_2\frac{1}{\sqrt[6]{128}}=\log_2 2^{-\frac{7}{6}}=-\frac{7}{6}\log_2 2=-1\frac{1}{6}$.

293. 1) $\log_8 12-\log_8 15+\log_8 20=\log_8\frac{12\cdot 20}{15}=\log_8 8^{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\log_8 8=1\frac{1}{3}$;

2) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10=\log_9\frac{15\cdot 18}{10}=\log_9 9^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log_9 9=1\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7\sqrt[3]{21}=\log_7 36^{\frac{1}{2}}-\log_7 14-\log_7\left(\sqrt[3]{21}\right)^3=$

$=\log_7 6-\log_7 14-\log_7 21=\log_7\frac{6}{14\cdot 21}=-2\cdot\log_7=-2$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400+3\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{45}=\log_{\frac{1}{3}} 6^2-\log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}}+$

$+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{45}\right)^3=\log_{\frac{1}{3}} 36-\log_{\frac{1}{3}} 20+\log_{\frac{1}{3}} 45=\log_{\frac{1}{3}}\frac{36\cdot 45}{20}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=-4\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=-4$.

294. 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}=\frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^4}=\frac{3\cdot\log_3 2}{4\cdot\log_3 2}=\frac{3}{4}$;

2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}=\frac{\log_5 3^3}{\log_5 3^2}=\frac{3\log_5 3}{2\log_5 3}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$;

3) $\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}=\frac{\log_5\frac{36}{12}}{\log_5 3^2}=\frac{\log_5 3}{2\log_5 3}=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{\log_7 8}{\log_{15}-\log_7 30}=\frac{\log_7 2^3}{\log_7\frac{15}{30}}=\frac{3\cdot\log_7 2}{\log_7 2^{-1}}=\frac{-3\cdot\log_7 2}{1\cdot\log_7 2}=-3$.

295. 1) $\log_a x=\log_a(a^3b^2\sqrt{c})=\log_a a^3+\log_a b^2+\log_a\sqrt{c}=$

$=3\log_a a+2\log_a b+\frac{1}{2}\log_a c=3+2\cdot 3+\frac{1}{2}(-2)=8$;

2) $\log_a x=\log_a\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}=\log_a a^4+\log_a\sqrt[3]{6}+\log_a c^{-3}=$

$=4\log_a a+\frac{1}{3}\log_a 6-3\cdot\log_a c=4+\frac{1}{3}\cdot 3-3\cdot(-2)=11$.

296. 1) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}=\dfrac{\log_2 24-\log_2\sqrt{72}}{\log_3 18-\log_3\sqrt[3]{72}}=\dfrac{\log_2\frac{24}{\sqrt{72}}}{\log_3\frac{18}{\sqrt[3]{72}}}=$

$=\dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{\frac{3}{2}\log_2 2}{\frac{3}{4}\log_3 3}=\dfrac{9}{8}=1\frac{1}{8}$

2) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}=\dfrac{\log_7 14-\log_7\sqrt[3]{56}}{\log_6 30-\log_6\sqrt{150}}=\dfrac{\log_7\frac{14}{\sqrt[3]{56}}}{\log_6\frac{30}{\sqrt{150}}}=$

$=\dfrac{\log_7 7^{\frac{2}{3}}}{\log_6 6^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\log_7 7}{\frac{1}{2}\cdot\log_6 6}=\dfrac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

3) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}=\dfrac{\log_2 2^2+\frac{1}{2}\log_2(2-5)}{\log_2 2^2+3}=$

$=\dfrac{2\log_2 2+\frac{1}{2}(\log_2 2-\log_2 5)}{2\log_2 2+\log_2 5+3}=\dfrac{\frac{1}{2}(5+\log_2 5)}{5+\log_2 5}=\dfrac{1}{2}$;

4) $\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}=\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 2^6}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 3^3}=\dfrac{0}{5\log_5 2}=0$.

297. 1) $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b=\log_3 a^4+\log_3 b^7=\log_3 a^4\cdot b^7=\log_3(a^4\cdot b^7)$;
$x=a^4b^7$;

2) $\log_5 x=2\log_5 a-3\log_5 b=\log_5 a^2-\log_5 b^3=\log_5\frac{a^2}{b^3}$; $x=\frac{a^2}{b^3}$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}a-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}}b$; $\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}-\log_{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{5}}$;

$\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}})$;

4) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b = \log_{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} + \log_{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{7}} = \log_{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{4}{7}};\ x = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{4}{7}}.$

298. 1) $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10}2}-8^{\log_2 3}=\left(6^{\log_6 5}\right)^2+\frac{10}{10^{\log_{10}2}}-\left(2^{\log_2 3}\right)^3=$

$=5^2+\frac{10}{2}-3^3=25+5-27=3$;

2) $(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8})\cdot 49^{\log_7 2}=(9^{\frac{1}{2}-\log_9 4}+(125^{\log_{125}8})^{\frac{2}{3}})\times$

$\times(7^{\log_7 2})^2=(9^{\frac{3}{\log_9 4}}+8^{\frac{2}{3}})\cdot 2^2=(\frac{3}{4}+4)\cdot 4=3+16=19$;

3) $16^{1+\log_4 5}+4^{\frac{1}{2}\log_2 3}+3\log_5 5=16\cdot(4^{\log_4 5})^2+2^{\log_2 3}\cdot(8^{\log_8 5})^2=$

$=16\cdot 5^2+3\cdot 5^2=19\cdot 25=475$;

4) $72\cdot(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4})=72\cdot\left(\left(\frac{7^{\log_7 9}}{(7^{\log_7 6})^2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}^{\log_{\sqrt{5}}4}}\right)^2\right)=72\cdot\left(\frac{9}{36}+\frac{1}{16}\right)=$

$=72\cdot\left(\frac{9}{36}+\frac{1}{16}\right)=18+\frac{72}{16}=22,5$.

299. $a^{\log_{a^p}b}=(a^{p\log_{a^p}b})^{\frac{1}{p}}=b^{\frac{1}{p}}=(a^{\log_a b})^{\frac{1}{p}}=a^{\frac{1}{p}\log_a b}$, значит, $\log_{a^p}b=\frac{1}{p}\log_a b$;

1) $\log_{36}2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}}3=\log_{6^2}2-\frac{1}{2}\log_{6^{-1}}3=\ \log_{6^2}2-\frac{1}{2}\log_{6^{-1}}3=$

$=\frac{1}{2}\log_6 2-\frac{1}{2}\log_6 3=\frac{1}{2}\log_6(2\cdot 3)=\frac{1}{2}\log_6 6=\frac{1}{2}$;

2) $2\log_{25}30+\log_{0,2}6=2\log_{5^2}(30)+\log_{5^{-1}}(6)=\log_5 30+\log_5 6=\log_5\frac{30}{6}=\log_5 5=1$.

300. 1) $\log_{\sqrt{3}}50=\log_{3^{\frac{1}{2}}}(50)=2\log_3 50=2(\log_3 5+\log_3 10)=$

$=2(\log_3 3+\log_3 5+\log_3 10-1)=2(\log_3 15+\log_3 10-1)=2(a+b-1)$;

2) $\log_4 1250=\log_{2^2}(5^4\cdot 2)=\frac{1}{2}(\log_2 5^4+\log_2 2)=2\log_2 5+\frac{1}{2}=\ 2a+\frac{1}{2}$.

301. 1) $\lg 23\approx 1,362$; 2) $\lg 7\approx 0,845$;

3) $\lg 0,37\approx -0,432$; 4) $\lg\frac{2}{3}\approx -0,176$.

302. 1) $\ln 81\approx 4,394$; 2) $\ln 2\approx 0,693$;

3) $\ln 0,17\approx 1,772$; 4) $\ln\frac{6}{7}\approx -0,154$.

303. 1) $\log_7 25=\frac{\lg 25}{\lg 7}\approx 1,65$; 2) $\log_5 8=\frac{\lg 8}{\lg 5}\approx 1,29$;

3) $\log_9 0,75=\frac{\lg 0,75}{\lg 9}\approx -0,13$; 4) $\log_{0,75}1,13=\frac{\lg 1,13}{\lg 0,75}\approx -0,42$.

304. 1) $\log_7 5 = \frac{\ln 5}{\ln 7} \approx -0{,}83$; 2) $\log_8 15 = \frac{\ln 15}{\ln 8} \approx 1{,}3$;

3) $\log_{0,7} 9 = \frac{\ln 9}{\ln 0{,}7} \approx -6{,}16$; 4) $\log_{1,1} 0{,}23 = \frac{\ln 0{,}23}{\ln 1{,}1} \approx -15{,}42$.

305. 1) $\log_5 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 5}$; 2) $\lg 6 = \frac{\log_7 6}{\log_7 10}$;

3) $\log_2 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 2} = \frac{1}{\log_7 2}$; 4) $\log_5 \frac{1}{3} = \frac{\log_7 \frac{1}{3}}{\log_7 5}$;

5) $\lg_7 \frac{1}{3} = \frac{\log_7 7}{\log_7 10} = \frac{1}{\log_7 10}$; 6) $\log_3 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 3}$.

306. 1) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}} = 5^{\frac{\lg (25)^2}{\lg 25}} = 5^{\frac{2\lg 25}{\lg 25}} = 5^2 = 25$;

2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}}(\log_3 2^2 \cdot \log_2 3) = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}$.

307. 1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; $\log_5 x = \log_5 3^2 + 4\log_{5^2} 2$;

$\log_5 x = \log_5 3^2 + \log_{5^2} 2^2 = \log_5 9 \cdot 4$; $\log_5 x = \log_5 36$; $x = 36$;

2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$; $\log_2 x + \log_2 x^2 = 9\log_2 2$; $\log_2 x^3 = \log_2 2^9$;

$x^3 = 2^9$; $x = 2^3 = 8$;

3) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; $\log_3 x = 9\log_{3^3} 8 - \log_3 4^3$;

$\log_3 x = 3\log_3 8 - \log_3 64$; $\log_3 x = \log_3\left(\frac{8^3}{64}\right)$; $x = 8$;

4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$; $\frac{1}{2}\log_3 x^2 + 2\log_3 x = 3 \cdot \log_3 3$;

$\log_3 x + \log_3 x^2 = \log_3 3^3$; $\log_3 x^3 = \log_3 3^3$; $x^3 = 3^3$; $x = 3$;

5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; $\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 8\log_2 2$;

$\log_2 x + \log_2 x^{\frac{1}{3}} = \log_2 2^8$; $\log_2 x^{\frac{4}{3}} = \log_2 2^8$; $x^{\frac{4}{3}} = 2^8$; $x = 64$;

6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$; $\log_4 x - \frac{1}{2}\log_4 x = \frac{1}{4}\log_4 4$;

$\log_4 x - \log_4 x^{\frac{1}{2}} = \log_4 2^{\frac{1}{2}}$; $\log_4 x^{\frac{1}{2}} = \log_4 2^{\frac{1}{2}}$; $x^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$; $x = 2$.

308. $\log_{49} 28 = \log_{7^2} 28 = \frac{1}{2}\log_7(2^2 \cdot 7) = \frac{1}{2}(\log_7 2^2 + \log_7 7) = \log_7 2 + \frac{1}{2} = m + \frac{1}{2}$.

309. $\log_{15} 30 = \log_{15} 3 + \log_{15} 10 = \frac{\lg 3}{\lg 15} + \frac{\lg 10}{\lg 15} = \frac{\lg 3 + 1}{\lg 3 + \lg 5} = \frac{m+1}{m+n}$.

310. $\log_{24}72=\frac{\log_6 72}{\log_6 24}=\frac{\log_6 6^2+\log_6 2}{\log_6 6+\log_6 2^2}=\frac{2+\log_6 2}{1+2\log_6 2^2}=\frac{2+m}{1+2m}$.

311. $\log_{36}9=\log_{36}\frac{36}{4}=\log_{36}36-\log_{36}4=1-\log_{36}8^{\frac{2}{3}}=$

$=1-\frac{2}{3}\log_{36}8=1-\frac{2}{3}m$.

312.

1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3}-\frac{\log_3 24}{\log_{72}3}=\frac{\log_3 6^3}{\frac{\log_3 3}{\log_3 8}}-\frac{\log_3 24}{\frac{\log_3 3}{\log_3 72}}=3\log_3 6\cdot 3\log_3 2-$

$-\log_3 24\cdot\log_3 72=9(\log_3 3+\log_3 2)\log_3 2-(\log_3 3+3\log_3 2)\times$

$\times(2\log_3 3+3\log_3 2)=9(\log_3 2+(\log_3 2)^2)-(2+3\log_3 2+$

$+6\log_3 2+9(\log_3 2)^2)=-2$;

2) $\frac{\log_2 192}{\log_{12}2}-\frac{\log_2 24}{\log_{96}2}=\frac{\log_2 192}{\frac{\log_2 2}{\log_{12}2}}-\frac{\log_2 24}{\frac{\log_2 2}{\log_{12}96}}=\log_2(3\cdot 2^6)\cdot\log_2(3\cdot 2^2)-$

$-\log_2(3\cdot 2^3)\cdot\log_2(3\cdot 2^5)=(\log_2 3+6\log_2 2)\cdot(\log_2 3+2\log_2 2)-(\log_2 3+$

$+3\log_2 2)\times(\log_2 3+5\log_2 2)=(\log_2 3)^2+2\log_2 2+6\log_2 3+12-(\log_2 3)^2-$

$-5\log_2 3-3\log_2 3-15=-3$.

313. 1) $\log_2^2 x-9\log_8 x=4$; $\log_2^2 x-3\log_2 x-4=0$; $\log_2 x=t$;

$t^2-3t-4=0$; t_1=–1; $\log_2 x=-1$; $\log_2 x=\log_2\frac{1}{2}$; $x_1=\frac{1}{2}$; t_2=4;

$\log_2 x=4$; $\log_2 x=\log_2 2^4$; $x_2=16$;

2) $16\log_{16}^2 x+3\log_4 x-1=0$; $4\log_4^2 x+3\log_4 x-1=0$; $\log_4 x=t$;

$4t^2+3t-1=0$; $t_1=-1$; $\log_4 x=-1$; $\log_4 x=\log_4\frac{1}{4}$; $x_1=\frac{1}{4}$; $t_2=\frac{1}{4}$;

$\log_4 x=\log_4 4^{\frac{1}{4}}$; $x_2=\sqrt{2}$;

3) $\log_3^2 x+5\log_9 x-1{,}5=0$; $\log_3^2 x+2{,}5\log_3 x-1{,}5=0$; $\log_3 x=t$;

$t^2+2{,}5t-1{,}5=0$; $t_1=-1{,}3$; $\log_3 x=-3$; $\log_3 x=\log_3 3^{-3}$;

$x_1=3^{-3}=\frac{1}{27}$; $t_2=\frac{1}{2}$; $\log_3 x=\frac{1}{2}$; $\log_3 x=\log_3 3^{\frac{1}{2}}$; $x_2=\sqrt{3}$;

4) $\log_3^2 x-15\log_{27}x+6=0$; $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$; $\log_3 x=t$;

$t^2-5t+6=0$; $t_1=2$; $\log_3 x=2$; $\log_3 x=\log_3 3^2$; $x_1=9$; $t_2=3$;

$\log_3 x = 3;\ \ \log_3 x = \log_3 3^3;\ \ x_2 = 27$.

314. 1) $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 6} + \dfrac{\log_4 3}{\log_4 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2\cdot 3) = 1$;

2) $(\log_7 2 + \dfrac{1}{\log_5 7})\lg 7 = (\log_7 2 + \dfrac{\log_5 5}{\log_5 7})\dfrac{\log_7 7}{\log_7 10} =$

$= \left(\log_7 2 + \log_7 5\right)\cdot \dfrac{1}{\log_7 10} = \dfrac{\log_7(2\cdot 5)}{\log_7 10} = 1$;

3) $\dfrac{\log_2 3}{\log_4 9} = \dfrac{2\cdot\log_2 3}{\log_{2^2} 3^2} = \dfrac{2\cdot\log_2 3}{\log_2 3} = 2$.

315. 8-ми процентное увеличение жителей города, начальное количество которых a, через n лет становится равным $a(1{,}08)^n$, число жителей удвоится через $2a = a(1{,}08)^n;\ \ 2 = (1{,}08)^n;\ \ n = \log_{1{,}08} 2 \approx 9$ лет.

316. Пусть первоначальная масса воздуха a, тогда через n качаний поршневого насоса в нем останется $\dfrac{1}{10^{16}}$ первоначальной массы:

$a(1-0{,}012)^n = \dfrac{a}{10^{16}};\ \ n = \log_{0{,}988}\dfrac{1}{10^{16}} = -16\ \log_{0{,}988} 10 \approx 3052$.

317. 1) $n = 7;\ \ e \approx 2{,}7182539$; 2) $n = 8;\ \ e \approx 2{,}7182788$;

3) $n = 9;\ \ e \approx 2{,}7182815$; 4) $n = 10;\ \ e \approx 2{,}7182819$.

318. 1) $\log_3\dfrac{6}{5} > \log_3\dfrac{5}{6};\ \ 3 > 1;\ \ \dfrac{6}{5} > \dfrac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 17;\ \ \dfrac{1}{3} < 1;\ \ 9<17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} l > \log_{\frac{1}{2}} \pi;\ \ \dfrac{1}{2} < 1;\ \ l > \pi$; 4) $\log_2\dfrac{\sqrt{5}}{2} > \log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \ 2 > 1;\ \ \dfrac{\sqrt{5}}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

319. 1) $\log_3 4{,}5 > 0 = \log_3 1$, т.к. $3 > 1;\ \ 4{,}5 > 1$;

2) $\log_3 0{,}45 < 0 = \log_3 1$, т.к. $3 > 1;\ \ 0{,}45 < 1$;

3) $\log_5 25{,}3 > 0 = \log_5 1$, т.к. $5 > 1;\ \ 25{,}3 > 1$;

4) $\log_{0{,}5} 9{,}6 < 0 = \log_{0{,}5} 1$, т.к. $0{,}5 < 1;\ \ 9{,}6 > 1$.

320. 1) $\log_3 x = -0{,}3;\ \ \log_3 x = \log_3 3^{-0{,}3};\ \ x = 3^{-0{,}3} < 1 = 3^0$, т.к. $3 > 1$; $-0{,}3 < 0$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7;\ \ \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1{,}7};\ \ x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1{,}7} < 1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0$; т.к. $\dfrac{1}{3} < 1;\ \ 1{,}7>0$;

3) $\log_2 x = 1{,}3;\ \ \log_2 x = \log_2 2^{1{,}3};\ \ x = 2^{1{,}3} > 1 = 2^0$; т.к. $2 > 1;\ \ 1{,}3 > 0$.

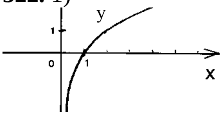
321. 1) $y = \log_{0{,}075} x$ — убывающая, т.к. $0 < 0{,}075 < 1$;

2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ — убывающая, т.к. $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$;

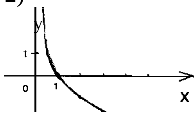
3) $y = \lg x = \log_{10} x$ — возрастающая, т.к. $10 > 1$;

4) $y = \ln x = \log_e x$ — возрастающая, т.к. $e > 1$.

322. 1)



2)

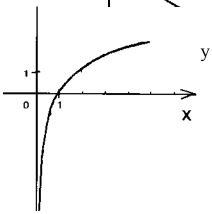


323. $\log_2 3 \approx 16;$

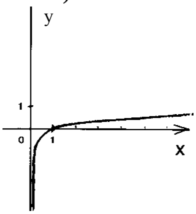
$\log_2 0{,}3 \approx -1{,}7;$

$\log_2 5 \approx 2{,}3;$

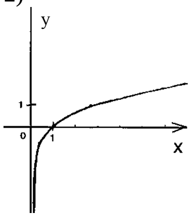
$\log_2 0{,}7 \approx -0{,}5.$



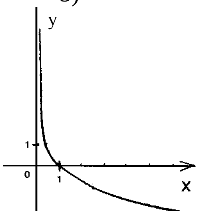
324. 1)



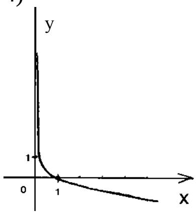
2)



3)



4)



325. 1) $\log_5 x > \log_5 3;\quad x > 3,$ т.к. $5 > 1$;

2) $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8};\quad x \geq \frac{1}{8},$ т.к. $\frac{1}{5} < 1$;

3) $\lg x > \lg 4;\quad x < 4,$ т.к. $10 > 1$;

4) $\ln x > \ln 0{,}5;\quad x > 0{,}5,$ т.к. $e > 1$.

326. 1) $\log_3 x < 2;\quad \log_3 x < \log_3 3^2;\quad x < 9,$ т.к. $3 > 1$;

2) $\log_{0,4} x > 2;\quad \log_{0,4} x > \log_{0,4} (0{,}4)^2;\quad x < 0{,}16,$ т.к. $0{,}4 < 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 16;\quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{16};\quad x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{16},$ т.к. $\frac{1}{2} < 1$;

4) $\log_{0,4} x \leq 2;\quad \log_{0,4} x \leq \log_{0,4} 0{,}4^2;\quad x \geq 0{,}16,$ т.к. $0{,}4 < 1$.

327. 1) $\log_3(5x-1)=2;\ \ \log_3(5x-1)=\log_3 3^2;\ \ 5x-1=9;\ \ x=2$;

2) $\log_5(3x+1)=2;\ \ \log_5(3x+1)=\log_5 5^2;\ \ 3x+1=2$; $x=8$;

3) $\log_4(2x-3)=1;\ \ \log_4(2x-3)=\log_4 4;\ \ 2x-3=4;\ \ x=3{,}5$;

4) $\log_7(x+3)=2;\ \ \log_7(x+3)=\log_7 7^2;\ \ x+3=49;\ \ x=46$;

5) $\lg(3x-1)=0;\ \ \lg(3x-1)=\lg 1;\ \ 3x-1=1;\ \ x=\dfrac{2}{3}$;

6) $\lg(2-5x)=1;\ \ \lg(2-5x)=\lg 10;\ \ 2-5x=10;\ \ x=-1{,}6$.

328. 1) $y=\log_4(x-1)$ — область определения $x-1>0;\ \ x>1$;

2) $y=\log_{0,3}(1+x)$ — область определения $1+x>0;\ \ x>-1$;

3) $y=\log_3(x^2+2x)$ — область определения $x^2+2x>0;\ x<-2$ и $x>0$;

4) $y=\log_{\sqrt{2}}(4-x^2)$ — область определения $4-x^2>0;\ \ -2<x<2$.

329. $y=\log_2(x^2-1)$ — область определения $x^2-1>0;\ \ x<-1;\ \ x>1$, т.к. $x>1$ — входит в область определения и $2>1$, то данная функция возрастает на промежутке $x>1$.

330. 1) $\dfrac{1}{2}+\lg 3=\lg 3^{\frac{1}{2}}+\lg 3=\lg 3^{\frac{1}{2}}<\lg 19-\lg 2=\lg 9{,}5$, т.к. 10>1; $3^{\frac{3}{2}}<9{,}5$;

2) $\dfrac{\lg 5+\lg\sqrt{7}}{2}=\lg\sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{7}}}<\lg\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$, т.к. $10>1$, $\sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{7}}}<\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$;

3) $3(\lg 7-\lg 5)=\lg(1{,}4)^3>\lg 9-\dfrac{2}{3}\lg 8=\lg\dfrac{9}{4}=\lg 2{,}25$, т.к. $10>1$;

$(1{,}4)^3=2{,}744>2{,}25$;

4) $\lg\lg\lg 50<\lg^3 50$.

331. 1) $y=\log_8(x^2-3x-4)$ — область определения $x^2-3x-4>0$; $x<-1$ и $x>4$;

2) $y=\log_{\sqrt{3}}(-x^2+5x+6)$ — область определения $x^2-5x-6<0$;
$-1<x<6$;

3) $y=\log_{0,7}\dfrac{x^2-9}{x+5}$ — область определения $\dfrac{x^2-9}{x+5}>0$; $-5<x<-3$ и $x>3$;

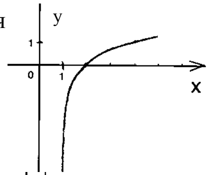
4) $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x-4}{x^2+4}$ — область определения $\dfrac{x-4}{x^2+4}>0;\ \ x>4$;

5) $y=\log_\pi(2^x-2)$ — область определения $2^x-2>0;\ \ 2^x>2;\ x>1$;

6) $y=\log_3(3^{x-1}-9)$ — область определения $3^{x-1}>9;\ \ x-1>2$; $x>3$.

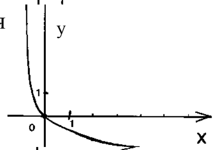
332. 1) $y = \log_3(x-1)$ — область определения $x-1>0;\ \ x>1$;

множество значений — множество R.



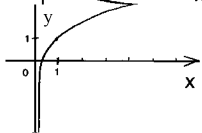
2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ — область определения $x+1>0;\ \ x>-1$;

множество значений — множество R.



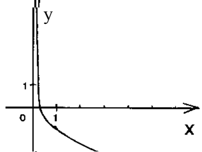
3) $y = 1+\log_3 x$ — область определения $x>0$;

множество значений — множество R.



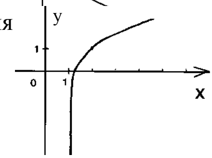
4) $y - \log_{\frac{1}{3}} x - 1$ — область определения $x>0$;

множество значений — множество R.

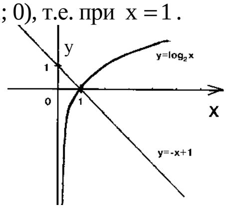


5) $y = 1+\log_3(x-1)$ — область определения $x-1>0;\ x>0$;

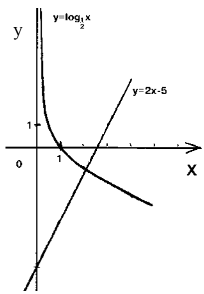
множество значений — множество R.



333. 1) $\log_2 x = -x+1$; из рисунка видно, что графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$ пересекаются в точке (1; 0), т.е. при $x=1$.

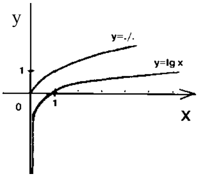


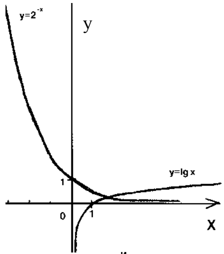
2) Из рисунка видно, что графики функций $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ и $y=2x-5$ пересекаются при $x=2$.



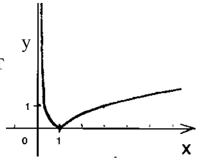
3) Из рисунка видно, что графики функций $y=\lg x$ и $y=\sqrt{x}$ не пересекаются.

4) Из рисунка видно, что графики функций $y=\lg x$ и $y=2^{-x}$ пересекаются при $x\approx 2$.

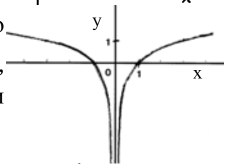




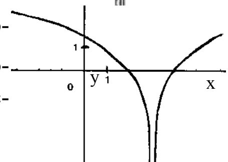
334. 1) $y=\left|\log_3 x\right|$ область определения — $x>0$, множество значений $y\geq 0$; данная функция убывает при $0<x\leq 1$, возрастает при $x>1$.



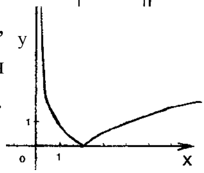
2) $y=\log_3\left|x\right|$ область определения — множество R, кроме $x=0$; множество значений — множество R, данная функция убывает при $x<0$, возрастает при $x>0$.



3) $y=\log_2\left|3-x\right|$ область определения — множество R, кроме $x=3$; множество значений — множество R, данная функция убывает при $x<3$, возрастает при $x>3$.



4) $y=\left|1-\log_2 x\right|$ область определения — $x>0$, кроме $x=3$; множество значений — $y\geq 0$, данная функция убывает при $0<x\leq 2$, возрастает при $x>2$.



335. 1) $y=\log_2\left|3-x\right|-\log_2\left|x^3-8\right|$ — область определения

$\begin{cases}\left|3-x\right|>0\\ \left|x^3-8\right|>0\end{cases}$, т.е. $x\neq 3$; и $x^3-8\neq 0$; $x\neq 3$ и $x\neq 2$;

$x\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$.

2) $y=\log_{0,3}\sqrt{x+1}+\log_{0,4}(1-8x^3)$ — область определения

$\begin{cases}x+1>0\\ 1-8x^3>0\end{cases}$; $\begin{cases}x>-1\\ x^3<\frac{1}{8}\end{cases}$; $\begin{cases}x>-1\\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$; $-1<x<\frac{1}{2}$.

336. 1) $x^2-5x+6=0$; $x_1=3$; $x_2=2$; $x-3=0$; $x=3$, значит $x^2-5x+6=0$ является следствием $x-3=0$;

2) $|x| = 5$; $x_{1,2} = \pm 5$; $\sqrt{x^2} = 5$; $x_{1,2} = \pm 5$, значит, каждое из двух уравнений является следствием другого.

3) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$; $x = 2$; $x^2–3x+2=0$; $x_1=1$ и $x_2=2$, значит, $x^2–3x+2=0$ — следствие уравнения $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$.

4) $\log_8+\log_8(x–2)=1$; $\log_8(x^2–2x)=\log_8 8$; $x^2–2x–8=0$; $x_1=–2$ — посторонний корень, $x_2=4$;

$\log_8(x–2)=1$; $\log_8 x^2–2x=\log_8 8$; $x^2–2x–8=0$; $x_1=–2$; $x_2=4$, значит, уравнение $\log_8(x^2–2x)=1$; является следствием уравнения $\log_8+\log_8(x–2)=1$.

337. 1) $\log_2(x–5)+\log_2(x+2)=3$; $\log_2(x–5)(x+2)=\log_2 2^3$; $x^2–3x–10=8$;

$x^2 – 3x – 18 = 0$; $x = – 3$ — посторонний корень, значит, $x = 6$.

2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$; $\log_3(x-2)(x+6)=\log_3 3^2$;

$x^2+4x-12=9$; $x^2+4x-21=0$; $x=-7$ — посторонний корень, $x=3$.

3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$; $\lg(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=\lg 1$; $x^2–3=1$; $x^2=4$; $x=–2$ — посторонний корень, $x=2$.

4) $\lg(x–1)+\lg(x+1)=0$; $\lg(x–1)(x+1)=\lg 1$; $x^2–1=1$; $x^2=2$; $x=-\sqrt{2}$ — посторонний корень, значит, $x=\sqrt{2}$.

338. 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$; $\lg\frac{x-1}{2x-11}=\lg 2$; $\frac{x-1}{2x-11}=2$;

$x–1=4x–22$; $3x=21$; $x=7$;

2) $\lg(3x–1)–\lg(x+5)=\lg 5$; $\lg\frac{3x-1}{x+5}=\lg 5$; $\frac{3x-1}{x+5}=5$; $3x-1=5x+25$; $2x=–26$; $x=–13$ — посторонний корень, значит, данное уравнение не имеет действительных решений.

3) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$; $\log_3\frac{x^3-x}{x}=\log_3 3$; $x^2-1=3$; $x^2=4$;

$x=–2$ — посторонний корень; $x=2$.

339. 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg 5x+\lg\frac{1}{5x}$; $\lg\sqrt{x^2+x-5}=\lg\frac{5x}{5x}$; $\sqrt{x^2+x-5}=1$;

$x^2+x–6=0$; $x=–3$ — посторонний корень; $x=2$.

2) $\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg 8x-\lg 4x$; $\lg\sqrt{x^2-4x-1}=\lg\frac{8x}{4x}$; $\sqrt{x^2-4x-1}=2$;

$x^2–4x–5=0$; $x=–1$ — посторонний корень; $x=5$.

340. 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$; $5x+3=7x+5$; $x=–1$ — посторонний корень, значит, данное уравнение не имеет действительных решений.

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$; $3x-1=6x+8$; $x=-3$ — посторонний корень, значит, данное уравнение не имеет действительных решений.

341. 1) $\log_7$ (x-1) $\log_7 x=\log_7 x$; $\begin{cases}\log_7 x=0 \\ \log_7(x-1)=1\end{cases}$; $\begin{cases}\log_7 x=\log_7 1 \\ \log_7(x-1)=\log_7 7\end{cases}$;

$x+1$ — посторонний корень; $x-1=7$; $x=8$

2) $\log_{\frac{1}{3}} x \log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$; $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=0\\ \log_{\frac{1}{3}} x=1\end{cases}$;

$\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}} 1\\ \log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\end{cases}$: $3x-2=1; x_1=1; x_2=\frac{1}{3}$ – посторонний корень;

3) $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$; $\begin{cases}\log_2(3x+1)=0\\ \log_3 x=\log_3 3^2\end{cases}$;

$\begin{cases}\log_2(3x+1)=\log_2 1\\ \log_3 x=\log_3 9\end{cases}$; $3x+1=1; x=0$ – посторонний корень, значит, $x=9$;

4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$; $2\log_3(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$;

$\begin{cases}\log_3(x-2)=0\\ \log_5 x=1\end{cases}$; $\begin{cases}\log_3(x-2)=\log_3 1\\ \log_5 x=\log_5 5\end{cases}$; $x_1=3$; $x_2=5$.

342. 1) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2\\ x-10y=900\end{cases}$; $\begin{cases}\lg\frac{x}{y}=\lg 10^2\\ x=900+10y\end{cases}$; $\begin{cases}x=100y\\ x=900+10y\end{cases}$; $\begin{cases}x=100y\\ 100y=900+10y\end{cases}$; $\begin{cases}y=10\\ x=1000\end{cases}$.

2) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2\\ x^2y-2y+9=0\end{cases}$; $\begin{cases}\log_3 xy=\log_3 3^2\\ x^2y-2y+9=0\end{cases}$; $\begin{cases}xy=9\\ x^2y-2y+9=0\end{cases}$;

$\begin{cases}x=\frac{9}{y}\\ \frac{81}{y}-2y+9=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{9}{y}\\ 2y^2-9y-81=0\end{cases}$; $y=-4{,}5$ – посторонний корень, значит, $\begin{cases}y=9\\ x=1\end{cases}$.

343. 1) $\log_5 x^2=0$; $\log_5 x^2=\log_5 1$; $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm 1$;

2) $\log_4 x^2=3$; $\log_4 x^2=\log_4 4^3$; $x^2=64$; $x_{1,2}=\pm 8$;

3) $\log_3 x^3=0$; $\log_3 x^3=\log_3 1$; $x^3=1$; $x=1$;

4) $\log_4 x^3=6$; $\log_4 x^3=\log_4 x^3 4^6$; $x^3=4096$; $x=16$;

5) $\lg x^4+\lg 4x=2+\lg x^3$; $\lg(4\cdot x^5)=\lg 10^2+\lg x^3$;

$\lg(4x^5)=\lg(100x^3)$; $4x^5=100x^3$; $x^3(x^2-25)=0$; $x=0$ — посторонний корень; $x=-5$ — посторонний корень, значит, $x=5$.

6) $\lg x+\lg x^2=\lg 9x$; $\lg x^3=\lg 9x$; $x^3=9x$; $x(x^2-9)=0$; $x_1=0$ и $x_2=-3$ — посторонние корени, значит $x=3$.

344. $\log_4(x+2)(x+3)+\log_4\frac{x-2}{x+3}=2$; $\log_4(x^2-4)=\log_4 4^2$; $x^2-4=16$;

1) $x^2=20$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$;

2) $\log_2\frac{x-1}{x+4}+\log_2(x-1)(x+4)=2$; $\log_2(x-1)^2=\log_2 2^2$; $(x-1)^2=4$; $x=-1$ — посторонний корень, значит $x=3$;

3) $\log_3 x^2-\log_3\frac{x}{x+6}=3$; $\log_3 x(x+6)=\log_3 3^3$; $x^2+6x-27=0$; $x_1=-9$; $x_2=3$;

4) $\log_2 \frac{x+4}{x}+\log_2 x^2$; $\log_2((x+4)x)=\log_2 2^5$; $x=(x+4)=32$; $x^2+4x-32=0$; $x_1=4$; $x_2=-8$.

345. 1) $2^{3\log x}\cdot 5^{\lg x}=1600$; $(2^3\cdot 5)^{\lg x}=1600$; $40^{\lg x}=40^2$; $\lg x=2$; $\lg x=\lg 10^2$; $x=10^2$; $x=100$;

2) $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$; $2^{2\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=400$; $(4\cdot 5)^{\log_3 x}=20^2$;

$20^{\log_3 x}=20^2$; $\log_3 x=\log_3 3^2$; $x=3^2$; $x=9$;

3) $\frac{1}{4+\lg x}+\frac{2}{2-\lg x}=1$; $2-\lg x+8+2\lg x=(4+\lg x)(2-\lg x)$;

$10+\lg x=8-2\lg x-\lg^2 x$; $\lg^2 x+3\lg x+2=0$; $\lg x=t$; $t^2+3t+2=0$;

$t_1=-1$; $\lg x=-1$; $\lg x=\lg 10^{-1}$; $x_1=\frac{1}{10}$; $t_2=-2$; $\lg x=-2$; $\lg x=\lg 10^{-2}$; $x_2=\frac{1}{100}$;

4) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$; $1+\lg x+10-2\lg x=(5-\lg x)(1+\lg x)$;

$11-\lg x=5+4\lg x-\lg^2 x$; $\lg^2 x-5\lg x+6=0$; $t=\lg x$; $t^2-5t+6=0$; $t_1=3$; $\lg x=\lg 10^3$; $x_1=1000$; $t_2=2$; $\lg x=\lg 10^2$; $x=10^2$; $x_2=100$.

346. 1) $2^{3x+1}=2^{-3}$ и $3x+1=-3$ — равносильны, т.к. корни первого уравнения являются корнями второго, и наоборот.

