ОГЛАВЛЕНИЕ

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1

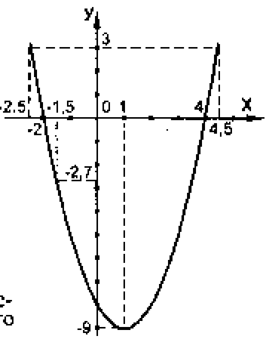
Вариант 1. К-1

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ может быть разложен на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2.

а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 14x + 45$, решив для этого квадратное уравнение $x^2 - 14x + 45 = 0$ с четным вторым коэффициентом. Определяем дискриминант уравнения $D_1 = (-7)^2 - 1 \cdot 45 = 49 - 45 = 4 = 2^2$ и его корни $x = 7 \pm \sqrt{2^2} = 7 \pm 2$, т.е. $x_1 = 9$ и $x_2 = 5$. Теперь данный многочлен легко разложить на множители: $1 \cdot (x - 9)(x - 5) = (x - 9)(x - 5)$.

б) Найдем корни квадратного трехчлена $3y^2 + 7y - 6$, решив соответствующее уравнение. Определяем дискриминант уравнения $D=7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)=49 + 72 = =121 = 11^2$ и его корни $y = \frac{-7 \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm 11}{6}$, т.е. $y_1 = \frac{-7+11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ и $y_2 = \frac{-7-11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $3 \cdot \left(y - \frac{2}{3}\right)(y - (-3)) = 3\left(y - \frac{2}{3}\right)(y + 3)$. Можно также внести число 3 в первую скобку: $\left(3y - 3 \cdot \frac{2}{3}\right)(y+3) = (3y-2)(y+3)$.

2. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 8$. Для этого выделим полный квадрат: $y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9$. Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на одну единицу вправо и на девять единиц вниз. Теперь легко ответить на вопрос задачи, используя построенный график.



а) при $x = 1,5$ $y \approx -2,7$ (точное значение $y = (-1,5)^2 - 2 \cdot (-1,5) - 8 = 2,25 + 3 - 8 = -2,75$);

б) значение $y = 3$ при $x_1 \approx -2,5$ и $x_2 \approx 4,5$ (для нахождения точных значений x надо решить уравнение $3 = x^2 - 2x - 8$ или $0 = x^2 - 2x - 11$, корни которого $x = 1 \pm \sqrt{12} \approx 1 \pm 3,4$, т.е. $x_1 \approx -2,4$ и $x_2 \approx 4,4$;

в) функция обращается в нуль при $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$; функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(4; +\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(-2; 4)$;

г) функция возрастает (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) в промежутке $(1; +\infty)$.

3. Чтобы сократить дробь $\frac{3p^2 + p - 2}{4 - 9p^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена

$3p^2 + p - 2$. Дискриминант $D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25 = 5^2$ и тогда $p = \frac{-1 \pm \sqrt{5^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$, т.е. $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ и $p_2 = \frac{-6}{6} = -1$. Получаем: $3p^2 + p - 2 =$ $= 3\left(p - \frac{2}{3}\right)\left(p - (-1)\right) = (3p - 2)(p + 1)$. Разложим знаменатель, используя формулу для разности квадратов чисел. Имеем: $4 - 9p^2 = 2^2 - (3p)^2 = (2 - 3p)(2 + 3p) =$ $= -(3p - 2)(3p + 2)$. Тогда получаем: $\frac{3p^2 + p - 2}{4 - 9p^2} = \frac{(3p - 2)(p + 1)}{-(3p - 2)(3p + 2)} = -\frac{p + 1}{3p + 2}$.

4. Чтобы найти наименьшее значение квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 11$, выделим полный квадрат разности: $x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 6x + 9) + 2 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 2 =$ $= (x - 3)^2 + 2$. Так как при любых значениях x выражение $(x - 3)^2 \geq 0$, то выражение $(x - 3)^2 + 2 \geq 2$. Следовательно, наименьшее значение квадратного трехчлена равно 2 и достигается при $x = 3$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y = (x - 3)^2 + 2$, то получим параболу с вершиной (3; 2), направленную ветвями вверх. Очевидно, что наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Поэтому наименьшее значение квадратного трехчлена равно 2.

5. Если парабола $y = \frac{1}{3}x^2$ и прямая $y = 6x - 15$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнениям и параболы и прямой. Решим систему уравнений: $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = 6x - 15 \end{cases}$. Так как левые части уравнений одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{3}x^2 = 6x - 15$ или $x^2 - 18x + 45 = 0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом. Находим дискриминант $D_1 = (-9)^2 - 1 \cdot 45 = 81 - 45 = 36 = 6^2$ и корни $x = 9 \pm \sqrt{6^2} = 9 \pm 6$, т.е. $x_1 = 15$ и $x_2 = 3$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1 = \frac{1}{3} \cdot x_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 15^2 = \frac{1}{3} \cdot 225 = 75$ и $y_2 = \frac{1}{3} \cdot x_2^2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$. Итак, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (3; 3) и (15; 75).

Ответ: (3; 3) и (15; 15).

Вариант 2. К-1

1. Квадратный терхчлен $ax^2 + bx + c$ может быть разложен на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2.

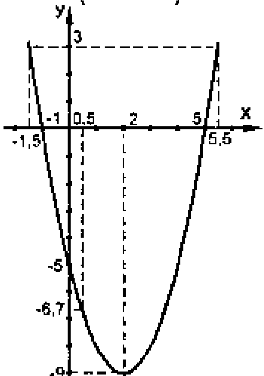
а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 21$, решив для этого квадратное уравнение $x^2 - 10x + 21 = 0$ с четным вторым коэффициентом. Определяем дискриминант уравнения $D_1 = k^2 - ac = (-5)^2 - 1 \cdot 21 = 25 - 21 = 4 = 2^2$ (где $a = 1$,

$k=\frac{b}{2}=\frac{-10}{2}=-5$, $c=21$) и его корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{2^2}}{1}=5\pm2$, т.е. $x_1=7$ и $x_2=3$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $1(x-7)(x-3)=$ $=(x-3)(x-7)$.

б) Найдем корни квадратного трехчлена $5y^2+9y-2$, решив соответствующее уравнение. Определим дискриминант уравнения $D=b^2-4ac=9^2-4\cdot5\cdot(-2)=$ $=81+40=121=11^2$, (где $a=5, b=9, c=-2$) и его корни $y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-9\pm\sqrt{11^2}}{2\cdot5}=$ $=\frac{-9\pm11}{10}$ т.е. $y_1=\frac{-9+11}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ и $y_2=\frac{-9-11}{10}=\frac{-20}{10}=-2$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $5\cdot\left(y-\frac{1}{5}\right)(y-(-2))=5\left(y-\frac{1}{5}\right)(y+2)$.

Можно также внести число 5 в первую скобку: $\left(5y-5\cdot\frac{1}{5}\right)(y+2)=$ $=(5y-1)(y+2)$.

2. Построим график функции $y=x^2-4x-5$. Для этого выделим полный квадрат: $y=(x^2-4x+4)-4-5=(x-2)^2-9$. Видно, что данный график получается из графика $y=x^2$ смещением параболы на две единицы вправо и на девять единиц вниз. Используя построенный график, ответим на вопросы задачи.