2) $\log_3(x-1)=2$ и $x-1=9$ — равносильны, т.к. корни первого уравнения являются корнями второго, и наоборот.

347. 1) $\begin{cases}\lg x-\lg y=7\\ \lg x+\lg y=5\end{cases}$; $\begin{cases}2\lg x=12\\ \lg x+\lg y=5\end{cases}$; $\begin{cases}\lg x=6\\ 6+\lg y=5\end{cases}$; $\begin{cases}\lg x=\lg 10^6\\ \lg y=\lg 10^{-1}\end{cases}$; $\begin{cases}x=10^6\\ y=\frac{1}{10}\end{cases}$.

2) $\begin{cases}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{y}=4\\ xy=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\ \log_2\frac{2}{y}+\log_2\frac{1}{\sqrt{y}}=\log_2 2^4\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\ \log_2\frac{2}{y\sqrt{y}}=\log_2 16\end{cases}$;

$\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\ \frac{1}{y\sqrt{y}}=8\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\ \sqrt{y}=\frac{1}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}x=8\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

348. 1) $\log_2 x-2\log_x 2=-1$; $\log_2 x-\frac{2\log_2 2}{\log_2 x}=-1$;

$\log^2{}_2 x+\log_2 x-2=0$; $\log_2 x=t$; $t^2+t-2=0$; $t=1$; $\log_2 x=t$; $\log_2 x=\log_2 2$; $x_1=2$; $t_2=-2$; $\log_2 x=\log_2 2^{-2}$; $x_2=\frac{1}{4}$;

2) $\log_2 x+\log_x 2=2{,}5$; $\log_2 x+\frac{\log_2{}^2}{\log_2 x}-2{,}5=0$; $\log^2{}_2 x-2{,}5\cdot\log_2 x+1=0$;

$t=\log_2 x$; $t_2-2{,}5\cdot t+1=0$; $t_1=2$; $\log_2 x=\log_2 2^2$; $x_1=4$; $t_2=\frac{1}{2}$; $\log_2 x=\log_2 2^{\frac{1}{2}}$; $x_2=\sqrt{2}$

3) $\log_3 x+2\log_x{}^3=3$; $\log_3 x+\frac{2\log_3{}^3}{\log_3 x}-3=0$; $\log^2{}_3 x-3\log_3 x+2=0$;

$t=\log_3 x$; $t^2-3t+2=0$; $t_1=1$; $\log_3 x=\log_3 3$; $x_1=3$; $t_2=2$; $\log_3 x=\log_3 3^2$; $x_2=9$

4) $\log_3 x-6\log_x 3=1$; $\log_3 x-\dfrac{6\log_3 3}{\log_3 x}-1=0$; $\log^2{}_3 x-\log_3 x-6=0$;

$t=\log_3 x$; $t^2-t-6=0$; t=3; $\log_3 x=\log_3 3^3$; x=27; t=–2; $\log_3 x=\log_3 3^{-2}$; $x=\dfrac{1}{9}$.

349. 1) $\log_{x^2} 9+\log_{\sqrt{x}} 4=2$; $\dfrac{1}{2}\log_x 9+2\log_x 4=2\log_x x$;

$\log_x 3+\log_x 4^2=\log_x x^2$; $\log_x 48=\log_x x^2$; $x^2=48$; $x=-4\sqrt{3}$ — постоянный корень, значит, $x=4\sqrt{3}$;

2) $\log_{x^2} 16-\log_{\sqrt{x}} 7=2$; $\dfrac{1}{2}\log_x 16-2\log_x 7=2\log_x x$;

$\log_x 4-\log_x 7^2=\log_x x^2$; $\log_x \dfrac{4}{49}=\log_x x^2$; $\dfrac{4}{49}=x^2$; $x=-\dfrac{2}{7}$ — посторонний корень, значит, $x=\dfrac{2}{7}$.

350. 1) $\lg(6\cdot5^x-25\cdot20^x)-\lg25=x$; $\lg\dfrac{6\cdot5^x-25\cdot20^x}{25}=\lg10^x$; $\dfrac{6\cdot5^x-25\cdot20^x}{25}=10^x$;

$25\cdot10^x+25\cdot20^x-6\cdot5^x=0$; $25\cdot4^x+25\cdot2^x-6=0$; $2^x=t$; $25t^2+25t-6=0$; t=–1,2 — посторонний корень; t=0,2; $2^x=0{,}2$; $x=\log_2 0{,}2$;

2) $\lg(2^x+x+4)=-x\lg5$; $\lg(2^x+x+4)=\lg10^x-\lg5^x$; $\lg(2^x+x+4)=\lg2^x$; $2^x+x+4=2^x$; x+4=0; x=–4.

351. 1) $\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x+1)$;

$\left(\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}\right)^2-\left(\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}\right)-2=0$; $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=t$; $t^2-t-2=0$; t=–1; $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1$;

$\lg(x+1)=\lg\dfrac{1}{x-1}$; $(x+1)=\dfrac{1}{(x-1)}$; $x^2-1=1$; $x^2=2$; $x=-\sqrt{2}$ — постоянный корень; $x_1=\sqrt{2}$; $t_2=2$; $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2$;

$\lg(x+1)=\lg(x-1)^2$; $x+1=x^2-2x+1$; $x(x-3)=0$; x=0 — посторонний корень; $x_2=3$.

2) $2\log_5(4-x)\cdot\log_{2x}(4-x)=3\log_5(4-x)-\log_5 2x$;

$2\log_5(4-x)\cdot\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}=3\log_5(4-x)-\log_5 2x$;

$2\left(\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}\right)^2-3\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}+1=0$; $\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}=t$; $2t^2-3t+1=0$; $t_1=1$;

$\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}=1$; $\log_5(4-x)=\log_5 2x$; $4-x=2x$; $4=3x$; $x_1=1\dfrac{1}{3}$;

$t_2=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}=\dfrac{1}{2}$; $\log_5(4-x)=\log_5\sqrt{2x}$; $4-x=\sqrt{2x}$;

$x^2-8x+16=2x$; $x^2-10x+16=0$; x=8 — посторонний корень; $x_2=2$.

352. 1) $\sqrt{\log_x 25+3}=\frac{1}{\log_5 x}$; $\sqrt{\log_x 25+3}=\frac{\log_5 5}{\log_5 x}$; $\sqrt{\log_x 25+3}=\log_x 5$;

$\log^2 x5–2\log_x{}^5–3=0$; $\log x5=t$; $t^2–2t–3=0$; $t_1=–1$;

$\log_x 5=\log_x\frac{1}{x}$; $x_1=\frac{1}{5}$; $t_2=3$; $\log_x\frac{1}{5}=\log_x x^3$; $x=\sqrt[3]{5}$, но $x=\frac{1}{5}$ — посторонний корень, значит, $x_2=\sqrt[3]{5}$

2) $\sqrt{2\log_2{}^2 x+3\log_2 x-5}=\log_2 2x$; $\sqrt{2\log_2{}^2 x+3\log_2 x-5}=1+\log_2 x$;

$2\log_2{}^2 x+3\log_2 x-5=1+2\log_2 x+\log^2{}_2 x$; $\log_2{}^2 x+\log_2 x-6=0$;

$\log_2 x=t$; $t^2+t–6=0$; $t_1=-3$; $\log_2 x=–3$ — посторонний корень; $t_2=2$;

$\log_2 x=\log_2 2^2$; $x=4$.

353. $5\log_5 x+\log_a x-4\log_{25} x=a$; $5\log_5 x+\frac{\log_5 x}{\log_5 a}-2\log_5 x=a$;

$\log_5 x\cdot(3+\frac{1}{\log_5 a})=a$; $\log_5 x=\frac{a\cdot\log_5 x}{3\log_5 a+1}\cdot\log_5 5$; $x=5^{\frac{a\log_5 a}{3\log_5 a+1}}$; $a>0$; $a\neq1$; $a\neq5^{-\frac{1}{3}}$.

354. 1) $y=\lg(3x-2)$ — область определения $3x-2>0$; $x>\frac{2}{3}$;

2) $y=\log_2(7-5x)$ — область определения $7-5x>0$; $x<1\frac{2}{5}$;

3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$ — область определения $x^2-2>0$; $x<-\sqrt{2}$ и $x>\sqrt{2}$;

4) $y=\log_7(4–x^2)$ — область определения $4–x^2>0$; $–2<x<2$.

355. 1) $\log_3(x+2)<3$; $\log_3(x+2)<\log_3 3^3$; т.к. $3>1$, то $x^2+2<27$; $x^2<25$;

$–5<x<25$, значит, $–2<x<5$;

2) $\log_8(4–2x)\geq2$; $\log_8(4–2x)\geq\log_8 8^2$; т.к. $8>1$, то $4–2x\geq64$; $2x\leq–60$; $x\leq–30$;

3) $\log_3(x+1)<-2$; $\log_3(x+1)<\log_3 3^{-2}$; т. к. $3>1$, то $x+1<\frac{1}{9}$;

$x<-\frac{8}{9}$, значит, $-1<x<-\frac{8}{9}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geq-2$; $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, т. к. $\frac{1}{3}<1$, то $x–1\leq9$; $x\leq10$, значит, $1<x\leq10$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geq-1$; $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geq\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, т. к. $\frac{1}{5}<1$, то $4-3x\leq5$; $x\geq-\frac{1}{3}$;

6) $\log_{\frac{2}{3}}(2–5x)<–2$; $\log_{\frac{2}{3}}(2–5x)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; т. к. $\frac{2}{3}<1$; то $2–5x>\frac{9}{4}$; $x<–0,05$.

356. 1) $\lg x>\lg8+1$; $\lg x>\lg8+\lg10$; $\lg x>80$; т. к. $10>1$, то $x>80$;

2) $\lg>2-\lg4$; $\lg x>\lg10^2-\lg4$; $\lg x>\lg\frac{100}{4}$; т. к. $10>1$, то $x>25$;

3) $\log_2(x-4)<1$; $\log_2(x-4)<\log_2 2$; т. к. 2>1, то $x-4<2$; $x<6$, значит, $4<x<6$;

4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$, т. к. $\frac{1}{5}<1$, то $3x-5x+1$; $x<3$, значит, $1\frac{2}{3}<x<3$;

357. 1) $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$; $\log_{15}(x-3)(x-5)<\log_{15}15$, т.к. 15>1; $x^2-8x+15<15$; $x(x-8)<0$; $0<x<8$, значит, $5<x<8$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geq -2$; $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(12-x)\geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, т.к. $\frac{1}{3}<1$, то $14x-x^2-24\leq 9^3$; $x^2-14x+33\geq 0$; $x\leq 3$ и $x\geq 11$, значит, $2<x\leq 3$, и $11\leq x<12$.

358. 1) $y=\log_5(x^2-4x+3)$ — область определения $x^2-4x+3>0$; $x<1$, $x>3$;

2) $y=\log_6\frac{3x+2}{1-x}$ — область определения $\frac{3x+2}{1-x}>0$; $-\frac{2}{3}<x<1$;

3) $y=\sqrt{\lg x+\lg(x+2)}$ — область определения $\begin{cases} x>0 \\ x+2>0 \\ \lg x(x+2)\geq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>0 \\ x>-2 \\ x^2+2x-1\geq 0 \end{cases}$; $x\geq\sqrt{2}-1$;

4) $y=\sqrt{\lg(x-1)+\lg(x+1)}$ — область определения $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ \lg(x^2-1)\geq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>1 \\ x^2-1\geq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ x^2\geq 2 \end{cases}$; $x\geq\sqrt{2}$.

359. 1) $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$; $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>\log_5 1$; т. к. $5>1$, то $\frac{3x-2}{x^2+1}>1$;

$\begin{cases} x^2-3x+3>0 \\ 3x-2>0 \end{cases}$; $x>\frac{2}{3}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x-7}<0$; $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x-7}<\log_{\frac{1}{2}}1$; т. к. $\frac{1}{2}<1$, то $\frac{2x^2+3}{x-7}>1$;

$\begin{cases} 2x^2-x+10>0 \\ x-7>0 \end{cases}$; $x>7$;

3) $\lg(3x-4)<\lg(2x+1)$, т. к. 10>1, то $\begin{cases} 3x-4<2x+1 \\ 2x+1>0 \\ 3x-4>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<5 \\ x>-\frac{1}{2} \\ x>1\frac{1}{3} \end{cases}$; $1\frac{1}{3}<x<5$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x+3\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)$, т. к. $\frac{1}{2} < 1$, то $\begin{cases} 2x+3 < x+1 \\ 2x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -2 \\ x > -1{,}5 \\ x > -1 \end{cases}$ — нет действительных решений

360. 1) $\log_8(x^2-4x+3)<1$; $\log_8(x^2-4x+3)<\log_8 8$, т. к. 8>1, то

$\begin{cases} x^2-4x+3<8 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-4x-5<0 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$; $-1<x<1$, и $3<x<5$;

2) $\log_6(x^2-3x+2)\ge 1$; $\log_6(x^2-3x+2)\ge\log_6 6$, т. к. 6>1, то

$\begin{cases} x^2-3x+2\ge 6 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-3x-4\ge 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$; $x\le -1$, и $x\ge 4$;

3) $\log_3(x^2+2x)>1$; $\log_3(x^2+2x)>\log_3 3$, т. к. $3>1$,

то $\begin{cases} x^2+2x>3 \\ x^2+2x>0 \end{cases}$;

$x^2+2x-3>0$; $x<-3$, и $x>1$.

4) $\log_{\frac{2}{3}}\left(x^2-2{,}5x\right)<-1$; $\log_{\frac{2}{3}}\left(x^2-2{,}5x\right)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, т. к. $\frac{2}{3}<1$, то

$x^2-2{,}5x>1{,}5$; $x^2-2{,}5x-1{,}5>0$; $x<-0{,}5$, и $x>3$.

361. 1) $\lg(x^2-8x+13)>0$; $\lg(x^2-8x+13)>\lg 1$, т. к. 10>1, то $x^2-8x+13>1$; $x^2-8x+12>0$; $x<2$, и $x>6$;

2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)<0$; $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)<\log_{\frac{1}{5}}1$; т. к. $\frac{1}{5}<1$, то

$x^2-5x+7>1$; $x^2-5x+6>0$; $x<2$, и $x>3$;

3) $\log_2(x^2+2x)<3$; $\log_2(x^2+2x)<\log_2 2^3$, т. к. 2>1, то

$\begin{cases} x^2+2x<8 \\ x^2+2x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2x-8<0 \\ x(x+2)>0 \end{cases}$; $-4<x<-2$, и $0<x<2$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\ge -3$; $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\ge\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, т. к. $\frac{1}{2}<1$, то

$\begin{cases} x^2-5x-6\le 8 \\ x^2-5x-6>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-5x-14\le 0 \\ x^2-5x-6>0 \end{cases}$; $-2\le x<-1$, и $6<x\le 7$.

362. 1) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 x^2>0$; $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 x^2>\log_{\frac{1}{3}}1$, т. к. $\frac{1}{3}<1$, то $\begin{cases} \log_2 x^2<1 \\ \log_2 x^2>0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2<2 \\ x^2>1 \end{cases}$; $-\sqrt{2}<x<-1$; и $1<x<\sqrt{2}$

2) $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)<1$; $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)<\log_3 3$, т. к. $3>1$, то

$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)<3\\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)>0\end{cases}$; т. к. $\frac{1}{2}<1$, то $\begin{cases}x^2-1>0\\ x^2-1>\left(\frac{1}{2}\right)^3\\ x^2-1<1\end{cases}$; $-\sqrt{2}<x<-\frac{3}{2\sqrt{2}}$

и $\frac{3}{2\sqrt{2}}<x<\sqrt{2}$.

363. $\log_{0,2}x-\log_5(x-2)<\log_{0,2}3$; $\log_{0,2}x+\log_{0,2}(x-2)<\log_{0,2}3$, т.к.

1) 0,2<1, то $\log_{0,2}x(x-2)<\log_{0,2}3$; $\begin{cases}x^2-2x>3\\ x>0\\ x-2>0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-2x-3>0\\ x>2\end{cases}$;

$x>3$;

2) $\lg x-\log_{0,1}(x-1)>\log_{0,1}0,5$; $\lg x+\log_{0,1}(x-1)>\log 0,5$;

$\lg x(x-1)>\lg 2$, т. к. $10>1$, то $\begin{cases}x^2-x>2\\ x>0\\ x-1>0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x-2>0\\ x>1\end{cases}$; $x>2$.

364. 1) $\log^2_{0,2}x-5\log_{0,2}x<-6$;

$\log_{0,2}x=a$; $a^2-5a+6<0$; $2<a<3$;

$2<\log_{0,2}x<3$; $\log_{0,2}0,04<\log_{0,2}x<\log_{0,2}0,008$;

$\begin{cases}x>0\\ 0,04>x>0,008\end{cases}$.

Итак, $0,008<x<0,04$.

2) $\log^2_{0,1}x+3\log_{0,1}x>4$;

$\log_{0,1}x=a$; $a^2+3a-4>0$; $a<-4$ или $a>1$;

$\log_{0,1}x<-4$ или $\log_{0,1}x>1$;

$\log_{0,1}x<\log_{0,1}10000$ или $\log_{0,1}x>\log_{0,1}0,1$

$\begin{cases}x>0\\ x>10000\end{cases}$; $x>10000$ или $\begin{cases}x>0\\ x<0,1\end{cases}$; $0<x<0,1$.

Ответ: $0<x<0,1$ и $x>10000$.

365. 1) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\lg x}<1$;

$\lg x=a$; $\frac{1+a+2(5-a)-(5-a)(1+a)}{(5-a)(1+a)}<0$; $\frac{a^2-5a+6}{(5-a)(1+a)}<0$;

$\begin{cases} a^2-5a+6<0 \\ (5-a)(1+a)>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2<a<3 \\ -1<a<5 \end{cases}$, т.е. 2 < a < 3 или

$\begin{cases} a^2-5a+6>0 \\ (5-a)(1+a)<0 \end{cases}$; $\begin{cases} a<2,\ a>3 \\ a<-1,\ a>5 \end{cases}$, т.е. a < – 1, a > 5;

$\lg x < -1$, $2 < \lg x < 3$, $\lg x > 5$

$\begin{cases} x>0 \\ x<0{,}1,\ 100<x<1000,\ x>100000 \end{cases}$.

Итак, 0 < x < 0,1, 100 < x < 1000, x > 100000.

Ответ: 0 < x < 0,1, 100 < x < 1000, x > 100000.

2) $\log_3(2-3^{-x}) < x+1-\log_3 4$; $\log_3(8-4\cdot 3^{-x}) < \log_3 3^{x+1}$;

$\begin{cases} 8-4\cdot 3^{-x}>0 \\ 8-4\cdot 3^{-x}<3^x\cdot 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{-x}<2 \\ 8\cdot 3^x-4<3\cdot 3^x\cdot 3^x \end{cases}$;

$\begin{cases} 3^{-x}<3^{\log_3 2} \\ 3(3^x)^2-8\cdot 3^x+4>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-\log_3 2 \\ 3^x<\frac{2}{3},\ 3^x>2 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-\log_3 2=\log_3\frac{1}{2} \\ x<\log_3\frac{2}{3},\ x>\log_3 2 \end{cases}$;

Итак, $\log_3\frac{1}{2} < x < \log_3\frac{2}{3}$, $x>\log_3 2$.

Ответ: $\log_3\frac{1}{2} < x < \log_3\frac{2}{3}$, $x>\log_3 2$.

3) $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$; $\log_{x^2-3}(4x+7)>\log_{x^2-3}1$;

$\begin{cases} 4x+7>0 \\ 4x+7>1 \\ x^2-3>1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-\frac{7}{4} \\ x>-\frac{3}{2} \\ x^2>4 \end{cases}$; x > 2 или $\begin{cases} 4x+7>0 \\ 4x+7<1 \\ x^2-3<1 \\ x^2-3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-\frac{7}{4} \\ x<-\frac{3}{2} \\ -2<x<2 \\ -\sqrt{3}>x,\ x>\sqrt{3} \end{cases}$;

$-\frac{7}{4}<x<-\sqrt{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{4}<x<-\sqrt{3}$, x > 2.

4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x)<0$; $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x)<\log_{\frac{x-1}{5x-6}}1$

$\begin{cases} \sqrt{6}-2x>0 \\ \sqrt{6}-2x<1 \\ \frac{x-1}{5x-6}>1 \end{cases}$; $\begin{cases} x<\frac{\sqrt{6}}{2} \\ x>\frac{\sqrt{6}-1}{2} \\ \frac{-4x+5}{5x-6}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{\sqrt{6}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{6}{5}<x<\frac{5}{4} \end{cases}$; $\frac{6}{5}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$ или

$$\begin{cases} \sqrt{6}-2x>1 \\ \frac{x-1}{5x-6}>0 \\ \frac{x-1}{5x-6}<1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x<\frac{\sqrt{6}-1}{2} \\ x<1,\ \ x>\frac{6}{5}; \\ \frac{-4x+5}{5x-6}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<\frac{\sqrt{6}-1}{2} \\ x<1,\ \ x>\frac{6}{5} \\ x>\frac{6}{5},\ \ x>\frac{5}{4} \end{cases}; \qquad x<\frac{\sqrt{6}-1}{2}.$$

Ответ: $x<\frac{\sqrt{6}-1}{2},\ \frac{6}{5}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$.

366. $\frac{2}{3^x-1} \le \frac{7}{9^x-2}$; $3^x = a$; $\frac{2}{a-1} \le \frac{7}{a^2-2}$;

$\begin{cases} 2(a^2-2) \le 7(a-1) \\ (a-1)(a^2-2) > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a^2-7a+3 \le 0 \\ (a-1)(a^2-2) > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2} \le a \le 3 \\ -\sqrt{2} < a < 1,\ a > \sqrt{2} \end{cases}$;

итак, $\frac{1}{2} \le a < 1$, и $\sqrt{2} < a \le 3$ или

$\begin{cases} 2(a^2-2) \ge 7(a-1) \\ (a-1)(a^2-2) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a^2-7a+3 \ge 0 \\ (a-1)(a^2-2) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a \le \frac{1}{2},\ a \ge 3 \\ a < -\sqrt{2},\ 1 < a < \sqrt{2} \end{cases}$; $a < -\sqrt{2}$

$\frac{1}{2} \le 3^x < 1$; $\sqrt{2} < 3^x \le 3$; $3^x < -\sqrt{2}$;

$-\log_3 2 \le x < 0$; $\log_3 \sqrt{2} < x \le 1$. В третьем случае решений нет.

Ответ: $-\log_3 2 \le x < 0$, $\log_3 \sqrt{2} < x \le 1$.

367. $4^x (\sqrt{16^{1-x}-1} + 2) < 4\,|4^x - 1|$; $4^x \cdot \sqrt{16^{1-x}-1} < 4\,|4^x - 1| - 2 \cdot 4^x$.

Левая часть неравенства всегда неотрицательна, поэтому неравенство возможно только при

$\begin{cases} 16^{1-x} - 1 \ge 0 \\ 4\,|4^x - 1| - 2 \cdot 4^x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 16^{1-x} \ge 1 \\ 2\,|4^x - 1| > 4^x \end{cases}$; $\begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ 4^x > 2 \\ 4^x \ge 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \ge 0 \end{cases}$, т.е. $\frac{1}{2} < x \le 1$

или $\begin{cases} x \le 1 \\ 3 \cdot 4^x < 2 \\ 4^x < 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 1 \\ x < \log_4 \frac{2}{3} \\ x < 0 \end{cases}$; т.е. $x < 0$, итак, $x < 0$ и $\frac{1}{2} < x \le 1$.

а) Пусть $x < 0$, перепишем неравенство, раскрыв модуль

$4^x \sqrt{16^{1-x}-1} < 4(1 - 4^x) - 2 \cdot 4^x$; $4^x \sqrt{16^{1-x}-1} < 4 - 6 \cdot 4^x$;

$16^x (16^{1-x} - 1) < 16 - 48 \cdot 4^x + 36 \cdot 16^x$; $4^x = a$;

$37a^2 - 48a > 0$; $a < 0$ — решений нет или $a > \frac{48}{37}$, т.е.

$\begin{cases} x < 0 \\ 4^x > \frac{48}{37} \end{cases}$; решений нет.

б) $\frac{1}{2} < x \le 1$, перепишем неравенство, раскрыв модуль

$4^x \sqrt{16^{1-x}-1} < 4(4^x - 1) - 2 \cdot 4^x$; $4^x \sqrt{16^{1-x}-1} < 2 \cdot 4^x - 4$;

$16^x (16^{1-x} - 1) < 4 \cdot 16^x + 16$; $4^x = a$;

$5a^2 - 16a > 0$; $a < 0$ — решений нет или $a > \frac{16}{5}$, т.е.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 4^x > \frac{16}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < x \le 1 \\ x > 2 - \log_4 5 \end{cases}; \quad \text{итак, } 1 \ge x > 2 - \log_4 5.$$

Ответ: $2 - \log_4 5 < x \le 1$.

368. 1) $\log_{15}225 = \log_{15}15^2 = 2$; 2) $\log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$;

3) $\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 3^{-5} = -5$; 4) $\log_7 \frac{1}{343} = \log_7 7^{-3} = -3$.

369. 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = 3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = 6$.

370. 1) $\log_{11} 1 = \log_{11} (11)^{\circ} = 0$; 2) $\log_7 7 = \log_7 7^1 = 1$;

3) $\log_{16} 64 = \log_{2^4} 2^6 = \frac{6}{4}\log_2 2 = \frac{6}{4}$; 4) $\log_{27} 9 = \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}$.

371. 1) $(0{,}1)^{-\lg 0{,}3} = (0{,}1)^{\log_{0,1} 0{,}3} = 0{,}3$; 2) $10^{-\lg 4} = 10^{\lg\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$;

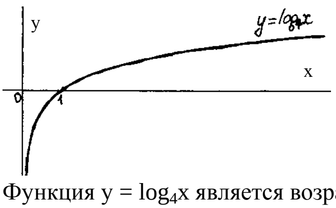
3) $5^{-\log_5 3} = 5^{\log_5 \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}} 4} = 4$.

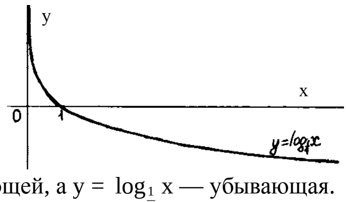
372. 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6 = 4\log_{\frac{1}{2}} 3 - 2\log_{\frac{1}{2}} 3 - 2\log_{\frac{1}{2}} 3 - 2\log_{\frac{1}{2}} 2 = 2\log_2 2 = 2$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{10000} = -\frac{2}{3}\lg 10^3 + \lg 10 - \frac{3}{5}\lg 100 = -2 + 1 - \frac{6}{5} = -\frac{11}{5} = -2{,}2$.

373. Вычислить с помощью микрокалькулятора.

374. 1) $y = \log_4 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$





Функция $y = \log_4 x$ является возрастающей, а $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ — убывающая.

Функция $y = \log_4 x$ принимает положительные значения при $x > 1$, а $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ принимает положительные значения при $x < 1$.

Функция $y = \log_4 x$ принимает отрицательные значения при $x < 1$, а $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ принимает отрицательные значения при $x > 1$.

Обе функции принимают значения, равные нулю, в точке $x = 1$.

375. 1) $y = \log_{0,2} x$ — убывающая, т.к. $0,2 < 1$;

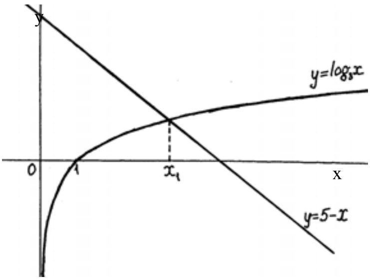
2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$ — возрастающая, т.к. $\sqrt{5} > 1$;

3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$ — убывающая, т.к. $\frac{1}{e} < 1$;

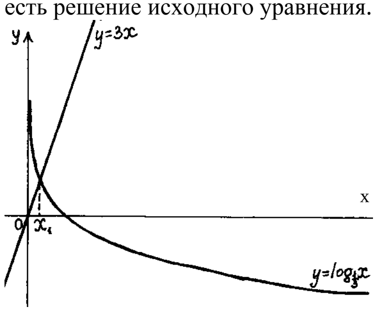
4) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ — убывающая, т.к. $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

376. 1) $\log_3 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$.

1) Построим графики функций $y_1 = \log_3 x$ и $y_2 = 5 - x$. Видим, что они пересекаются в точке $x_1 \approx 3,8$. Это и есть решение уравнения.



2) Построим графики функций $y_1 = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y_2 = 3x$. Видим, что они пересекаются в точке $x_1 = \frac{1}{3}$. Это и есть решение исходного уравнения.



377. 1) $y = \log_7 (5 - 2x)$; $5 - 2x > 0$; $x < 2,5$. Ответ: $x < 2,5$.

2) $y = \log_2 (x^2 - 2x)$; $x^2 - 2x > 0$; $x < 0$ и $x > 2$. Ответ: $x < 0$, $x > 2$.

378. 1) $\log_{\frac{1}{2}} (7 - 8x) = -2$; $\begin{cases} 7 - 8x = 4 \\ 7 - 8x > 0 \end{cases}$; $x = \frac{3}{8}$. Ответ: $x = \frac{3}{8}$.

2) $\lg (x^2 - 2) = \lg x$; $\begin{cases} x^2 - 2 = x \\ x^2 - 2 > 0; \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \ \ x = 2 \\ x < -\sqrt{2}, \ \ x > \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases}$; $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

379. 1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg 30 - 1$; $\lg (x^2 - 2x) = \lg 3$; $\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases}$;

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

2) $\log_3 (2x^2 + x) = \log_3 6 - \log_3 2$; $\log_3 (2x^2 + x) = \log_3 3$;

$\begin{cases} 2x^2 + x = 3 \\ 2x^2 + x > 0 \end{cases}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1,5$.

3) $\lg^2 x - 3\lg x = 4$; $\lg x = a$; $a^2 - 3a - 4 = 0$; $a = -1$, $a = 4$;

$\lg x = -1$, $\lg x = 4$; $x_1 = 0,1$, $x_2 = 10000$. Ответ: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 10000$.

4) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$; $\log_2 x = a$; $a^2 - 5a + 6 = 0$; a = 2, a = 3;

$\log_2 x = 2$, $\log_2 x = 3$; $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

380. 1) $\log_2 (x-2) + \log_2 (x-3) = 1$;

$\begin{cases} \log_2(x-2)(x-3) = \log_2 2 \\ x-2>0, \quad x-3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 2 \\ x > 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1, \ \ x = 4 \\ x > 3 \end{cases}$;

x = 4. Ответ: x = 4.

2) $\log_3 (5-x) + \log_3 (-1-x) = 3$;

$\begin{cases} \log_3(x-5)(x+1) = \log_3 27 \\ 5-x>0, \quad -1-x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 4x - 32 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 8, \ \ x = -4 \\ x < -1 \end{cases}$

x = – 4. Ответ: x = – 4.

3) $\lg (x-2) + \lg x = \lg 3$; $\lg ((x-2)\cdot x) = \lg 3$;

$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x-2>0, \ \ x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3, \ \ x = -1 \\ x > 2 \end{cases}$;

x = 3. Ответ: x = 3.

4) $\log_{\sqrt{6}} (x-1) + \log_{\sqrt{6}} (x+4) = \log_{\sqrt{6}} 6$;

$\begin{cases} \log_{\sqrt{6}}(x-1)(x+4) = \log_{\sqrt{6}} 6 \\ x-1>0, \quad x+4>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0 \\ x > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -5, \ \ x = 2 \\ x > 1 \end{cases}$

x = 2. Ответ: x = 2.

381. 1) $\log_2(x-5) \le 2$; $\log_2(x-5) \le \log_2 4$;

$\begin{cases} x-5 \le 4 \\ x-5>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 9 \\ x > 5 \end{cases}$; $5 < x \le 9$. Ответ: $5 < x \le 9$.

2) $\log_3 (7-x) > 1$; $\log_3 (7-x) > \log_3 3$;

$\begin{cases} 7-x > 3 \\ 7-x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 4 \\ x < 7 \end{cases}$; $x < 4$. Ответ: $x < 4$.

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > -2$; $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > \log_{\frac{1}{2}} 4$;

$\begin{cases} 2x+1 < 4 \\ 2x+1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$; $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$. Ответ: $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.

4) $\log_{\frac{1}{2}}(3-5x) < -3$; $\log_{\frac{1}{2}}(3-5x) < \log_{\frac{1}{2}} 8$;

$\begin{cases} 3-5x > 8 \\ 3-5x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{3}{5} \end{cases}$; $x < -1$. Ответ: $x < -1$.

382. 1) $\log_3(5-4x) < \log_3(x-1)$; $\begin{cases} 5-4x < x-1 \\ 5-4x > 0 \\ x-1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{5}{4}; \\ x > 1 \end{cases}$ $\frac{6}{5} < x < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < x < \frac{5}{4}$.

2) $\log_{0,3}(2x+5) \ge \log_{0,3}(x+1)$; $\begin{cases} 2x+5 \le x+1 \\ 2x+5>0 \\ x+1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le -4 \\ x > -\frac{5}{2}; \\ x > -1 \end{cases}$

решений нет. Ответ: решений нет.

383. 1) $\lg(x^2+2x+2) < 1$; $\begin{cases} x^2+2x+2<10 \\ x^2+2x+2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2x-8<0 \\ x \in R \end{cases}$; $-4 < x < 2$

Ответ: $-4 < x < 2$.

2) $\log_3(x^2+7x-5) > 1$; $\begin{cases} x^2+7x-5>3 \\ x^2+7x-5>0 \end{cases}$; $x^2+7x-8>0$;

$x < -8$ и $x > 1$. Ответ: $x < -8$ и $x > 1$.

384. 1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{-\frac{4}{3}} = -\frac{8}{3}\log_3 3 = -\frac{8}{3}$. Ответ: $-\frac{8}{3}$.

2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{-\frac{9}{4}} = -\frac{9}{2}\log_5 5 = -\frac{9}{2}$. Ответ: $-\frac{9}{2}$.

3) $2^{2-\log_2 5} = \frac{2^2}{2^{\log_2 5}} = \frac{4}{5}$. Ответ: $\frac{4}{5}$.

4) $3{,}6^{\log_{3,6}10+1} = 3{,}6 \cdot 10 = 36$. Ответ: 36.

5) $2\log_5\sqrt{5} + 3\log_2 8 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = 10$. Ответ: 10.

6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16} = \log_2 \log_2 16 = \log_2 4 = 2$. Ответ: 2.

385. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$,

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$. Значит, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.

2) $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}} 9}$ и $\sqrt{8}$; $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}} 9} = 2^{2\log_2 25-1} = \frac{25}{2} > \sqrt{8}$.

Значит, $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}} 9} > \sqrt{8}$.

386. $\log_{30} 64 = \dfrac{\lg 2^6}{\lg(3\cdot 10)} = \dfrac{6\lg 2}{\lg 3+1} = \dfrac{6(\lg 10-\lg 5)}{\lg 3+1} = \dfrac{6-6\lg 5}{1+\lg 3} \approx \dfrac{1{,}806}{1{,}4771} \approx 1{,}223$.

Ответ: $\approx 1{,}223$.

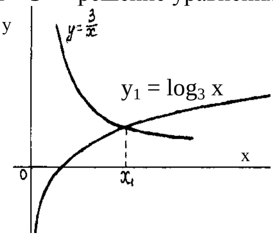
387. $\ell og_{36} 15 = \dfrac{\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+2\lg 2} = \dfrac{\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+2-2\lg 5} \approx \dfrac{1{,}1761}{1{,}5562} \approx 0{,}756$.

Ответ: $\approx 0{,}756$.

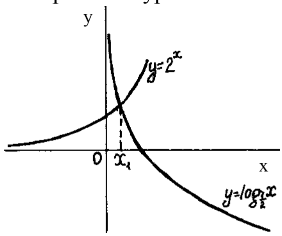
388. 1) $\log_x 8 < \log_x 10$; т.к. $8 < 10$ и $\log_x 8 < \log_x 10$, то функция возрастает, значит, $x > 1$.

2) $\log_x \dfrac{3}{4} < \log_x \dfrac{1}{2}$; т.к. $\dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2}$ и $\log_x \dfrac{3}{4} < \log_x \dfrac{1}{2}$, то функция убывает, значит, $0 < x < 1$.

389. 1) Построим графики функций $y_1=\log_3 x$ и $y_2=\dfrac{3}{x}$. Видим, что они пересекаются в точке $x_1=3$. Значит $x = 3$ — решение уравнения.



2) Построим графики функций $y_1 = 2^x$ и $y_2 = \log_{\frac{1}{2}} x$. Видим, что они пересекаются в точке $x_1 \approx 0{,}4$. Значит, $x \approx 0{,}4$ есть решение уравнения.



390. 1) $3^{4x} = 10$; $4x = \log_3 10$; $x = \dfrac{1}{4}\log_3 10$. Ответ: $x = \dfrac{1}{4}\log_3 10$.

2) $2^{3x} = 3$; $3x = \log_2 3$; $x = \dfrac{1}{3}\log_2 3$. Ответ: $x = \dfrac{1}{3}\log_2 3$.

3) $1{,}3^{3x-2} = 3$; $3x - 2 = \log_{1,3} 3$; $x = \dfrac{1}{3}(\log_{1,3} 3 + 2)$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{3}(\log_{1,3} 3 + 2)$.

4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5+4x} = 1{,}5$; $5 + 4x = \log_{\frac{1}{3}} 1{,}5$; $x = \dfrac{1}{4}(\log_{\frac{1}{3}} 1{,}5 - 5)$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{4}(\log_{\frac{1}{3}} 1{,}5 - 5)$.

5) $16^x - 4^{x+1} - 14 = 0$; $4^x = a$; $a^2 - 4a - 14 = 0$;

$a_1 = \dfrac{4+6\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = \dfrac{4-6\sqrt{2}}{2}$; $4^x = (2 + 3\sqrt{2})$; $x = \log_4 (2 + 3\sqrt{2})$

или $4^x = \dfrac{4-6\sqrt{2}}{2} < 0$; решений нет. Ответ: $x = \log_4(2 + 3\sqrt{2})$.

6) $25^x + 2\cdot 5^x - 15 = 0$; $5^x = a$; $a^2 + 2a - 15 = 0$; $a_1 = 3$, $a_2 = -5$;

$5^x = 3$; $x = \log_5 3$ или $5^x = -5 < 0$ — решений нет.

Ответ: $x = \log_5 3$.

391. 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$; $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$;

$\frac{11}{6}\log_3 x = \frac{11}{12}$; $\log_3 x = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{3}$.

Ответ: $x = \sqrt{3}$.

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$; $\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6$;

$\log_3 x = 3$; $x = 27$. Ответ: $x = 27$.

3) $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4\log_3 2$; $\log_3 x \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2} = 4\log_3 2$;

$\log_3^2 x = 4\log_3^2 2$; $\log_3 x = 2\log_3 2$ или $\log_3 x = -2\log_3 2$;

$x_1 = 4$ или $x_2 = \frac{1}{4}$. Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{1}{4}$.

4) $\log_3 x \cdot \log_3 x = 9\log_5 3$; $\log_5 x \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 3} = 9\log_5 3$;

$\log_5^2 x = 9\log_5^2 3$; $\log_5 x = 3\log_5 3$ или $\log_5 x = -3\log_5 3$;

$x_1 = 27$ или $x_2 = \frac{1}{27}$. Ответ: $x_1 = 27$; $x_2 = \frac{1}{27}$.

392. 1) $\log_3 (2 - x^2) - \log_3 (-x) = 0$;

$$\begin{cases} -x > 0 \\ 2 - x^2 > 0 \\ \log_3 \frac{x^2-2}{x} = \log_3 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x^2 - 2 = x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \ x = -1 \\ x = 2, \ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $x = -1$.

2) $\log_5 (x^2 - 12) - \log_5 (-x) = 0$;

$$\begin{cases} x^2 - 12 > 0 \\ -x > 0 \\ \log_5 \frac{12-x^2}{x} = \log_5 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -2\sqrt{3}, \ x > 2\sqrt{3} \\ x < 0 \\ 12 - x^2 = x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -2\sqrt{3}, \ x > 2\sqrt{3} \\ x < 0, \\ x = -4, \ x = 3 \end{cases};$$

$x = -4$. Ответ: $x = -4$.

3) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$;

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ 3x - 7 > 0 \\ \log_2 \sqrt{(x-3)(3x-7)} = \log_2 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{7}{3} \\ (x-3)(3x-7) = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{7}{3} \\ 3x^2 - 16x + 5 = 0 \end{cases};$$

$\begin{cases} x > 3 \\ x = 5, x = \frac{1}{3} \end{cases}$; x = 5. Ответ: x = 5.

4) lg (x + 6) – lg $\sqrt{2x-3}$ = lg4;

$\begin{cases} x+6>0 \\ 2x-3>0 \\ (x+6)=4\sqrt{2x-3} \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x^2+12x+36=32x-48 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x^2-20x+84=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x=14\ ,\ x=6 \end{cases}$; x_1 = 14, x_2 = 6. Ответ: x_1 = 14, x_2 = 6.

393. 1) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$; $2\log_2 x + 2\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 13$;

$\log_2 x$ = 3; x = 8. Ответ: x = 8.

2) $\log_{0,5}(x+2) - \log_2(x-3) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$;

$-\log_2(x+2) - \log_2(x-3) = -\log_2(-4x-8)$;

$\begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \\ -4x-8>0 \\ (x+2)(x-3)=-4x-8 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-2 \\ x>3 \\ x<-2 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$; решений нет.

Ответ: решений нет.

394. 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 = 1$; $-\log_x 5 - \frac{1}{2}\log_x 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 = \log_x x$;

$\log_x \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot 5} = \log_x x$; $\begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ x \neq 1,\ x>0 \end{cases}$; x = $\frac{1}{10}$. Ответ: x = 0,1.

2) $\frac{1}{2}\log_x 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 9 - \log_{x^2} 28 = 1$; $\frac{1}{2}\log_x 7 + 2\log_x 3 - \frac{1}{2}\log_x 28 = \log_x x$;

$\log_x \frac{9\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{28}} = \log_x x$; $\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x>0,\ x\neq 1 \end{cases}$; x = 4,5 . Ответ: x = 4,5.

395. 1) $\log_2 \frac{2}{x-1} = \log_2 x$; $\begin{cases} \frac{2}{x-1} > 0 \\ x>0 \\ \frac{2}{x-1} = x \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ x>0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ x=2,\ x=-1 \end{cases}$;

x = 2. Ответ: x = 2.

2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{10}{7-x}=\log_{\frac{1}{2}}x$; $\begin{cases}\frac{10}{7-x}>0\\ x>0\\ \frac{10}{7-x}=x\end{cases}$; $\begin{cases}x<7\\ x>0\\ x^2-7x+10=0\end{cases}$; $\begin{cases}x<7\\ x>0\\ x=2,\ x=5\end{cases}$;

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

3) $\lg\frac{x+8}{x-1}=\lg x$; $\begin{cases}\frac{x+8}{x-1}>0\\ x>0\\ \frac{x+8}{x-1}=x\end{cases}$; $\begin{cases}x<-8,\ x>1\\ x>0\\ x^2-2x-8=0\end{cases}$; $\begin{cases}x>1\\ x=4,\ x=-2\end{cases}$;

$x = 4$. Ответ: $x = 4$.

4) $\lg\frac{x-4}{x-2}=\lg x$; $\begin{cases}\frac{x-4}{x-2}>0\\ x>0\\ \frac{x-4}{x-2}=x\end{cases}$; $\begin{cases}x<2,\ x>4\\ x>0\\ x^2-3x+4=0\end{cases}$; $\begin{cases}x<2,\ x>4\\ x>0\\ \text{решений нет}\end{cases}$;

решений нет. Ответ: решений нет.

396. 1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\le 2$;

$\begin{cases}x-4>0\\ x+1>0\\ \log_{\sqrt{6}}(x-4)(x+1)\le\log_{\sqrt{6}}6\end{cases}$; $\begin{cases}x>4\\ x>-1\\ x^2-3x-4\le 6\end{cases}$; $\begin{cases}x>4\\ x^2-3x-10\le 0\end{cases}$;

$\begin{cases}x>4\\ -2\le x\le 5\end{cases}$; $4<x\le 5$. Ответ: $4<x\le 5$.

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\le 2$;

$\begin{cases}x-5>0\\ x+12>0\\ \log_{3\sqrt{2}}(x-5)(x+12)\le\log_{3\sqrt{2}}18\end{cases}$; $\begin{cases}x>5\\ x>-12\\ x^2+7x-78\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}x>5\\ -13\le x\le 6\end{cases}$;

$5<x\le 6$. Ответ: $5<x\le 6$.

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

$\begin{cases}8x^2+x>0\\ x>0\\ \log_3(8x^2+x)>\log_3 9x^3\end{cases}$; $\begin{cases}x<-\frac{1}{8},\ \ x>0\\ x>0\\ x(9x^2-8x-1)<0\end{cases}$; $\begin{cases}x>0\\ x(9x^2-8x-1)<0\end{cases}$;

$\begin{cases}x>0\\ 9x^2-8x-1<0\end{cases}$; $\begin{cases}x<0\\ -\frac{1}{9}<x<1\end{cases}$; $0<x<1$. Ответ: 0<x<1.

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

$\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \\ \log_2 x(x-3) > \log_2 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 3 \\ x < -1, \ \ x > 4 \end{cases}$;

$x > 4$. Ответ: $x > 4$.

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10) - \log_{\frac{1}{5}}(x+2) \geq -1$;

$\begin{cases} x - 10 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{5}} \frac{x-10}{x+2} \geq \log_{\frac{1}{5}} 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 10 \\ x > -2 \\ x - 10 \leq 5x + 10 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 10 \\ x \geq -4 \end{cases}$;

$x > 10$. Ответ: $x > 10$.

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10) + \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4) > -2$;

$\begin{cases} x + 10 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)(x+4) > \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x > -4 \\ x^2 + 14x + 33 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > -4 \\ -11 < x < -3 \end{cases}$;

$-4 < x < -3$. Ответ: $-4 < x < -3$.

397. 1) $4 \log_4 x - 33 \log_x 4 \leq 1$;

$\begin{cases} 4\log_4 x - \frac{33}{\log_4 x} - 1 \leq 0 \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{4\log_4^2 - \log_4 x - 33}{\log_4 x} \leq 0 \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$; обозначим $\log_4 x = a$;

$\begin{cases} 4a^2 - a - 33 \leq 0 \\ a > 0 \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1-\sqrt{265}}{8} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{265}}{8} \\ a > 0 \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < \log_4 x \leq \frac{1+\sqrt{265}}{8} \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$;

$1 < x \leq 4^{\frac{1+\sqrt{265}}{8}}$ или

$\begin{cases} 4a^2 - a - 33 \geq 0 \\ a < 0 \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a \leq \frac{1-\sqrt{265}}{8}, \ \ a \geq \frac{1+\sqrt{265}}{8} \\ a < 0 \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_4 x \leq \frac{1-\sqrt{265}}{8} \\ x \neq 1, \ \ x > 0 \end{cases}$;

$0 < x \leq 4^{\frac{1-\sqrt{265}}{8}}$. Ответ: $0 < x \leq 4^{\frac{1-\sqrt{265}}{8}}$ и $1 < x \leq 4^{\frac{1+\sqrt{265}}{8}}$.

2) $\log_x 3 \leq 4\left(1 + \log_{\frac{1}{3}} x\right)$;

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\log_3 x} \le 4 - 4\log_3 x \\ x > 0,\ x \ne 1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{4\log_3^2 x - 4\log_3 x + 1}{\log_3 x} \le 0 \\ x > 0,\ x \ne 1\end{cases};$$

т.к. $4\log_3^2 x - 4\log_3 x + 1 \ge 0$ при любых $x \in R$, то

$$\begin{cases}\log_3 x < 0 \\ x > 0,\ x \ne 1\end{cases};\quad 0 < x < 1 \qquad \text{или} \qquad 4\log_3^2 x - 4\log_3 x + 1 = 0;$$

$\log_3 x = \dfrac{1}{2}$, $\quad x = \sqrt{3}$. Ответ: $0 < x < 1$, $x = \sqrt{3}$.

398. Пусть a_1, a_2, … — геометрическая прогрессия из положительных чисел; тогда $a_{i+1} = a_{i \cdot q}$. Рассмотрим последовательность $\log_b a_1$, $\log_b a_2$, … В этой последовательности

$\log_b a_{i+1} = \log_b (a_{i \cdot q}) = \log_b a_i + \log_b q$, т.е это арифметическая прогрессия с разностью $d = \log_b q$.

399. Пусть a_1, a_1q, a_1q^2 — искомая последовательность, тогда

$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 62$,

$\lg a_1 + \lg a_1 + \lg q + \lg a_1 + 2\lg q = 3\lg a_1 + 3\lg q = 3(\lg a_1 q) = 3$,

$\lg a_1 q = 1$, $a_1 q = 10$.

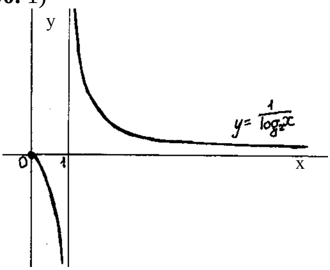
$a_1(1 + q + q^2) = 62$; $a_1q = 10$; $a_1 = \dfrac{10}{q}$; $\dfrac{10}{q}(1 + q + q^2) = 62$;

$\dfrac{10}{q} + 10 + 10q = 62$; $\dfrac{10}{q} + 10q - 52 = 0$; $10q^2 - 52q + 10 = 0$;

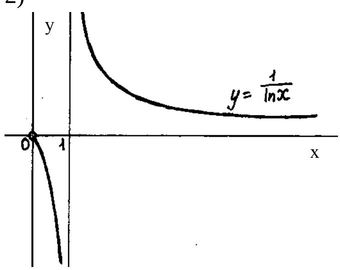
$q_1 = 5$ или $q_2 = \dfrac{1}{5}$; $a_1 = 2$ или $a_1 = 50$.

В обоих случаях искомые числа: 2, 10, 50.

400. 1)



2)



401. 1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$; $x^{\frac{\log_x 9}{\log_x 10}} + 9^{\lg x} = 6$; $9^{\frac{1}{\log_x 10}} + 9^{\lg x} = 6$;

$9^{\lg x} = 3$; $\lg x = \dfrac{1}{2}$; $x = \sqrt{10}$. Ответ: $x = \sqrt{10}$.

2) $x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$; $\lg x(3\lg^3 x - \dfrac{2}{3}\lg x) = \dfrac{7}{3}$; $\lg^2 x = a$;

$9a^2 - 2a - 7 = 0$; $a_1 = 1$ или $a_2 = -\frac{7}{9}$; $\lg^2 x = 1$, $\lg x = \pm 1$, $x_1 = 10$ или $x_2 = \frac{1}{10}$ или $\lg^2 x = -\frac{7}{9}$ — решений нет. Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{10}$.

402. 1) $3 + 2\log_{x+1}3 = 2\log_3(x+1)$; $\log_3 x + 1 = a$;

$$\begin{cases} 2a = \frac{2}{a} + 3 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} a = 2,\ a = -\frac{1}{2}; \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3(x+1) = 2,\ \log_3(x+1) = \frac{1}{2}; \\ x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = 8,\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x \neq 0 \end{cases}; \ x_1 = 8,\ x_2 = \sqrt{3} - 1.$$

Ответ: $x_1 = 8$, $x_2 = \sqrt{3} - 1$.

2) $1 + 2\log_{x+2}5 = \log_5(x+2)$; $\log_5(x+2) = a$;

$$\begin{cases} a = \frac{2}{a} + 1 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}; \begin{cases} a = -1,\ a = 2 \\ x \neq -1 \end{cases}; \begin{cases} \log_5(x+2) = -1,\ \log_5(x+2) = 2 \\ x \neq -1 \end{cases};$$

$x_1 = 23$; $x_2 = -\frac{9}{5}$. Ответ: $x_1 = 23$; $x_2 = -\frac{9}{5}$.

403. 1) $\log_2(2^x - 5) - \log_2(2^x - 2) = 2x$;

$$\begin{cases} 2^x - 5 > 0 \\ 2^x - 2 > 0 \\ \log_2 \frac{2^x - 5}{2^x - 2} = \log_2 2^{2-x} \end{cases}; \begin{cases} x > \log_2 5 \\ 2^x - 5 = (2^x - 2) \cdot \frac{4}{2^x} \end{cases}; \ 2^x = a;$$

$$\begin{cases} x > \log_2 5 \\ a - 5 = 4 - \frac{8}{a} \end{cases}; \begin{cases} x > \log_2 5 \\ a^2 - 9a + 8 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x > \log_2 5 \\ a = 1,\ a = 8 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > \log_2 5 \\ 2^x = 1,\ 2^x = 8 \end{cases}; \begin{cases} x > \log_2 5 \\ x = 0,\ x = 3 \end{cases}; \ x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

2) $\log_{1-x}(3 - x) = \log_{3-x}(1 - x)$;

$$\begin{cases} 3 - x > 0,\ 3 - x \neq 1 \\ 1 - x > 0,\ 1 - x \neq 1 \\ \log_{1-x}(3 - x) = \frac{1}{\log_{1-x}(3-x)} \end{cases}; \begin{cases} x < 3,\ x \neq 2 \\ x < 1,\ x \neq 0 \\ \log_{1-x}(3 - x) = \pm 1 \end{cases}; \begin{cases} x < 1,\ x \neq 0 \\ 3 - x = 1 - x \end{cases}; \begin{cases} x < 1,\ x \neq 0 \\ 3 = 1 \end{cases};$$

нет решений.

$$\begin{cases} x < 1,\ x \neq 0 \\ 3 - x = \frac{1}{1-x} \end{cases}; \begin{cases} x < 1,\ x \neq 0 \\ (3 - x)(1 - x) = 1 \end{cases}; \begin{cases} x < 1,\ x \neq 0 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x < 1,\ x \neq 0 \\ x = 2 + \sqrt{2},\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases};$$

$x = 2 - \sqrt{2}$. Ответ: $x = 2 - \sqrt{2}$.

3) $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$; $\log_2(2^x+1)\cdot(1+\log_2(2^x+1))=2$;
$\log_2(2^x+1)=a$; $a^2+a-2=0$; $a=1$, $a=-2$; $\log_2(2^x+1)=1$
или $\log_2(2^x+1)=-2$; $2^x+1=2$ или $2^x+1=\frac{1}{4}$; $2^x=1$, $x=0$
или $2^x=-\frac{3}{4}$ — решений нет. Ответ: $x=0$.

4) $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\log_{5x+3}(3x+7)$, $\log_{3x+7}(5x+3)=a$;

$$\begin{cases}3x+7\neq1,\ 3x+7>0\\5x+3\neq1,\ 5x+3>0\\a=2-\frac{1}{a}\end{cases};\ \begin{cases}x\neq-2,\ x>-\frac{7}{3}\\x\neq-\frac{2}{5},\ x>-\frac{3}{5}\\a^2-2a+1=0\end{cases};\ \begin{cases}x\neq-\frac{2}{5},\ x>-\frac{3}{5}\\a=1\end{cases};$$

$$\begin{cases}x\neq-\frac{2}{5},\ x>-\frac{3}{5}\\\log_{3x+7}(5x+3)=1\end{cases};\ \begin{cases}x\neq-\frac{2}{5},\ x>-\frac{3}{5}\\3x+7=5x+3\end{cases};\ \begin{cases}x\neq-\frac{2}{5},\ x>-\frac{3}{5}\\x=2\end{cases}.$$

Ответ: $x=2$.

404. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\ge-2$; $2^x=a$; $\log_{\frac{1}{3}}(4a-a^2)\ge\log_{\frac{1}{3}}9$;

$$\begin{cases}4a-a^2>0\\4a-a^2\le9\end{cases};\ \begin{cases}0<a<4\\a^2-4a+9\ge0\end{cases};\ \begin{cases}0<a<4\\a\in R\end{cases};\ 0<a<4;$$

$0<2^x<4$; $x<2$. Ответ: $x<2$.

2) $\log_{\frac{1}{\sqrt5}}(6^{x+1}-36^x)\ge-2$; $6^x=a$; $\log_{\frac{1}{\sqrt5}}(6a-a^2)\ge\log_{\frac{1}{\sqrt5}}5$;

$$\begin{cases}6a-a^2>0\\6a-a^2\le5\end{cases};\ \begin{cases}a^2-6a<0\\a^2-6a+5\ge0\end{cases};\ \begin{cases}0<a<6\\a\le1,\ a\ge5\end{cases};\ \ 0<a\le1,\ 5\le a<6.$$

$0<6^x\le1$, $5\le6^x<6$; $x\le0$ и $\log_6 5\le x<1$.

Ответ: $x\le0$, $\log_6 5\le x<1$.

405. $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x)$;
$\log_2 x\cdot\log_2(x-3)=\log_2 x+\log_2(x-3)-1$;
$\log_2 x(\log_2(x-3)-1)=\log_2(x-3)-1$;
$(\log_2(x-3)-1)(\log_2 x-1)=0$;

$$\begin{cases}\log_2(x-3)=1\\x-3>0,\ x>0\end{cases};\ \begin{cases}x=5\\x>3\end{cases};\ x=5\quad\text{или}\quad\begin{cases}\log_2 x=1\\x>3\end{cases};\quad\text{нет решений.}$$

Ответ: $x=5$.

406. $\frac{1}{\log_a x-1}+\frac{1}{\log_a x^2+1}<-\frac{3}{2}$; $\log_a x=b$;

$$\begin{cases}x>0\\\frac{1}{b-1}+\frac{1}{2b+1}<-\frac{3}{2}\end{cases};\ \begin{cases}x>0\\\frac{2b+1+b-1+\frac{3}{2}(b-1)(2b+1)}{(b-1)(2b+1)}<0\end{cases};$$

$$\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{3b^2+\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}}{(b-1)(2b+1)}<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{2b^2+b-1}{(b-1)(2b+1)}<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>0 \\ -1<b<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<b<1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x>0 \\ -1<\log_a x<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\log_a x<1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{a}<x<\frac{1}{\sqrt{a}} \\ a>1 \end{cases}; \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ \sqrt{a}<x<a \\ a>1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{a}>x>\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 0<a<1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>0 \\ \sqrt{a}>x>a \\ 0<a<1 \end{cases}.$$

Ответ: при 0 < a < 1: $\frac{1}{a}>x>\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\sqrt{a}>x>a$,

а при a > 1: $\frac{1}{a}<x<\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\sqrt{a}<x<a$.

Глава V. Тригонометрические формулы

407. 1) $40^\circ = \frac{40^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}$; 2) $120^\circ = \frac{120^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$; 3) $150^\circ = \frac{150^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}$;

4) $75^\circ = \frac{75^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{12}$; 5) $32^\circ = \frac{32^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{8\pi}{45}$; 6) $140^\circ = \frac{140^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{9}$.

408. 1) $\frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$; 2) $\frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$;

3) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$; 4) $2 = \frac{2 \cdot 180^\circ}{\pi} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$;

5) $3 = \frac{3 \cdot 180^\circ}{\pi} = \left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ$; 6) $0{,}36 \approx \frac{0{,}36 \cdot 180^\circ}{\pi} = \left(\frac{64{,}8}{\pi}\right)^\circ$.

409. а) в равностороннем треугольнике все три угла равны $60^\circ = \frac{60^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$;

б) в равнобедренном прямоугольном треугольнике один угол равен $90^\circ = \frac{90^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$, а два других равны $45^\circ = \frac{45^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$;

в) в квадрате все углы равны $90^\circ = \frac{\pi}{2}$;

г) в правильном шестиугольнике все углы равны $120^\circ = \frac{120^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$.

410. $\ell = 0{,}36$м, $\alpha = 0{,}9$рад. R — ? $\ell = \alpha R$, $R = \frac{\ell}{\alpha} = \frac{0{,}36\text{м}}{0{,}9} = 0{,}4$м.

411. $\ell = 0{,}03$м, R = 0,015м, α — ? $\ell = \alpha R$, $\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{0{,}03\text{м}}{0{,}015\text{м}} = 2$рад.

412. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ рад., R = 0,01м, S — ? $S = \frac{R^2}{2}\alpha = \frac{0{,}0003}{8}\pi$ $м^2$.

413. R = 0,025м, S = 0,000625$м^2$, α — ? $\alpha = \frac{2S}{R^2} = \frac{2 \cdot 0{,}000625\text{м}^2}{0{,}000625\text{м}^2} = 2$рад.

414.

Градусы	0,5	36	159	108	150	54	$\frac{450}{\pi}$	$\frac{324}{\pi}$
Радианы	$\frac{\pi}{360}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{159\pi}{180}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	2,5	1,8

415.

Угол, °	30	36	$\frac{90}{\pi}$	$\frac{720}{\pi}$	$\frac{360}{\pi}$	$\frac{180}{\pi}$
Угол, рад.	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	0,5	4	2	1

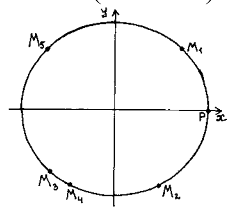
Радиус, см	2	$\frac{10}{\pi}$	10	5	5	10
Длина дуги, см	$\frac{\pi}{3}$	2	5	20	10	10
Площадь сектора, см^2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{10}{\pi}$	25	50	25	50

$\ell = \alpha R$, $S = \frac{R^2}{2}\alpha$, $S = \frac{\ell^2}{2\alpha}$.

416. 1) $4\pi - (1; 0)$; 2) $-\frac{3\pi}{2} - (0; 1)$; 3) $-6{,}5\pi - (0; -1)$;

4) $\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 5) $\frac{\pi}{3} - \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $-45° - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

417.

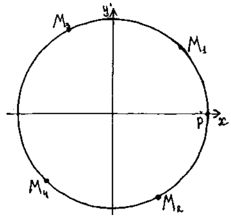


1) $\frac{\pi}{4} - M_1$; 2) $-\frac{\pi}{3} - M_2$;

3) $-\frac{3\pi}{4} - M_3$; 4) $-\frac{4\pi}{3} - M_4$

5) $-\frac{5}{4}\pi - M_5$; 6) $-225° - M_5$.

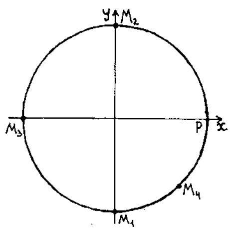
418.



1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi - M_1$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi - M_2$;

3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi - M_3$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi - M_4$.

419.



1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z - M_1$;

2) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z - M_2$;

3) $-\pi + 2\pi k, k \in Z - M_3$;

4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z - M_4$.

420. 1) 3π-(-1,0); 2) $-\frac{7\pi}{2} - (0{,}1)$; 3) $-\frac{15\pi}{2} - (0{,}1)$;

4) $5\pi - (-1{,}0)$; 5) $540° - (-1{,}0)$; 6) $810° - (-1{,}0)$.

421. 1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k - (0{,}1)$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k - (0{,}1)$;

3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k-(0,-1)$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k-(0,-1)$.

422. 1) $\frac{\pi}{2}\pm\pi-(0,-1)$; 2) $\frac{\pi}{4}\pm\pi-(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$;

3) $-\frac{3\pi}{2}+\pi k-\begin{matrix}(0,1), k=\ldots-4,-2,0,2,4\ldots\\(0,-1), k=\ldots-3,-1,1,3\ldots\end{matrix}$; 4) $-\pi+\pi k-\begin{matrix}(-1,0), k=\ldots-4,-2,0,2,4\ldots\\(1,0), k=\ldots-3,-1,1,3\ldots\end{matrix}$.

423. 1) $(1;0):+2\pi k, k\in Z$; 2) $(-1;0):-\pi+2\pi k, k\in Z$;

3) $(0;1):-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; 4). (0; -1): $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\ Z$.

424. 1) 1-I-четв.; 2) 2,75-II-четв.; 3) 3,16-III-четв.; 4) 4,95-IV-четв.

425. 1) a=9,8π, x=1,8π , k=4; 2) $a=7\frac{1}{3}\pi$, $x=1\frac{1}{3}\pi$, k=3;

3) $a=\frac{11}{2}\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi$, k=2; 4) $a=\frac{17}{3}\pi$, $x=\frac{5}{3}\pi$, k=2.

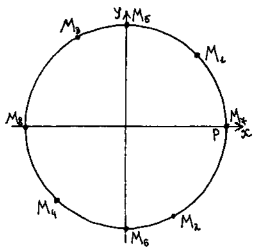
426.

1) $\frac{\pi}{4}\pm2\pi-M_1$; 2) $-\frac{\pi}{3}\pm2\pi-M_2$;

3) $\frac{2\pi}{3}\pm6\pi-M_3$; 4) $-\frac{3\pi}{4}\pm8\pi-M_4$;

5) 4,5π-M_5; 6) 5,5π-M_6;

7) –6π-M_7; 8) –7π-M_8.



427. 1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k,-(0;1)$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k,-(0;1)$;

3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k,-(0;-1)$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k,-(0;-1)$.

428. 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right):-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right):-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$;

3) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right):-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

429. 1) $\sin\alpha=1-M_1$;

2) $\sin\alpha=0-M_2 и M_2'$;

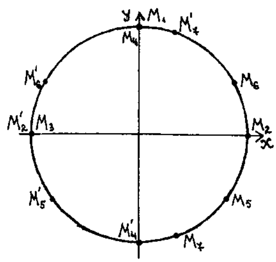
3) $\cos\alpha=-1-M_3$;

4) $\cos\alpha=0-M_4 и M_4'$;

5) $\sin\alpha=-0{,}6-M_5 и M_5'$;

6) $\sin\alpha=0{,}5-M_6 и M_6'$;

7) $\cos\alpha=\frac{1}{3},-M_7 и M_7'$.



430. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}=1+(-1)=0$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=(-1)+0=-1$;

3) $\sin\pi-\cos\pi=0-(-1)=1$; 4) $\sin 0-\cos 2\pi=0-1=-1$;

5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi = 0-1=-1$; 6) $\sin 0+\cos 2\pi=0+1=1$.

431. 1) β=3π, sinβ=0, cosβ=-1; 2) β=4π, sinβ=0, cosβ=1;

3) β=3,5π, sinβ=-1, cosβ=0; 4) $\beta=\frac{5\pi}{2}$, sinβ=1, cosβ=0;

5) β=πk, $k\in Z$, sinβ=0, $\cos\beta=(-1)^k$;

6) β=(2k+1)π, $k\in Z$, sinβ=0, cosβ=-1.

432. 1) $\sin 3\pi-\cos\frac{3\pi}{2}=0-0=0$;

2) $\cos 0-\cos 3\pi+\cos 3{,}5\pi=1-(-1)+0=2$;

3) $\sin\pi k+\cos 2\pi k=(k\in Z)=0+1=1$;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}-\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=0-1=-1$.

433. 1) $\mathrm{tg}\pi+\cos\pi=0-1=-1$; 2) $\mathrm{tg}0^\circ-\mathrm{tg}180^\circ=0-0=0$;

3) $\mathrm{tg}\pi+\sin\pi=0+0=0$; 4) $\cos\pi-\mathrm{tg}2\pi=-1-0=-1$.

434. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}$;

2) $5\sin\frac{\pi}{4}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+3-5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-10=-7$;

3) $(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}):\cos\frac{\pi}{6}=(2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}):\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{1}{2}$.

435. 1) $2\sin x=0$; $x=\pi k, k\in Z$;

2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$;

3) $\cos x-1=0$; $\cos x=1$; $x=2\pi k, k\in Z$;

4) $1-\sin x=0$; $\sin x=1$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

436. 1) 0,049 может т.к. $|0{,}049|\le 1$; 2)-0,875-может т.к. $|0{,}875|\le 1$;

3) $-\sqrt{2}$ не может, т.к. $|-\sqrt{2}|>1$; 4) $2+\sqrt{2}$ - не может, т.к. $|2+\sqrt{2}|>1$.

437. 1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha=(\alpha=\frac{\pi}{4})=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+1$;

2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=(\alpha=60^\circ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{5}{4}$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha = (\alpha = \frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{3} = (\alpha = \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

438. 1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4}$;

2) $2\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{4}$;

3) $(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3})(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}) = (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3}$;

4) $2\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$.

439. 1) $\sin x = -1:\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

2) $\cos x = -1:\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z$;

3) $\sin 3x = 0; 3x = \pi k, x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$;

4) $\cos\frac{x}{2} = 0; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \pi + 2\pi k, k \in Z$;

5) $\sin(\frac{x}{2} + 6\pi) = 1:\ \frac{x}{2} + 6\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = -11\pi + 4\pi k, k \in Z$;

6) $\cos(5x + 4\pi) = 1:\ 5x + 4\pi = 2\pi k, x = -\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in Z$.

440. Используя микрокалькулятор, проверить равенство.

441. 1) $\sin 1{,}5 \approx 1$; 2) $\cos 4{,}81 \approx 0{,}1$; 3) $\sin 38^\circ \approx 0{,}62$;

4) $\cos 45^\circ 12' \approx 0{,}7$; 5) $\sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}59$; 6) $\cos\frac{10\pi}{7} \approx -0{,}22$;

7) $\mathrm{tg}12^\circ \approx 0{,}21$; 8) $\sin\frac{19\pi}{9} \approx 0{,}34$.

442. 1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; I четв.; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; II четв.; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; III четв.;

4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; III четв.; 5) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$; II четв.; 6) α=4,8; IV четв.;

7) α=-1,31; IV четв.; 8) α=-2,7; III четв.

443. 1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; I четв.; 2) $\alpha - \pi$; III четв.; 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$; III четв.;

4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; II четв.; 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; IV четв.; 6) $\pi - \alpha$; II четв.

444. 1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; $\sin\alpha<0$, т.к. $\alpha\in$ III четв.;

2) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$; sin α<0, т.к. α∈ III четв.;

3) $\alpha = \frac{4}{3}\pi$; sin α<0, т.к. α∈ III четв.;

4) α=5,1: sin α<0, т.к. α∈ IV четв.;

5) α=-0,1π; sin α<0, т.к. α∈ IV четв.;

6) $\alpha = -470^\circ$; sin α<0, т.к. α∈ III четв.

445. 1) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $\cos\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ II четв.; 2) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; $\cos\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ III четв.

3) $\alpha = -\frac{2\pi}{5}$; $\cos\alpha > 0$, т.к. $\alpha \in$ IV четв.; 4) $\alpha = 4{,}6$; $\cos\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ III четв.

5) $\alpha = -5{,}3$; $\cos\alpha > 0$, т.к. $\alpha \in$ I четв.; 6) $\alpha = -150^\circ$; $\cos\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ III четв.

446. 1) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; $\mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ II четв.; 2) $\alpha = \frac{12\pi}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha > 0$, т.к. $\alpha \in$ I четв.;

3) $\alpha = -\frac{5\pi}{4}$; $\mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ II четв.; 4) $\alpha = 3{,}7$; $\mathrm{tg}\alpha > 0$, т.к. $\alpha \in$ III четв.;

5) $\alpha = -1{,}3$; $\mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ IV четв.; 6) $\alpha = 283^\circ$; $\mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ IV четв.

447. 1) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0, \mathrm{tg}\alpha > 0$;

2) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}; \cos\alpha > 0, \sin\alpha < 0, \mathrm{tg}\alpha < 0$;

3) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi; \sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0, \mathrm{tg}\alpha < 0$;

4) $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi; \sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0, \mathrm{tg}\alpha > 0$.

448. 1) $\alpha = 1; \sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0, \mathrm{tg}\alpha > 0$, т.к. $\alpha \in$ I четв.;

2) $\alpha = 3; \sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0, \mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ II четв.;

3) $\alpha = -3{,}4; \sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0, \mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ II четв.;

4) $\alpha = -1{,}3; \sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0, \mathrm{tg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ IV четв.

449. 1) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) > 0$; 2) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) < 0$; 3) $\cos(\alpha - \pi > 0)$;

4) $\mathrm{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) < 0$; 5) $\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) > 0$; 6) $\sin(\pi - \alpha) > 0$.

450. 1) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{8}; \sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0, \mathrm{tg}\alpha > 0, \mathrm{ctg}\alpha > 0$, т.к. $\alpha \in$ III четв.;

2) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}; \sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0, \mathrm{tg}\alpha < 0, \mathrm{ctg}\alpha < 0$, т.к. $\alpha \in$ II четв.

451. Знаки синуса и косинуса совпадают, если $\alpha \in$ I или III четверти, то есть если $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$.

Знаки синуса и косинуса различны, если $\alpha \in$ II или IV четверти, то есть если $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ и $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$.

452. 1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, т.к. $\frac{2\pi}{3}$, и $\frac{3\pi}{4} \in$ II четв. и $\sin\frac{2\pi}{3} > 0$ и $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$.

2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} < 0$, т.к. $\frac{\pi}{6} \in$ I четв. и $\cos\frac{\pi}{6} > 0$, а $\frac{2\pi}{3} \in$ II четв. и $\cos\frac{2\pi}{3} < 0$.

3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} > 0$, т.к. $\frac{\pi}{4} \in$ I четв. и $\sin\frac{\pi}{4} > 0$, а $\frac{5\pi}{4} \in$ III четв. и $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} > 0$.

453. а) sin 0,7 и sin 4; sin 0,7>0, т.к. 0,7$\in$I четв., а sin 4<0, т.к. 4$\in$III четв., значит, sin 0,7 > sin 4.

б) cos 1,3 и cos 2,3; cos 1,3 >0, т.к. 1,3$\in$I четв., а cos 2,3 <0, т.к. 2,3$\in$II четв., значит, cos 1,3 > cos 2,3.

454. 1) sin (5π+x)=1; 5π+x=$\frac{\pi}{2}$ +2πk, k$\in$Z, x=$-\frac{9\pi}{2}$ +2πk, k$\in$Z.

2) cos (x+3π)=0; x+3π=$\frac{\pi}{2}$ +πk, x=$-\frac{5\pi}{2}$ +πk, k$\in$Z.

3) cos ($\frac{5\pi}{2}$ +x)=-1; $\frac{5\pi}{2}$ + x=π+2πk, x=$-\frac{3\pi}{2}$ +2πk, k$\in$Z.

4) sin ($\frac{9\pi}{2}$ +x)=-1; $\frac{9\pi}{2}$ + x=$-\frac{\pi}{2}$ +2πk, x=-5π+2πk, k$\in$Z.

455. 1) sinα + cosα=-1,4; т.к. $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$, то sinα<0 и cosα<0, значит, α$\in$III четв.;

2) sinα – cosα=1,4; т.к. $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$, то sinα>0 и cosα<0, значит, α$\in$II четв.

456. Т.к. $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$, то синус (косинус) может принимать значения $0{,}03; \frac{2}{3}; \frac{11}{13}$, и не может принимать значения $\frac{5}{3}; -\frac{13}{11}; \sqrt{2}$.

457. 1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; не могут, т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9} \ne 1$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; могут, т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$;

3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$; не могут, т.к.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{3}{25} + \frac{23}{25} = \frac{26}{25} \ne 1$;

4) $\sin\alpha = 0{,}2$ и $\cos\alpha = 0{,}8$; не могут, т.к.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{25}+\frac{16}{25}=\frac{17}{25}\neq 1$.