а) при $x=0{,}5$ $y\approx-6{,}7$ (точное значение $y=0{,}5^2-4\cdot0{,}5-5=-6{,}75$);

б) значение $y=3$ при $x_1\approx-1{,}5$ и $x_2\approx5{,}5$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2-4x-5=3$ или $x^2-4x-8=0$, корни которого $x=2\pm\sqrt{12}\approx2\pm3{,}4$, т.е. $x_1\approx-1{,}4$ и $x_2\approx5{,}4$;

в) функция обращается в нуль при $x_1=-1$ и $x_2=5$; функция $y>0$ в промежутках $(-\infty;-1)$ и $(5;+\infty)$; функция $y<0$ в промежутке $(-1;5)$;

г) функция убывает (т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции) в промежутке $(-\infty;2)$.

3. Чтобы сократить дробь $\frac{4c^2+7c-2}{1-16c^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена $4c^2+7c-2$. Дискриминант $D=7^2-4\cdot4\cdot(-2)=49+32=81=9^2$, тогда, $c=\frac{-7\pm\sqrt{9^2}}{2\cdot4}=\frac{-7\pm9}{8}$, т.е. $c_1=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ и $c_2=\frac{-16}{8}=-2$. Получаем: $4c^2+7c-2=$ $=4(c-\frac{1}{4})(c-(-2))=(4c-1)(c+2)$. Разложим знаменатель, используя фор-

мулу для разности квадратов чисел. Имеем: $1-16c^2=1^2-(4c)^2=(1-4c)(1+4c)$. Тогда получаем: $\frac{4c^2+7c-2}{1-4c^2}=\frac{(4c-1)(c+2)}{(1-4c)(1+4c)}=\frac{-1(1-4c)(c+2)}{(1-4c)(1+4c)}=-\frac{c+2}{4c+1}$.

4. Чтобы найти наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2+4x+3$, выделим полный квадрат разности: $-x^2+4x+3=-(x^2-4x-3)=-((x^2-4x+4)-4-3)=$ $=-(x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2)+7=7-(x-2)^2$. Так как при любых значениях x выражение $(x-2)^2\geq 0$, то величина $7-(x-3)^2\leq 7$. Следовательно, наибольшее значение квадратного трехчлена равно 7 и достигается при $x=2$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y=-x^2+4x+3=7-(x-2)^2$, то получим параболу с вершиной (2; 7), направленную ветвями вниз. Очевидно, что наибольшее значение функции достигается именно в вершине параболы. Поэтому наибольшее значение квадратного трехчлена равно 7.

5. Если парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямая $y=12-x$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнению параболы и уравнению прямой. Решим систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=12-x \end{cases}$. Так как левые части уравнение одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{2}x^2=12-x$ или $x^2+2x-24=0$.

Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($k=\frac{b}{2}=1$; $a=1, c=-24$). Находим дискриминант $D_1=k^2-ac=1^2-1\cdot(-24)=25=5^2$ и корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5^2}}{1}=-1\pm 5$, т.е. $x_1=4$ и $x_2=-6$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1=\frac{1}{2}\cdot x_1^2=\frac{1}{2}\cdot 4^2=\frac{1}{2}\cdot 16=8$ и $y_2=\frac{1}{2}\cdot x_2^2=\frac{1}{2}\cdot(-6)^2=\frac{1}{2}\cdot 36=18$. Итак, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (- 6; 18) и (4; 8).

Ответ: (- 6; 18) и (4; 8).

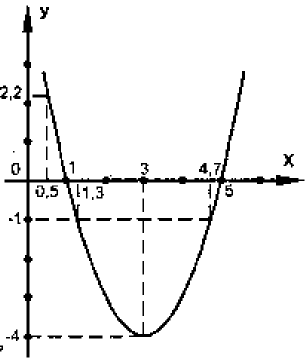
Вариант 3. К-1

1. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c может быть разложен на множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2.

а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2-12x+35$, решив для этого квадратное уравнение $x^2-12x+35=0$ с четным вторым коэффициентом $\left(k=\frac{b}{2}=\frac{-12}{2}=-6,\ a=1,\ c=35\right)$. Находим дискриминант уравнения $D_1=k^2-ac=(-6)^2-1\cdot 35=36-35=1=1^2$ и его корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D}}{a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{1^2}}{1}=6\pm 1$, т.е. $x_1 = 7$ и $x_2 = 5$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $1\cdot(x-7)(x-5) = (x-5)(x-7)$.

б) Найдем корни квадратного трехчлена $7y^2 + 19y - 6$, решив соответствующее уравнение. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 19^2 - 4\cdot 7\cdot(-6) = 361+168=529=23^2$ (где $a=7$, $b=19$, $c=-6$) и его корни $y = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-19\pm\sqrt{23^2}}{2\cdot 7} = \frac{-19\pm 23}{14}$, т.е. $y_1 = \frac{-19+23}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ и $y_2 = \frac{-19-23}{14} = \frac{-42}{14} = -3$.

Теперь разложим данный многочлен на множители: $7\cdot\left(y-\frac{2}{7}\right)(y-(-3)) = 7\left(y-\frac{2}{7}\right)(y+3)$. Можно также внести число 7 в первую скобку: $\left(7y-7\cdot\frac{2}{7}\right)(y+3)=(7y-2)(y+3)$.



2. Построим график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Для этого выделим полный квадрат: $y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$. Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на три единицы вправо и на четыре единиц вниз. Используя построенный график, ответим на вопросы задачи.

а) при $x = 0,5$ $y \approx 2,2$ (точное значение $y = 0,5^2 - 6\cdot 0,5 + 5 = 2,25$);

б) значение $y = -1$ при $x_1 \approx 1,3$ и $x_2 \approx 4,7$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = -1$ или $x^2 - 6x + 6 = 0$, корни которого $x = 3\pm\sqrt{3} \approx 3\pm 1,7$ т.е. $x_1 \approx 1,3$ и $x_2 \approx 4,7$);

в) функция обращается в нуль при $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$; функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty;1)$ и $(5;+\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(1;5)$;

г) функция возрастает (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) в промежутке $(3;+\infty)$.

3. Чтобы сократить дробь $\frac{5a^2+19a-4}{1-25a^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена $5a^2 + 19a - 4$. Дискриминант $D = 19^2 - 4\cdot 5\cdot(-4) = 361 + 80 = 441 = 21^2$, тогда $a = \frac{-19\pm\sqrt{21^2}}{2\cdot 5} = \frac{-19\pm 21}{10}$, т.е. $a_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ и $a_2 = \frac{-40}{10} = -4$. Получаем: $5a^2+19a-4 = 5\left(a-\frac{1}{5}\right)(a-(-4)) = (5a-1)(a+4)$. Разложим знаменатель, используя формулу для разности квадратов чисел. Имеем: $1 - 25a^2 = 1^2 - (5a)^2 = (1-5a)(1+5a)$. Тогда получаем:

$$=\frac{5a^2+19a-4}{1-25a^2}=\frac{(5a-1)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)}=\frac{-(1-5a)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)}=-\frac{a+4}{5a+1}.$$

4. Чтобы найти наименьшее значение квадратного трехчлена x^2-8x+7, выделим полный квадрат разности: $x^2-8x+7=(x^2-8x+16)-16+7=(x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2)-9=$ $=(x-4)^2-9$. Так как при любых значениях x выражение $(x-4)^2\geq 0$, то величина $(x-4)^2-9\geq -9$. Следовательно, наименьшее значение квадратного трехчлена равно -9 и достигается при $x=4$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y=x^2-8x+7=(x-4)^2-9$, то получим параболу с вершиной (4; -9), направленную ветвями вверх. Очевидно, что наименьшее значение функции достигается именно в вершине параболы. Поэтому наименьшее значение квадратного трехчлена равно -9.

Ответ: -9.

5. Если парабола $y=\frac{1}{4}x^2$ и прямая $y=5x-16$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнению параболы и уравнению прямой.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2 \\ y=5x-16 \end{cases}$. Так как левые части уравнений одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{4}x^2=5x-16$ или $x^2-20x+64=0$.

Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($k=\frac{b}{2}=-10$, a=1, c=64). Находим дискриминант $D_1=k^2-ac=(-10)^2-1\cdot 64=$ $=100-64=36=6^2$ и корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{6^2}}{1}=10\pm 6$, т.е. x_1=16 и x_2=4. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1=\frac{1}{4}\cdot x_1^2=\frac{1}{4}\cdot 16^2$ и $y_2=\frac{1}{4}\cdot x_2^2=\frac{1}{4}\cdot 4^2=4$. Итак, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (4; 4) и (16; 64).

Вариант 4. К-1

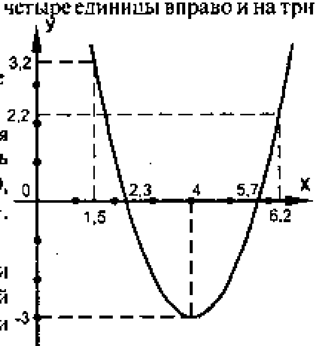
1. Квадратный терхчлен ax^2+bx+c может быть разложен на множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2.

а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2-18x+45$, решив квадратное уравнение $x^2-18x+45=0$ с четным вторым коэфф–ом ($k=\frac{b}{2}=\frac{-18}{2}=-9$, $a=1$, $c=45$).

Находим дискриминант уравнения $D_1=k^2-ac=(-9)^2-1\cdot 45=81-45=36=6^2$ и его корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{6^2}}{1}=9\pm 6$, т.е. $x_1=15$ и $x_2=3$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $1\cdot(x-15)(x-3)=(x-3)(x-15)$.

б) Найдем корни квадратного трехчлена $9x^2 + 25x - 6$, решив соответствующее уравнение. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 25^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-6) =$ $= 625 + 216 = 841 = 29^2$ и его корни $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-25 \pm \sqrt{29^2}}{2 \cdot 9} = \dfrac{-25 \pm 29}{18}$, т.е. $x_1 = \dfrac{25+29}{18} = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$ и $x_2 = \dfrac{-25-29}{18} = \dfrac{-54}{18} = -3$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $9 \cdot \left(x - \dfrac{2}{9}\right)(x - (-3)) = 9\left(x - \dfrac{2}{9}\right)(x+3)$. Можно также внести число 9 в первую скобку: $\left(9x - 9 \cdot \dfrac{2}{9}\right)(x+3) = (9x-2)(x+3)$.

2. Построим график функции $y = x^2 - 8x + 13$. Для этого выделим полный квадрат: $y = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 13 = (x-4)^2 - 3$. Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на четыре единицы вправо и на три единиц вниз. Используя построенный график, ответим на вопросы задачи.



а) при $x = 1,5$ $y \approx 3,2$ (точное значение $y = 1,5^2 - 8 \cdot 1,5 + 13 = 3,25$);

б) значение $y = 2$ при $x_1 \approx 1,8$ и $x_2 \approx 6,2$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 8x + 13 = 2$ или $x^2 - 8x + 11 = 0$, корни которого $x = 4 \pm \sqrt{5} \approx 4 \pm 2,2$, т.е. $x_1 \approx -1,8$ и $x_2 \approx 6,2$);

в) функция обращается в нуль при $x_1 = 2,3$ и $x_2 = 5,7$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 8x + 13 = 0$, корни которого $x = 4 \pm \sqrt{3} \approx 4 \pm 1,7$, т.е. $x_1 \approx 2,3$ и $x_2 \approx 5,7$); функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty; 2,3)$ и $(5,7; +\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(2,3; 5,7)$;

г) функция возрастает (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) в промежутке $(4; +\infty)$.

3. Чтобы сократить дробь $\dfrac{7b^2 - 11b - 6}{9 - 49b^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена $7b^2 + 11b - 6$. Дискриминант $D = 11^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-6) = 121 + 168 = 289 = 17^2$, тогда $b = \dfrac{11 \pm \sqrt{17^2}}{2 \cdot 7} = \dfrac{-11 \pm 17}{14}$, т.е. $b_1 = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$ и $b_2 = \dfrac{-28}{14} = -2$. Получаем $7b^2 + 11b - 6 = 7\left(b - \dfrac{3}{7}\right)(b - (-2)) = (7b-3)(b+2)$. Разложим знаменатель, используя формулу для разности квадратов чисел. Имеем: $9 - 49b^2 = 3^2 - (7b)^2 =$

$= (3 - 7b)(3 + 7b)$. Тогда получаем: $\frac{7b^2+11b-6}{9-49b^2}=\frac{(7b-3)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)}=$
$=\frac{-(3-7b)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)}=-\frac{b+2}{7b+3}$.

4. Чтобы найти наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 6x - 4$, выделим полный квадрат разности: $-x^2 + 6x - 4 = -(x^2 - 6x + 4) = -((x^2 - 6x + 9) - 9 + 4) = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 5 = -(x - 3)^2 + 5$. Так как при любых значениях x выражение $(x - 3)^2 \geq 0$, то величина $5 - (x - 3)^2 \leq 5$. Следовательно, наибольшее значение квадратного трехчлена равно 5 и достигается при $x = 3$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y = -x^2 + 6x - 4 = -(x - 3)^2 + 5$, то получим параболу с вершиной (3; 5), направленную ветвями вниз. Очевидно, что наибольшее значение функции достигается именно в вершине параболы. Поэтому наибольшее значение квадратного трехчлена равно 5.

5. Если парабола $y=\frac{1}{5}x^2$ и прямая $y = 20 - 3x$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнению параболы и уравнению прямой.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{1}{5}x^2 \\ y=20-3x \end{cases}$. Так как левые части уравнений одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{5}x^2=20-3x$ или $x^2 + 15x - 100 = 0$.