458. 1) $\sin\alpha, \mathrm{tg}\alpha, \mathrm{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi; \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$;

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}, \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{3}{4}$;

2) $\cos\alpha, \mathrm{tg}\alpha, \mathrm{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}; \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{4}{25}}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$;

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\sqrt{21}}, \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

459. 1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi; \sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}, \mathrm{tg}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$,

$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{5}{12}$;

2) $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi; \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}, \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$;

3) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}; \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}, \cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{225}{64}}}=-\frac{8}{17}$,

$\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{15}{17}, \mathrm{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$;

4) $\mathrm{ctg}\alpha=-3$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi; \sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}, \sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+9}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha=\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}, \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}=-\frac{1}{3}$;

5) $\cos\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}; \sin\alpha=\sqrt{1+\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}, \mathrm{tg}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{4}{3}$;

6) $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi; \cos\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}, \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{12}$,

$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}$;

7) $\mathrm{tg}\alpha=-2{,}4$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi; \cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{144}{25}}}=-\frac{5}{13}$

$\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{13}, \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{5}{12}$;

8) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$; $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{49}{576}}} = -\frac{24}{25}$;

$\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = -\frac{7}{25}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = 3\frac{3}{7}$.

460. 1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{12}{25}} = \pm\frac{\sqrt{13}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

461. 1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$; $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{24}}{5}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — верно, значит, может.

2) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; $\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{9}{4\sqrt{7}}$;

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{9}{16} + \frac{81}{112} = \frac{144}{112} \neq 1$ — значит, не может.

462. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{40}{121}} = \frac{9}{11}$, т.к. $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{10}}{9}$.

463. 1) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha} = (\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{5}{3}$.

2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha - 1}{\mathrm{tg}\alpha + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 3\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 5\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha + 3}{3\mathrm{tg}\alpha - 5} = \frac{7}{1} = 7$.

4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha + 2}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1} = \frac{6}{3} = 2$.

464. 1) $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$;

2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{1}{8}+\frac{9}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

465. 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$, что и требовалось док-ть.

2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, что и требовалось док-ть.

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha$, что и требовалось док-ть.

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$, что и требовалось док-ть.

5) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, что и требовалось доказать.

6) $\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, что и требовалось доказать.

466. 1) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha-2\sin\alpha=\sin\alpha-2\sin\alpha=-\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=\cos\alpha-\cos\alpha=0$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$;

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}=1+\sin\alpha$.

467. 1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}=1-\frac{1}{\sin^2\alpha}=(\alpha=\frac{\pi}{4})=1-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1-2=-1$;

2) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha=(\alpha=\frac{\pi}{6})=(\sqrt{3})^2=3$;

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha=(\alpha=\frac{\pi}{3})=(\sqrt{3})^2=3$;

4) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha=1+1=2$ при любом α, в частности при $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

468. 1) $(1-\sin 2\alpha)(1+\mathrm{tg}2\alpha)=\cos^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=1$, что и требовалось док-ть.

2) $\sin 2\alpha(1+\mathrm{ctg}2\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1$, $1-\cos 2\alpha=\sin 2\alpha$, что и требовалось док-ть.

469. 1) (1 + tg2α)cos2α – 1 = $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha-1$ = 1 – 1 = 0;

2) 1 – sin2α(1 + ctg2α) = $1-\sin^2\alpha\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1-1=0$;

3) $1+\text{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$;

4) $\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha}=\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}}=\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}}=\text{tg}^2\alpha\cdot$

470. 1 (1 – cos2α)(1 + cos2α)=1 – cos2^2α= sin2^2α, что и требовалось доказать.

2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha-1}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$, что и требовалось доказать.

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, что и требовалось док-ть

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+$ $+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, что и требовалось доказать

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$

, что и требовалось доказать.

6) $\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, что и требовалось доказать.

7) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

, что и требовалось доказать.

8) $\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=\sin^2\alpha\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha\ \ \text{tg}^2\alpha$, что и требовалось доказать.

471. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=-\frac{9}{50}+\frac{1}{2}=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$

472. Если cosα–sinα=0,2, то $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)^3+3\cos\alpha\sin\alpha(\cos\alpha-$ $-\sin\alpha)=(\cos\alpha-\sin\alpha)^3+3(-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+\frac{1}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha))(\cos\alpha-\sin\alpha)=$

$=\frac{1}{125}+3\cdot\left(-\frac{1}{50}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{125}+\frac{36}{125}=\frac{37}{125}$.

473. $\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha=(\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha)^2-2\,\text{tg}\alpha\,\text{ctg}\alpha=(\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha)^2-2=7$.

474. 1) $2\sin x+\sin^2x+\cos^2x=1$; $2\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$.

2) $2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2 = 0$; $2(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 + \cos^2 x = 0$; $\cos^2 x = 0$;
$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
3) $3\cos^2 x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2 x$; $3(\cos^2 x + \sin^2 x) - 3 = 2\sin x$; $\sin x = 0$;
$x = \pi k$, $k \in Z$.
4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2 x$; $\cos^2 x + \sin^2 x + 1 = 2\sin x$; $\sin x = 1$,
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

475. 1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{7}{4}$;

2) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}}{1+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1+\frac{1}{3}}{1+3} = \dfrac{1}{3}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$
$= -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{-3\sqrt{3}+1}{2}$;

4) $\cos(-\pi) + \mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} - \mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$
$= -1 - 0 - 1 - 1 = -3$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{3-\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{3-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7{,}5\mathrm{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi = -2\sin\frac{\pi}{6} + 3 - 7{,}5\mathrm{tg}\pi + \frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi =$
$= -1 + 3 - 0 + 0 = 2$.

476. 1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha = -\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha + \sin\alpha = -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$;
2) $\cos\alpha - \mathrm{ctg}\alpha(-\sin\alpha) = \cos\alpha + \mathrm{ctg}\alpha\sin\alpha = \cos\alpha + \cos\alpha = 2\cos\alpha$;
3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \dfrac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}$;
4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 + 1 = 2$.

477. 1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{2-\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = 4$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} +$
$+4\cos\frac{3\pi}{2} = -\frac{3}{2} + 2 + 0 = \frac{1}{2}$.

478. 1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha\right)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}=\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha}=$

$=\frac{1-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

479. 1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\mathrm{ctg}^2(-\alpha))=\cos\alpha\sin(-\alpha)\cdot\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$

$=-\mathrm{ctg}\alpha=\mathrm{ctg}(-\alpha)$, что и требовалось доказать.

2) $\frac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos(-\alpha)}\cdot\frac{(-\sin(2\pi-\alpha))}{1-\cos^2\alpha}=$

$=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$, что и требовалось доказать.

480. 1) $\sin(-x)=1$; $-\sin x=1$; $\sin x=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

2) $\cos(-2x)=0$; $\cos2x=0$; $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

3) $\cos(-2x)=1$; $\cos2x=1$; $2x=2\pi k$, $x=\pi k$, $k\in Z$.

4) $\sin(-2x)=0$; $-\sin 2x=0$; $\sin 2x=0$; $2x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2x$; $\cos^2x+\sin^2x-2=\sin x$; $\sin x=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$; $\cos^2x+\cos x=\cos x$; $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

481. 1) $\cos135^\circ=\cos\left(90^\circ+45^\circ\right)=\cos90^\circ\cdot\cos45^\circ-\sin90^\circ\cdot\sin45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\cos120^\circ=\cos\left(90^\circ+30^\circ\right)=\cos90^\circ\cdot\cos30^\circ-\sin90^\circ\cdot\sin30^\circ=-\frac{1}{2}$.

3) $\cos150^\circ=\cos\left(90^\circ+60^\circ\right)=\cos90^\circ\cdot\cos60^\circ-\sin90^\circ\cdot\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $\cos240^\circ=\cos\left(180^\circ+60^\circ\right)=\cos180^\circ\cdot\cos60^\circ-\sin180^\circ\cdot\sin60^\circ=-\frac{1}{2}$.

482. 1) $\cos57^\circ30'\cos27^\circ30'+\sin57^\circ30'\sin27^\circ30'=\cos(57^\circ30'-27^\circ30')=$

$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30' = \cos(19^\circ 30' - 25^\circ 30') =$

$= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9} + \frac{11\pi}{9}\right) = \cos 2\pi = 1$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\pi = -1$.

483. 1) $\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

$\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}$;

2) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$, если $\cos\alpha == -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3} = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

484. 1) $\cos 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha = \cos(3\alpha + \alpha) = \cos 4\alpha$;

2) $\cos 5\beta\cos 2\beta + \sin 5\beta\sin 2\beta = \cos(5\beta - 2\beta) = \cos 3\beta$;

3) $\cos(\frac{\pi}{7} + \alpha)\cos(\frac{5\pi}{14} - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{7} + \alpha)\sin(\frac{5\pi}{14} - \alpha) =$

$= \cos(\frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{14} + \alpha - \alpha) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

4) $\cos(\frac{7\pi}{5} + \alpha)\cos(\frac{2\pi}{5} + \alpha) + \sin(\frac{7\pi}{5} + \alpha)\sin(\frac{2\pi}{5} + \alpha) = \cos(\frac{7\pi}{5} + \alpha - \frac{2\pi}{5} - \alpha) =$

$= \cos\pi = -1$.

485. 1) $\sin 73^\circ\cos 17^\circ + \cos 73^\circ\sin 17^\circ = \sin(73^\circ + 17^\circ) = \sin 90^\circ = 1$;

2) $\sin 73^\circ\cos 13^\circ - \cos 73^\circ\sin 13^\circ = \sin(73^\circ - 13^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

486. 1) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}), \cos\alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} : \sin\alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$;

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$;

2) $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha), \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi : \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{2}{9}}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$;

$$\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=-\frac{\sqrt{14}-2}{6}.$$

487. 1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \cos\alpha\sin\beta$.

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha-\beta) = -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = -\sin\alpha\cos\beta$.

3) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)-\sin(\alpha-\beta)=(\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha)\times$

$\times(\sin\frac{\pi}{2}\cos\beta-\cos\frac{\pi}{2}\sin\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$.

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\beta)=\sin(\alpha+\beta)-(\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha)\times$

$\times\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha-\sin\beta\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta$.

488. Если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ и $\sin\beta=\frac{8}{17}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то

$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$; $\qquad\cos\beta=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{84}{85}$;

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{36}{85}$.

489. Если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\sin\beta=-\frac{12}{13}, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, то

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$; $\qquad\cos\beta=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\frac{5}{13}$;

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{63}{65}$.

490. Вычислить $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, если

$\sin\alpha=\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\cos\beta=\frac{8}{17}, \frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$;

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$; $\qquad\sin\beta=-\sqrt{1-\frac{64}{289}}=-\frac{15}{17}$;

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}+\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}}{-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}+\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{77}{36}=2\frac{5}{36}.$$

491. 1) $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\sin\beta$

2) $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha)\times$

$\times(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\cos^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)+\sin\alpha\sin 2\alpha=\cos\alpha\cos 2\alpha-$

$-\sin\alpha\sin 2\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha=\cos\alpha\cos 2\alpha$;

4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha=\cos 2\alpha-(\cos\alpha\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 3\alpha)+$

$+\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 2\alpha+\sin\alpha\sin 3\alpha=\sin\alpha\sin 3\alpha$.

492. 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cos\alpha}}=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}$

, что и треб. док-ть.

2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+1}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}=\frac{\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta+1}{\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta-1}$, что и треб. док-ть

3) $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$, что т. д.

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{ctg}\beta-\text{tg}\alpha$, что и т. д.

5) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))=\frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=$

$=\cos\alpha\cos\beta$, ч.т.д.

6) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))=\frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=$

$=\sin\alpha\sin\beta$, ч.т.д.

493. 1) $\frac{\text{tg}29^\circ+\text{tg}31^\circ}{1-\text{tg}29^\circ\text{tg}31^\circ}=\text{tg}(29^\circ+31^\circ)=\text{tg}60^\circ=\sqrt{3}$;

2) $\frac{\text{tg}\frac{7\pi}{16}-\text{tg}\frac{3\pi}{16}}{1+\text{tg}\frac{7\pi}{16}\text{tg}\frac{3\pi}{16}}=\text{tg}\left(\frac{7\pi}{16}-\frac{3\pi}{16}\right)=\text{tg}\frac{\pi}{4}=1$;

3) $\frac{1+\text{tg}10^\circ\text{tg}55^\circ}{\text{tg}55^\circ\text{tg}10^\circ}=\frac{1}{\text{tg}(55^\circ-10^\circ)}=\frac{1}{\text{tg}45^\circ}=1$;

4) $\frac{1-\text{tg}13^\circ\text{tg}17^\circ}{\text{tg}17^\circ+\text{tg}13^\circ}=\frac{1}{\text{tg}(17^\circ+13^\circ)}=\frac{1}{\text{tg}30^\circ}=\sqrt{3}$.

494. 1) tg(α + β), если $\text{tg}\alpha=-\frac{3}{4},\text{tg}\beta=2{,}4$;

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}}=\frac{\frac{33}{20}}{\frac{56}{20}}=\frac{33}{56};$$

2) tg(α – β), если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3},\operatorname{ctg}\beta=-1;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4},\operatorname{tg}\beta=-1;$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{1}{7}.$$

495. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

496. 1) sinαcos(2α)+sin(2α)cosα=sin(α+2α)=sin(3α).
2) sin(5β)cos(3β)-sin(3β)cos(5β)=sin(5β-3β)=sin(2β).

497. 1) cos(6x) cos(5x) + sin(6x) sin(5x) = – 1; cos(6x – 5x) = – 1; cos x=– 1; x = π + 2πk, k∈ Z.

2) sin(3x) cos(5x) – sin(5x) cos(3x) = – 1; sin(– 2x) = – 1; sin(2x) = 1 :

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, k∈ Z.

3) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$; $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)-\cos x=1$;

sin x = 1; sin x = – 1; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈ Z.

4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\cos\frac{x}{2}=1$; $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=1$:

$\cos\frac{x}{2}=1:\frac{x}{2}=2\pi k, x=4\pi k$, k∈ Z.

498. 1) $\sin 48^\circ=2\sin 24^\circ\cos 24^\circ$; 2) $\cos 164^\circ=\cos^2 82^\circ-\sin^2 82^\circ$;

3) $\operatorname{tg}92^\circ=\frac{2\operatorname{tg}46^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 46^\circ}$; 4) $\sin\frac{4\pi}{3}=2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}$;

5) $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos^2\frac{5\pi}{6}-\sin^2\frac{5\pi}{6}$.

499. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

5) $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;

6) $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

500. 1) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; 2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{2\text{tg}15^\circ}{1-\text{tg}^2 15^\circ} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ - 2\cos 75^\circ \sin 75^\circ = 1 - \sin 150^\circ =$
$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

501. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\frac{2\text{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\text{tg}^2\frac{\pi}{8}} = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.

502. 1) $2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; 2) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{6\text{tg}75^\circ}{1-\text{tg}^2 75^\circ} = 3\text{tg}150^\circ = -\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; 4) $\frac{\text{tg}^2 22^\circ 30' - 1}{\text{tg}22^\circ 30'} = -\frac{2}{\text{tg}45^\circ} = -2$.

503. 1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$;

2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \sin\alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}; \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$.

504. 1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}; \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{17}{25}$

2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}; \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

505. Если $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}: \text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

506. 1) $2\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ = 2\cos 40^\circ \cos(90^\circ - 40^\circ) = 2\cos 40^\circ \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$;

2) $2\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ = 2\sin 25^\circ \sin(90^\circ - 25^\circ) = 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ = \sin 50^\circ$;

3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= \sin 2\alpha + 1 - \sin 2\alpha = 1$;

4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$.

507. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 1$;

2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \dfrac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

508. 1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$, что и треб. док-ть.

2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \sin\alpha$, что и треб. док-ть.

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha$, что и треб. док-ть.

4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, что и треб. док-ть.

509. 1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\quad \sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$;

2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$; $\quad \sin 2\alpha = -(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 1 = -\dfrac{1}{9} + 1 = \dfrac{8}{9}$.

510. 1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} =$
$= \operatorname{ctg}\alpha - 1$, что и треб. док-ть.

2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(1 - \sin\alpha)} = -\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$, ч.т.д.

3) $\operatorname{tg}\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \operatorname{tg}\alpha(1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\cos^2\alpha \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= \sin 2\alpha$, ч.т.д.

4) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2\sin^2\alpha + \sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} \cdot$
$\cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, ч.т.д.

5) $\dfrac{(1 - 2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{(-\cos 2\alpha)(-\cos 2\alpha)}{\sin^2 2\alpha} = \dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha$, ч. т. д.

6) $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, что и т. д.

7) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$, ч.т.д.

511. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)}=\dfrac{2\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}{\sin 2\alpha}$;

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)}=\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}-\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha};$$

$\dfrac{2\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ левая и правая части совпадают, значит, тождество верно.

512. 1) $\sin 2x-2\cos x=0$; $2\cos x(\sin x-1)=0$; $\cos x=0$ или $\sin x=1$;

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$ или $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ (входит в 1-ю серию корней)

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

2) $\cos 2x+\sin^2 x=1$; $\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x=1$; $\cos^2 x=1$; $\cos x=1$ или $\cos x=-1$: $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$ или $x=2\pi k$, $k\in Z$, обобщая $x=2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=2\pi k$, $k\in Z$.

3) $4\cos x=\sin 2x$; $2\cos x(2-\sin x)=0$; $\cos x=0$ или $\sin x=2$;

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, а во втором случае решения нет. Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

4) $\sin^2 x=-\cos 2x$; $\sin^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x$; $\cos x=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

5) $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=0$; $\sin x+1=0$; $\sin x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

6) $\cos^2\dfrac{x}{2}=\sin^2\dfrac{x}{2}$; $\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=0$; $\cos x=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

513. 1) $\sin^2 15^\circ=\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}$; 2) $\cos^2\dfrac{1}{4}=\dfrac{1+\cos\frac{1}{2}}{2}$;

3) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)}{2}$; 4) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}{2}$;

514. 1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1=1+\cos\frac{\pi}{4}-1=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $1+2\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1-\cos 30^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1$.

515. 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}=\frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}}=2$.

516. 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}=3$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}}=\frac{1}{3}$.

517. 1) $\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$;

2) $\cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}==\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$;

3) $\operatorname{tg}22^\circ30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

4) $\operatorname{ctg}22^\circ30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{1-\cos 45^\circ}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

518. 1) $$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{1}{2};$$

2) $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

3) $$\frac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha;$$

4) $$\frac{1+\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\cos2\alpha\sin2\alpha}=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha;$$

5) $$\frac{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha;$$

6) $$(1-\cos2)\operatorname{ctg}\alpha=2\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha.$$

519. 1) $$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+\sin\alpha,$$ ч.т.д.

2) $$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1-\sin\alpha,$$ ч.т.д.

3) $$\frac{3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha}{3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha}=\frac{2\cos^2 2\alpha-4\cos2\alpha+2}{2\cos^2 2\alpha+4\cos2\alpha+2}=\left(\frac{\cos2\alpha-1}{\cos2\alpha+1}\right)^2=\operatorname{tg}^4\alpha,$$ ч.т.д.

4) $$\frac{1-\sin2\alpha+\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha-\cos2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha,$$ ч.т.д.

520. 1) $$\frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha}=1,$$ ч.т.д.

2) $$\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$ ч.т.д.

3) $$\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha},$$ ч.т.д.

4) $$\frac{1+\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right),$$ ч.т.д.

521. Т.к. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ и, следовательно $\sin\frac{\alpha}{2}>0, \cos\frac{\alpha}{2}>0,$ $\sin\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}$, значит, $\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}$.

522. $\frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}4\alpha-\mathrm{tg}2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}2\alpha-\cos4\alpha\cos2\alpha}{\sin4\alpha\cos2\alpha-\sin2\alpha\cos4\alpha}=\frac{\sin2\alpha\cdot\cos4\alpha\cdot\cos2\alpha}{\sin2\alpha\cos2\alpha}=\cos4\alpha$.

523. 1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}; 2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0; 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)=0;$

$\sin\frac{x}{2}=0$ или $\sin\frac{x}{2}=1; \frac{x}{2}=\pi k$, x = 2πk, k∈ Z или $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

x = π + 4πk, k∈ Z. Ответ: x = 2πk, x = π + 4πk, k∈ Z.

2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}; 2\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=0; 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)=0;$

$\cos\frac{x}{2}=0$ или $\cos\frac{x}{2}=1; \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, x = π + 2πk, k∈ Z или

$\frac{x}{2}=2\pi k$ x = 4πk, k∈ Z. Ответ: x = π + 2πk, x = 4πk, k∈ Z.

3) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right);\quad 2\cos^2\frac{x}{4}-2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)=0;$

$2\sin^2\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)=0; 2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)-1\right)=0;$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\sin\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha+\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}=$

или $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)=1; \frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}=\pi k$, x = 6π + 4πk, k∈ Z

или $\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, x = 8π + 8πk, k∈ Z.

Ответ: x = 6π + 4πk, x = 8π + 8πk, k∈ Z.

4) 1 + cos8x = 2cos4x; $2\cos^2 4x$ – 2cos4x = 0; 2cos4x(cos4x – 1) = 0;

cos4x = 0 или cos4x = 1, $4x=\frac{\pi}{2}+\pi k, x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, k∈ Z или

4x = 2πk, $x=\frac{\pi}{2}k$, k∈ Z. Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, $x=\frac{\pi}{2}k$, k∈ Z.

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin2x=1$; sin x cos x – cos x = 0; cos x(sin x – 1) = 0; cos x = 0 или sin x = 1, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, k∈ Z или $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈ Z (вход. в 1 – ю с.к.)

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$; cos2x – cos2x sin2x = 0; cos2x(1 – sin2x) = 0;

cos2x = 0 или sin2x = 1; $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$ или

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$ (входит в первую серию корней)

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

524. 1) $\cos 75^\circ=\cos(90^\circ-\alpha);\alpha=15^\circ$; 2) $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+\alpha);\alpha=60^\circ$;

3) $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-\alpha);\alpha=30^\circ$; 4) $\cos 310^\circ=\cos(270^\circ+\alpha);\alpha=40^\circ$;

5) $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin(\pi+\alpha);\alpha=\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha);\alpha=\frac{3\pi}{10}$;

7) $\cos\frac{7}{4}\pi=\cos(\frac{3}{2}\pi+\alpha);\alpha=\frac{\pi}{4}$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{4}{6}\pi=\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha);\alpha=\frac{\pi}{6}$.

525. 1) $\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin 135^\circ=\sin(90^\circ+45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}135^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ+45^\circ)=-\operatorname{tg}45^\circ=-1$;

4) $\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$;

5) $\cos 225^\circ=\cos(180^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$;

7) $\operatorname{ctg}240^\circ=\operatorname{ctg}(180^\circ+60^\circ)=\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

8) $\sin 315^\circ=\sin(270^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

526. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(2\pi\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(-2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(-2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$;

7) $\mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

8) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\mathrm{ctg}\left(-2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=1$.

527. 1) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha}=1$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha-\sin\alpha-\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}=-1$.

528. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}=\dfrac{-\cos\alpha}{-\mathrm{ctg}\alpha}\cdot\dfrac{-\mathrm{ctg}\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

529. 1) $\cos 750^\circ=\cos(720^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin 1140^\circ=\sin(1080^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\mathrm{tg}405^\circ=\mathrm{tg}(360^\circ+45^\circ)=\mathrm{tg}45^\circ=1$;

4) $\cos 840^\circ=\cos(720^\circ+120^\circ)=\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$;

5) $\sin\frac{47}{6}\pi=\sin(8\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

6) $\mathrm{tg}\frac{25}{4}\pi=\mathrm{tg}(6\pi+\frac{\pi}{4})=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$; 7) $\mathrm{ctg}\frac{27}{4}\pi=\mathrm{ctg}(7\pi-\frac{\pi}{4})=-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=-1$;

8) $\cos\frac{21}{4}\pi=\cos(5\pi+\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

530. 1) $\cos 630^\circ-\sin 1470^\circ-\mathrm{ctg}1125^\circ=\cos(720^\circ-90^\circ)-\sin(1440^\circ+30^\circ)-$
$-\mathrm{ctg}(1080^\circ+45^\circ)=\cos 90^\circ-\sin 30^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ=0-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$;

2) $\mathrm{tg}1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ = 0 - \sin(540^\circ - 45^\circ) + \cos(900^\circ + 45^\circ) =$
$= 0 - \sin 45^\circ - \cos 45^\circ = -\sqrt{2}$;

3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ) = 3\cos(3600^\circ + 60^\circ) +$
$+ \sin(-1440^\circ - 120^\circ) + \cos(-360^\circ - 90^\circ) = 3\cos 60^\circ - \sin 120^\circ + \cos 90^\circ =$
$= \frac{3}{2} - \sin(90^\circ + 30^\circ) + 0 = \frac{3}{2} - \cos 30^\circ = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \mathrm{tg}1035^\circ - \mathrm{ctg}(-1500^\circ) = \cos(4500^\circ - 45^\circ) -$
$- \cos(-900^\circ - 45^\circ) + \mathrm{tg}(1080^\circ - 45^\circ) - \mathrm{ctg}(-1440^\circ - 60^\circ) =$
$= -\cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \mathrm{tg}45^\circ - \mathrm{ctg}60^\circ = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

531. 1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \mathrm{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) -$
$- \mathrm{ctg}\left(-6\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$;

2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\frac{10\pi}{3} = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-8\pi - \frac{\pi}{2}\right) -$
$- \mathrm{tg}\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{31\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{7\pi}{4} = 0 - 2\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$
$= -2\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -1 + 1 = 0$;

4) $\cos(-9) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \mathrm{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -1 + 2\sin\left(-8\pi - \frac{\pi}{6}\right) -$
$- \mathrm{ctg}\left(-5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -1 - 2\sin\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = -1 - 1 + 1 = -1$.

532. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0$; ч.т.д.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) =$
$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 0$; ч.т.д.

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{tg}\left(\pi+\alpha\right)}\cdot\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{-\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}\cdot\dfrac{-\mathrm{tg}\alpha}{-\mathrm{ctg}\alpha}=-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha=-\sin\alpha$; ч.т.д.

533. 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-\pi+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-2\pi+\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$; ч.т.д.

534. Пусть $\alpha_1\alpha_2,\alpha_3$ — углы треугольника, тогда $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180^\circ$ и $\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=\sin(180^\circ-\alpha_3)=\sin\alpha_3$, ч.т.д.

535. 1) $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=1; \sin x=1; x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1; -\cos x=1; \cos x=-1; x=\pi+2\pi k, k\in Z$.

3) $\cos\left(x-\pi\right)=0; \cos\left(\pi-x\right)=0; -\cos x=0; \cos x=0; x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

4) $\sin(x-\frac{\pi}{2})=1; -\sin(\frac{\pi}{2}-x)=1; -\cos x=1; \cos x=-1; x=\pi+2\pi k, k\in Z$.

5) $\sin\left(2x+3\pi\right)\sin(3x+\frac{3\pi}{2})-\sin 3x\cos 2x=-1;$

$\sin 2x\cos 3x-\sin 3x\cos 2x=0; \sin\left(-x\right)=0; \sin x=0; x=\pi k, k\in Z$.

6) $\sin(5x-\frac{3\pi}{2})\cos\left(2x+4\pi\right)-\sin\left(5x+\pi\right)\sin 2x=0;$

$\cos 5x\cos 2x+\sin 5x\sin 2x=0 : \cos 3x=0 : 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k, x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k, k\in Z$.

536. Пусть β – любой угол. Тогда β = πk + α, где k-какое-то целое число, а $0\le\alpha<\pi$. И по формулам приведения sinβ = sinα, если k-четное и sinβ = =–sinα, если k-нечетное, cosβ = cosα, если k-четное и cosβ=–cosα, если k — нечетное, а tgβ = tgα и cgβ = ctgα. Тогда $\alpha=\frac{\pi}{2}\pm\gamma$, где $0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$. И по формулам приведения : $\sin\alpha=\cos\gamma, \cos\alpha=\pm\sin\gamma$,

$\mathrm{tg}\alpha=\pm\mathrm{ctg}\gamma, \mathrm{ctg}\alpha=\pm\mathrm{tg}\gamma$. Далее: $\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,

$$\cos\gamma=\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2},\ \mathrm{tg}\gamma=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}},\ \mathrm{ctg}\gamma=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

т.е. зная значения sin, cos, tg, ctg для угла $\frac{\gamma}{2}$, где $0\le\frac{\gamma}{2}\le\frac{\pi}{4}$, мы можем вычислить значения sin, cos, tg, ctg для угла β. Ч.т.д.

537. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\sin\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha+\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}=$

$=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=-2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2}=$

$=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta=\sqrt{2}\sin\beta$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\times$

$\times\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\sin\quad\frac{\pi}{4}\cos\alpha=\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$;

4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)\times$

$\times\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\cdot 2\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}=\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

538. 1) $\cos105^\circ+\cos75^\circ=2\cos90^\circ\cos15^\circ=0$;

2) $\sin105^\circ-\sin75^\circ=2\sin15^\circ\cos90^\circ=0$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}=-2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin105^\circ+\sin165^\circ=2\sin135^\circ\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

539. 1) $1+2\sin\alpha=2(\frac{1}{2}+\sin\alpha)=2(\sin30^\circ+\sin\alpha)=4\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}$;

2) $1-2\sin\alpha=2(\frac{1}{2}-\sin\alpha)=2(\sin 30^\circ-\sin\alpha)=4\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}$;

3) $1+2\cos\alpha=2(\frac{1}{2}+\cos\alpha)=2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)=4\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{60^\circ-\alpha}{2}$;

4) $1+\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha=2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$.

540. 1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3}=\frac{2\sin 2\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 2\alpha\cos(-\alpha)}=\mathrm{tg}2\alpha$, ч.т.д.

2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos(-\alpha)}{-2\sin 3\alpha\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha$, ч.т.д.

541. 1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\frac{4\cos 2\alpha\cos(-\alpha)}{\sin 2\alpha+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\frac{4\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin 3\alpha\cos(-\alpha)}=$

$=\frac{4\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin 3\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos(-\alpha)}=\frac{ctg 2\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=\frac{1+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=$

$=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin(-\alpha)\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha-\cos 2\alpha)}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=\frac{2\sin\alpha(2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1)}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=2\sin\alpha$.

542. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$

$=\cos 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, ч.т.д.

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\alpha+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha=$

$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$, ч.т.д.

3) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha\cos 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 4\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\cos 4\alpha)}{\cos\alpha+\cos 4\alpha}=2\sin\alpha$, ч.т.д.

543. 1) $\cos 22^o+\cos 24^o+\cos 26^o+\cos 28^o=2\cos 1^o\cos 23^o+2\cos 1^o\cos 27^o=$
$=2\cos 1^o(\cos 23^o+\cos 27^o)=4\cos 1^o\cos 2^o\cos 25^o$;

2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\right)=$

$=2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}=2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$.

544. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, ч.т.д.

1) $\mathrm{tg}267^{o}+\mathrm{tg}93^{o}=\frac{\sin 360^{o}}{\cos 267^{o}\cos 93^{o}}=0$

2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}+\mathrm{tg}\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\pi}{\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{7\pi}{12}}=0$.

545. 1) 1 – cosα + sinα = cos0 – cosα + sinα =

$=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) 1 – 2cosα + cos2α = cos0 + cos2α – 2cosα = 2cosαcos(– α) – 2cosα = = 2cosα(cosα – 1);

3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\mathrm{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)-\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha}=(1-\cos\alpha)(1-\mathrm{tg}\alpha)$;

4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

546. 1) cosα, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{3}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$;

2) tgα, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\sqrt{\frac{9}{5}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}}$;

3) sinα, если $\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

4) cosα, если $\mathrm{ctg}\alpha=\sqrt{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

$\cos\alpha=\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha=\mathrm{ctg}\alpha\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

547. 1) $2\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2=$

$=2\sin\alpha\sin\alpha+3\cos^2\alpha-2=2\cos^2\alpha+3\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$;

2) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha(-\sin\alpha)(-\mathrm{ctg}\alpha)}{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$.

548. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}=\sin\left(8\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\,\frac{25\pi}{4}=\mathrm{tg}\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$;

3) $\mathrm{ctg}\frac{27\pi}{4}=\mathrm{ctg}\left(7\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=-1$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}=\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

549. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}=\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$;

2) $\sin\frac{25\pi}{4}-\mathrm{tg}\,\frac{10\pi}{3}=\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $3\cos 3660^{\circ}+\sin(-1560^{\circ})=3\cos(360^{\circ}\cdot 10+60^{\circ})+\sin(-180^{\circ}\cdot 9+60^{\circ})=$

$=3\cos 60^{\circ}-\sin 60^{\circ}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(-945^{\circ}\right)+\mathrm{tg}1035^{\circ}=\cos\left(-180^{\circ}\cdot 5-45^{\circ}\right)+\mathrm{tg}\left(360^{\circ}\cdot 3-45^{\circ}\right)=$

$=-\cos 45^{\circ}-\mathrm{tg}45^{\circ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$.

550. 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha=\left(\frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}=$

$=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\cos\alpha$;

2) $\mathrm{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=2\sin\alpha.$

551. 1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}=$

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$;

2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}}=$

$=\frac{\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}=1-\mathrm{ctg}\alpha$

552. 1) $1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta=1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, ч.т.д.

2) $\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, ч.т.д.

553. 1) $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha=\sin 6\alpha\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-1\right)=$

$=\sin 6\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+6\alpha\right)=-\sin^2 6\alpha=\left(\alpha=\frac{5\pi}{24}\right)=-\sin^2\frac{5\pi}{4}=$

$=-\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$;

2) $\cos 3\alpha+2\cos(\pi-3\alpha)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)=\cos 3\alpha\left(1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)\right)=$

$=\cos 3\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)=\cos 3\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}\sin 6\alpha=\left(\alpha=\frac{5\pi}{36}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$.

554. 1) $\frac{\sqrt{3}\left(\cos 75^\circ-\cos 15^\circ\right)}{1-2\sin^2 15^\circ}=\frac{-2\sqrt{2}\sin 45^\circ\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$;

2) $\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1+2\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

555. 1) $\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=2\text{tg}^2\alpha$, ч.т.д.

2) $\text{tg}^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{(1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha))}{(1+\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha))}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha(1-\sin 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(1+\sin 2\alpha)}=\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}$,

ч.т.д.

556. 1) $\sin 35^\circ+\sin 24^\circ=2\sin 30^\circ\cos 5^\circ=\cos 5^\circ$;

2) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=-2\sin(-18^\circ)\sin 30^\circ=-\sin(-18^\circ)=\sin 18^\circ$.

557. $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}=$

$=\frac{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\cdot\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos(\alpha-\beta)\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos(\alpha-\beta)}=-4\sin 2\alpha$.

558. 1) $\frac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}=\frac{-\sin 2\alpha+2\cos\frac{7\pi}{6}\cos 2\alpha-2\sin\frac{7\pi}{6}\sin 2\alpha}{2\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha+2\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha}=$

$$=\frac{-\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha+\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha}=\frac{-\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-\sqrt{3}\mathrm{ctg}2\alpha$$, ч.т.д.

2) $$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{2\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha+2\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+2\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-2\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha+\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{3}}$$, ч.т.д.

559. 1) $$\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\cos\alpha-1)}{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}=\mathrm{ctg}\alpha$$, ч.т.д.

2) $$\frac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}(2\cos\frac{\alpha}{2}+1)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}(2\cos\frac{\alpha}{2}+1)}{\cos\frac{\alpha}{2}(2\cos\frac{\alpha}{2}+1)}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$, ч.т.д.

560. $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ и $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}}=2$

561. $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$;

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{11}{6}.$$

562. $\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}}=-\frac{4}{3}$;

$$\frac{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}=\frac{\frac{4\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{5\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}{\frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}-\frac{3\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}=\frac{4+5\mathrm{ctg}2\alpha}{2-3\mathrm{ctg}2\alpha}=\frac{4-\frac{20}{3}}{2+\frac{12}{3}}=\frac{-\frac{2}{3}}{6}=-\frac{4}{9}.$$

563. 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+$ $+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$ $=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\times$ $\times\cos(\alpha+\beta)$, ч.т.д.

2) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha+1)=$ $=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$, ч.т.д.

564. $$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=$$

$$\frac{\sin 3\alpha(2\cos 2\alpha+1)}{\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha+1)}=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=\mathrm{tg}3\alpha$$, ч.т.д.

565. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}{\mathrm{tg}^3\alpha+3}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{\mathrm{tg}^3\alpha+3}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)}{\mathrm{tg}^3\alpha+3}=$

$=\dfrac{2\cdot 5}{8+3}=\dfrac{10}{11}$.

566. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=$

$=\sin^2\alpha+(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha)(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha)=$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\dfrac{\pi}{3}\cos^2\alpha-\sin^2\dfrac{\pi}{3}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha+\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha=\dfrac{1}{4}$, ч.т.д.

567. 1) $\dfrac{1}{8}\left(5+3\cos 4\alpha\right)=\dfrac{1}{8}(6\cos^2 2\alpha+2)=\dfrac{1}{8}(6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2+2)=$

$=\dfrac{1}{8}(6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-24\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2)=\dfrac{1}{8}(8-24\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=$

$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-$

$-\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\sin^2\alpha\cos^4\alpha+$

$+\sin^4\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, ч.т.д.

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha=$

$=((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha=(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2-$

$-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha=1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\sin^4\alpha\cos^{4\alpha}=1-\sin^2\alpha+\dfrac{1}{8}\sin^4 2\alpha=$

$=1-\dfrac{1}{2}\left(1-\cos 4\alpha\right)+\dfrac{1}{32}\left(1-\cos 4\alpha\right)^2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 4\alpha+$

$+\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{16}\cos 4\alpha+\dfrac{1}{32}\cos^2 4\alpha=\dfrac{1}{32}\left(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17\right)$, ч.т.д.

Глава VI. Тригонометрические уравнения

568. 1) $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$; 2) arccos1 = 0;

3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$;

5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

569. 1) $2\arccos 0+3\arccos 1=2\cdot\frac{\pi}{2}+3\cdot 0=\pi$;

2) $3\arccos(-1)-2\arccos 0=3\cdot\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$;

3) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=12\cdot\frac{\pi}{6}-3\cdot\frac{2\pi}{3}=0$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-6\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\cdot\frac{3\pi}{4}-6\cdot\frac{2\pi}{3}=3\pi-4\pi=-\pi$.