Решим это квадратное уравнение (где $a = 1$, $b = 15$, $c = -100$). Находим дискриминант $D = b^2 - ac = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100) = 225 + 400 = 625 = 25^2$ и корни $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{a}=\frac{-15\pm\sqrt{25^2}}{2\cdot1}=\frac{-15\pm25}{2}$, т.е. $x_1 = 5$ и $x_2 = -20$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1=\frac{1}{5}\cdot x_1^2=\frac{1}{5}\cdot5^2=5$ и $y_2=\frac{1}{5}\cdot x_2^2=$ $=\frac{1}{5}\cdot(-20)^2=80$. Итак, параболы и прямая пересекаются в двух точках с координатами (-20; 80) и (5; 5).

Контрольная работа 1А

Вариант 1. К-1А

1. а) $2\cdot2^{-3}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot4=4^2\cdot4=4^3=64$;

в) $\frac{(3^{-2})^3\cdot27^2}{3}=\frac{3^{-6}\cdot(3^3)^2}{3}=\frac{3^{-6}\cdot3^6}{3}=\frac{1}{3}$.

2. а) $5\sqrt[4]{16}-0{,}2\sqrt[3]{-0{,}027}+\sqrt[7]{1}=5\cdot2-0{,}2\cdot(-0{,}3)+1=10+0{,}06+1=11{,}06$;

б) $\sqrt[5]{32\cdot 0{,}00001}=2\cdot 0{,}1=0{,}2$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{243}{3}}=\sqrt[4]{81}=3$;

г) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-12}=5^{-\frac{12}{3}}=5^{-4}=\dfrac{1}{5^4}=\dfrac{1}{625}$.

3. а) $x^4=80$; $x_{1,2}=\pm 2\sqrt[4]{5}$, по всей видимости в задании опечатка и ее следует читать как: $x^4=81$; $x_{1,2}=\pm 3$; б) $x^6=-18$; нет корней, т.к. $E=\left(x^6\right)=[0;+\infty)$;

в) $2x^3-128=0$; $x^3=64$; $x=4$; г) $x^5+32=0$; $x^5=-32$; $x=-2$.

4. $2\sqrt[4]{\sqrt{a}}-\sqrt[8]{ab}:\sqrt[8]{b}=2\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{a}=\sqrt[8]{a}$.

5. $\sqrt[4]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{3-\sqrt{5}}=\sqrt[4]{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\sqrt[4]{9-5}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

Вариант 2. К-1А

1. а) $5\cdot 5^{-2}=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 4=2^3\cdot 2^2=2^5=32$;

в) $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^4\cdot 16^2}{2^3}=\dfrac{2^{-8}\cdot\left(2^4\right)^2}{2^3}=\dfrac{2^{-8}\cdot 2^8}{2^3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$.

2. а) $3\sqrt[3]{-27}+0{,}1\sqrt[4]{81}-\sqrt{1}=3\cdot(-3)+0{,}1\cdot 3-1=-9+0{,}3-1=-9{,}7$;

б) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}=2\cdot 0{,}1=0{,}2$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{243}{4}}=\sqrt[4]{81}=3$;

г) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-8}=5^{-\frac{8}{2}}=5^{-4}=\dfrac{1}{5^4}=\dfrac{1}{625}$.

3. а) $x^4=20$; $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{20}$; б) $x^8=-36$; нет корней, т.к. $E\left(x^8\right)=[0;+\infty)$;

в) $64x^3=1$; $x^3=\dfrac{1}{64}$; $x=\dfrac{1}{4}$; г) $x^3+8=0$; $x^3=-8$; $x=-2$.

4. $\sqrt[4]{ab}:\sqrt[4]{b}+2\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}+2\sqrt[4]{a}=3\sqrt[4]{a}$.

5. $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt[3]{2-3}=\sqrt[3]{-1}=-1$.

Вариант 3. К-1А

1. а) $5\cdot 5^{-5}=5^{-4}=\dfrac{1}{5^4}=\dfrac{1}{625}$; б) $3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=3\cdot 3^2=3^3=27$;

в) $\dfrac{4^{-3}\cdot 2^6}{8}=\dfrac{\left(2^2\right)^{-3}\cdot 2^6}{2^3}=\dfrac{2^{-6}\cdot 2^6}{2^3}=\dfrac{1}{8}$.

2. а) $0{,}2\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{81}-\sqrt[6]{1}=0{,}2\cdot(-2)+3-1=-0{,}4+2=1{,}6$;

б) $\sqrt[3]{0{,}001\cdot 64}=0{,}1\cdot 4=0{,}4$; в) $\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{216}{6}}=\sqrt{36}=6$;

г) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{-12}=3^{-\frac{12}{4}}=3^{-3}=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$.

3. а) $x^6=64$; $x_{1,2}=\pm 2$; б) $x^4=-20$; нет корней, т.к. $E\left(x^4\right)=[0;+\infty)$;

в) $8x^3=1;\ x^3=\frac{1}{8},\ x=0{,}5$; г) $27+x^3=0;\ x^3=-27;\ x=-3$.

4. $3\sqrt[4]{\sqrt{a}}+\sqrt[8]{ab}:\sqrt[8]{b}=3\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{a}=4\sqrt[8]{a}$.

5. $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}=\sqrt[3]{4-5}=\sqrt[3]{-1}=-1$.

Вариант 4. К-1А

1. а) $3^{-5}\cdot3=3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot5=5^2\cdot5=5^3=625$;

в) $\frac{\left(7^{-3}\right)^2\cdot49^3}{7}=\frac{7^{-6}\cdot\left(7^2\right)^3}{7}=\frac{7^{-6}\cdot7^6}{7}=\frac{1}{7}$.

2. а) $\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}-2\sqrt[3]{-125}+\sqrt{1}=\frac{1}{8}\cdot2+2\cdot5+1=\frac{1}{4}+11=11{,}25$;

б) $\sqrt{121\cdot0{,}01}=11\cdot0{,}1=1{,}1$; в) $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{343}{7}}=\sqrt{49}=7$;

г) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-10}=3^{-\frac{10}{5}}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

3. а) $x^2=13;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{13}$; б) $32x^5=1;\ x^5=\frac{1}{32},\ x=0{,}5$;

в) $x^6=-16$; нет корней, т.к. $E\left(x^6\right)=[0;+\infty)$; г) $-8-x^3=0;\ x^3=-8,\ x=-2$.

4. $\sqrt[10]{bc}:\sqrt[10]{c}+\sqrt[5]{\sqrt{b}}=\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}=2\sqrt[10]{b}$.

5. $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}=\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{17}\right)\left(9+\sqrt{17}\right)}=\sqrt[3]{81-17}=\sqrt[3]{64}=4$.

Контрольная работа 2

Вариант 1. К-2

1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

а) Найдем корни квадратного уравнения $2x^2-13x+6=0$. Находим дискриминант уравнения $D_1=(-13)^2-4\cdot2\cdot6=169-48=121=11^2$ и его корни $x=\frac{13\pm\sqrt{11^2}}{2\cdot2}=\frac{13\pm11}{4}$, т.е. $x_1=\frac{24}{4}=6$ и $x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Теперь разложим данный многочлен на множители, получим неравенство $2(x-6)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$. Произведение множителей $(x-6)$ и $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Возможны два случая. Имеем: $\begin{cases}x-6>0\\x-\frac{1}{2}<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>6\\x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Очевидно, что такая система неравенств решений не имеет.

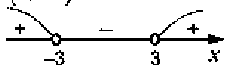
Также возможен случай $\begin{cases} x-6<0 \\ x-\frac{1}{2}>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<6 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$. Поэтому решением системы (и данного квадратного неравенства) будут значения $\frac{1}{2}<x<6$, т.е. промежуток $(0{,}5; 6)$.

б) Используя формулу для разности квадратов чисел, получаем неравенство $(x+3)(x-3)>0$. Произведение множителей $(x+3)$ и $(x-3)$ продолжительно, если они одного знака (или отрицательны или положительны). Возможны два случая.

Имеем систему неравенств $\begin{cases} x+3<0 \\ x-3<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<-3 \\ x<3 \end{cases}$. Решением этой системы неравенств являются значения $x<-3$, т.е. промежуток $(-\infty;-3)$.

Также возможен случай $\begin{cases} x+3>0 \\ x-3>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>-3 \\ x>3 \end{cases}$. Решением такой системы неравенств являются значения $x>3$, т.е. промежуток $(3;+\infty)$.

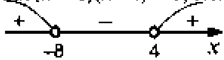
Объединяя полученные решения, находим решение данного квадратного неравенства $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.



в) Найдем дискриминант квадратного уравнения $3x^2-6x+32=0$. Имеем: $D=(-6)^2-4\cdot3\cdot32=36-384=-348$. Так как $D<0$, то это квадратное выражение $3x^2-6x+32$ не меняет знака. Найдем знак этого выражения, например, при $x=0$. Получаем: $3\cdot0^2-6\cdot0+32>0$. Таким образом, выражение $3x^2-6x+32>0$ при любых значениях x. Поэтому решением неравенства $3x^2-6x+32>0$ является любое число x, т.е. промежуток $(-\infty;+\infty)$.

Ответ: а) $(0{,}5; 6)$; б) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$.

2. а) На координатной прямой отметим корни уравнения $(x+8)(x-4)=0$, т.е. $x_1=-8$ и $x_2=4$. При $x>4$ оба множителя $(x+8)$ и $(x-4)$ положительны. Поэтому выражение $(x+8)(x-4)$ положительно. При переходе от одного интервала к другому данное выражение меняет знак на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(x+8)(x-4)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $(x+8)(x-4)>0$ являются промежутки $(-\infty;-8)$ и $(4;+\infty)$.



б) На координатной прямой отмети значения x, при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x-5}{x+7}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1=5$ и $x_2=-7$. Эти точки разбили числовую прямую на три интервала. При $x>5$ числитель $(x-5)$ и знаменатель $(x+7)$ дроби положительны. Поэтому в этом интервале дробь положительна. При переходе к следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков для выражения $\frac{x-5}{x+7}$. Видно, что при $-7<x<5$ неравенство $\frac{x-5}{x+7}$ выполняется, т.е. его решением является промежуток $(-7; 5)$.

3. а) Разложим левую часть $x^3 - 81x = 0$ на множители, используя формулу разности квадратов чисел: $x(x^2 - 81) = 0$ или $x(x - 9)(x + 9) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Имеем три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 9 = 0$ (решение $x = 9$) и $x + 9 = 0$ (решение $x = -9$). Все три числа являются корнями данного уравнения.

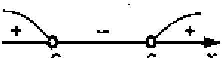
б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-1}{4} = 2$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 4. Получаем: $(x^2 - 1) \cdot 2 - (3x - 1) = 2 \cdot 4$ или $2x^2 - 2 - 3x + 1 = 8$ или $2x^2 - 3x + 9 = 0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем дискриминант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 9 + 72 = 81 = 9^2$ и его корни

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9^2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{4}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{12}{4} = 3 \text{ и } x_2 = \frac{-6}{4} = -1{,}5.$$

Ответ: а) -9; 0; 9, б) -1,5; 3.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (очевидно, что $y \geq 0$). Тогда получаем квадратное уравнение $y^2 - 19y + 48 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 361 - 192 = 169 = 13^2$ и корни $y = \frac{19 \pm \sqrt{13^2}}{2 \cdot 1} = \frac{19 \pm 13}{2}$, т.е. $y_1 = \frac{32}{2}$ и $y_2 = \frac{6}{2} = 3$. Оба значения y положительны и удовлетворяют условию $y \geq 0$. Теперь получаем два простейших квадратных уравнения: $x^2 = 16$ (корни $x_{1,2} = \pm 4$) и $x^2 = 3$ (корни $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$). Все четыре корня являются решениями данного биквадратного уравнения.
Ответ: -4; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 4.

5. Квадратное уравнение $3x^2 + tx + 3 = 0$ имеет два корня, если его дискриминант D положительный. Найдем дискриминант $D = t^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = t^2 - 36$. Получаем квадратное неравенство $t^2 - 36 > 0$. Решим его, например, методом интервалов, раскладывая его левую часть на множители $(t - 6)(t + 6) > 0$. На координатной прямой отметим значения t, при которых левая часть неравенства обращается в нуль, т.е. $t_1 = 6$ и $t_2 = -6$. Эти точки разбивают числовую ось на три интервала. При $t > 6$ оба множителя $(t - 6)$ и $(t + 6)$ положительны. Поэтому выражение $(t - 6)(t + 6)$ положительно. При переходе к следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков. Поэтому неравенство $t^2 - 36 > 0$ выполнено в промежутках $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$. Следовательно, при таких t данное квадратное уравнение имеет два корня.



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

6. Функция $y = \sqrt{x - x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $x - x^2 \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Разложим его левую часть на множители $x(1 - x) \geq 0$. Отметим значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, при которых выражение равно нулю. Возникают три интервала. При $x > 1$ величина $x > 0$, а $1 - x < 0$. Поэтому выражение $x(1 - x)$ отрицательно.

При переходе к следующему интервалу знак меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $x(1 - x)$. Видно, что при $0 \le x \le 1$ неравенство $x - x^2 \ge 0$ выполнено. Поэтому данная функция определена на отрезке [0; 1].

Ответ: [0; 1].

Вариант 2. К-2

1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

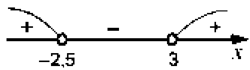
а) Найдем корни квадратного уравнения $2x^2 - x - 15 = 0$. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 121 = 11^2$ и его корни $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D^2}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm 11}{4}$, т.е. $x_1 = \dfrac{12}{4} = 3$ и $x_2 = \dfrac{10}{4} = -2{,}5$.

Теперь разложим данный трехчлен на множители, получим неравенство $2(x - 3)(x + 2{,}5) > 0$. Произведение множителей $(x - 3)$ и $(x + 2{,}5)$ положительно, если они имеют одинаковые знаки. Возможны два случая.

1) $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2{,}5 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 3 \\ x > -2{,}5 \end{cases}$. Решением этой системы является промежуток $x > 3$.

2. $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 2{,}5 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0 \\ x < -2{,}5 \end{cases}$. Промежуток $x < -2{,}5$ является решением этой системы.

Объединяя полученные решения двух систем, найдем решение данного неравенства $(-\infty; -2{,}5) \cup (3; +\infty)$.