570. 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}=\arccos\frac{1}{2}$, т.е. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}<\arccos\frac{1}{2}$;

2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)<\pi=\arccos(-1)$, т.е. $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)<\arccos(-1)$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}>\frac{2\pi}{3}=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, т.е. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

571. 1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$;

2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$;

3) $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi k$; $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$.

572. 1) $\cos x=\frac{3}{4}$; $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k, k\in Z$;

2) $\cos x = -0{,}3$; $x = \pm(\pi - \arccos 0{,}3) + 2\pi k,\ k\in Z$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

573. 1) $\cos 4x = 1$; $4x = \pm\arccos 1 + 2\pi k$; $4x = 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

2) $\cos 2x = -1$; $2x = \pm(\pi - \arccos 1) + 2\pi k$; $2x = \pm\pi + 2\pi k$;

$x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$; $\frac{x}{4} = \pm(-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}) + 2\pi k$; $\frac{x}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;

$x = \pm 3\pi + 8\pi k$, $k \in Z$.

4) $2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3}$; $\frac{x}{3} = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$; $\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$;

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z$.

5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $x + \frac{\pi}{3} = \pm\arccos 0 + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos 0 + 2\pi k$; $2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$;

$x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z$.

574. 1) $\cos x\cos 3x = \sin 3x\sin x$; $\cos x\cos 3x - \sin 3x\sin x = 0$;

$\cos 4x = 0$; $4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k \in Z$.

2) $\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

575. 1) $\arccos\left(\sqrt{6} - 3\right)$ — имеет, т.к. $\left|\sqrt{6} - 3\right| < 1$;

2) $\arccos\left(\sqrt{7} - 2\right)$ — имеет, т.к. $\left|\sqrt{7} - 2\right| < 1$;

3) $\arccos\left(2 - \sqrt{10}\right)$ — не имеет, т.к. $\left|2 - \sqrt{10}\right| > 1$;

4) $\arccos\left(1 - \sqrt{5}\right)$ — не имеет, т.к. $\left|1 - \sqrt{5}\right| > 1$;

5) $\mathrm{tg}(3\arccos\frac{1}{2})$ — имеет, т.к. $3\arccos\frac{1}{2} = \frac{3\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{2}$.

576. 1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$;

$\cos 4x = 1$; $4x = 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

2) $4\cos^2 x = 3$; $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$, т.е. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

3) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$; $\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{2}$;

$\cos 2x=\frac{1}{2}$; $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

4) $2\sqrt{2}\cos^2 x=1+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\left(2\cos^2 x-1\right)=1$;

$\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in Z$;

5) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$;

$\cos = -1$ и $\cos x=\frac{3}{2}$; $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; во втором случае решений нет.

6) $(1 - \cos x)(4 + 3\cos 2x) = 0$; $\cos x = 1$ и $\cos x=-\frac{4}{3}$;

$x = 2\pi k$, $k \in Z$; во втором случае решений нет.

7) $(1 + 2\cos x)(1 - 3\cos x) = 0$; $\cos x=-\frac{1}{2}$ и $\cos x=\frac{1}{3}$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ и $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k, k\in Z$.

8) $(1 - 2\cos x)(2 + 3\cos x) = 0$ $\cos x=\frac{1}{2}$ и $\cos x=-\frac{2}{3}$;

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ и $x=\pm(\pi-\arccos\frac{2}{3})+2\pi k, k\in Z$.

577. $\cos 2x=-\frac{1}{2}$; $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$;

среди них отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат:

$x_1=-\frac{\pi}{3}, x_2=\frac{\pi}{3}, x_3=\frac{2\pi}{3}, x_4=\frac{4\pi}{3}, x_5=\frac{5\pi}{3}, x_6=\frac{7\pi}{3}$.

578. $\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$,

среди них с $|x|<\frac{\pi}{4}$; $x_1=-\frac{\pi}{16}, x_2=\frac{\pi}{16}$.

579. 1) $\arccos(2x-3)=\frac{\pi}{3}$; $2x-3=\cos\frac{\pi}{3}$; $2x-3=\frac{1}{2}$; $x=\frac{7}{4}$;

2) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$; $\frac{x+1}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}$; $x+1=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; $x=-\frac{5}{2}$.

580. arccos a = α, такое, что $\cos\alpha = a$, и $0 \le \alpha \le \pi$, по определнию.

Тогда cos(arccos a) = cosα = a, ч.т.д.

1) cos(arccos0,2) = 0,2; 2) $\cos(\arccos(-\frac{2}{3})) = -\frac{2}{3}$;

3) $\cos(\pi + \arccos\frac{3}{4}) = -\cos(\arccos\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}$;

4) $\sin(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}) = \cos(\arccos\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$;

5) $\sin(\arccos\frac{4}{5}) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos\frac{4}{5})} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, т.к.

$\arccos\frac{4}{5} \in [0;\pi]$ и sin$\alpha \geq 0$ для всех $\alpha \in$ [0; π];

6) $tg(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}})} - 1} = \sqrt{\frac{10}{9} - 1} = \frac{1}{3}$, т.к.

$\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} > 0$ **и tgα > 0, для всех** $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$**.**

581. arccos(cosα) = β, 0 ≤ β ≤ π, что cos β = cosα, так что α = β и arccos(cosα) = α, ч.т.д.

1) $5\arccos(\cos\frac{\pi}{10})=\frac{\pi}{2}$; 2) 3arccos(cos2) = 6;

3) $\arccos(\cos\frac{8\pi}{7})=\arccos(-\cos\frac{\pi}{7})=\pi-\arccos(\cos\frac{\pi}{7})=\frac{6\pi}{7}$;

4) arccos(cos4) = arccos(– cos(4 – π)) = π – arccos(cos(4 – π)) = 2π – 4.

582. 1) $\sin(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})=\sin(\arccos\frac{1}{3})\cdot\cos(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})+$

$+\cos(\arccos\frac{1}{3})\cdot\sin(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})=\sqrt{1-\frac{1}{9}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=1$.

2) $\cos(\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{3}{5})=\cos(\arccos\frac{4}{5})\cdot\cos(\arccos\frac{3}{5})+$

$+\sin(\arccos\frac{4}{5})\cdot\sin(\arccos\frac{3}{5})=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+\sqrt{1-\frac{16}{25}}\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$.

583. 1) cos(2arccosa) = 2cos^2(arccosa) – 1 = 2a^2 – 1;

2) $\cos(\frac{3\pi}{2}+\arcsin a)=\sin\left(\arcsin a\right)=a$.

584. $2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}}=\arccos a$;

$2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}}=2\arccos\sqrt{\frac{1+\cos(\arccos a)}{2}}=2\arccos(\cos(\frac{1}{2}\arccos a))=$

$=2\cdot\frac{1}{2}\arccos a=\arccos a$, ч.т.д.

585. 1) cosx = 0,35; x = ±arccos0,35 + 2πk, k ∈ Z,
с помощью микрокалькулятора находим arccos0,35;
2) cosx = – 0,27; x = ±(π – arccos0,27) + 2πk, k ∈ Z,
с помощью микрокалькулятора находим arccos0,27.

586. 1) arcsin0 = 0; 2) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

587. 1) arcsin1 – arcsin(– 1) = 2arcsin1 = π4

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$; 3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$.

588. 1) $\arcsin\frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$;

$\arcsin\frac{1}{4} > 0 > -\arcsin\frac{1}{4} = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$, т.е. $\arcsin\frac{1}{4} > \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$;

2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$;

$\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) > -\frac{\pi}{2} = \arcsin(-1)$, т.е. $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) > \arcsin(-1)$.

589. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi k$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

590. 1) $\sin x = \frac{2}{7}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{7} + \pi k, k \in Z$;

2) $\sin x = -\frac{1}{4}$; $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi k, k \in Z$.

591. 1) $\sin 3x = 1$; $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$;

2) $\sin 2x = -1$; $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$; $\frac{x}{3} = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi k$; $x = (-1)^{k+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in Z$;

4) $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$; $\frac{x}{2} = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

5) $\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = 0$; $x + \frac{3\pi}{4} = 0 + \pi k$; $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

6) $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 0$; $2x + \frac{\pi}{2} = \pi k$; $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

592. 1) $\sin 4x\cos 2x = \cos 4x\sin 2x$;

$\sin 4x\cos 2x - \cos 4x\sin 2x = 0$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi k$; $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

2) $\cos 2x\sin 3x = \sin 2x\cos 3x$;

$\cos 2x\sin 3x - \sin 2x\cos 3x = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi k, k \in Z$.

593. 1) $\arcsin(\sqrt{5} - 2)$ — имеет, т.к. $\left|\sqrt{5} - 2\right| \le 1$;

2) $\arcsin(\sqrt{5} - 3)$ — имеет, т.к. $\left|\sqrt{5} - 3\right| \le 1$;

3) $\arcsin(3 - \sqrt{17})$ $\arcsin(3 - \sqrt{17})$ — не имеет, т.к. $3 - \sqrt{17} < -1$;

4) arcsin(2 – $\sqrt{10}$) — не имеет, т.к. 2 – $\sqrt{10}$ < – 1;

5) $tg(6\arcsin\frac{1}{2})$ — имеет, т.к. $tg(6\arcsin\frac{1}{2}) = tg(6\cdot\frac{\pi}{6}) = tg\pi = 0$;

6) $tg(2src\sin\frac{\sqrt{2}}{2})$ — не имеет, т.к. $tg(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}) = tg(2\cdot\frac{\pi}{4}) = tg\frac{\pi}{2}$ — не существует.

594. 1) 1 – 4sinxcosx = 0; 1 – 2sin2x = 0; $\sin 2x = \frac{1}{2}$;

$2x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

2) $\sqrt{3} + 4\sin x\cos x = 0$; $\sqrt{3} + 2\sin 2x = 0$;

$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

3) $1 + 6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0$; $1 + 3\sin\frac{x}{2} = 0$; $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$;

$\frac{x}{2} = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi k$; $x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

4) $1 - 8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} = 0$; $1 - 4\sin\frac{2x}{3} = 0$;

$\sin\frac{2x}{3} = (-1)^k\arcsin\frac{1}{4} + \pi k$; $x = (-1)^k\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\pi k, k \in Z$.

595. 1) 1 + cos5xsin4x = cos4xsin5x;

cos4xsin5x – cos5xsin4x = 1; sinx = 1; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

2) 1 – sinxcos2x = cos2xsinx;

sinxcos2x – sin2xcosx = 1; sin3x = 1; $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$.

596. 1) (4sinx – 3)(2sinx + 1) = 0; $\sin x = \frac{3}{4}$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$x = (-1)^k\arcsin\frac{3}{4} + \pi k$ или $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

2) (4sin3x – 1)(2sinx + 3) = 0; $\sin 3x = \frac{1}{4}$ или $\sin x = -\frac{3}{2}$;

$3x = (-1)^k\arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z$, а во втором случае решений нет, значит,

$x = (-1)^k\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

597. $\sin 2x = \frac{1}{2}$; $2x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

из них промежутку [0; 2π] принадлежат: $x_1=\frac{\pi}{12}, x_2=\frac{5\pi}{12}, x_3=\frac{13\pi}{12}, x_4=\frac{17\pi}{12}$.

598. $\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \log_\pi(x-4\pi)<1\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{x}{2}=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z\\ x-4\pi<\pi\\ x-4\pi>0\end{cases}$; $\begin{cases}x=(-1)^k\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\\ x<5\pi\\ x>4\pi\end{cases}$.

Решением системы является $x=\frac{14\pi}{3}$.

599. Пусть arcsina — α, тогда $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и sinα = a. Следовательно, sin(arcsina) = sinα = a, ч.т.д.

1) $\sin(\arcsin\frac{1}{7})=\frac{1}{7}$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=-\frac{1}{5}$;

3) $\sin(\pi+\arcsin\frac{3}{4})=-\sin(\arcsin\frac{3}{4})=-\frac{3}{4}$;

4) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3})=-\sin(\arcsin\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}$;

5) $\cos(\arcsin\frac{4}{5})=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{4}{5})}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$;

6) $\mathrm{tg}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}})=\frac{(\sin\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}})}{\cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}})}=\frac{1}{\sqrt{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{1}{3}$.

600. Пусть arcsin(sinα)=β, тогда sin α =sinβ и $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, т.е. α=β. Значит, arcsin(sinα) = α, ч.т.д.

1) $7\arcsin(\sin\frac{\pi}{7})=7\cdot\frac{\pi}{7}=\pi$; 2) $4\arcsin(\sin\frac{1}{2})=4\cdot\frac{1}{2}=2$;

3) $\arcsin(\sin\frac{6\pi}{7})=\arcsin(\sin\frac{\pi}{7})=\frac{\pi}{7}$;

4) arcsin(sin5) = arcsin(sin(5 – 2π) = 5 – 2π.

601. 1) $\cos(\arcsin\frac{3}{5})=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{3}{5})}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$;

2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

4) $\cos(\arcsin\frac{1}{4})=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{1}{4})}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

602. 1) $\sin(\arccos\frac{2}{3})=\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{2}{3})}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$;

2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

603. 1) $\sin(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})=\sin(\arcsin\frac{1}{3})\cdot\cos(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})+$

$+\sin(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})\cdot\cos(\arcsin\frac{1}{3})=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}+$

$+\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{2})}\cdot\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{1}{3})}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$;

2) $\cos(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5})=\cos(\arcsin\frac{3}{5})\cdot\cos(\arccos\frac{4}{5})-\sin(\arcsin\frac{3}{5})\cdot$

$\cdot\sin(\arccos\frac{4}{5})=\frac{4}{5}\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{3}{5})}\ -\frac{3}{5}\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{4}{5})}=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$.

604. 1) $\arcsin(\frac{x}{2}-3)=\frac{\pi}{6}$; $\begin{cases}-1\le\frac{x}{2}-3\le1\\ \frac{x}{2}-3=\sin\frac{\pi}{6}\end{cases}$; $\begin{cases}2\le\frac{x}{2}\le4\\ \frac{x}{2}=3+\frac{1}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}4\le x\le8\\ x=7\end{cases}$. Ответ: x = 7.

2) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$;

$\begin{cases}-1\le3-2x\le1\\ 3-2x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$; $\begin{cases}-4\le-2x\le-2\\ 2x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}1\le x\le2\\ x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$. Ответ: $x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$.

605. Т.к. $0\le a\le1$, то $\arcsin a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и 2arcsina=[0; π], и $\arccos(1-2a^2)\in[0;\pi]$;

$\cos(2\arcsin a) = 1 - 2\sin^2(\arcsin a) = 1 - 2a^2 = \cos(\arccos(1 - 2a^2))$, т.е. $2\arcsin a = \arccos(1 - 2a^2)$, ч.т.д.

606. 1) sinx = 0,65 $\quad x = (-1)^k\arcsin0{,}65 + \pi k$, $k \in Z$, с помощью микрокалькулятора находим arcsin0,65.

2) sinx = – 0,31 $\quad x = (-1)^{k+1}\arcsin0{,}31 + \pi k$, $k\in Z$, с помощью микрокалькулятора находим arcsin0,31.

607. 1) arctg0 = 0; 2) $\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; 3) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$; 4) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

608. 1) $6\mathrm{arctg}\sqrt{3}-4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=6\cdot\frac{\pi}{3}-4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi+\pi=3\pi$;

2) $2\mathrm{arctg}1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$;

3) $5\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)-3\cdot\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{5\pi}{3}-\frac{9\pi}{4}=-\frac{47\pi}{12}$.

609. 1) arctg(– 1) и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}>-\frac{\pi}{3}=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

т.е. $\operatorname{arctg}(-1)>\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$; $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}=\arccos\frac{1}{2}$, т.е. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\arccos\frac{1}{2}$;

3) arctg(– 3) и arctg2; arctg(– 3) < 0 < arctg2, т.е. arctg(– 3) < arctg2;

4) arctg(– 5) и arctg0; arctg(– 5) < 0 < arctg0, т.е. arctg(– 5) < arctg0.

610. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

2) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$; $x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$;

3) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; $x=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi k$; $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$;

4) tgx = – 1; x = atctg(– 1) + πk; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;

5) tgx = 4; x = arctg4 + πk, k ∈ Z;

6) tgx = – 5; x = arctg(– 5) + πk; x = – arctg5 + πk, k ∈ Z.

611. 1) tg3x = 0; 3x = πk; $x=\frac{\pi}{3}k, k\in Z$;

2) $1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-1$; $\frac{x}{3}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=-\frac{3\pi}{4}+3\pi k, k\in Z$;

3) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{6}=0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{6}=-\sqrt{3}$; $\frac{x}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi k$; x = – 2π + 6πk, k ∈ Z.

612. 1) $(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})=0$;

tgx = 1 или $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$;

2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})=0$;

$\operatorname{tg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$;

3) (tgx – 2)(2cosx – 1) = 0;

tgx = 2 или $\cos x=\frac{1}{2}$; x = arctg2 + πk или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;

4) (tgx – 4,5)(1 + 2sinx) = 0;

tgx = 4,5 или $\sin x=-\frac{1}{2}$; x = arctg4,5 + πk или $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

5) $(\operatorname{tg}x+4)(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1)=0$;

$\operatorname{tg}x = -4$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$; $\quad x = -\operatorname{arctg}4 + \pi k$ или $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, т.е.

$x = -\operatorname{arctg}4 + \pi k$ или $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$;

Последняя серия корней не подходит, т.к. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+2\pi k)$ — не существует, т.е. $x = -\operatorname{arctg}4 + \pi k$, $k\in Z$;

6) $(\operatorname{tg}\frac{x}{6}+1)(\operatorname{tg}x-1)=0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{6}=-1$ или $\operatorname{tg}x = 1$;

$\frac{x}{6}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in Z$;

$x=\frac{-3\pi}{2}+6\pi$ или $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in Z$. Первая серия корней не подходит, т.к. $\operatorname{tg}(-\frac{3\pi}{2}+6\pi k)$ — не существует, значит, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in Z$.

613. $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad x=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

Наименьший положительный корень $x_1=\frac{\pi}{6}$, а наибольший отрицательный $x_2=-\frac{5\pi}{6}$.

614. 1) $\operatorname{arctg}(5x-1)=\frac{\pi}{4}$; $\quad 5x-1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $\quad 5x = 2$; $\quad x=\frac{2}{5}$;

2) $\operatorname{arctg}(3-5x)=-\frac{\pi}{3}$; $\quad 3-5x=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\quad 5x=3+\sqrt{3}$; $\quad x=\frac{3+\sqrt{3}}{5}$.

615. Пусть $\operatorname{arctg}a=\alpha$, тогда $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha=a$, т.е. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=\operatorname{tg}\alpha=a$, ч.т.д.

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2{,}1) = 2{,}1$; $\quad$ 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3)) = -0{,}3$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg}7) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}7) = -7$; 4) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}6)=-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}6)=-6$.

616. Пусть $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \beta$, тогда $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$, значит, $\alpha = \beta$, т.е. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$, ч.т.д.

1) $3\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7})=3\cdot\frac{\pi}{7}=\frac{3\pi}{7}$; $\quad$ 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=-\frac{\pi}{8}$;

2) $4\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}0{,}5) = 4\cdot 0{,}5 = 2$; $\quad$ 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}13) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(13-4\pi))=13-4\pi$.

617. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{3}$;

2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4})=\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}(2\sin\frac{5\pi}{6})=\operatorname{arctg}(2\cdot\frac{1}{2})=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arctg}(2\sin\frac{\pi}{3})=\operatorname{arctg}(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

618. Т.к. $\operatorname{arctg}a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos(\operatorname{arctg}a)=\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}a)}}=\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$,

ч.т.д.

619. 1) $\operatorname{tg}x = 9$; $x = \operatorname{arctg}9 + \pi k$, $k \in Z$, с помощью микрокалькулятора находим arctg9;

2) $\operatorname{tg}x = -7,8$; $x = -\operatorname{arctg}7,8 + \pi k$, $k \in Z$, с помощью микрокалькулятора находим arctg7,8.

620. 1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$; $\sin x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ или

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; обобщая, получаем $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

2) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$; $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$ или

$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; обобщая, получаем $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

3) $2\sin^2x + \sin x - 1 = 0$; $\sin x = a$; $2a^2 + a - 1 = 0$; $a_1 = -1$, $a_2=\frac{1}{2}$;

$\sin x = -1$ или $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

4) $2\cos^2x + \cos x - 6 = 0$; $\cos x = a$; $2a^2 + a - 6 = 0$; $a_1 = -4$, $a_2=\frac{3}{2}$;

$\cos x = -4$ или $\cos x=\frac{3}{2}$; уравнения решений не имеют.

621. 1) $2\cos^2x - \sin x + 1 = 0$; $2(1 - \sin^2x) - \sin x + 1 = 0$;

$2\sin^2x + \sin x - 3 = 0$; $\sin x = a$; $2a^2 + a - 3 = 0$; $a=-\frac{3}{2}$, $a = 1$; $\sin x=-\frac{3}{2}$,

$\sin x = 1$ или $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; первое уравнение решений не имеет.

2) $3\cos^2x - \sin x - 1 = 0$; $3(1 - \sin^2x) - \sin x - 1 = 0$;

$3\sin^2x + \sin x - 2 = 0$; $\sin x = a$; $3a^2 + a - 2 = 0$; $a_1 = -1$, $a_2=\frac{2}{3}$;

$\sin x = -1$ или $\sin x=\frac{2}{3}$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ или $x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{3}+\pi k, k\in Z$.

3) $4\sin^2x - \cos x - 1 = 0$; $4(1 - \cos2x) - \cos x - 1 = 0$;

$4\cos^2x - \cos x - 3 = 0$; $\cos x = a$; $4a^2 + a - 3 = 0$; $a_1 = -1,\ a_2 = \frac{3}{4}$;

$\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{3}{4}$; $x = \pi + 2\pi k$ или $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

4) $2\sin^2x + 3\cos x = 0$; $2(1 - \cos^2x) + 3\cos x = 0$; $2\cos^2x + 3\cos x - 2 = 0$;

$\cos x = a$; $2a^2 - 3a - 2 = 0$; $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a^2 = 2$; $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\cos x = 2$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; второе уравнение корней не имеет.

622. 1) $tg^2x = 2$ $tgx = \pm 2$ $x = \pm arctg2 + \pi k, k \in Z$;

2) $tgx = ctgx$ $tg^2x = 1$ $tgx = \pm 1$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3)$tg^2x - 3tgx - 4 = 0$ $tgx = a$ $a^2 - 3a - 4 = 0$ $a_1 = -1$, $a^2 = 4$;

$tgx = -1$ или $tgx = 4$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = arctg4 + \pi k, k \in Z$.

4) $tg^2x - tgx + 1 = 0$ $tgx = a$ $a^2 - a + 1 = 0$ $D < 0$, решений нет.

623. 1) $1 + 7\cos^2x = 3\sin2x$;
$\sin^2x + 8\cos^2x - 6\sin x\cos x = 0 \mid : \cos^2x$; $tg^2x - 6tgx + 8 = 0$;
$tgx = a$; $a^2 - 6a + 8 = 0$; $a_1 = 2, a_2 = 4$; $tgx = 2$ или $tgx = 4$;
$x = arctg2 + \pi k$ или $x = arctg4 + \pi k, k \in Z$.
2) $\cos2x + \cos^2x + sins\cos x = 0$;
$2\cos^2x - \sin^2x + \sin x\cos x = 0 \mid : \cos^2x$; $tg^2x - tgx - 2 = 0$;
$tgx = a$; $a^2 - a - 2 = 0$; $a^1 = 2, a^2 = -1$; $tgx = -1$ или $tgx = 2$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = arcrtg2 + \pi k, k \in Z$.

3) $3 + \sin2x = 4\sin^2x$;
$\sin^2x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2x = 0 \mid : \cos^2x$; $tg^2x - 2tgx - 3 = 0$;
$tgx = a$; $a^2 - 2a - 3 = 0$; $a_1 = -1, a_2 = 3$; $tgx = -1$ или $tgx = 3$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = arctg3 + \pi k, k \in Z$.

4) $3\cos2x + \sin^2x + 5\sin x\cos x = 0$;
$3\cos^2x - 2\sin^2x + 5\sin x\cos x = 0 \mid : \cos^2x$; $2tg^2x - 5tgx - 3 = 0$;

$tgx = a$; $2a^2 - 5a - 3 = 0$; $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 3$; $tgx = -\frac{1}{2}$ или $tgx = 3$;

$x = -arctg\frac{1}{2} + \pi k$ или $x = arctg3 + \pi k, k \in Z$.

624. 1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$ $|:\cos x$; $\sqrt{3} + tgx = 0$; $tgx = -\sqrt{3}$;

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

2) $\cos x = \sin x$ $|:\cos x$; $tgx = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) sinx = 2cosx |:cosx; tgx = 2; x = arctg2 + πk, k ∈ Z;

4) 2sinx + cosx = 0 |:cosx; 2tgx + 1 = 0; $\mathrm{tgx} = -\frac{1}{2}$;

$x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$.

625. 1) sinx – cosx = 1 |: $\sqrt{2}$; $\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

2) sinx + cosx = 1 |: $\sqrt{2}$; $\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$ |:2; $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1$;

$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = 1$; $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$;

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

4) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ |: $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = 1$;

$\cos\frac{\pi}{4}\sin 3x + \cos 3x \sin\frac{\pi}{4} = 1$; $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = 1$;

$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$.

626. 1) cosx = cos3x; cos3x – cosx = 0; – 2sin2xsinx = 0; sin2x = 0 или sinx = 0; 2x = πk или x = πk, k ∈ Z; $x = \frac{\pi}{2}k$ или x = πk (входит в серию корней $x = \frac{\pi}{2}k$), k ∈ Z, т.е. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

2) sin5x = sinx; sin5x – sinx = 0; 2sin2xcos3x = 0; sin2x = 0 или cos3x = 0; 2x = πk или $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$;

3). $\sin 2x = \cos 3x$; $\cos 3x - \sin 2x = 0$; $\sin(\frac{\pi}{2} + 3x) - \sin 2x = 0$;

$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}\right)=0$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0$ или $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}\right)=0$;

$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=\pi k$ или $\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in z$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ или $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in z$;

4). $\sin x+\cos 3x=0;\ \cos 3x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0$;

$2\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(-\frac{\pi}{4}+2x)=0;\ \cos(\frac{\pi}{4}+x)=0$ или

$\cos(2x-\frac{\pi}{4})=0;\ \frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$,

$k\in z;\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in z$.

627. 1) cos3x – cos5x = sin4x; – 2sin4xsin(– x) = sin4x; sin4x(1–2sinx)=0;

sin4x = 0 или $\sin x=\frac{1}{2}$; 4x = πk или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$;

$x=\frac{\pi}{4}k$ или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$;

2) sin7x – sinx = cos4x; 2sin3xcos4x = cos4x; cos4x(2sin3x – 1) = 0;

cos4x = 0 или $\sin 3x=\frac{1}{2}$; $4x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $3x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$;

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ или $x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k,k\in Z$;

3) cosx + cos3x = 4cos2x; 2cos2xcos(– x) = 4cos2x; cos2x(4 – 2cosx) = 0;

cos2x = 0 или cosx = 2; $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$, во втором случае решений нет, т.е. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,k\in Z$;

4) $\sin^2x-\cos^2x=\cos 4x$; $-\cos 2x=2\cos^2 2x-1$; $2\cos^2 2x+\cos 2x-1=0$;

cos2x = a; $2a^2+a-1=0$; $a_1=-1$, $a_2=\frac{1}{2}$; cos2x = – 1 или $\cos 2x=\frac{1}{2}$;

2x = π + 2πk или $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,k\in Z$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$.

628. 1) $(\text{tg}x-\sqrt{3})(2\sin\frac{x}{12}+1)=0$; $\text{tg}x=\sqrt{3}$ или $\sin\frac{x}{12}=-\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ или $\frac{x}{12}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$;

$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ или $x=(-1)^{k+1}2\pi+12\pi k,k\in Z$;

2) $(1-\sqrt{2}\cos\frac{x}{4})(1+\sqrt{3}tgx)=0$; $\cos\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\text{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\frac{x}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

$x = \pm\pi + 8\pi k, k \in Z$ или $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

3) $(2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1)(2tgx + 1) = 0$; $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ или $tgx = -\frac{1}{2}$;

$x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ или $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k, \ k \in Z$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi k$ или $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k, \ k \in Z$;

4) $(1 + \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}))(tgx - 3) = 0$; $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $tgx = 3$;

$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = \operatorname{arctg}3 + \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\pi + 2\pi k$ или $x = \operatorname{arctg}3 + \pi k, k \in Z$

первая серия корней не подходит, т.к. $tg(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ — не существует, т.е. $x = -\pi + 2\pi k$ или $x = \operatorname{arctg}3 + \pi k, k \in Z$

629. 1) $\sqrt{3}\sin x\cos x = \sin^2 x$; $\sin x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0$;

$\sin x = 0$ или $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$; $\sin x = 0$ или $\sqrt{3} - tgx = 0$;

$\sin x = 0$ или $tgx = \sqrt{3}$; $x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

2) $2\sin x\cos x = \cos x$; $\cos x(2\sin x - 1) = 0$;

$\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; $2\sin 2x\cos 2x + \sin^2 2x = 0$;

$\sin 2x(2\cos 2x + \sin 2x) = 0$; $\sin 2x = 0$ или $2\cos 2x + \sin 2x = 0$;

$\sin 2x = 0$ или $2 + tgx = 0$; $\sin 2x = 0$ или $tg2x = -2$;

$2x = \pi k$ или $2x = -\operatorname{arctg}2 + \pi k, k \in Z$;

$x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2 + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

4) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$; $2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

$2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$; $\cos x = 0$ или $\sin x + \cos x = 0$;

$\cos x = 0$ или $tgx + 1 = 0$; $\cos x = 0$ или $tgx = -1$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

630. 1) $2\sin^2 x = 1 + \frac{1}{3}\sin 4x$; $1 - \cos 2x = 1 + \frac{2}{3}\sin 2x\cos 2x$;

$\cos 2x(\frac{2}{3}\sin 2x+1)=0$; $\cos 2x = 0$ или $\sin 2x=-\frac{3}{2}$;

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, во втором случае решений нет $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

2) $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$; $1 + \cos 4x - 1 = \sin 4x$ |:$\cos 4x$;

$1 = \mathrm{tg} 4x$; $4x=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k, k\in Z$;

3) $2\cos^2 2x + 3\cos^2 x = 2$; $2\cos^2 x+\frac{3}{2}(1+\cos 2x)=2$;

$4\cos^2 2x + 3\cos 2x - 1 = 0$; $\cos 2x = a$;

$4a^2 + 3a - 1 = 0$; $a_1 = -1$, $a_2=\frac{1}{4}$; $\cos 2x = -1$ или $\cos 2x=\frac{1}{4}$;

$2x = \pi + 2\pi k$ или $2x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k, k\in Z$, т.е.

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi k, k\in Z$;

4) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$; $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \cos x$;

$2\sin x\cos x = \cos x$; $\cos x(2\sin x - 1) = 0$; $\cos x = 0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

631. 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;
$2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$;
$2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin 2x = 0$;
$(\sin x + \cos x)(2\sin x + 2\cos x - 3) = 0$;

$\sin x + \cos x = 0$ или $\sin x+\cos x=\frac{3}{2}$; $\mathrm{tg} x + 1 = 0$ или $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2\sqrt{2}}$;

$\mathrm{tg} x = -1$, во втором случае решений нет $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

2) $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;
$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x + 2 = 3(\sin x + \cos x)$;
$(\sin x + \cos x)^2 + 2 = 3(\sin x + \cos x)$;
$\sin x + \cos x = a$; $a^2 - 3a + 2 = 0$; $a = 1$, $a = 2$;
$\cos x + \sin x = 1$ или $\cos x + \sin x = 2$;

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$; $x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, \ k\in Z$;

во втором случае решений нет, т.е. $x=(-1)\ \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

3) $\sin 2x + 4(\sin x + \cos x) + 4 = 0$;
$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x + 4(\sin x + \cos x) + 3 = 0$;
$(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin x + \cos x) + 3 = 0$;

sinx + cosx = a; $a^2 + 4a + 3 = 0$; a = – 1, a = – 3;

sinx + cosx = – 1 или sinx + cosx = – 3;

$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$; $x+\frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, а во втором случае решений нет, т.е. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

4) sin2x + 5(cosx + sinx + 1) = 0;

$\sin^2x + \cos^2x$ + sinxcosx + 5(sinx + cosx) + 4 = 0;

$(\sin x + \cos x)^2$ + 5(sinx + cosx) + 4 = 0;

sinx + cosx = a; $a^2 + 5a + 4 = 0$; $a_1 = -1$, $a_2 = -4$;

sinx + cosx = – 1 или sinx + cosx = – 4;

$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$; $x+\frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, а во втором случае решений нет, т.е. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

632. 1) $1-\cos(\pi - x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right) = 0$;

1 + cosx + cosx = 0; $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;

2) $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = (\sin x+\cos x)^2$; $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) = (\sin x+\cos x)^2$;;

(cosx + sinx)(1 – (sinx + cosx)) = 0; sinx + cosx = 0 или sinx + cosx = 1;

tgx + 1 = 0 или $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; tgx = – 1 или $x+\frac{\pi}{4} = (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;

$x = -\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x = (-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

633. 1) 8sinxcosxcos2x = 1; 4sin2xcos2x = 1;

2sin4x = 1; $\sin 4x = \frac{1}{2}$; $4x = (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k, k\in Z$;

2) $1 + \cos^2x = \sin^4x$; $(1 - \sin^4x) + \cos^2x = 0$;

$(1 - \sin^2x)(1 + \sin^2x) + \cos^2x = 0$; $\cos^2x(1 + \sin^2x) + \cos^2x = 0$;

$\cos^2x(2 + \sin^2x) = 0$; cosx = 0; $x = \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

634. 1) $2\cos^2x + 3\sin4x + 4\sin^22x = 0$ $|:\cos^22x$;

$4tg^22x + 6tg2x + 2 = 0$; tg2x = a; $2a^2 + 3a + 1 = 0$; $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$;

tg2x = – 1 или $tg2x = -\frac{1}{2}$; $2x = -\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $2x = -arctg\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$;

$x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$ или $x = -\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

2) $1 - \sin x\cos x + 2\cos^2x = 0$;

$\sin^2x - \sin x\cos x + 3\cos^2x = 0$ $|:\cos^2x$; $tg^2x - tgx + 3 = 0$ tgx = a;

$a^2 - a + 3 = 0$; D < 0 — решений нет

3) $2\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^3 2x = 1$; $1 - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos^3 2x = 1$;

$\cos 2x(\frac{1}{4}\cos^2 x - 1) = 0$; cos2x = 0 или $\cos^2 x = 4$; $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$, а

во втором случае решений нет, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

4) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x$;
$\sin^2 2x - \sin^2 3x = 4\sin x$; $(\sin 2x - \sin 3x)(\sin 3x + \sin 2x) = 4\sin x$;
$-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} \cdot 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(4 + 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{5x}{2}) = 0$;
sin(4 + sin5x) = 0 sinx = 0 или sin5x = – 4;
$x = \pi k$, $k \in Z$, а второе уравнение решений не имеет, т.е. $x = \pi k$, $k \in Z$.
635. 1) cosxcos2x = sinxsin2x; $\cos x\cos 2x = 2\sin^2 x\cos x$;
$\cos x(\cos 2x - 2\sin^2 x) = 0$; $\cos x(1 - 4\sin^2 x) = 0$;

cosx = 0 или $\sin x = \pm\frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

2) sin2xcosx = cos2xsinx;
$2\cos^2 x\sin x = \cos 2x\sin x$; $\sin x(\cos 2x - 2\cos^2 x) = 0$;
sinx = 0, т.к. $\cos 2x - 2\cos^2 x = 1$, т.е. $x = \pi k$, $k \in Z$;
3) sin3x = sin2xcosx; sin2xcosx + cos2xsinx = sin2xcosx;
sinxcos2x = 0; sinx = 0 или cos2x = 0;

$x = \pi k$ или $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, т.е. $x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

4) cos5xcosx = cos4x; cos5xcosx = cos5xcosx + sin5xsinx;
sin5xsinx = 0; sin5x = 0 или sinx = 0 $5x = \pi k$ или $x = \pi k$, $k \in Z$;

$x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z$ (первая серия корней входит во вторую), т.е.

$x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z$.

636. 1) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$ $|:\cos^2 x$;

$4tg^2 x - 5tgx - 6 = 0$; tgx = a; $4a^2 - 5a - 6 = 0$; $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = 2$;

$tgx = -\frac{3}{4}$ или tgx = 2; $x = -arctg\frac{3}{4} + \pi k$ или $x = arctg2 + \pi k$, $k \in Z$;

2) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ $|:\cos^2 x$;

$3tg^2 x - 7tgx + 2 = 0$; tgx = a; $3a^2 - 7a + 2 = 0$; $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 2$;

$tgx = \frac{1}{3}$ или tgx = 2; $x = arctg\frac{1}{3} + \pi k$ или $x = arctg2 + \pi k$, $k \in Z$;

3) $1 - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;
$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$ $|:\cos^2 x$; $tg^2 x - 4tgx + 5 = 0$;

$tgx = a$; $a^2 - 4a + 5 = 0$; $D < 0$ — решений нет;

4) $1 + \sin^2x = 2\sin x\cos x$;

$2\sin^2x - 2\sin x\cos x + \cos^2x = 0\ |:\cos^2x$; $2tg^2x - 2tgx + 1 = 0$;

$tgx = a$; $2a^2 - 2a + 1 = 0$ $D < 0$ — решений нет.

637. 1) $4\sin3x + \sin5x - 2\sin x\cos2x = 0$;

$4\sin3x + \sin5x + \sin x - \sin3x = 0$; $3\sin3x + 2\sin3x\cos2x = 0$;

$\sin3x(3 + 2\cos2x) = 0$; $\sin3x = 0$ или $\cos2x = -\frac{3}{2}$;

$3x = \pi k$, $k \in Z$, во втором случае решений нет, т.е. $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$;

2) $6\cos2x\sin x + 7\sin2x = 0$;

$6\cos2x\sin x + 14\sin x\cos x = 0$; $2\sin x(3\cos2x + 7\cos x) = 0$;

$\sin x = 0$ или $6\cos2x + 7\cos x - 3 = 0$; $\cos x = a$;

$\sin x = 0$ или $6a^2 + 7a - 3 = 0$; $a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$;

$\sin x = 0$ или $\cos2x = -\frac{3}{2}$ или $\cos2x = \frac{1}{3}$;

$x = \pi k$ или $2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$, а во втором случае решений нет,

т.е. $x = \pi k$ или $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

638. 1) $\sin^2x + \sin^22x = \sin^23x$;

$(\sin x - \sin3x)(\sin x + \sin3x) + \sin2x \cdot 2\sin x\cos x = 0$;

$-2\sin x\cos2x \cdot 2\sin2x\cos x + \sin2x \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 0$;

$2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin2x(1 - 2\cos2x) = 0$; $\sin^22x(1 - 2\cos2x) = 0$;

$\sin2x = 0$ или $\cos2x = \frac{1}{2}$; $2x = \pi k$ или $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

$x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

2) $\sin x(1 - \cos x)^2 + \cos x(1 - \sin x)^2 = 2$;

$\sin x + \cos x + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x = 2$;

$(\sin x + \cos x) + \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2} \cdot (\sin x + \cos x) = 2(\sin x + \cos x)^2$;

$\sin x + \cos x = t$; $\frac{t}{2}(2 + (t^2 - 1) - 4t) = 0$; $\frac{t}{2}(t^2 - 4t + 1) = 0$;

$t_1 = 0$ или $t_2 = 2 + \sqrt{3}$ или $t_3 = 2 - \sqrt{3}$;

$\sin x + \cos x = 0$ или $\sin x + \cos x = 2 + \sqrt{3}$ или $\sin x + \cos x = 2 - \sqrt{3}$;

$tgx = -1$ или $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ или $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z$, ;

а во втором случае решений нет.

639. 1) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$;

sinxsin2xsin3x = sinxcosxcos2x; sinx(cosxcos2x – sin2xsin3x) = 0;

$\sin x(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x) = 0$; $\sin x(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 5x) = 0$;

sinxcosxcos4x = 0; sinx = 0 или cosx = 0 или cos4x = 0;

$x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или 4 $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

$x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k \in Z$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$; $(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x\cos^2 x = 2\sin^2 x\cos^2 x$;

$\cos^2 x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

640. 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
$(\cos^2 x - \cos^2 3x) + (\cos^2 2x - \cos^2 4x) = 0$;
(cosx – cos3x)(cosx + cos3x) + (cos2x – cos4x)(cos2x + cos4x) = 0;
2sinxsin2x · 2cosxcos2x + 2sinxsin3x · 2cosxcos3x = 0;
sin2xsin4x + sin2xsin6x = 0; sin2x(sin4x + sin6x) = 0;
2sin2x · sin5xcosx = 0; sin2x = 0 или sin5x = 0 или cosx = 0;

$2x = \pi k$ или $5x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \frac{\pi}{5}k$ или

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (входит в первую серию корней), т.е. $x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$; $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x\cos^2 x - 3\cos^4 x\sin^2 x = \frac{1}{4}$;

$1 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}\sin^2 2x = -\frac{3}{4}$ $\sin 2x = \pm 1$;

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

641. 1) $\frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1$; $\frac{\cos 2x}{\cos x} = a$; $a + \frac{1}{a} = 1$; $a^2 - a + 1 = 0$; D<0 — решений нет.

2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$; sinx = a;

$a + \frac{1}{a} = a^2 + \frac{1}{a^2}$; $a^4 - a^3 - a + 1 = 0$; $a^3(a - 1) - (a - 1) = 0$;

$(a^3 - 1)(a - 1) = 0$; a = 1; sinx = 1; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

642. 1) sinxsin5x = 1; т.к. |sinx| ≤ 1 и |sin5x| ≤ 1, то |sinxsin5x| ≤ 1, а;
sinxsin5x = 1, только если sinx = sin5x = 1 или sinx = sin5x = – 1, т.е.

$$\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 5x=1\end{cases};\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ 5x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in Z\end{cases};\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}n,n\in Z\end{cases};\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z \text{ или}$$

$$\begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 5x=-1\end{cases};\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ 5x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in Z\end{cases};\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}n,n\in Z\end{cases};$$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$;

2) sinxcos4x = – 1;

возможно, лишь при sinx = 1, а cosx = – 1 или при sinx = – 1, а cos4x = 1, т.е.

$$\begin{cases}\sin x=1\\ \cos 4x=-1\end{cases};\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ 4x=\pi+2\pi n,n\in Z\end{cases};\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,n\in Z\end{cases} \text{ — решений нет, или}$$

$$\begin{cases}\sin x=-1\\ \cos 4x=1\end{cases};\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ 4x=2\pi n,n\in Z\end{cases};\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}n,n\in Z\end{cases};\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\cdot$$

643. 1) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$;

$$\begin{cases}5\cos x-\cos 2x\ge 0\\ \sin x\le 0\\ 5\cos x-\cos 2x=4\sin^2 x\end{cases};\ \begin{cases}5\cos x-\cos 2x\ge 0\\ \sin x\le 0\\ 5\cos x-2\cos^2 x-1-4+4\cos^2 x=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}5\cos x-\cos 2x\ge 0\\ \sin x\le 0\\ 2\cos^2 x+5\cos x-5=0\end{cases}$$; решаем последнее уравнение в системе, полагая

cosx = a; $2a^2 + 5a – 5 = 0$; $a_1=\frac{-5+\sqrt{65}}{4},a_2=\frac{-5-\sqrt{65}}{4}$, т.е.

$$\cos x=\frac{-5+\sqrt{65}}{4},\ \text{ или }\ \cos x-\frac{-5-\sqrt{65}}{4};\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}n,n\in Z\end{cases};$$

Подставляем в первое неравенство системы:

$5\cos x – 2\cos^2x – 1 \ge 0$ вместо cosx число $\frac{\sqrt{65}-5}{4}$;

$5\cdot\left(\frac{\sqrt{65}-5}{4}\right)-2\cdot\frac{90-10\sqrt{65}}{16}-1=\frac{-74+10\sqrt{65}}{4}\ge 0$, т.е. корни

$\begin{cases} 5\cos x - \cos 2x \ge 0 \\ \sin x \le 0 \\ 2\cos^2 x + 5\cos x - 5 = 0 \end{cases}$; удовлетворяют первому неравенству системы,

из второго неравенстве следует, что x $\in$ III, IV четверти, значит,

$x = -\arccos\frac{\sqrt{65}-5}{4} + 2\pi k, k \in Z$;

2) $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2}\cos x$; $\sqrt{2\cos x\cos 2x} = -\sqrt{2}\cos x$;

$\sqrt{\cos x(2\cos^2 x - 1)} = -\cos x$; cosx = a; $\sqrt{a(2a^2-1)} = -a$;

$\begin{cases} a \le 0 \\ a(2a^2-1) \ge 0 \\ a(2a^2-1) = a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} a \le 0 \\ a(2a^2-1) \ge 0 \\ a(2a^2-a-1) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a \le 0 \\ a(2a^2-1) \ge 0 \\ a = 0, a = -\frac{1}{2}, a = 1 \end{cases}$, т.е. a=0 или $a = -\frac{1}{2}$;

cosx = 0 или $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

644. 1) 4|cosx| + 3 = 4sin^{2}x;

4|cosx| + 3 = 4 – 4cos^{2}x; 4cos^{2}x + 4|cosx| – 1 = 0;

cosx = a; 4a^2 + 4|a| – 1 = 0;

$\begin{cases} a \ge 0 \\ 4a^2 + 4a - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a \ge 0 \\ a_1 = \frac{-4-4\sqrt{2}}{8}, a_2 = \frac{-4+4\sqrt{2}}{8} \end{cases}$; $a = \frac{-4+4\sqrt{2}}{8}$,

т.е. $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ 4a^2 - 4a - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0 \\ a = \frac{4-4\sqrt{2}}{8}, a = \frac{4+4\sqrt{2}}{8} \end{cases}$,

т.е. $a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ т.е. $a = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

т.е. $\cos x = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, т.е. $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2\pi k$ или

$x = \pm(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}) + 2\pi k, k \in Z$, т.е. $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi k, k \in Z$;

2) $|tgx| + 1 = \frac{1}{\cos^2 2x}$;

а) |tgx| = tg^{2}2x; $|tgx| = \frac{4tg^2x}{(1-tg^2x)^2}$; tgx $\ge$ 0; $tgx\left(\frac{(1-tg^2x)^2 - 4tgx}{(1-tg^2x)^2}\right) = 0$;

tgx = t; $t\left(\frac{t^4 - 2t^2 - 4t + 1}{(1-t^2)^2}\right) = 0$;

t = 0, а второе уравнение (t^4 – 2t^2 – 4t + 1 = 0) не имеет положительных корней, т.е. tgx = 0; x = πk, k $\in$ Z;

б) tgx < 0; $\quad \operatorname{tg}x\left(\dfrac{(1-\operatorname{tg}^2x)^2+4\operatorname{tg}x}{(1-\operatorname{tg}^2x)^2}\right)=0$;

tgx = 0 не удовлетворяет требованию tgx < 0 т.е. $x = \pi k,\ k \in Z$.

645. 1) $\begin{cases}\cos(x+y)=0\\ \cos(x-y)=1\end{cases}$; $\quad \begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\\ x-y=2\pi n, n\in Z\end{cases}$;

$x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k+\pi n, k\in Z, n\in Z$; $\quad y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k-\pi n, k\in Z, n\in Z$;

2) $\begin{cases}\sin x-\sin y=1\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$; $\quad \sin^2x + \cos^2y = 1$ только при $\sin x = \pm1$ и $\cos y = \pm1$, но при $\sin x = -1$ получим $\sin y = -2$ (из первого уравнения), значит, $\sin x = 1$, а $\cos y = \pm1$ и $\sin y = = 0$ (из первого уравнения), т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$, а $y = \pi n,\ n \in Z$.

646. $4 - 4\cos^2x + 2(a - 3)\cos x + 3a - 4 = 0$;

$4\cos^2x - 2(a - 3)\cos x - 3a = 0$; $\quad \cos x = b$; $\quad 4b^2 - 2(a - 3)b - 3a = 0$.

Уравнение имеет действительные корни, если $D \ge 0$;

$D = 4(a - 3)^2 + 16 \cdot 3a = 4(a + 3)^2 \ge 0$ при любом a.;

$b_1=\dfrac{2(a-3)-2(a+3)}{8}$ и $b_2=\dfrac{2(a-3)+2(a+3)}{8}$.

Для любых a один из $b=-\dfrac{3}{2}$, другой $b=\dfrac{a}{2}$.

Уравнение $\cos x=-\dfrac{3}{2}$ не имеет корней, а уравнение $\cos x=\dfrac{a}{2}$ — имеет корни, только если $|a| \le 2$.

Т.е. исходное уравнение имеет корни $x=\pm\arccos\dfrac{a}{2}+2\pi k, k\in Z$, только если $-2 \le a \le 2$.

647. $(1 - a)\sin^2x - \sin x \cos x - (2 + a)\cos^2x = 0\ |: \cos^2x$;

$(1 - a)\operatorname{tg}^2x - \operatorname{tg} x - (2 + a) = 0$; $\quad \operatorname{tg} x = b$; $\quad (1 - a)b^2 - b - (2 + a) = 0$.

Уравнение не имеет решений, если $D < 0$;

$D = 1 + 4(2 + a)(1 - a) < 0$; $\quad 1 + 8 - 4a - 4a^2 < 0$; $\quad 4a^2 + 4a - 9 > 0$, ;

т.е. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{10}>a$ или $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{10}<a$.

Значит, исходное уравнение не имеет корней при

$a<-\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}$ или при $a>\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}$.

648. 1) $\cos x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\le x\le\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$;

2) $\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \dfrac{\pi}{6}+2\pi k<x<\dfrac{11\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

4) $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

649. 1) $\cos x \le \sqrt{3}$ — $x \in R$; 2) $\cos x < -1$ — решений нет;

3) $\cos x \ge 1$ — выполняется только при $\cos x = 1$, т.е. $x = 2\pi k$, $k \in Z$;

4) $\cos x \le -1$ — выполняется только при $\cos x = -1$, т.е.$x=\pi+2\pi k$, $k \in Z$.

650. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

2) $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$;

3) $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le x \le -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$;

4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

651. 1) $\sin x \ge -\sqrt{2}$ – $x \in R$; 2) $\sin x > 1$ — нет решений;

3) $\sin x \le -1$ — выполняется только при $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

4) $\sin x \ge 1$ — выполняется только при $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

652. 1) $\sqrt{2}\cos 2x \le 1$; $\cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le 2x \le \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$;

$\frac{\pi}{8} + \pi k \le x \le \frac{7\pi}{8} + \pi k, k \in Z$;

2) $2\sin 3x > -1$; $\sin 3x > -\frac{1}{2}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 3x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$;

$-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$;

3) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \le x \le 2\pi k, k \in Z$;

4) $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

653. 1) $\cos(\frac{x}{3} + 2) \ge \frac{1}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{x}{3} + 2 \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$;

$-\frac{\pi}{3} - 2 + 2\pi k \le \frac{x}{3} \le \frac{\pi}{3} - 2 + 2\pi k$; $-\pi - 6 + 6\pi k \le x \le \pi - 6 + 6\pi k$, $k \in Z$;

2) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{4} - 3 < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$;

$-\frac{3\pi}{4} + 3 + 2\pi k < \frac{x}{4} < -\frac{\pi}{4} + 3 + 2\pi k$; $-3\pi + 12 + 8\pi k < x < -\pi + 12 + 8\pi k$, $k \in Z$.

654. 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0; \sin x(\sin x + 2) > 0;$

$\sin x + 2 > 0$ для всех $x \in R$, т.е. $\sin x > 0$; $2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

2) $\cos^2 x - \cos x < 0$; $\cos x(\cos x - 1) < 0$; $\cos x - 1 \le 0$ для всех $x \in R$,

т.е. $\begin{cases}\cos x > 0\\ \cos x - 1 \ne 0\end{cases}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in Z$ и $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

655. 1) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{3} + 3\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$;

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\arcsin 1 = \frac{\pi}{4} - 4\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{4}$;

3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$;

4) $\arccos(-1) - \arcsin(-1) = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$;

5) $2\mathrm{arctg}1 + 3\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{4} + 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$;

6) $4\mathrm{arctg}(-1) + 3\mathrm{arctg}\sqrt{3} = 4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\cdot\frac{\pi}{3} = 0$.

656. 1) $\cos(4 - 2x) = -\frac{1}{2}$; $4 - 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

$2x = 4 \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $x = 2 \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

2) $\cos(6 + 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $6 + 3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;

$3x = \pm\frac{3\pi}{4} - 6 + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{4} - 2 + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$;

3) $\sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$; $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $2x = -\pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

4) $2\cos(\frac{\pi}{3} - 3x) - \sqrt{3} = 0$; $\cos(\frac{\pi}{3} - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{3} - 3x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

$3x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$ или $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$.

657. 1) $2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$; $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$;

$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$;

2) $1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$; $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=1$;

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x=\frac{\pi}{3}+4\pi k, k\in Z$;

3) $3 + 4\sin(2x + 1) = 0$; $\sin(2x+1)=-\frac{3}{4}$;

$2x+1=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$; $x=(-1)^{k+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

4) $5\sin(2x - 1) - 2 = 0$; $\sin(2x-1)=\frac{2}{5}$;

$2x-1=(-1)^{k}\arcsin\frac{2}{5}+\pi k$ $x=(-1)^{k}\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$.

658. 1) $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-4\sin x\cos x)=0$; $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-2\sin 2x)=0$;

$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin 2x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ или $2x=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ или $x=(-1)^{k}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

2) $(1-\sqrt{2}\cos x)(1+2\sin 2x\cos 2x)=0$; $(1-\sqrt{2}\cos x)(1+\sin 4x)=0$;

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin 4x = -1$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$ или $4x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$;

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$ или $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$.

659. 1) $tg(2x+\frac{\pi}{4})=-1$; $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

2) $tg(3x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+\pi k$; $3x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$; $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi}{3}k, k\in Z$;

3) $\sqrt{3}-tg(x-\frac{\pi}{5})=0$; $tg(x-\frac{\pi}{5})=\sqrt{3}$; $x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{3}+\pi k$; $x=\frac{8\pi}{15}+\pi k, k\in Z$;

4) $1-tg(x+\frac{\pi}{7})=0$; $tg(x+\frac{\pi}{7})=1$; $x+\frac{\pi}{7}=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=\frac{3\pi}{28}+\pi k, k\in Z$.

660. 1) $2\sin^2 x + \sin x = 0$;$\sin x(2\sin x + 1) = 0$;

$\sin x = 0$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x = \pi k$ или $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

2) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; $\sin x = a$; $3a^2 - 5a - 2 = 0$;

$a_1=-\frac{1}{3}$, $a_2 = 2$; $\sin x=-\frac{1}{3}$ или $\sin x = 2$;

$x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k, k\in Z$, а во втором случае решений нет.

3) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$; $\cos x(\cos x - 2) = 0$; $\cos x = 0$ или $\cos x = 2$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, а во втором случае решений нет.

4) $6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = 0$; $\cos x = a$; $6a^2 + 7a - 3 = 0$;

$a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$; $\cos x = -\frac{3}{2}$ или $\cos x = \frac{1}{3}$;

$x = \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$, а в первом случае решений нет.

661. 1) $6\sin^2x - \cos x + 6 = 0$; $6(1 - \cos^2x) - \cos x + 6 = 0$;
$6\cos^2x + \cos x - 12 = 0$; $\cos x = a$; $6a^2 + a - 12 = 0$; $a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = \frac{4}{3}$;

$\cos x = -\frac{3}{2}$ или $\cos x = \frac{4}{3}$ — в обоих случаях решений нет.
2) $8\cos^2x - 12\sin x + 7 = 0$; $8(1 - \sin^2x) - 12\sin x + 7 = 0$;
$8\sin^2x + 12\sin x - 15 = 0$; $\sin x = a$; $8a^2 + 12a - 15 = 0$;
$a = \frac{-12 - 4\sqrt{39}}{16}, a = \frac{-12 + 4\sqrt{39}}{16}$, т.е. $\sin x = \frac{-3 - \sqrt{39}}{4}$ или $\sin x = \frac{\sqrt{39} - 3}{4}$;

$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{39} - 3}{4} + \pi k, k \in Z$, а в первом случае решений нет.

662. 1) $tg^2x + 3tg\,x = 0$; $tg\,x(tg\,x + 3) = 0$;
$tg\,x = 0$ или $tg\,x = -3$; $x = \pi k$ или $x = -arctg3 + \pi k$, $k \in Z$;
2) $2tg^2x - tg\,x - 3 = 0$; $tg\,x = a$; $2a^2 - a - 3 = 0$;
$a_1 = -1$, $a_2 = \frac{3}{2}$; $tg\,x = -1$ или $tgx = \frac{3}{2}$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k \in Z$;
3) $tg\,x - 12ctg\,x + 1 = 0 \mid \cdot\, tg\,x$; $tg^2x - 12 + tg\,x = 0$; $tg\,x = a$;
$a^2 + a - 12 = 0$; $a_1 = -4$, $a_2 = 3$; $tg\,x = -4$ или $tg\,x = 3$;
$x = -arctg4 + \pi k$ или $x = arctg3 + \pi k$, $k \in Z$;
4) $tg\,x + ctg\,x = 2 \mid\cdot tg\,x$; $tg^2x - 2tg\,x + 1 = 0$; $(tg\,x - 1)^2 = 0$; $tg\,x = 1$;
$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

663. 1) $2\sin2x = 3\cos2x \mid:\cos2x$; $2tg2x = 3$; $tg2x = \frac{3}{2}$;

$2x = arctg\frac{3}{2} + \pi k$; $x = \frac{1}{2}arctg\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

2) $4\sin3x + 5\cos3x = 0 \mid : \cos3x$; $4tg3x + 5 = 0$; $tg3x = -\frac{5}{4}$;

$3x = -arctg\frac{5}{4} + \pi k$; $x = -\frac{1}{3}arctg\frac{5}{4} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

664. 1) $5\sin x + \cos x = 5$; $10\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 5\sin^2\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2}$;

$6\sin^2\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} - 10\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \;\Big|: \cos^2\frac{x}{2}$; $6tg^2\frac{x}{2} - 10tgx + 4 = 0$;

$tg\frac{x}{2} = a$; $6a^2 - 10a + 4 = 0$; $3a^2 - 5a + 2 = 0$; $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = 1$;

$tg\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ или $tg\frac{x}{2} = 1$; $\frac{x}{2} = arctg\frac{2}{3} + \pi k$ или $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

$x = 2arctg\frac{2}{3} + 2\pi k$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

2) $4\sin x + 3\cos x = 6$ |:5; $\frac{4}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x = \frac{6}{5}$;

$\sin(x+\alpha) = \frac{6}{5}$, где $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$ решений нет.

665. 1) $\sin 3x = \sin 5x$; $\sin 5x - \sin 3x = 0$;
$2\sin x \cos 4x = 0$; $\sin x = 0$ или $\cos 4x = 0$;
$x = \pi k$ или $4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k \in Z$;
2) $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x = 0$; $\cos 3x(\cos 3x - \cos 5x) = 0$;
$2\cos 4x \sin x \sin 4x = 0$; $\cos 3x = 0$ или $\sin x = 0$ или $\sin 4x = 0$;
$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pi k$ или $4x = \pi k$, $k \in Z$;
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$ или $x = \pi k$ (входит в третью серию корней) или
$x = \frac{\pi}{4}k, k \in Z$, т.е. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$ или $x = \frac{\pi}{4}k, k \in Z$;
3) $\cos x = \cos 3x$; $\cos x - \cos 3x = 0$;
$2\sin x \sin 2x = 0$; $\sin x = 0$ или $\sin 2x = 0$; $x = \pi k$ или $2x = \pi k$, $k \in Z$;
$x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \pi k$ (входит в первую серию корней), т.е. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;
4) $\sin x \sin 5x - \sin^2 5x = 0$; $\sin 5x(\sin x - \sin 5x) = 0$;
$-2\sin 5x \sin 2x \sin 3x = 0$; $\sin 5x = 0$ или $\sin 3x = 0$ или $\sin 2x = 0$;
$5x = \pi k$ или $2x = \pi k$ или $3x = \pi k$, $k \in Z$,
т.е. $x = \frac{\pi}{5}k$ или $x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

666. 1) $\sin(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg}(\arccos\frac{1}{2}) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg}(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

667. 1) $\sin(4\arcsin 1) = \sin(4\cdot\frac{\pi}{2}) = 0$; 2) $\sin(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sin(3\cdot\frac{\pi}{6}) = 0$;

3) $\cos(6\operatorname{ar}\sin 1) = \cos(6\cdot\frac{\pi}{2}) = -1$; 4) $\sin(4\arcsin 1) = \sin(4\cdot\frac{\pi}{2}) = 0$.

668. 1) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; $2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$;
$3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ | : $\cos 2x$; $3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$;
$\operatorname{tg} x = a$; $3a^2 - 2a - 1 = 0$; $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 1$; $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ или $\operatorname{tg} x = 1$;
$x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.
2) $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$; $\cos^2 x - \sin^2 x + 6\sin x \cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$;
$4\sin^2 x - 6\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ | : $2\cos^2 x$; $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$;
$\operatorname{tg} x = a$; $2a^2 - 3a + 1 = 0$; $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg} x = 1$;

$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

669. 1) $3\sin^2x + \sin x\cos x - 2\cos^2x = 0 \mid : \cos^2x$; $3tg^2x + tg\, x = 0$;

$tg\, x = a$; $3a^2 + a - 2 = 0$; $a_1 = -1$, $a_2=\frac{2}{3}$; $tg\, x = -1$ или $tgx=\frac{2}{3}$;

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k, k\in Z$;

2) $2\sin^2x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2x = 0 \mid:\cos^2x$; $2tg^2x + 3tg\, x - 2 = 0$;

$tg\, x = a$; $2a^2 + 3a - 2 = 0$; $a_1 = -2$, $a_2=\frac{1}{2}$; $tg\, x = -2$ или $tgx=\frac{1}{2}$;

$x = -\operatorname{arctg}2 + \pi k$ или $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$.

670. 1) $1 + 2\sin x = \sin2x + 2\cos x$; $\sin^2x + \cos^2x-2\sin x\cos x=2(\cos x - \sin x)$;
$(\cos x - \sin x)^2 = 2(\cos x - \sin x)$; $(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$;

$\cos x - \sin x = 0$ или $\cos x - \sin x - 1 = 0$; $tg\, x = 1$ или $\cos(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$;

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, а во втором случае решений нет.

2) $1 + 3\cos x = \sin2x + 3\sin x$; $\cos^2x + \sin^2x - 2\sin x\cos x = 3(\sin x - \cos x)$;
$(\sin x - \cos x)^2 = 3(\sin x - \cos x)$; $(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - 3) = 0$;

$\sin x - \cos x = 0$ или $\sin x - \cos x = 3$; $tg\, x = 1$ или $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{\sqrt{2}}$;

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, а во втором случае решений нет.

671. 1) $\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=1+\cos2x$;

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\cos^2x$; $\cos x = 2\cos^2x$;

$\cos x(1 - 2\cos x) = 0$; $\cos x = 0$ или $\cos x=\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

2) $\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sin2x$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=2\sin x\cos x$;

$\sqrt{2}\sin x=2\sin x\cos x$; $\sin x(\sqrt{2}-2\cos x)=0$;

$\sin x = 0$ или $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pi k$ или $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$.

672. 1) $\cos^3x\sin x-\sin^3x\cos x=\frac{1}{4}$; $\sin x\cos x(\cos^2x-\sin^2x)=\frac{1}{4}$;

$\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{1}{4}$; sin4x = 1; $4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

2) $\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$; $\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)=\frac{1}{4}$;

$\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{4}$; $\sin 2x=\frac{1}{2}$; $2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$.

673. 1) $\sin^2x + \sin^2 2x = 1$; $4\sin^2x\cos^2x = \cos^2x$; $\cos^2x(1 - 4\sin^2x) = 0$;

cos x = 0 или $\sin x=\pm\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

2) $\sin^2x + \cos^2x = 1$; $\sin^2x + \cos^2x - \sin^2x = 1$; cos x = ±1; x = πk, k ∈ Z;

3) sin4x = $6\cos^2 2x - 4$; 2cos2x sin2x = $2\cos^2x - 4\sin^2 2x$;

$2\sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0$ |:$\cos^2 2x$; $2tg^2 2x + tg2x - 1 = 0$;

tg2x = a $2a^2 + a - 1 = 0$; $a_1 = -1$, $a_1=\frac{1}{2}$; tg2x = –1 или $tg2x=\frac{1}{2}$;

$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $2x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$;

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$ или $x=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

4) $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1$; cos6x + sin5x = 0;

$\cos 6x+\cos(\frac{\pi}{2}-5x)=0$; $2\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x)\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{11}{2}x)=0$;

$\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x)=0$ или $\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{11}{2}x)=0$; $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или

$(-\frac{\pi}{4}+\frac{11}{2}x)=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ или $x=\frac{3\pi}{22}+\frac{2\pi}{11}k, k\in Z$.

674. 1) $\sin^2 x-\cos x\cos 3x=\frac{1}{4}$; $\sin^2 x-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)-\frac{1}{4}=0$;

$2\sin^2 x-1-(\cos 2x+2\cos^2 2x-1)-\frac{1}{2}+1=0$;

$-\cos 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x+\frac{3}{2}=0$; $2\cos^2 x+2\cos 2x-\frac{3}{2}=0$; cos2x = a;

$4a^2 + 4a - 3 = 0$; $a_1=-\frac{3}{2}, a_2=\frac{1}{2}$; $\cos 2x=-\frac{3}{2}$ или $\cos 2x=\frac{1}{2}$ в первом случае решений нет, а во втором $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

2) sin3x = 3sin x; sin3x + sin x = 4sin x; 2sin2x cos x – 4sin x = 0;

$\cos^2x\sin x - 4\sin x = 0$; $4\sin x(\cos^2x - 1) = 0$; $-4\sin^3x = 0$;

sin x = 0; x = πk, k ∈ Z;

3) $3\cos^2x - 7\sin x = 4$; $3 - 6\sin^2x - 7\sin x = 4$; sin x = a $6a^2 + 7a + 1 = 0$;

$a_1 = -1$, $a_2=-\frac{1}{6}$; sin x = –1 или $\sin x=-\frac{1}{6}$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ или

$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{6}+\pi k, k\in Z$;

4) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$; $1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$;

$\cos x(1 + 2\cos x) = 0$; $\cos x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

5) $5\sin 2x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0$; $2\cos x(5\sin x + 2\cos^2 x - 8) = 0$;
$2\cos x(5\sin x + 2 - 2\sin^2 x - 8) = 0$; $-2\cos x(2\sin^2 x - 5\sin x + 6) = 0$;
$\cos x = 0$ или $2\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$; $\sin x = a$
$\cos x = 0$ или $2a^2 - 5a + 6 = 0$;
$D < 0$; $\cos x = 0$, а во втором случае решений нет, т.к. $D < 0$, т.е. $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

675. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$;

$\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$; $\sin 2x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \frac{\pi}{2}k$ или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

2) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$; $-2\sin(-x)\sin 2x = -2\sin(-x)\sin 3x$;

$2\sin x(\sin 3x - \sin 2x) = 0$; $4\sin x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$;

$\sin x = 0$ или $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{5x}{2} = 0$; $x = \pi k$ или $2x = 2\pi k$ (входит в первую серию корней) или $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in Z$.

676. 1) $\sin(\arcsin\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{1}{4}$;

3) $\sin(\pi - \arcsin\frac{3}{4}) = \sin(\arcsin\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$ 4) $\sin(\pi + \arcsin\frac{2}{3}) = -\sin(\arcsin\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$.

677. 1) $\mathrm{tg}(\pi + \mathrm{arctg}\frac{5}{4}) = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{5}{4}) = \frac{5}{4}$; 2) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}2) = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}2) = 2$.

678. 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; $\sin 2x = 0$; $\sin x \neq 0$;

$x = \frac{\pi}{2}k$, $x \neq \pi n$, $k, n \in Z$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

2) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; $\sin 3x = 0$; $\sin x \neq 0$;

$x = \frac{\pi}{3}k$, $x \neq \pi n$, $k, n \in Z$, т.е. $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$, $k \neq 3n$, $n \in Z$;

3) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$; $\cos 2x = 0$; $\cos x \neq 0$;

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, k, n \in Z$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x}=0$; cos3x = 0; cos x ≠ 0;

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k,n\in Z$, т.е. $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

5) $\frac{\sin x}{\sin 5x}=0$; sin x = 0; sin5x ≠ 0; x = πk, $x\equiv\frac{\pi}{5}n$, k, n ∈ Z — нет решений;

6) $\frac{\cos x}{\cos 7x}=0$; cos x = 0; cos7x ≠ 0; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x\neq\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}n$, k, n ∈ Z — нет решений.

679. 1) cos x sin5x = –1; возможно, только если cos x = 1, sin5x = –1 или cos x = –1, sin5x = 1, т.е.

$$\begin{cases}\cos x=1\\ \sin 5x=-1\end{cases};\quad \begin{cases}x=2\pi k, k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}n, n\in Z\end{cases}$$ — решений нет, или

$$\begin{cases}\cos x=-1\\ \sin 5x=1\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pi+2\pi k, k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}n, n\in Z\end{cases}$$ — решений нет, т.е. решений нет.

2) sin x cos3x = –1 — возможно только при

$$\begin{cases}\sin x=1\\ \cos 3x=-1\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n, n\in Z\end{cases}$$ — решений нет, или

$$\begin{cases}\sin x=-1\\ \cos 3x=1\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\\ x=\frac{2\pi}{3}n, n\in Z\end{cases}$$ — решений нет, т.е. решений нет.

680. 1) 2cos3x = 3sin x + cos x; 2(cos3x + cos x) = 3(sin x + cos x);
4cos2x cos x = 3(sin x + cos x);
4(sin x + cos x)(cos x – sin x)cos x = 3(sin x + cos x);
(sin x + cos x)(3 – 4cos^{2}x + 4sin x cos x) = 0;
(sin x + cos x)(3sin^{2}x + 4sin x cos x – cos^{2}x) = 0;
sin x + cos x = 0 или 3tg^{2}x + 4tg x – 1 = 0; tg x = a;

a + 1 = 0 или 3a^2 + 4a – 1 = 0; a_1 = –1 или $a_2=\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ или $a_3=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$;

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k \text{ или } x=-\text{arctg}\frac{2+\sqrt{7}}{3}+\pi k \text{ или } x=\text{arctg}\frac{\sqrt{7}-2}{3}+\pi k, k\in Z;$$

2) cos3x – cos2x = sin3x; 4cos^{2}x – 3cos x – cos^{2}x + sin^{2}x = 3sin x – 4sin^{3}x;
4(sin x + cos x)(1 – sin x cos x) = 3(cos x + sin x) + (cos x + sin x)(cos x – sin x);
(sin x + cos x)(4 – 4sin x cos x – 3 – (cos x – sin x)) = 0;

$$(\sin x+\cos x)(4+4(\frac{(\sin x-\cos x)^2-1}{2})-3-(\cos x-\sin x))=0;$$

cos x – sin x = a sin x + cos x = 0 или 2a^2 – a – 1 = 0;

tg x = –1 или $a_1 = -\frac{1}{2}$ или $a_2 = 1$, т.е.

tg x = –1 или $\cos x - \sin x = -\frac{1}{2}$ или $\cos x - \sin x = 1$;

tg x = –1 или $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ или $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} - (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

681. 1) sin2x + cos2x = 2tg x + 1; 2sin x cos x + 1 – 2sin^{2}x = 2tg x + 1;

$2\sin x(\frac{1}{\cos x} + \sin x - \cos x) = 0$; $2\sin x(\frac{1}{\cos^2 x} + \mathrm{tg}x - 1) = 0$;

2sin x(tg^{2}x + 1 + tg x – 1) = 0; 2sin x · tg x(tg x + 1) = 0;

$\frac{2\sin^2 x}{\cos x}(\mathrm{tg}x + 1) = 0$; sin x = 0 или tg x = –1; x = πk или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

2) sin2x – cos2x = tg x; 2sin x cos^{2}x – cos x(1 – 2sin^{2}x) = sin x;

2sin x cos^{2}x + 2sin^{2}x cos x = sin x + cos x; (sin x + cos x)(sin2x – 1) = 0;

sin x + cos x = 0 или sin2x = 1; tg x = –1 или sin2x = 1;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$, т.е. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

682. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$;

$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) + \frac{1}{2}(\cos^2 2x + \sin^2 2x) +$

$+\frac{1}{2}(\cos^2 3x + \sin^2 3x)$;

$\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) + \frac{1}{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \frac{1}{2}(\cos^2 3x - \sin^2 3x) = 0$;

cos2x + cos4x + cos6x = 0 2cos4x cos2x + cos4x = 0;

cos4x(1 + 2cos2x) = 0 cos4x = 0 или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$;

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

683. $\sqrt{-4\cos x \cos^2 x} = \sqrt{7\sin 2x}$; $\begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin 2x \ge 0 \\ 7\sin 2x + 4\cos^3 x = 0 \end{cases}$;

Решаем 2–ое уравнение системы: cos x(4sin^{2}x – 14sin x – 4) = 0

cos x = 0 или 4sin^{2}x – 14sin x – 4 = 0; sin x = a; cos x = 0 или 2a^2–7a–2=0;

cos x = 0 или $a_1 = \frac{7 - \sqrt{65}}{4}$ или $a_2 = \frac{7 + \sqrt{65}}{4}$;

cos x=0 или $\sin x = \frac{7-\sqrt{65}}{4}$ или $\sin x = \frac{7+\sqrt{65}}{4}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{65}-7}{4} + \pi n, n \in Z$, в третьем случае решений нет;

$$\begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin x \le 0 \text{ или } \cos x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ или } x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{65}-7}{4} + \pi n, n \in Z \end{cases},$$

т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{65}-7}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

684. |cos x| – cos3x = sin2x;

$$\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ 2\sin x \sin 2x = \sin 2x \end{cases}; \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin 2x(2\sin x - 1) = 0 \end{cases}; \begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin 2x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ x = \frac{\pi}{2} k \text{ или } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{cases}; \ x = \frac{\pi}{2} k \text{ или } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \text{ или}$$

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ -2\cos 2x \cos x = 2\sin x \cos x \end{cases}; \begin{cases} \cos x < 0 \\ 2\cos x(\sin x + \cos 2x) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ 2\cos x(\sin x + 1 - 2\sin^2 x) = 0 \end{cases}; \begin{cases} \cos x < 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \text{ или } \sin x = 1 \end{cases}; \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases};$$

т.е. $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, обощая, $x = \frac{\pi}{2} k$ или $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

685. 1) $\begin{cases} \sin y \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin 2x + \sin 2y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \sin 2y = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{cases}$;

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ -2\sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$;

$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}$; $x - y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

$\sin(y - \frac{2\pi}{3}) + \sin y = 1$; $-\frac{1}{2}\sin y - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \sin y = 1$; $\frac{1}{2}\sin y - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y = 1$;

$\sin(y - \frac{\pi}{3}) = 1$; $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, а $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k + 2\pi n, k \in Z, n \in Z$.