б) Используя формулу для разности квадратов чисел, получаем неравенство $(x + 4)(x - 4) < 0$. Произведение множителей $(x + 4)$ и $(x - 4)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Следовательно, возможны два случая.

1) $\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$. Очевидно, что нет значений x, удовлетворяющих этой системе неравенств.

2) $\begin{cases} x - 4 < 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases}$. Такой системе неравенств удовлетворяют значения $-4 < x < 4$, т.е. промежуток (- 4; 4). Этот же промежуток является и решением данного неравенства.

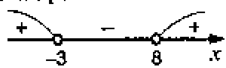
в) Найдем дискриминант квадратного неравенства $x^2 + 12x + 80 < 0$. Получаем: $D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80 = 144 - 320 = -176 < 0$. Так как D отрицательный, то выражение $x^2 + 12x + 80$ не меняет своего знака. Найдем знак этого выражения, например, при $x = 0$. Имеем: $0^2 - 12 \cdot 0 + 80 > 0$. Следовательно, данное выражение положительно для всех значений x. Поэтому неравенство $x^2 + 12x + 80 < 0$ не выполняется для любых значений x, т.е. не имеет решений.

Ответ: а) $(-\infty; -2{,}5) \cup (3; +\infty)$, б) (-4; 4), в) решений нет.

2. а) На координатной прямой отметим корни уравнения $(x + 11)(x - 9) = 0$, т.е. $x_1 = -11$ и $x_2 = 9$. При $x > 9$ оба множителя $(x + 11)$ и $(x - 9)$ положительны. Поэтому выражение $(x + 11)(x - 9)$ положительно. При переходе от одного

интервала к другому данное выражение меняет знак на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(x + 11)(x - 9)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $(x + 11)(x - 9) < 0$ является промежуток $(-11; 9)$.

б) На координатной прямой отметим значения x, при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x+3}{x-8}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1 = -3$ и $x_2 = 8$. Эти точки разбили числовую прямую на три промежутка. При $x > 8$ числитель $(x + 3)$ и знаменатель $(x - 8)$ дроби положительны. Поэтому в таком интервале дробь положительна. При переходе к следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков для выражения $\frac{x+3}{x-8}$. Видно, что неравенство $\frac{x+3}{x-8} > 0$ выполняется при $x < -3$ и $x > 8$, т.е. его решением являются промежутки $(-\infty; -3)$ и $(8; +\infty)$.



Ответ: а) $(-11; 9)$, б) $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$.

3. а) Разложим левую часть уравнения $x^3 - 25x = 0$ на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $x(x^2 - 25) = 0$ или $x(x - 5)(x + 5) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Имеем три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 5 = 0$ (решение $x = 5$) и $x + 5 = 0$ (решение $x = -5$). Все три значения x являются корнями данного уравнения.

б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2+6}{5} - \frac{8-x}{10} = 1$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 10. Имеем: $(x^2 + 6) \cdot 2 - (8 - x) = 1 \cdot 10$ или $2x^2 + 12 - 8 + x = 10$ или $2x^2 + x - 6 = 0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем дискриминант $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2$ и его корни $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$, т.е. $x_1 = \frac{6}{4} = 1{,}5$ и $x_2 = \frac{-8}{4} = -2$. Оба эти значения удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: а) -5; 0; 5. б) -2; 1,5.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (тогда $y \geq 0$). Получаем квадратное уравнение $y^2 - 4y - 45 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 16 + 180 = 196 = 14^2$ и корни $y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{14^2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 14}{2}$, т.е. $y_1 = 9$ и $y_2 = -5$ (не подходит, т.к. $y \geq 0$). Получаем простейшее квадратное уравнение: $x^2 = 9$ или $(x - 3)(x + 3) = 0$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$. **Ответ:** -3; 3.

5. Квадратное уравнение $2x^2 + tx + 8 = 0$ не имеет корней, если его дискриминант отрицательный. Найдем дискриминант $D = t^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = t^2 - 64$. Решим квадратное неравенство $t^2 - 64 < 0$ методом интервалов. Разложим его левую часть на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $(t + 8)(t - 8) < 0$. На координатной прямой отметим значения t, при которых

$(t+8)(t-8)=0$, т.е. $t_1=-8$ и $t_2=8$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $t>8$ оба множителя $(t+8)$ и $(t-8)$ положительны. Поэтому выражение $(t+8)(t-8)$ положительно. При переходе к следующему интервалу знак выражения изменяется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(t+8)(t-8)$. Видно, что неравенство $(t+8)(t-8)<0$ выполнено в интервале (-8; 8). Следовательно, при таких t данное квадратное уравнение не имеет корней.

Ответ: (-8; 8).

6. Функция $y=\sqrt{3x-2x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $3x-2x^2 \geq 0$. Решив это квадратное неравенство, найдем область определения данной функции. Разложим левую часть на множители $x(3-2x)\geq 0$ и используем метод интервалов. Отметим значения $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{3}{2}=1{,}5$, при которых это выражение равно нулю. Возникают три интервала. При $x>1{,}5$ величина $x>0$, а выражение $3-2x<0$. Поэтому выражение $x(3-2x)<0$. При переходе к следующему интервалу знак меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $3x-2x^2$. Видно, что при $0\leq x\leq 1{,}5$ неравенство $3x-2x^2 \geq 0$ выполнено. Поэтому область определения данной функции - промежуток [0; 1,5]. **Ответ:** [0; 1,5].

Вариант 3. К-2

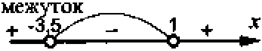
1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

а) Найдем корни квадратного уравнения $2x^2+5x-7=0$. Определим дискриминант уравнения $D=b^2-4ac$; $5^2-4\cdot 2\cdot(-7)=25+56=81=9^2$ (где $a=2$, $b=5$, $c=-7$) и его корни $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{9^2}}{2\cdot 2}=\dfrac{-5\pm 9}{4}$, т.е. $x_1=\dfrac{4}{4}=1$ и $x_2=\dfrac{-14}{4}=-3{,}5$.

Теперь по формуле $a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим данный квадратный трехчлен и получим неравенство $2(x-1)(x+3{,}5)<0$. Произведение множителей $(x-1)$ и $(x+3{,}5)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Поэтому возможны два случая.

1) $\begin{cases} x-1>0 \\ x+3{,}5<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>1 \\ x<-3{,}5 \end{cases}$. Такая система неравенств решений не имеет.

2) $\begin{cases} x-1<0 \\ x+3{,}5>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<1 \\ x>-3{,}5 \end{cases}$. Решением этой системы будут значения $-3{,}5<x<1$, т.е. промежуток (-3,5; 1). Этот же промежуток является и решением данного неравенства.



б) Используем формулу для разности квадратов чисел и получим неравенство $(x-5)(x+5)>0$. Произведение множителей $(x-5)$ и $(x+5)$ положительно, если они одного знака (или отрицательны или положительны). Возникают два случая.

1) $\begin{cases} x-5<0 \\ x+5<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<5 \\ x<-5 \end{cases}$. Системе неравенств удовлетворяют значения $x<-5$, т.е. промежуток $(-\infty;-5)$.