686. 1) $\begin{cases}\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{5}{3}\\ \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1}{3}\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{5}{3}\\ \frac{\sin(x+y)}{\sin 2y}=1\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{5}{3}\\ 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+3y}{2}=0\end{cases}$;

Решаем 2–ое уравнение: $\sin\frac{x-y}{2}=0$ или $\cos\frac{x+3y}{2}=0$;

$x - y = 2\pi k$ или $x + 3y = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

а) $x = y + 2\pi k,\ k \in Z$; подставляя в 1–ое уравнение системы:

$\frac{\sin(y)}{\sin y}=\frac{5}{3}$ — противоречие, значит, решений нет;

б) $x = -3y + 2\pi k + \pi,\ k \in Z$; подставляя в 1–ое уравнение:

$\frac{\sin(\pi-3y)}{\sin y}=\frac{5}{3}$; $\frac{\sin 3y}{\sin y}=\frac{5}{3}$; $\frac{3\sin y-4\sin^3 y}{\sin y}=\frac{5}{3}$;

$3-\frac{5}{3}=4\sin^2 y$; $\sin^2 y=\frac{1}{3}$; $\sin y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$y=\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n,\ n\in Z$, а $x=\pi\pm 3\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n+2\pi k,\ n,k\in Z$;

2) $\begin{cases}\sin x\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x\sin y=-\frac{1}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}\sin 2x=1\\ \cos x\sin y=-\frac{1}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z\\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y=-\frac{1}{2}\end{cases}$;

$\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z\\ \sin y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, т.е. $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,k\in Z\\ y=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,n\in Z\end{cases}$ или $\begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,k\in Z\\ y=(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+\pi n,n\in Z\end{cases}$;

687. $\sin^4 x + \cos^4 x = a$; $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = a$;

$1-a=\frac{1}{2}\sin^2 2x$; $\sin^2 2x = 2 - 2a$.

Уравнение имеет корни при $\frac{1}{2}\le a\le 1$; $\sin 2x=\pm\sqrt{2-2a}$;

$2x=\pm\arcsin\sqrt{2-2a}+\pi k,k\in Z$; $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{2-2a}+\frac{\pi}{2}k,k\in Z$, $\frac{1}{2}\le a\le 1$.

688. $\sin^{10}x + \cos^{10}x = a$; $\frac{(1-\cos 2x)^5}{32}+\frac{(1+\cos 2x)^5}{32}=a$;

$32a = 2 + 20\cos^2 2x + 10\cos^4 2x$; $5\cos^4 2x + 10\cos^2 2x + (1 - 16a) = 0$.

Обозначим $\cos^2 2x = b$.

Исходное уравнение имеет корни, если $0 \le b \le 1$;

$5b^4 + 10b + (1 - 16a) = 0$; $D = 100 - 20(1 - 16a)$;

$b=\frac{-10+\sqrt{D}}{10}$; $b_1=-1-\frac{\sqrt{D}}{10}, b_2=-1+\frac{\sqrt{D}}{10}$;

$0 \le b_1 \le 1$ или $0 \le b_2 \le 1$ $10\le\sqrt{D}\le 20$; $100 \le 100 - 20 + 320a \le 400$;

$20 \le 320a \le 320;$ $\qquad \frac{1}{16} \le a \le 1$.

Т.е. исходное уравнение имеет корни при $\frac{1}{16} \le a \le 1$.

689. $\sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$;

$\cos(2x - \frac{\pi}{2}) - 2a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1 - 6a^2 = 0$;

$2\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - 4a\cos(x - \frac{\pi}{4}) - 6a^2 = 0$; $\qquad \cos(x - \frac{\pi}{4}) = b$;

$b^2 - 2ab - 3a^2 = 0;$ $\qquad D = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2;$ $\qquad b_{1,2} = \frac{2a \pm |4a|}{2}$;

$b_1 = -a$, а $b_2 = 3a$; $\qquad \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -a$ или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3a$.

Уравнение имеет решения только при $-1 \le -a \le 1$ или $-1 \le 3a \le 1$.
В общем, уравнение имеет решение при $-1 \le a \le 1$.

При $-\frac{1}{3} \le a \le \frac{1}{3}$ $\qquad x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos(-a) + 2\pi k$ или

$x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos(3a) + 2\pi k, k \in Z$.

При $-1 \le a < \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} < a \le 1$ $\quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos(-a) + 2\pi n, n \in Z$, т.е.

при $-\frac{1}{3} \le a \le \frac{1}{3}$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos(-a) + 2\pi k$ или

$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos(3a) + 2\pi k, k \in Z$, а

при $-1 \le a < -\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} < a \le 1$; $\quad x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos(-a) + 2\pi n, n \in Z$.

690. 1) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0;$ $\qquad 2 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0;$
$2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0;$ $\qquad \sin x = a$ $\qquad 2a^2 - a - 1 > 0;$

$a < -\frac{1}{2}$ или $a > 1;$ $\qquad \sin x < -\frac{1}{2}$ или $\sin x > 1;$

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, а второе неравенство решений не имеет.

2) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0;$ $\qquad 2 - 2\cos^2 x - 5\cos x + 1 > 0;$
$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 < 0;$ $\qquad \cos x = a$ $\qquad 2a^2 + 5a - 3 < 0;$

$-3 < a < \frac{1}{2}$; $\qquad -3 < \cos x < \frac{1}{2}$; $\qquad \frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Глава VII. Тригонометрические функции

691. 1) y = sin2x, $x \in R$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$, $x \in R$;

3) $y = \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; 4) $y = \sin\frac{2}{x}$, $x \neq 0$;

5) $y = \sin\sqrt{x}$, $x \geq 0$; 6) $y = \cos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ $x < -1$ и $x \geq 1$.

692. 1) y = 1 + sin x; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$, т.е. $0 \leq y \leq 2$;
2) y = 1 – cos x; $-1 \leq \cos x \leq 1$; $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$, т.е. $0 \leq y \leq 2$;
3) y = 2sin x + 3; $-2 \leq 2\sin x \leq 2$; $1 \leq 2\sin x \leq 5$, т.е. $1 \leq y \leq 5$;
4) y = 1 – 4cos2x; $-4 \leq 4\cos 2x \leq 4$; $-3 \leq 1 - 4\cos 2x \leq 5$, т.е. $-3 \leq y \leq 5$;

5) y = sin2xcos2x + 2; $y = \frac{1}{2}\sin 4x + 2$;

$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 4x \leq \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 4x + 2 \leq \frac{5}{2}$, т.е. $\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$;

6) $y = \frac{1}{2}\sin x\cos x - 1$; $y = \frac{1}{4}\sin 2x - 1$;

$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\sin 2x \leq \frac{1}{4}$; $-\frac{5}{4} \leq \frac{1}{4}\sin 2x - 1 \leq -\frac{3}{4}$, т.е. $-\frac{5}{4} \leq y \leq -\frac{3}{4}$.

693. 1) $y = \frac{1}{\cos x}$; $\cos x \neq 0$; $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

2) $y = \frac{2}{\sin x}$; $\sin x \neq 0$; $x \neq \pi k$, $k \in Z$;

3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$; $\cos = \frac{x}{3} \neq 0$; $\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k, k \in Z$;

4) y = tg5x; $\cos 5x \neq 0$; $5x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k, k \in Z$.

694. 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; $\sin x + 1 \geq 0$; $\sin x \geq -1$, $x \in R$;
2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; $\cos x - 1 \geq 0$; $\cos x \geq 1$ $x = 2\pi k$, $k \in Z$;
3) y = lg sin x; $\sin x > 0$; $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;
4) $y = \sqrt{2\cos x - 1}$; $2\cos x - 1 \geq 0$

$\cos x \geq \frac{1}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

5) $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$; $1 - 2\sin x \geq 0$;

$\sin x \leq \frac{1}{2}$; $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

6) y = ln cos x $\cos x > 0$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

695. 1) $y = \frac{1}{2\sin^2 x - \sin x}$; $\sin x(2\sin x - 1) \neq 0$;

$\sin x \neq 0$ и $\sin x \neq \frac{1}{2}$; $x \neq \pi k$ и $x \neq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

2) $y = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$; $y = \frac{2}{\cos 2x}$;

$\cos 2x \neq 0$; $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$; $y = \frac{1}{2\sin x \cos 2x}$;

$\sin x \neq 0$ и $\cos 2x \neq 0$; $x \neq \pi k$ и $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$; $y = \frac{1}{\cos x(1 + \cos^2 x)}$; $\cos x \neq 0$; $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

696. 1) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$; $y = 2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1$, т.е. $-1 \leq y \leq 3$;
2) $y = 1 - 8\cos^2 x \sin^2 x$; $y = 1 - 2\sin^2 2x$, т.е. $-1 \leq y \leq 1$;

3) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$; $y = \frac{1}{4} + 2\cos^2 x$, т.е. $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{9}{4}$;

4) $y = 10 - 9\sin^2 3x$; $1 \leq y \leq 10$;
5) $y = 1 - 2|\cos x|$; $-1 \leq y \leq 1$;

6) $y = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{3})$;

$y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $y = \sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6})$, т.е. $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$.

697. $y = 3\cos 2x - 4\sin 2x = 5(\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x) = 5\sin(\varphi - 2x)$, где $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$,

т.е. $y_{наим} = -5$, а $y_{наиб} = 5$.

698. $y = \sqrt{26}(\frac{1}{\sqrt{26}}\sin x - \frac{5}{\sqrt{26}}\cos x) = \sqrt{26}\sin(x - \varphi)$, где $\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$,

т.е. $-\sqrt{26} \leq y \leq \sqrt{26}$.

699. $y = 10\cos^2 x - 6\sin x \cos x + 2\sin^2 x$; $y = 4(2\cos^2 x - 1) - 3\sin 2x + 6$;
$y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$;

$y = 5\sin(\varphi - 2x) + 6$, где $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$ т.е. $1 \leq y \leq 11$.

700. 1) $y = \cos 3x$; $y(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = y(x)$ — четная;
2) $y = 2\sin 4x$; $y(-x) = 2\sin(-4x) = -2\sin 4x = -y(x)$ — нечетная;

3) $y = \frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x$; $y(-x) = -\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2(-x) = -\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x = -y(x)$ — нечетная;

4) $y = x\cos\frac{x}{2}$; $y(-x) = -x\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = -x\cos\frac{x}{2} = -y(x)$ — нечетная;

5) $y = x\sin x$; $y(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x = y(x)$ — четная;
6) $y = 2\sin^2 x$; $y(-x) = 2\sin^2(-x) = 2\sin^2 x = y(x)$ — четная.
701. 1) $y = \sin x + x$; $y(-x) = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -y(x)$ — нечетная;

2) $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})-x^2$; $y = \sin x - x^2$;

$y(-x) = -\sin x - x^2$ — не является четной или нечетной;

3) $y=3-\cos(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi-x)$; $y = 3 + \sin^2 x$; $y(-x) = 3 + \sin^2 x = y(x)$ — четная;

4) $y=\frac{1}{2}\cos 2x\sin(\frac{3}{2}\pi-2x)+3$;

$y=-\frac{1}{2}\cos 3x+3$; $y(-x)=-\frac{1}{2}\cos^2 2x+3=y(x)$ — четная;

5) $y=\frac{\sin x}{x}+\sin x\cos x$; $y(-x)=\frac{\sin x}{x}-\sin x\cos x$ — не является четной или нечетной;

6) $y=x^2+\frac{1+\cos x}{2}$; $y(-x)=x^2+\frac{1+\cos x}{2}=y(x)$ — четная.

702. 1) $y = \cos x - 1$; $y(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - 1 = \cos x - 1 = y(x)$;

2) $y = \sin x + 1$; $y(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + 1 = \sin x + 1 = y(x)$;

3) $y = 3\sin x$; $y(x + 2\pi) = 3\sin(x + 2\pi) = 3\sin x = y(x)$;

4) $y=\frac{\cos x}{2}$; $y(x+2\pi)=\frac{\cos(x+2\pi)}{2}=\frac{\cos x}{2}=y(x)$;

5) $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$; $y(x+2\pi)=\sin(x-\frac{\pi}{4}+2\pi)=\sin(x-\frac{\pi}{4})=y(x)$;

6) $y=\cos(x+\frac{2\pi}{3})$; $y(x+2\pi)=\sin(x+\frac{2\pi}{3}+2\pi)=\cos(x+\frac{2\pi}{3})=y(x)$.

703. 1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; $y(x + T) = \sin(2(x+\pi))=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x=y(x)$;

2) $y=\cos\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$; $y(x+T)=\cos\frac{x+4\pi}{2}=\cos(\frac{x}{2}+2\pi)=\cos\frac{x}{2}=y(x)$;

3) $y = \mathrm{tg}2x$, $T=\frac{\pi}{2}$; $y(x+T)=\mathrm{tg}(2(x+\frac{\pi}{2}))=\mathrm{tg}(2x+\pi)=\mathrm{tg}2x=y(x)$;

4) $y=\sin\frac{4x}{5}, T=\frac{5}{2}\pi$; $y(x+T)=\sin(\frac{4}{5}(x+\frac{5}{2}\pi))=\sin(\frac{4x}{5}+2\pi)=\sin\frac{4x}{5}=y(x)$.

704. 1) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; $y(-x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=y(x)$ — четная;

2) $y=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}$; $y(-x)=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}=y(x)$ — четная;

3) $y=\frac{\cos 2x-x^2}{\cos x}$; $y(-x)=\frac{\cos 2x-x^2}{-\sin x}=-y(x)$ — нечетная;

4) $y=\frac{x^3+\sin 2x}{\cos x}$; $y(-x)=\frac{-x^3-\sin 2x}{\cos x}=-y(x)$ — нечетная;

5) $y = 3^{\cos x}$; $y(-x) = 3^{\cos x} = y(x)$ — четная;

6) $y = x|\sin x|\sin^3 x$; $y(-x) = -x|\sin x| \cdot (-\sin^3 x) = y(x)$ — четная.

705. 1) $y=\cos\frac{2}{5}x$. Т.к. наименьший период функции cos t равен 2π, и y(x + T) = y(x), то $\cos(\frac{2}{5}(x+T)) = \cos(\frac{2}{5}x + 2\pi)$, т.е. T = 5π.

2) $y = \sin\frac{3}{2}x$. Т.к. наименьший период функции sin t равен 2π, и

y(x + T) = y(x), то $\sin(\frac{3}{2}(x+T)) = \sin(\frac{3}{2}x + 2\pi), T = \frac{4\pi}{3}$.

3) $y = \text{tg}\frac{x}{2}$. Т.к. наименьший период функции tg t равен π, и

y(x + T) = y(x), то $\text{tg}\frac{x+T}{2} = \text{tg}(\frac{x}{2} + \pi)$, т.е. T = 2π.

4) y = |sin x|. Т.к. y(x + π) = |sin(x + π)| = |–sin x| = |sin x| = y(x), то T = π — наименьший период функции y = |sin x|.

706. 1) y = sin x + cos x.

Наименьший положительный период функции sin x равен 2π, и наименьший положительный период функции cos x равен 2π, значит, значения функции будут повторены через 2π единиц.

2) y = sin x + tg x.

Наименьший положительный период функции sin x равен 2π, а наименьший положительный период функции tg x равен π, то значения функции будут повторены через 2π единиц.

707. 1) f(x) + f(–x) — четная функция.

Пусть $F_1(x) = f(x) + f(-x)$; $F_1(-x) = f(-x) + f(x) = F_1(x)$, ч.т.д.

2) f(x) = f(–x) — нечетная функция.

Пусть $F_2(x) = f(x) - f(-x)$; $F_2(-x) = f(-x) - f(x) = -F_2(x)$, ч.т.д.

Используя эти функции, представить f(x) в виде суммы четной и нечетной функции.

Т.к. $F_1(x) + F_2(x) = f(x) + f(-x) - f(x) - f(-x) = 2f(x)$, то $f(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2}$.

708. 1) значения, равные 0, 1, –1;

0 при $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$; 1 при0, 2π; –1 при π, 3π;

2) положительные значения при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$;

3) отрицательные значения при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$.

709. 1) [3π; 4π] — возрастает; 2) [–2π; –π] — убывает;

3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ — убывает; 4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ — возрастает;

5) [1; 3] — убывает; 6) [–2; –1] — возрастает.

710. 1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ — убывает, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ — возрастает;

2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ — возрастает, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — убывает;

3) $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$; $[0;\pi]$ — убывает, $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ — возрастает;

4) $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$; $[-\pi;0]$ — возрастает, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ — убывает.

711. 1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$. Т.к. функция cos x убывает на $[0;\pi]$ и $\frac{\pi}{7}<\frac{8\pi}{9}$, то $\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{8\pi}{9}$.

2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$. Т.к. cos x возрастает на $[\pi;2\pi]$ и $\frac{8\pi}{7}<\frac{10\pi}{7}$, то $\cos\frac{8\pi}{7}<\cos\frac{10\pi}{7}$.

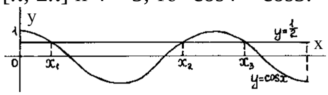
3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$. Т.к. cos x вохрастает на $[-\pi;0]$ и $-\frac{6\pi}{7}<-\frac{\pi}{8}$, то $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)<\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$. Т.к. cos x убывает на $[-2\pi;-\pi]$ и $-\frac{8\pi}{7}>-\frac{9\pi}{7}\neq$, то $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)<\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$.

5) cos 1 и cos3. Т.к. cos x убывает на $[0;\pi]$, а $1<3$, то $\cos 1>\cos 3$.

6) cos4 и cos5. Т.к. cos x возрастает на $[\pi;2\pi]$ и $4<5$, то $\cos 4<\cos 5$.

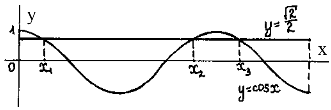
712. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$.



Построим графики функций

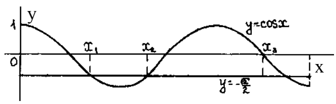
y = cos x и $y=\frac{1}{2}$ на отрезке $[0;3\pi]$. Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2 и x_3, являются корнями уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$; $x_1=\frac{\pi}{3},x_2=\frac{5\pi}{3},x_3=\frac{7\pi}{3}$.

2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Построим графики функций y = cos x и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[0;3\pi]$. Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2 и x_3 являются корнями уравнения $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_1=\frac{\pi}{4},x_2=\frac{7\pi}{4},x_3=\frac{9\pi}{4}$.

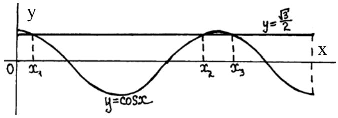
3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Построим графики функций y = cos x

и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке [0; 3π]. Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2 и x_3 являются решением уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_1 = \frac{3\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}, x_3 = \frac{11\pi}{4}$.

4) $\cos x = -\frac{1}{2}$.



Построим графики функций y = cos x и $y = -\frac{1}{2}$. Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которыех x_1, x_2 и x_3 являются корнями уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$; $x_1 = \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{4\pi}{3}, x_3 = \frac{8\pi}{3}$.

713. 1) $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

График функции y = cos x лежит не ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ при $x \in [0; x_1]$, $x \in [x_2; x_3]$. Значит, решение неравенства $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

2) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

График функции y = cos x лежит не ниже графика функции $y = -\frac{1}{2}$ при $x \in [0; x_1]$, $x \in [x_2; x_3]$. Значит, решение неравенства — $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right]$.

3) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

График функции y = cos x лежит ниже графика функции $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in [x_1; x_2]$, $x \in [x_2; x_3]$. Значит, решение неравенства — $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{11\pi}{4}; 3\pi\right)$.

4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

График функции y = cos x лежит ниже графика функции $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in [x_1; x_2]$, $x \in [x_3; 3\pi]$. Значит, решение неравенства — $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{13\pi}{6}; 3\pi\right)$.

714. 1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}$.

Т.к. cos x убывает на [0; π], и $\frac{\pi}{5}<\frac{3\pi}{10}$, то $\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{3\pi}{10}$, т.е. $\cos\frac{\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{5}$.

2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$; $\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5\pi}{14}$.

Т.к. cos x убывает на [0; π], и $\frac{\pi}{7}<\frac{5\pi}{14}$, то $\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{5\pi}{14}$, т.е. $\cos\frac{\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$.

3) $\cos\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$; $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$.

Т.к. cos x убывает на [0; π], и $\frac{3\pi}{8}>\frac{\pi}{8}$, то $\cos\frac{3\pi}{8}<\cos\frac{\pi}{8}$, т.е. $\cos\frac{3\pi}{8}<\sin\frac{3\pi}{8}$.

4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$.

Т.к. cos x убывает на [0; π], и $\frac{\pi}{5}>\frac{\pi}{10}$, то $\cos\frac{\pi}{5}<\cos\frac{\pi}{10}$, т.е. $\cos\frac{\pi}{5}<\sin\frac{3\pi}{5}$.

5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$; $\sin\frac{5\pi}{14}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{\pi}{7}$.

Т.к. cos x убывает на [0; π], и $\frac{\pi}{6}>\frac{\pi}{7}$, то $\cos\frac{\pi}{6}<\cos\frac{\pi}{7}$, т.е. $\cos\frac{\pi}{6}<\sin\frac{5\pi}{14}$.

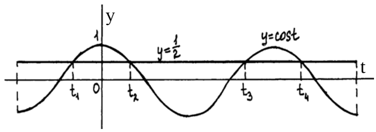
6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$; $\sin\frac{3\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$.

Т.к. cos x убывает на [0; π], и $\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{5}$, то $\cos\frac{\pi}{8}>\cos\frac{\pi}{5}$, т.е. $\cos\frac{\pi}{8}>\sin\frac{3\pi}{10}$.

715. 1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$. Обозначим 2x = t, т.к. $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, то $-\pi\le 2x=t\le 3\pi$.

Построим графики функции y = cos t и $y=\frac{1}{2}$ на отрезке [–π; 3π]. Эти графики пересекаются в четырех точках, абсциссы которых t_1, t_2, t_3, t_4 являются решением уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$.

$t_1=-\frac{\pi}{3}, t_2=\frac{\pi}{3}, t_3=\frac{5\pi}{3}, t_4=\frac{7\pi}{3}$, т.е. $x_1=-\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{6}, x_3=\frac{5\pi}{6}, x_4=\frac{7\pi}{6}$.



2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

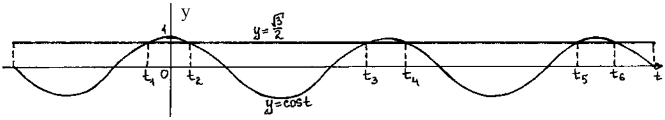
Обозначим 3x = t, т.к.

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{3\pi}{2}\le 2x\le\frac{9\pi}{2}$.

Построим графики фукнций y = cos t и $y=\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right]$. Эти графики пересекаются в шести точках t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, абсциссы которых являются решением уравнения $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$t_1 = -\frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{\pi}{6}, t_3 = \frac{11\pi}{6}, t_4 = \frac{13\pi}{6}, t_5 = \frac{23\pi}{6}, t_6 = \frac{25\pi}{6}$, т.е.

$x_1 = -\frac{\pi}{18}, x_2 = \frac{\pi}{18}, x_3 = \frac{11\pi}{18}, x_4 = \frac{13\pi}{18}, x_5 = \frac{23\pi}{18}, x_6 = \frac{25\pi}{18}$.



716. 1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Обозначим 2x = t, тогда $-\pi \le t \le 3\pi$.

График функции y = cos t лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ при $t \in [-\pi; t_1) \cup (t_2; t_3) \cup (t_4; 3\pi]$, т.е. $t \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}; 3\pi\right]$,

а $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

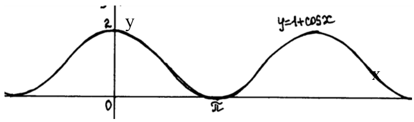
2) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Обозначим 3x = t; $-\frac{3\pi}{2} \le t \le \frac{9\pi}{2}$.

График функции y = cos t лежит выше графика функции $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $t \in (t_1; t_2) \cup (t_3; t_4) \cup (t_5; t_6)$, т.е. $t \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}\right)$, а $x \in \left(-\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{23\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}\right)$.

717. 1) y = 1 + cos x.

а) Область определения $x \in R$.;

б) Множество значений $0 \le y \le 2$;



в) Функция периодическая с периодом 2π;

г) Функция четная;

д) принимает наименьшее значение, равное 0, при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; принимает наибольшее значение, равное 2, при $x = 2\pi k$, $k \in Z$; функция неотрицательная;

е) возрастает при $x \in [\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$;

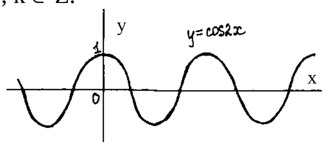
убывает при $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.

2) y = cos2x.

а) Область определения $x \in R$.

б) множество значений $-1 \le y \le 1$.

в) периодическая с периодом π.



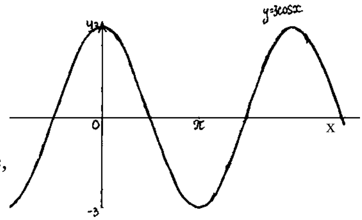
г) четная.

д) принимает наименьшее значение, равное –1, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

принимает наибольшее значение, равное 1, при x = πk, k ∈ Z принимает положительные значения при $x \in (-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k), k \in Z$ принимает отрицательные значения при $x \in (\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k), k \in Z$;

е) возрастает при $x \in \left[\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi+\pi k\right], k \in Z$; убывает при $x \in \left[\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right], k \in Z$.

3) y = 3cos x.



а) Область определения x ∈ R;

б) множество значений –3 ≤ y ≤ 3;

в) периодическая с периодом 2π;

г) четная;

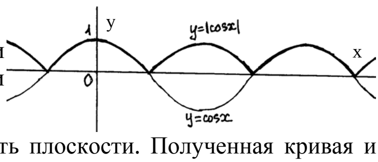
д) принимает наименьшее значение, равное –3, при x = π + 2πk, k ∈ Z принимает наибольшее значение, равное 3, при x = 2πk, k ∈ Z принимает положительные значения при $x \in (-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k), k \in Z$ принимает отрицательные значения при $x \in (\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k), k \in Z$;

е) возрастает при x ∈ [π + 2πk; 2π + 2πk], k ∈ Z убывает при x ∈ [2πk; π + 2πk], k ∈ Z.

718. 1) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$. Т.к. cos x убывает на [0; π], то $\cos\pi \le \cos x \le \cos\frac{\pi}{3}$ для всех $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, т.е. $-1 \le y \le \frac{1}{2}$.

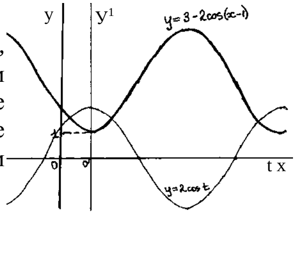
2) $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Т.к. cos x возрастает на [π; 2π], то $\cos\frac{5\pi}{4} < \cos x < \cos\frac{7\pi}{4}$ для всех $x \in \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$, т.е. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

719. 1) y = |cos x|.



Т.к. при cos x ≥ 0; y = cos x, а при cos x < 0; y = –cos x, то отразим части графика функции y=cos x, расположенные ниже оси абсцисс в верхнюю часть плоскости. Полученная кривая и будет графиком функции y = |cos x|.

2) y = 3 – 2cos(x – 1).



Построим график функции y = 2cos t, в системе координат 0′ty′. Графиком функции y = 2cos(x – 1) является эта же кривая в системе координат 0xy, где x – 1 = t, а y′ = y (т.е. 0 = 0′ – 1). Затем зеркально отобразим полученный график относительно оси 0x, получим график функции y = –2cos(x – 1). Подняв его на 3 единицы вверх, получим исходный график y = 3 – 2cos(x – 1).

720. 1) Значение, равное 0, 1, –1; 0 при 0, π, 2π, 3π;

1 при $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$; –1 при $\frac{3\pi}{2}$;

2) положительные значения: (0; π), (2π; 3π);

3) отрицательные значения: (π; 2π).

721. 1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ — возрастает; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ — убывает;

3) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ — убывает; 4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ — убывает;

5) [2; 4] — убывает; 6) [6; 7] — возрастает.

722. 1) [0; π]; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — возрастает, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ — убывает;

2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ — убывает, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ — возрастает;

3) [–π; 0]; $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ — убывает, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ — возрастает;

4) [–2π; –π]; $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ — возрастает, $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ — убывает.

723. 1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$.

Т.к. sin x убывает на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и $\frac{7\pi}{10} < \frac{13\pi}{10}$, то $\sin\frac{7\pi}{10} > \sin\frac{13\pi}{10}$.

2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$.

Т.к. sin x возрастает на $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ и $\frac{13\pi}{7} > \frac{11\pi}{7}$, то $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$.

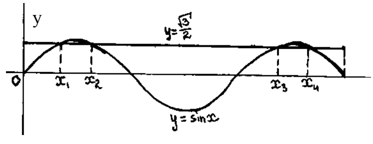
3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

Т.к. sinx убывает на $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ и $-\frac{8\pi}{7} < -\frac{9\pi}{8}$, то $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

4) sin7 и sin6. Т.к. sin x возрастает на $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ и 7 > 6, то sin7 > sin6.

724. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

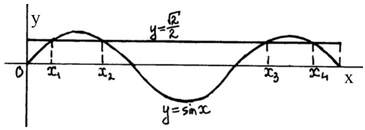
Построим графики функций y = sin x



и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке [0; 3π]. Эти графики пересекаются в четырех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{7\pi}{3}, x_4 = \frac{8\pi}{3}$.

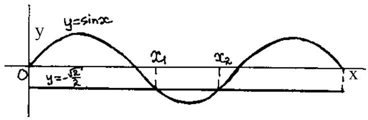
2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Построим графики функций y = sin x и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке [0; 3π]. Эти графики пересекаются в четырех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

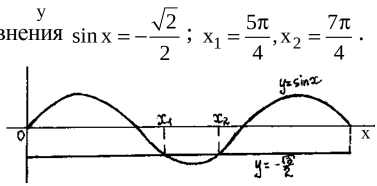
$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{9\pi}{4}, x_4 = \frac{11\pi}{4}$.

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Построим графики функций y = sin x и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке [0; 3π]. Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых x_1 и x_2 являются корнями уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_1 = \frac{5\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}$.

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Построим графики функций y = sin x и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке [0; 3π]. Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых x_1, x_2 являются корнями уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x_1 = \frac{4\pi}{3}, x_2 = \frac{5\pi}{3}$.

725. $\sin x > \frac{1}{2}$.

График функции y = sin x лежит выше графика функции $y = \frac{1}{2}$ при $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; x_4)$, т.е. $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$.

1) $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

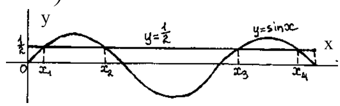


График функции y = sin x лежит не

выше графика функции $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при x $\in$ [0; x_1] U [x_2; x_3] U [x_4; 3π], т.е. $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{4};3\pi\right]$.

2) $\sin x \ge -\frac{1}{2}$.

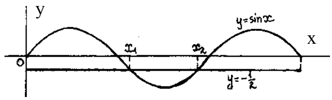


График функции y = sin x лежит не ниже графика функции $y=-\frac{1}{2}$ при x $\in$ [0; x_1] U [x_2; 3π], т.е. $x\in\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};3\pi\right]$.

3) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

График функции y = sin x лежит ниже графика функции $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ при x $\in$ (x_1; x_2), т.е. $x\in\left(\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$.

726. 1) $\sin\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{\pi}{9}$; $\cos\frac{\pi}{9}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)=\sin\frac{7\pi}{18}$;

Т.к. sin x возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\frac{\pi}{9}<\frac{7\pi}{18}$, то $\sin\frac{\pi}{9}<\sin\frac{7\pi}{18}$, т.е. $\sin\frac{\pi}{9}<\cos\frac{\pi}{9}$;

2) $\sin\frac{9\pi}{8}$ и $\cos\frac{9\pi}{8}$; $\cos\frac{9\pi}{8}=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{11\pi}{8}\right)=\sin\frac{11\pi}{8}$;

Т.к. sin x убывает на $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ и $\frac{9\pi}{8}<\frac{11\pi}{8}$, то $\sin\frac{9\pi}{8}>\sin\frac{11\pi}{8}$, т.е. $\sin\frac{9\pi}{8}>\cos\frac{9\pi}{8}$;

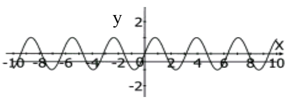
3) $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{5\pi}{14}$; $\cos\frac{5\pi}{14}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$;

Т.к. sin x возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\frac{\pi}{5}>\frac{\pi}{7}$, то $\sin\frac{\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{7}$, т.е. $\sin\frac{\pi}{5}>\cos\frac{5\pi}{14}$;

4) $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{3\pi}{10}$; $\cos\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}$;

Т.к. sin x возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{5}$, то $\sin\frac{\pi}{8}<\sin\frac{\pi}{5}$, т.е. $\sin\frac{\pi}{8}<\cos\frac{3\pi}{10}$.

727. 1) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$.



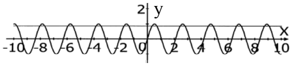
Построим графики функций y= sin 2x и $y=-\frac{1}{2}$ на данном отрезке. Эти графики пересекаются в шести точках, абсциссы которых являются корнями уравнения $\sin 2x=-\frac{1}{2}$. На отрезке [0; π] имеем два решения: $x_1=\frac{7\pi}{12}$; $x_2=\frac{11\pi}{12}$.

Период функции y= sin 2x равен π, поэтому так же будет решением $x=\frac{7\pi}{12}+\pi n$ и $x=\frac{11\pi}{12}+\pi k$; $n, k \in Z$.

Согласно графику имеем следующие решения:

$x=-\frac{17\pi}{12}$; $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Постройте графики функций y= sin 3x и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ на данном отрезке. Эти графики пересекаются в восьми точках. Период функции y= sin 3x равен $\frac{2\pi}{3}$. На отрезке $[0, \frac{2\pi}{3}]$ имеем два решения: $3x=\frac{\pi}{3}$ и $3x=\frac{2\pi}{3}$; $x=\frac{\pi}{9}$ и $x=\frac{2\pi}{9}$.

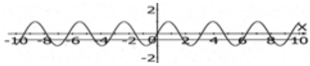
Согласно графику, учитывая период $\frac{2\pi}{3}$, получаем все решения:

$x=-\frac{11\pi}{9}$; $-\frac{10\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{9}$; $-\frac{4\pi}{9}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$;

y

$\frac{8\pi}{9}$

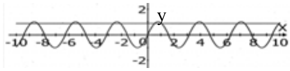
728. 1) $\sin 2x \geq -\frac{1}{2}$.



Построив графики $y=\sin 2x$ и $y=-\frac{1}{2}$, видим, что график функции $y=\sin 2x$ лежит выше графика функции $y=-\frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{17\pi}{12}\right]$; $\left[-\frac{13\pi}{12};\ -\frac{5\pi}{12}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{12};\ \frac{7\pi}{12}\right]$; $\left[\frac{11\pi}{12};\ \pi\right]$.

Значит, $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{17\pi}{12}$, $-\frac{13\pi}{12} \leq x \leq -\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12} \leq x \leq \pi$.

2) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

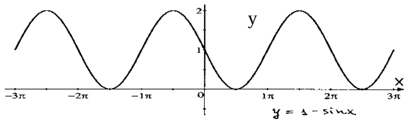


Построив графики $y=\sin 3x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, видим, что график функции $y=\sin 3x$ лежит ниже графика функции $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутках:

$\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{11\pi}{9}\right)\left(-\frac{10\pi}{9};\ -\frac{5\pi}{9}\right)\left(-\frac{4\pi}{9};\ \frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{2\pi}{9};\ \frac{7\pi}{9}\right)\left(\frac{8\pi}{9};\ \pi\right]$, значит,

$-\frac{3\pi}{2} \leq x < -\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9} < x < -\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9} < x < \frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9} < x \leq \pi$.

729. $y=1-\sin x$;



1) область определения — множество R всех действительных чисел;

2. множество значений — [0; 2];

3. функция $y=1-\sin x$ периодическая, $T=2\pi$;

4. функция $y=1-\sin x$ не нечетная и не четная;

5. функция $y=1-\sin x$ принимает:

значение, равное 0, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

наименьшее значение, равное 0, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

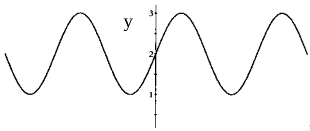
наибольшее значение, равное 2, при $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

положительные значения на всей области определения;
отрицательных значений не принимает;

возрастает на отрезках $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$;

убывает на отрезках $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$.

2) $y = 2 + \sin x$;



1. область определения — множество R всех действительных чисел
2. множество значений – [1; 3];
3. функция y = 2 + sinx периоди-ческая, T = 2π;
4. функция y = 2 + sinx не нечетная и не четная
5. функция y = 2 + sin x принимает:

значение, равное 0, не принимает;

наименьшее значение, равное 1, при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

наибольшее значение, равное 3, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

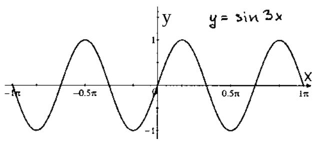
положительна на всей области определения;

отрицательных значений не принимает;

возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$;

убывает на отрезке $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$.

3) y=sin 3x;



1. область определения — множество R всех действительных чисел;
2. множество значений — [–1; 1];
3. функция y=sin 3x периодическая, $T=\frac{2\pi}{3}$;
4. функция y=sin 3x нечетная;
5. функция y=sin 3x принимает:

значение, равное 0, при $x=\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$;

наибольшее значение, равное 1, при $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$;

наименьшее значение, равное –1, при $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$;

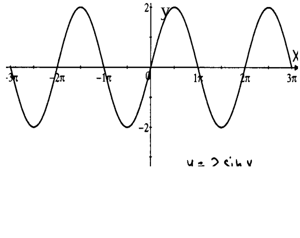
положительные значения на отрезках $\left[\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$;

отрицательные значения на отрезках $\left[\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$;

возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$;

убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$.

4) y = 2sin x;



1. область определения — множество R всех действительных чисел;
2. множество значений — [–2; 2];

3. функция y = 2sin x периодическая, $T=2\pi$;
4. функция y=2sin x нечетная;
5. функция y=2sin x принимает:

значение, равное 0, при $x=\pi n$, $n\in Z$;

наибольшее значение, равное 2, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

наименьшее значение, равное –2, при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

положительные значения на отрезках $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, $n\in Z$;

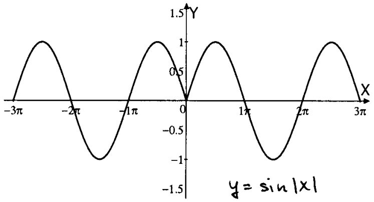
отрицательные значения на отрезках $[-\pi+2\pi n, 2\pi n]$, $n\in Z$;

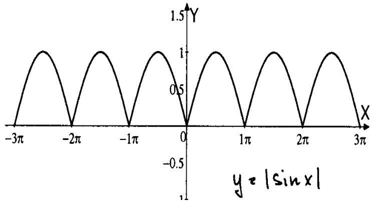
возрастает на отрезках $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$;

убывает на отрезках $[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$.

730. 1) множество значений [0; 1]; 2) множество значений $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

731. 1) 2)

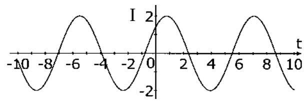


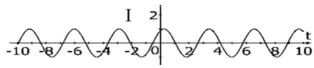


732. $I=A\sin(\omega t+\varphi)$;

1) $A=2$; $\omega=1$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$; $I=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $A=1$; $\omega=2$; $\varphi=\frac{\pi}{3}$; $I=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$.





733. 1) $\mathrm{tg}\,x=0$ при $x=\pi n$, $n\in Z$; 2) $\mathrm{tg}\,x>0$ при $x\in[\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n]$, $n\in Z$;

3) $\mathrm{tg}\,x<0$ при $x\in[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n]$, $n\in Z$.

734. 1) возрастает; 3) возрастает; 2) возрастает; 4) возрастает.

735. 1) tg x возрастает на $[0; \frac{\pi}{2})$ и $0<\frac{\pi}{7}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}>\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}$;

2) tg x возрастает на $(\frac{\pi}{2}; \pi]$ и $\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{8}=\frac{63\pi}{8\cdot 9}<\frac{64\pi}{8\cdot 9}=\frac{8\pi}{9}<\pi$ следовательно,

$\mathrm{tg}\frac{7\pi}{8}>\mathrm{tg}\frac{8\pi}{9}$;

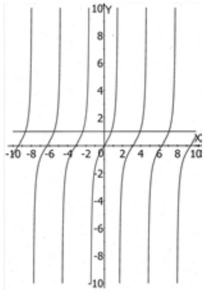
3) tg x возрастает на $[-\pi; -\frac{\pi}{2})$ и

$-\pi < -\frac{8\pi}{9} = -\frac{64\pi}{8\cdot 9} < -\frac{63\pi}{8\cdot 9} = -\frac{7\pi}{8} < -\frac{\pi}{2}$ следовательно, $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right) >$ $\mathrm{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;

4) tg x возрастает на $(-\frac{\pi}{2};\ 0]$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{5} < -\frac{\pi}{7} < 0$ следовательно, $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

5) tg x возрастает на $(\frac{\pi}{2};\ \pi]$ и $\frac{\pi}{2} < \frac{4}{2} = 2 < 3 < \pi$ следовательно, tg 2< tg3;

6) tg x возрастает на $[0;\ \frac{\pi}{2})$ и $0<1<1{,}5<\frac{\pi}{2}$ следовательно, tg 1< tg 1,5.



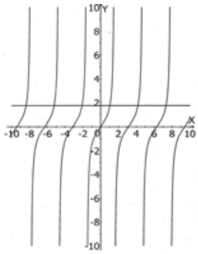
736. 1) tg x = 1;

Постройте графики функций y=tg x и y=1 на промежутке (–π; 2π). На этом промежутке мы имеем 3 пересечения. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ имеем решение tg x =1; $x=\frac{\pi}{4}$.

Из периодичности функции tg x (T = π) имеем остальные решения: x= $= -\frac{3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}$.

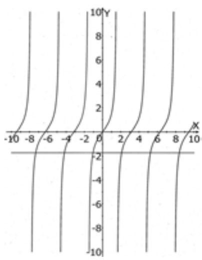
2) tg x = $\sqrt{3}$.

Аналогично 1) строим графики y=tg x и y= $\sqrt{3}$.



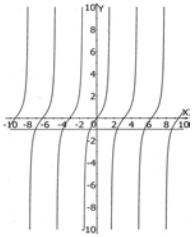
Имеем три пересечения на заданном промежутке. Зная, одно решение $x=\frac{\pi}{3}$ и учитывая периодичность, находим решения: $x=-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$.

3) tg x = $-\sqrt{3}$.



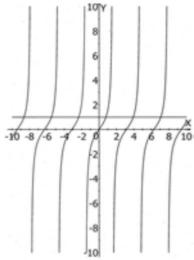
Строим графики y=tg x и y= $-\sqrt{3}$. Имеем три пересечения на заданном промежутке. Зная одно решение $x=-\frac{\pi}{3}$ и учитывая периодичность, находим решения: $x=-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{3}$.

4) tg x = –1.



Строим графики y=tg x и y= –1. Имеем три пересечения на заданном промежутке. Зная, одно решение x= $-\frac{\pi}{4}$ и учитывая периодичность, находим решения: x=$-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$.

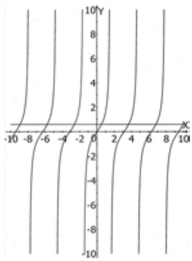
737. 1) tg x ≥1.



Строим графики y=tg x и y=1. Находим решения tg x =1. Они и будут являться точками пересечения. График y=tg x лежит выше y=1 на промежутках $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right)$. Значит, решением неравенства будут эти промежутки:

$$-\frac{3\pi}{2}\le x<-\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}.$$

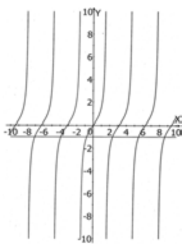
2) tg x $<\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Строим графики y=tg x и y=$\frac{\sqrt{3}}{3}$. По алгоритму задачи 736 находим решения уравнения tg x $=\frac{\sqrt{3}}{3}$; x= $-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}$. График y=tg x лежит ниже y=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ на промежутках $\left[-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$. Значит, решением неравенства будут следующие промежутки.

$$-\pi\le x<-\frac{5\pi}{6},\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{6},\quad \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi.$$

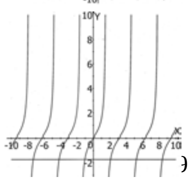
3) tg x <–1.



Решение tg x = –1 приведено в № 736. График y=tg x лежит ниже y= –1 на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right)$, значит, решением неравенства будут следующие промежутки:

$$-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}.$$

4) tg x $\ge-\sqrt{3}$.



Решение tg x = $-\sqrt{3}$ см. № 736. График y = tg x лежит выше y=$-\sqrt{3}$ на промежутках:

$\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{2\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{5\pi}{3};\ 2\pi\right]$, значит, реше-нием неравенства будут следующие промежутки:

$-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$, $\quad -\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2}$, $\quad \frac{2\pi}{3} \le x < \frac{3\pi}{2}$, $\quad \frac{5\pi}{3} \le x \le 2\pi$.

738. 1) tg x <1.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, что решением этого неравенства будет промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$. Учитывая периодичность функции tg x, имеем общее решение: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

2) tg x ≥ $\sqrt{3}$.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, что решением этого неравенства будет промежуток $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая периодичность функции tg x, имеем общее решение: $x \in \left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

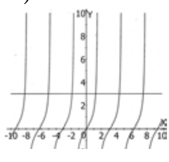
3) tg x $\le -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, что решением этого неравенства будет промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\right]$. Учитывая периодичность функции tg x, имеем общее решение: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

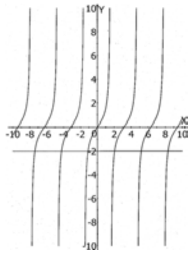
4) tg x >–1.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, что решением этого неравенства будет промежуток $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая периодичность функции tg x, имеем общее решение: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

739. 1) tg x =3.



Построим графики y=tg x и y=3. Имеем три точки пересечения. Одно решение очевидно: x= arctg 3. Из периодичности функции получим остальные решения: x= arctg 3 +πn, n=0,1,2.



2) tg x = –2.

Рассуждения, аналогичные рассуждениям в п.1, приведут к ответу:x= arctg (–2) +πn, n=1,2,3.

740. 1) tg x > 4.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Решение x∈ (arctg 4, $\frac{\pi}{2}$). Из периодичности получили: x∈ (arctg 4+πn, $\frac{\pi}{2}$ +πn), n∈Z.

2) tg x < 5.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение x∈ (–$\frac{\pi}{2}$; arctg 5]. Общее решение: x∈ (–$\frac{\pi}{2}$ +πn, arctg 5+πn], n∈Z.

3) tg x < –4.

Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение x∈ (–$\frac{\pi}{2}$; arctg (–4)).

Общее решение: x∈ (–$\frac{\pi}{2}$ +πn, –arctg 4+πn], n∈Z.

4) tg x ≥ –5.

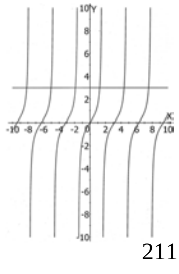
Рассмотрим это неравенство на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение x∈ [–arctg 5; $\frac{\pi}{2}$). Общее решение: x∈ [–arctg 5+πn; $\frac{\pi}{2}$ +πn), n∈Z.

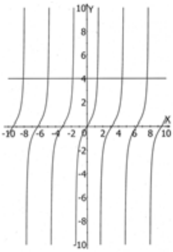
741. 1) tg x≥3.

Построив графики y=tg x и y=3, найдем решения tg x =3 на этом промежутке: x=arctg 3, arctg 3+π, arctg 3+2π.

График y=tg x лежит выше y=3 на промежутках



$\operatorname{arctg} 3 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 3+\pi \le x < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 3+2\pi \le x < \frac{5\pi}{2}$.

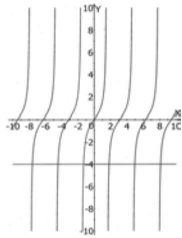


2) tg x<4.

Построив графики y=tg x и y=4, найдем решения tg x =4 на этом промежутке: x=arctg 4, arctg 4+π, arctg 4+2π..

График y=tg x лежит ниже y=4 на промежутках

$0 \le x < \operatorname{arctg} 4$, $\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4+\pi$, $\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4+2\pi$, $\frac{5\pi}{2} < x \le 3\pi$.



3) tg x≤ –4.

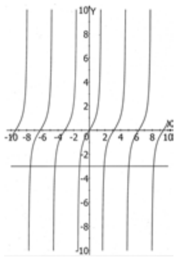
Решим уравнение tg x = –4 с учетом, что $x \in [0; 3\pi]$:

x= –arctg 4+π, –arctg 4+2π, –arctg 4+3π.

График y=tg x лежит ниже y= –4 на промежутках

$\frac{\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg} 4+\pi$, $\frac{3\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg} 4+2\pi$,

$\frac{5\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg} 4+3\pi$.



4) tg x> –3.

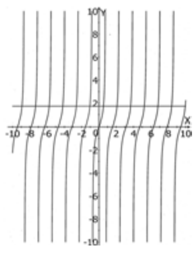
Решим уравнение tg x = –3 с учетом, что $x \in [0; 3\pi]$:

x= –arctg 3+πn, n=1,2,3.

График y=tg x лежит выше y= –3 на промежутках

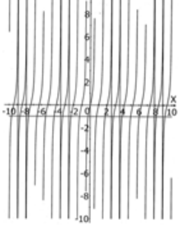
$0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3+\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3+2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$,

arctg 3+3π<x≤3π.



742. 1) tg 2x= $\sqrt{3}$.

Построим графики y=tg 2x и y= $\sqrt{3}$. Пересечение состоит из трех точек, значит, три решения. Одно очевидно — $x=\frac{\pi}{6}$. Учитывая периодичность, которая в данном случае равна $T=\frac{\pi}{2}$, получили $x=-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$.



2) tg 3x= –1.

Построим графики y=tg 3x и y= –1. Пересечение — пять точек. Одно решение очевидно: $x=-\frac{\pi}{12}$. Учитывая период $\frac{\pi}{3}$, получаем:

$$x=-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}.$$

743. 1) tg 2x ≤1.

Решение уравнения tg 2x =1 будет: $x=-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. График y=tg 2x лежит ниже y=1 на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{3\pi}{8}\right], \left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{8}\right], \left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{8}\right], \left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$.

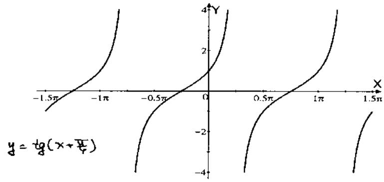
2) $\text{tg } 3x < -\sqrt{3}$.

Решением уравнения $\text{tg } 3x = -\sqrt{3}$ будет: $x=-\frac{4\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$.

График y=tg 3x лежит ниже $y=-\sqrt{3}$ на промежутках

$-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{4\pi}{9}, \quad -\frac{\pi}{6}<x<-\frac{\pi}{9}, \quad \frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{9}, \quad \frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{9}, \quad \frac{5\pi}{6}<x<\frac{8\pi}{9}$.

744. 1) $y=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.



1. Область определения — все действительные числа, исключая точки $\frac{\pi}{4}+\pi n$, n∈ Z;

2. множество значений — (–∞; +∞);

3. функция $y=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ периодична T=π;

4. функция $y=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ не обладает четностью–нечетностью;

5. функция $y=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ принимает:

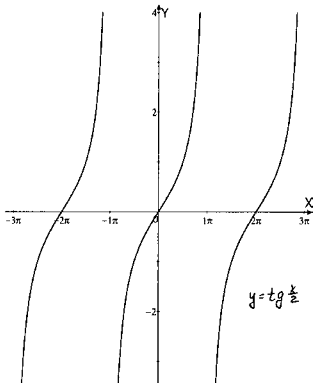
значение 0 при $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, n∈ Z;

положительные значения на промежутках $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, n∈ Z;

отрицательные значения на промежутках $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, n∈ Z;

возрастает на $\left(-\frac{3\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, n∈ Z.

2) $y=\text{tg}\frac{x}{2}$.



1. Область определения — все действительные числа, исключая точки π+2πn, n∈ Z

2. множество значений — (–∞; +∞)

3. функция $y=\text{tg}\frac{x}{2}$ периодична T=2π

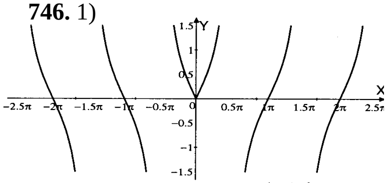
4. функция $y=\text{tg}\frac{x}{2}$ нечетна

5. функция y= tg $\frac{x}{2}$ принимает:

значение 0 при x=2πn, n∈Z;
положительные значения при x∈(2πn, π+2πn), n∈Z;
отрицательные значения при x∈(–π+2πn, 2πn), n∈Z;
возрастает на (–π+2πn, π+2πn) , n∈Z.

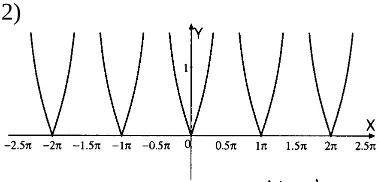
745. 1) $[-1;\ \sqrt{3}\ ]$; 2) (–1; +∞);
3) (–∞; 0)∪(0; +∞); 4) (–∞; –1)∪(1; +∞).

746. 1)



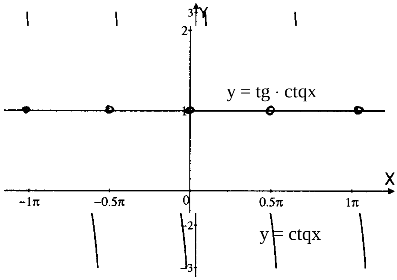
y = tg|x|

2)

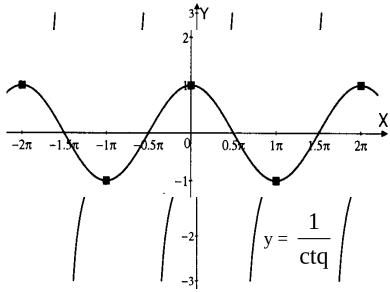


y = |tgx|

3)



4)

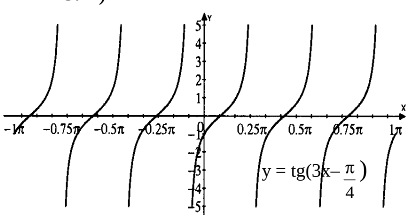


747. 1) 2)

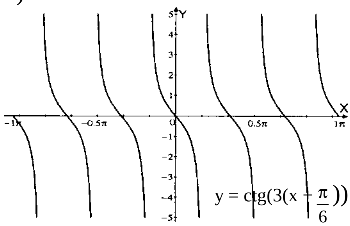
Y

Y

748. 1)

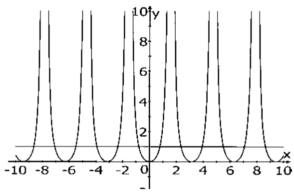


2)

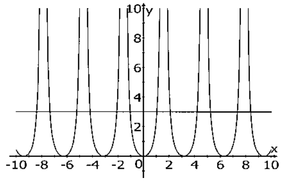


749. 1) $tg^2x < 1$.

Построим график функции $tg^2x=y$ и y=1 на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Видим, две точки

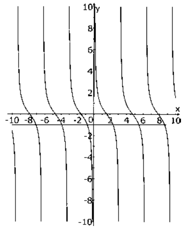


пересечения с абсциссами $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$. График y= tg ^{2}x лежит ниже y=1 на промежутке $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. Значит, в общем случае решение неравенства — промежутки $(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n)$, $n\in Z$.



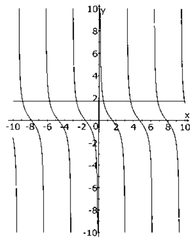
2) $tg^2\,x \geq 3$.

На том же графике построим y=3. Опять на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ видим, две точки пересечения с абсциссами $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ и график y= tg^2 x лежит выше y=3 на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. Общее решение $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$ и $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi\right]$, $n\in Z$.



3) ctg x≥–1.

Построим графики y=ctg x и y= –1. Рассмотрим промежуток [0,π]. Имеем на нем одно пересечение x=$\frac{3\pi}{4}$ и график y= ctg x лежит выше y= –1 на промежутке (0; $\frac{3\pi}{4}$]. Общее решение (πn; $\frac{3\pi}{4}$+πn], $n\in Z$.



4) ctg x > $\sqrt{3}$

На том же графике построим y=$\sqrt{3}$. На промежутке [0;π] имеем одно пересечение x=$\frac{\pi}{6}$ и график функции y= ctg x лежит выше y=$\sqrt{3}$ на промежутке (0;$\frac{\pi}{6}$) и общее решение: (πn, $\frac{\pi}{6}$+πn), $n\in Z$.

750. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\quad \frac{1}{3}<\frac{2}{5}$; $\quad \frac{5}{15}<\frac{6}{15}$.

Функция y=arcsin x возрастающая, значит, arcsin$\frac{1}{\sqrt{3}}$<arcsin $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

2) $-\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$; $\quad -\frac{8}{12}>-\frac{9}{12}$.

Функция y=arcsin x возрастающая, значит, arcsin$-\frac{2}{3}$>arcsin $-\frac{3}{4}$.

751. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Т.к. функция y=arccos x убывающая, то arccos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ <arccos $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2) $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{3}$, т.к. $-\frac{12}{15} < -\frac{5}{12}$.

Т.к. функция y=arccos x убывающая, то arccos$\left(-\frac{4}{5}\right)$>arccos $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

752. 1) 2$\sqrt{3}$ <3$\sqrt{2}$, т.к. 12<18.

Т.к. функция y=arctg x возрастающая, то arctg 2$\sqrt{3}$ <arctg 3$\sqrt{2}$.

2) $-\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Т.к. функция y=arctg x возрастает, то arctg$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$<arctg $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

753. 1) arcsin (2–3x)=$\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, 2–3x=sin; $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2–3x=$\frac{1}{2}$ x=$\frac{1}{2}$.

2) arcsin (3–2x)= $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, 3–2x=sin$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3–2x=$\frac{\sqrt{2}}{2}$; x=$\frac{6-\sqrt{2}}{4}$.

3) arcsin $\frac{x-2}{4} = -\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, по определению

$\frac{x-2}{4}$=sin $\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{x-2}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; x= $2-2\sqrt{2}$.

4) arcsin $\frac{x+3}{2} = -\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, по определению

$\frac{x+3}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x+3}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; x= $-3-\sqrt{3}$.

754. 1) arccos (2x+3)= $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} \in [0;\pi]$, следовательно, по определению

2x+3=cos $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; 2x+3=$\frac{1}{2}$; x= $-\frac{5}{4}$.

2) arccos (3x+1)=$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} \in [0;\pi]$, следовательно, по определению

3x+1 =cos $\frac{\pi}{2}$ =0; 3x+1=0; x=$-\frac{1}{3}$.

3) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$, следовательно, по определению

$\frac{x+1}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$; $\frac{x+3}{2}=-\frac{1}{2}$; x=$-\frac{5}{2}$.

4) $\arccos\frac{2x-1}{3}$=π; π∈[0;π], следовательно, по определению

$\frac{2x-1}{3}$=cos π= –1; $\frac{2x-1}{3}$= –1; x= –1.

755. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{4}=\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, по определению

$\frac{1-x}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; $\frac{1-x}{4}=\sqrt{3}$; x=$1-4\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{3}=\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, по определению

$\frac{1+2x}{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$; $\frac{1+2x}{3}=1$; x=1.

3) arctg (2x+1)= $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, по определению

2x+1=tg$-\frac{\pi}{3}$=$-\sqrt{3}$; 2x+1= $-\sqrt{3}$ x=$\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$.

4) arctg (2–3x)= $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, по определению

2–3x=tg$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$= –1; 2–3x= –1; x=1.

756. 1) $-1\le\frac{x-3}{2}\le 1$, следовательно, 1≤x≤5.

2) –1≤2–3x≤1, следовательно, 1≥x≥$\frac{1}{3}$.

3) –1≤x2 $\sqrt{x}$ –3≤1; 1≤ $\sqrt{x}$ ≤2; 1≤x≤4.

4) $-1\le\frac{2x^2-5}{3}\le 1$; $1\le x^2\le 4$ $\left[\begin{array}{l}1\le x\le 2\\ -2\le x\le -1\end{array}\right.$.

757. Проведем параллельный перенос графика y=arccos x на $\frac{\pi}{2}$ вниз по оси y так, чтобы совпала точка (0, $\frac{\pi}{2}$) с точкой (0,0). Теперь он имеет вид f(x)=arccos x–$\frac{\pi}{2}$

Рассмотрим f(–x), учитывая, что arccos x + arccos (–x)=π,получим f(–x) = =arccos (–x)– $\frac{\pi}{2}$ =π–arccos x – $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{\pi}{2}$ –arccos x= –(arccos x– $\frac{\pi}{2}$)= –f(x). Следовательно, это функция нечетна и симметрична относительно точки (0, $\frac{\pi}{2}$).

758. 1) y=sin x +cos x. Область определения — множество действительных чисел.

2) y=sin x + tg x. Область определения — множество действительных чисел, исключая точки $\frac{\pi}{2}$ +πn, n∈ Z.

3) y = $\sqrt{\sin x}$. Область определения — x∈ [2πn; π+2πn], n∈ Z.

4) y = $\sqrt{\cos x}$. Область определения — x∈ [– $\frac{\pi}{2}$ +2πn, $\frac{\pi}{2}$ +2πn], n∈ Z.

5) y = $\frac{2x}{2\sin x-1}$; 2sin x ≠1. Область определения — множество действительных чисел, исключая точки $\frac{\pi}{6}$ +2πn, и $\frac{5\pi}{6}$ +2πn, n∈ Z.

6) y= $\frac{\cos x}{2\sin^2 x-\sin x}$; sin x (2sin x –1) ≠0; $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ 2\sin x\neq 0\end{cases}$.

Область определения — множество действительных чисел, исключая точки $\frac{\pi}{6}$ +2πn, и $\frac{5\pi}{6}$ +2πn, πn, n∈ Z.

759. 1) y=1–2sin^2 x;
sin x ∈ [–1;1]; sin^2 x∈ [0;1]; 2sin^2 x∈ [0;2]; 1–2sin^2 x∈ [–1;1];
2) y=2cos^2 x –1; cos^2 x∈ [0;1]; 2cos^2 x∈ [0;2]; 2cos^2 x –1∈ [–1;1];
3) y=3– 2sin^2 x; 2sin^2 x∈ [0;2]; 3– 2sin^2 x∈ [1;3];
4) y=2cos^2 x +5; 2cos^2 x∈ [0;2]; 2cos^2 x +5∈ [5;7];
5) y=cos 3x sin x –sin 3x cos x +4; y=sin (x–3x)+4=4–sin 2x;
sin 2x∈ [–1;1]; 4–sin 2x ∈ [3; 5];
6) y=cos 2x cos x + sin 2x sin x –3; y=cos (2x–x)–3=cos x –3;
cos x ∈ [–1;1]; cos x –3∈ [–4;–2].

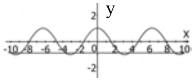
760. 1) y=x^2+ cos x; y(–x)=(–x)^2+cos(–x)=x^2+cos x = y(x) — четная;
2) y=x^3–sin x4
y(–x)=(–x)^3–sin (–x) = –x^3+sin x = –(x^3–sin x)= –y(x) — функция нечетная;
3) y=(1–x^2)cos x; y(–x)=(1–(–x^2))cos (–x)= (1–x^2)cos x=y(x) — четная;
4) y=(1+sin x)sin x; y(–x)=(1+sin (–x))·sin (–x)=(1–sin x)·(–sin x);
Не является четной и нечетной.

761. 1) y=cos 7x.
Период функции y=cos 7x T=2π; cos (7x+2π)=cos 7x = cos 7(x+T_1);
7x+2π=7x+7T_1; 2π=7 T_1; T_1= $\frac{2\pi}{7}$.

2) $y=\sin\frac{x}{7}$.

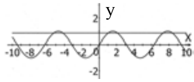
Период функции $y=\sin t$ $T=2\pi$;

$\sin\left(\frac{x}{7}+2\pi\right)=\sin\frac{x}{7}=\sin\frac{x+T_1}{7}$; $\frac{x}{7}+2\pi=\frac{x}{7}+\frac{T_1}{7}$; $2\pi=\frac{T_1}{7}$; $T_1=14\pi$.



762. 1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

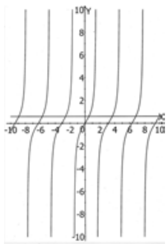
Построим графики $y=\cos x$ и $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим их пересечения на промежутке$[0;3\pi]$. Точек пересечения три. Два решения очевидны: $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$. Учитывая периодичность, получаем ответ: $x=\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6}$.



2) $\sqrt{3}-\sin x=\sin x$; $2\sin x=\sqrt{3}$; $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

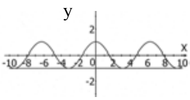
Рассмотрим пересечение графиков $y=\sin x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[0;3\pi]$. Имеем четыре пересечения. Два очевидны и два — из периодичности: $x=\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.

3) $3\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Рассмотрим пересечение графиков $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ на промежутке $[0;3\pi]$. Имеем три пересечения. Одно очевидно, остальные — из периодичности: $x=\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$.

4) $\cos x+1=0$; $\cos x=-1$.



Рассмотрим пересечение графиков $y=\cos x$ и $y=-1$ на промежутке $[0;3\pi]$. Имеем два пересечения. Одно очевидно, остальные — из периодичности: $x=\pi,\ 3\pi$.

763. 1) $1+2\cos x\geq 0$; $\cos x\geq -\frac{1}{2}$.

Найдем решение уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$ на промежутке $[-2\pi;-\pi]$: $x=-\frac{4\pi}{3}$.

На этом промежутке график $y=\cos x$ лежит выше $y=-\frac{1}{2}$ при $x\in\left[-2\pi;-\frac{4\pi}{3}\right]$.

2) $1-2\sin x<0$; $\sin x>\frac{1}{2}$.

Найдем решение уравнения $x=\frac{1}{2}$ на промежутке $[-2\pi; -\pi]$. $x=-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

График функции y= sin x выше $y=\frac{1}{2}$ на промежутке $x\in\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$.

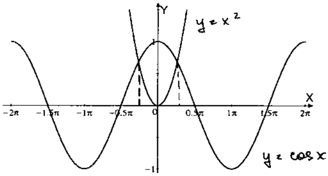
3) $2+\text{tg } x>0$; $\quad$ $\text{tg } x>-2$.

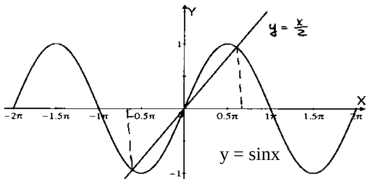
Рассмотрим решение уравнения $\text{tg } x = -2$ на промежутке $[-2\pi; -\pi]$: $x= -\text{arctg } 2-\pi$. График $y=\text{tg } x$ лежит выше $y= -2$ на этом промежутке при $x\in[-2\pi; -\frac{3\pi}{2})\cup(-\text{arctg } 2-\pi; -\pi]$.

4) $1-2\text{tg } x\le 0$; $\quad$ $\text{tg } x\ge\frac{1}{2}$.

Рассмотрим решение уравнения $\text{tg } x =\frac{1}{2}$ на промежутке $[-2\pi; -\pi]$: $x=\text{arctg}\frac{1}{2}-2\pi$. График $y=\text{tg } x$ лежит выше $y=\frac{1}{2}$ на этом промежутке при $x\in[\text{arctg}\frac{1}{2}-2\pi; -\frac{3\pi}{2})$.

764. 1) $\cos x = x^2$ — два решения; $\quad$ 2) $\sin x = \frac{x}{2}$ — три решения;





765. 1) $y=\text{tg }(2x+\frac{\pi}{6})$.

Все действительные числа, исключая $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

$2x=\frac{\pi}{3}+\pi n$; $\quad$ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$;

2) $y=\sqrt{\text{tg } x}$; $\quad$ $\begin{cases} x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \\ tg\ x\ge 0 \end{cases}$.

Область определения — $x\in[\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n],\ n\in Z$.

766. 1) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$;

$\cos^4 x\in[0;1]$; $\max(\cos^4)=1$, $\min(\cos^4)=0$;

$\sin^4 x\in[0;1]$; $(-\sin^4 x)\in[-1; 0]$; $\max(-\sin^4 x)=0$, $\min(-\sin^4 x)= -1$;

$\max y=1+0=1$; $\min y=1+(-1)= -1$;

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=\frac{1}{2}(\sin^2x-\cos^2x);$

$\max(\sin^2x)=1$, т.к. $\sin^2x\in[0,1]$; $\min(\sin^2x)=0$;
$\max(-\cos^2x)=0$, т.к. $\cos^2x\in[-1;0]$; $\min(-\cos^2x)=-1$;
$\max y=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$; $\min y=\frac{1}{2}(0+(-1))=-\frac{1}{2}$;

3) $y=1-2|\sin 3x|$;
$\sin 3x\in[-1;1]$; $|\sin 3x|\in[0;1]$; $2|\sin 3x|\in[0;2]$;
$-2|\sin 3x|\in[-2;0]$; $\max(-2|\sin 3x|)=0$ $\min(-2|\sin 3x|)=-2$;
$\max y=1+0=1$ $\min y=1+(-2)=-1$;
4) $y=\sin^2x-\cos^2x=1-3\cos^2x$;
$\cos^2x\in[0;1]$; $3\cos^2x\in[0;3]$; $-3\cos^2x\in[-3;0]$;
$\max(-3\cos^2x)=0$ $\min(-3\cos^2x)=-3$; $\max y=1+0=1$ $\min y=1+(-3)=-2$.

767. 1) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$;
$y(-x)=\sin(-x)+\operatorname{tg}(-x)=-\sin x-\operatorname{tg} x=-(\sin x+\operatorname{tg} x)=-y(x)$ — нечетная;
2) $y=\sin x\cdot\operatorname{tg} x$;
$y(-x)=\sin(-x)\cdot\operatorname{tg}(-x)=(-\sin x)\cdot(-\operatorname{tg} x)=\sin x\cdot\operatorname{tg} x=y(x)$ — четная;
3) $y=\sin x\,|\cos x|$;
$y(-x)=\sin(-x)\cdot|\cos(-x)|=-\sin x\cdot|\cos x|=-(\sin x\cdot|\cos x|)=-y(x)$ — нечетная.

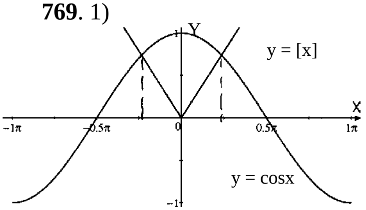
768. 1) $y=2\sin(2x+1)$. Период функци $y=\sin x$; $T=2\pi$;
$\sin((2x+1)+2\pi)=\sin(2x+1)=\sin(2(x+T_1)+1)$;
$2x+1+2\pi=2x+2T_1+1$; $T_1=\pi$;

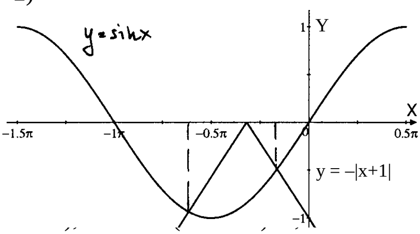
2) $y=3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1)$. Период функции $y=\operatorname{tg} x$; $T=\pi$;

$\operatorname{tg}\left(\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+T_1+1)$;

$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+\pi=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}T_1+\frac{1}{4}$ $T_1=4\pi$.

769. 1) 2)





770. 1) $y=\cos^2 x-\cos x=\cos x$ (co
либо $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; либо $\cos x=1$; $x=2\pi n,\ n\in Z$;

2) $y=\cos x-\cos 2x-\sin 3x=2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}=$

$=2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\!-\cos\frac{3x}{2}\right)=0;$ либо $\sin\frac{3x}{2}=0;$ $\frac{3x}{2}=\pi n;$

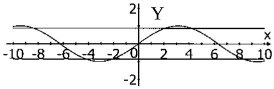
$x=\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z;$ либо $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0,$

тогда $\sin\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}\right)=2\cos\frac{\pi-2x}{4}\sin\frac{4x-\pi}{4}=0;$

либо $\cos x\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0;$ $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=2\pi n,\ n\in Z;$ $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}-2\pi n;$

$x=\frac{\pi}{2}-4\pi n,\ n\in Z;$ либо $\sin(x-\frac{\pi}{4})=0;$ $x-\frac{\pi}{4}=\pi n;\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

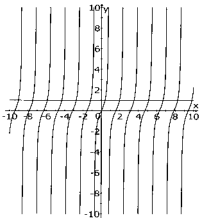
771. $y=1{,}5-2\sin^2\frac{x}{2}>0;$



$1{,}5-2\sin^2\frac{x}{2}>0;$

$\sin^2\frac{x}{2}<\frac{3}{4}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Соответственно графику имеем решение:

$x\in(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n),\ n\in Z.$

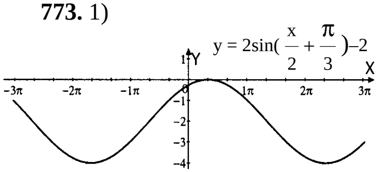


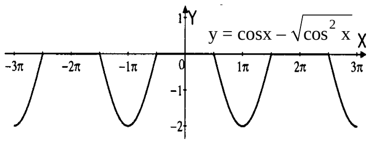
772. $y=\mathrm{tg}\,2x-1;$

$\mathrm{tg}\,2x-1<0;\ \mathrm{tg}2x<1;$

Из графика видно, что $y=\mathrm{tg}2x$ лежит ниже $y=-1$ на промежутках $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$.

773. 1) 2)





774. 1) $y=12\sin x-5\cos x=13\cdot\sin(x-\varphi);$ $\varphi=\arccos\frac{12}{13}$ $y\in[-13;\ 13];$

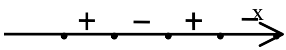
2) $y=\cos^2x-\sin^2x=1-\sin^2x-\sin x=-(\sin^2x+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sin x+\frac{1}{4})+\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{4}-(\sin x+\frac{1}{2})^2;$

$-1\le y\le\frac{5}{4}.$

775. 1) $\sin x\ge\cos x;$ $\sin x-\cos x\ge0;$ $\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ge0;$

$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\ge0;\ \sin(x-\frac{\pi}{4})\ge0;\ 2\pi n\le x-\frac{\pi}{4}\le\pi+2\pi n$ $\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n,,\ n\in Z;$

2) $\mathrm{tg}\,x>\sin x;$ $\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x>0;$ $\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}>0;$ $\mathrm{tg}\,x(1-\cos x)>0$ для $\mathrm{tg}\,x;$



$-\pi \quad -\frac{\pi}{2} \qquad 0 \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \pi$

$|\cos x|<1$; $\qquad \left.\begin{matrix} 1-\cos x \geq 0 \\ 1-\cos x = 0 \end{matrix}\right\}$; $\qquad$ значит, $\operatorname{tg} x\,(1-\cos x)>0$

при $x=2\pi n,\ n\in Z$; $\qquad$ при $x\in(0;\frac{\pi}{2})$ и $(-\pi;-\frac{\pi}{2})$

или в общем при $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и $-\pi+2\pi n<x<-\frac{\pi}{2}+2\pi n$.