2) $\begin{cases} x-5>0 \\ x+5>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>5 \\ x>-5 \end{cases}$. Решением этой системы неравенств являются числа $x>5$, т.е. промежуток $(5;+\infty)$.

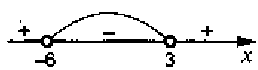
Объединяя решения, полученные в первом и втором случаях, находим решение данного неравенства: $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

в) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $5x^2-4x+21$. Получаем: $D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot5\cdot21=16-420=-404<0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный терхчлен $5x^2-4x+21$ не имеет корней, т.е. не изменяет своего знака. Определим знак этого выражения, например, при $x=0$: $5\cdot0^2-4\cdot0+21>0$, т.е. положительный. Поэтому выражение $5x^2-4x+21$ положительно при всех значений x и любое значение x является решением неравенства $5x^2-4x+21>0$, т.е. $(-\infty;+\infty)$.

Ответ: а) $(-3{,}5;1)$, б) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$.

2. а) Для решения неравенства $(x+9)(x-5)>0$ методом интервалов отметим на координатной прямой корни выражения $(x+9)(x-5)$, т.е. $x_1=-9$ и $x_2=5$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $x>5$ оба множителя $(x+9)$ и $(x-5)$ положительны и их произведение $(x+9)(x-5)>0$. При переходе от одного интервала к другому знак этого произведения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(x+9)(x-5)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $(x+9)(x-5)>0$ являются промежутки $(-\infty;-9)\cup(5;+\infty)$.

б) На координатной прямой отметим значения x, при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x-3}{x+6}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1=3$ и $x_2=-6$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка. При $x>3$ числитель и знаменатель дроби положительны. Поэтому дробь $\frac{x-3}{x+6}$ положительна. При переходе к каждому следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков для выражения $\frac{x-3}{x+6}$. Из рисунка видно, что решением неравенства $\frac{x-3}{x+6}<0$ являются значения $-6<x<3$, т.е. промежуток $(-6;3)$.



Ответ: а) $(-\infty;-9)\cup(5;+\infty)$, б) $(-6;3)$.

3. а) Разложим левую часть уравнения $x^3-36x=0$ на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $x(x^2-36)=0$ или $x(x-6)(x+6)=0$. Произведение трех множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем три линейных уравнения: $x=0$ (решение $x=0$), $x-6=0$ (корень $x=6$) и $x+6=0$ (решение $x=-6$). Все три корня являются решениями данного кубического уравнения.

б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2-4}{3}-\frac{5x-2}{6}=1$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 6. Получаем $(x^2-4)\cdot 2-(5x-2)=1\cdot 6$ или $2x^2-8-5x+2=6$ или $2x^2-5x-12=0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем его дискриминант $D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-12)=25+96=121=11^2$ и корни $x=\frac{5\pm\sqrt{11^2}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 11}{4}$, т.е. $x_1=4$ и $x_1=\frac{-6}{4}=-1{,}5$.

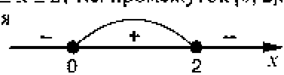
Ответ: а) - 6; 0; 6, б) - 1,5; 4.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4-13x^2+36=0$ введем новую неизвестную $y=x^2$ (очевидно, $y\geq 0$). Тогда уравнение имеет вид $y^2-13y+36=0$. Решим это квадратное уравнение. Найдем его дискриминант $D=(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36=$ $=169-144=25=5^2$ и корни $y=\frac{13\pm 5}{2}$, т.е. $y_1=9$ и $y_2=4$. Оба значения y положительны. Получаем два простейших квадратных уравнения: $x^2=9$ (корни $x_{1,2}=\pm 3$) и $x^2=4$ (корни $x_{3,4}=\pm 2$). Данное биквадратное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: -3; -2; 2; 3.

5. Квадратное уравнение $2x^2+tx+2=0$ имеет два корня, если его дискриминант положительный. Находим $D=t^2-4\cdot 2\cdot 2=t^2-16$. Решим неравенство $t^2-16>0$ методом интервалов, разложив его левую часть на множители: $(t-4)(t+4)>0$. На координатной прямой отметим значения t, при которых левая часть неравенства равна нулю, $t_1=4$ и $t_2=-4$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $t>4$ оба множителя $(t-4)$ и $(t+4)$ положительны. Поэтому выражение $(t-4)(t+4)$ также положительно. При переходе к следующему интервалу знак выражения изменяется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения t^2-16. Из рисунка видно, что неравенство $t^2-16>0$ выполняется при $t<-4$ и $t>4$, т.е. в промежутках $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$. Следовательно, при таких t данное квадратное уравнение имеет два корня. **Ответ:** $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

6. Функция $y=\sqrt{2x-x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $2x-x^2\geq 0$. Решив это квадратное неравенство, найдем область определения функции. Разложим левую часть на множители $x(2-x)\geq 0$ и используем метод интервалов. На числовой оси отметим точки, в которых данное выражение равно нулю, т.е. $x_1=0$ и $x_2=2$. Эти точки разбивают координатную прямую на три промежутка. При $x>2$ выражение x положительно, а величина $(2-x)$ отрицательна. Поэтому произведение $x(2-x)$ отрицательно. При переходе к следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(2x-x^2)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $2x-x^2\geq 0$ являются значения $0\leq x\leq 2$, т.е. промежуток [0; 2]. Это промежуток и есть область определения данной функции.



Ответ: [0; 2].

Вариант 4. К-2

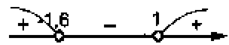
1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

а) Найдем корни квадратного уравнения $5x^2 + 3x - 8 = 0$. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 9 + 160 = 169 = 13^2$ и его корни $x = \frac{-3 \pm 13}{2 \cdot 5}$, т.е. $x_1 = \frac{10}{10} = 1$ и $x_2 = \frac{-16}{10} = -1{,}6$. Теперь разложим данный квадратный трехчлен по формуле $a(x - x_1)(x - x_2)$. Получаем неравенство $5(x - 1)(x + 1{,}6) < 0$. Произведение множителей $(x - 1)$ и $(x + 1{,}6)$ положительно, если они имеют одинаковые знаки. Поэтому возможны два случая.

1) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1{,}6 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 1 \\ x > -1{,}6 \end{cases}$. Решение этой системы неравенств - значения $x > 1$, т.е. промежуток $(1; +\infty)$.

2) $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 1{,}6 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 1 \\ x < -1{,}6 \end{cases}$. Такая система неравенств имеет решение $x < -1{,}6$, т.е. промежуток $(-\infty; -1{,}6)$.

Объединяя полученные решения в этих двух случаях, находим решение данного неравенства: $(-\infty; -1{,}6) \cup (1; +\infty)$.



б) Используя формулу для разности квадратов чисел, получаем неравенство $(x - 7)(x + 7) < 0$. Произведение множителей $(x - 7)$ и $(x + 7)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Возникают два случая.

1) $\begin{cases} x - 7 > 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 7 \\ x < -7 \end{cases}$. Очевидно, что эта система неравенств решений не имеет.

2) $\begin{cases} x - 7 < 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 7 \\ x > -7 \end{cases}$. Такой системе неравенств удовлетворяют значения $-7 < x < 7$. Эти же значения являются и решением данного неравенства.

в) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $4x^2 - 2x + 13$. Получаем: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13 = 4 - 208 = -204 < 0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трехчлен не имеет корней, т.е. не меняет своего знака. Найдем этот знак, например, при $x = 0$: $4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 13 = 13 > 0$. Следовательно, выражение $4x^2 - 2x + 13$ положительно при всех значений x и неравенство $4x^2 - 2x + 13 < 0$ решений не имеет.

Ответ: а) $(-\infty; -1{,}6) \cup (1; +\infty)$, **б)** $(-7; 7)$, **в)** решений нет.

2. а) На координатной прямой отметим корни уравнения $(x + 12)(x - 7) = 0$, т.е. $x_1 = -12$ и $x_2 = 7$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $x > 7$ оба множителя $(x + 12)$ и $(x - 7)$ положительны. Поэтому выражение $(x + 12)(x - 7)$ также положительно. При переходе от одного интервала к другому знак этого выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков величины $(x + 12)(x - 7)$. Из рисунка видно, что неравенство $(x + 12)(x - 7) < 0$ имеет решение $-12 < x < 7$, т.е. промежуток $(-12; 7)$.

б) На координатной прямой отметим значения x, при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x+5}{x-10}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1 = -5$ и $x_2 = 10$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка. При $x > 10$ числитель $(x+5)$ и знаменатель $(x-10)$ положительны. Поэтому дробь $\frac{x+5}{x-10}$ положительна. При переходе от одного интервала к другому знак этой дроби меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $\frac{x+5}{x-10}$. Из рисунка видно, что неравенство $\frac{x+5}{x-10} > 0$ выполняется при $x < -5$ и $x > 10$, т.е. в промежутках $(-\infty;-5)\cup(10;+\infty)$.

Ответ: а) (- 12; 7), б) $(-\infty;-5)\cup(10;+\infty)$.

3. а) Используя формулу для разности квадратов чисел, разложим левую часть уравнения $x^3 - 49x = 0$ на множители. Имеем: $x(x^2 - 49) = 0$ или $x(x+7)(x-7) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Поэтому получим три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 7 = 0$ (корень $x = 7$) и $x + 7 = 0$ (решение $x = -7$). Все три корня являются решениями данного кубического уравнения.

б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2+3}{4} - \frac{17-3x}{8} = 2$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 8. Получаем: $(x^2+3)\cdot 2-(17-3x) = 2\cdot 8$ или $2x^2+6-17+3x=16$ или $2x^2+3x-27=0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем его дискриминант $D=3^2- 4 \cdot 2 \cdot (-27) = 9 + 216 = 225 = 15^2$ и корни $x=\frac{-3\pm15}{2\cdot2}=\frac{-3\pm15}{4}$, т.е. $x_1=\frac{12}{4}=3$ и $x_2=\frac{-18}{4}=-4{,}5$. Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

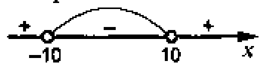
Ответ: а) -7; 0; 7, б) -4,5; 3.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (очевидно что $y \geq 0$). Тогда данной уравнение принимает вид $y^2 - 17y + 16 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 289 - 64 = 225 = 15^2$ и корни $y = \frac{17\pm15}{2}$, т.е. $y_1 = 16$ и $y_2 = 1$. Оба решения удовлетворяют условию $y \geq 0$. Теперь получаем два простейших квадратных уравнения $x^2 = 16$ (корни $x_{1,2} = \pm 4$) и $x^2 = 1$ (решения $x_{3,4} = \pm 1$). Таким образом, данное биквадратное уравнение имеет четыре корня.

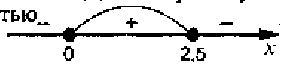
Ответ: -4; -1; 1; 4.

5. Квадратное уравнение $25x^2 + tx + 1 = 0$ не имеет корней, если его дискриминант отрицательный. Найдем дискриминант этого уравнения $D = t^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = t^2 - 100$. Получаем неравенство $t^2 - 100 < 0$. Разложим его левую часть на множители $(t - 10)(t + 10) < 0$ и решим методом интервалов. На координатной прямой отметим значения t, при которых левая часть неравенства равна нулю, т.е. $t_1 = 10$ и $t_2 = -10$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. Для $t > 10$ оба множителя $(t - 10)$ и $(t + 10)$ положительны. Поэтому произведение $(t - 10)$

и $(t + 10)$ также положительно. При переходе от одного интервала к другому знак этого произведения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $t^2 - 100$. Из рисунка видно, что неравенство $t^2 - 100 < 0$ выполняется при $-10 < t < 10$, т.е. в промежутке $(-10; 10)$. **Ответ:** $(-10; 10)$.



6. Функция $y = \sqrt{5x - 2x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $5x - 2x^2 \ge 0$. Решив это неравенство и найдем область определения функции. Разложим левую часть на множители $x(5 - 2x) \ge 0$ и используем метод интервалов. На координатной прямой отметим точки, $x = 0$ и $x_1 = \frac{5}{2} = 2,5$, при которых произведение $x(5 - 2x)$ равно нулю. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка. При $x > 2,5$ выражение x положительно, а величина $(5 - 2x)$ отрицательна. Поэтому произведение $x(5 - 2x)$ отрицательно. При переходе от одного интервала к другому знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $5x - 2x^2$. Видно, что неравенство $5x - 2x^2 \ge 0$ выполняется при $0 \le x \le 2,5$, т.е. в промежутке $[0; 2,5]$. Этот промежуток и является областью определения данной функции. **Ответ:** $[0; 2,5]$.



Контрольная работа 2А

Вариант 1. К-2А

1. а) $5 \cdot 8^{1/3} = 5 \cdot 2 = 10$; б) $16^{-1/2} = \frac{1}{16^{1/2}} = \frac{1}{4} = 0,25$.

2. а) $b^{1/3} \cdot b^{-1/6} = b^{1/3-1/6} = b^{1/6}$; б) $\frac{x^{3/4} \cdot x^{1/2}}{x^{1/4}} = x^{3/4+1/2-1/4} = x$;

в) $\left(y^{-3/4}\right)^4 \cdot y^{5/2} = y^{-3} \cdot y^{5/2} = y^{-3+5/2} = y^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

3. $a^{7/2}\sqrt{a} = a^{7/2} \cdot a^{1/2} = a^4$.

4. а) $\frac{3a^{1/2} - a}{3 - a^{1/2}} = \frac{a^{1/2}\left(3 - a^{1/2}\right)}{3 - a^{1/2}} = \sqrt{a}$; б) $\frac{b^{1/2} - 5}{b - 25} = \frac{b^{1/2} - 5}{\left(\sqrt{b} - 5\right)\left(\sqrt{b} + 5\right)} = \frac{1}{\sqrt{b} + 5}$.

5. $$\left(\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a - b}\right) \cdot \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b}{a + b} =$$

$$= \left(\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{\left(a^{0,5} - b^{0,5}\right)\left(a^{0,5} + b^{0,5}\right)}\right) \cdot \frac{\left(a^{0,5} - b^{0,5}\right)^2}{a + b} =$$

$$= \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b + 2a^{0,5}b^{0,5}}{\left(a^{0,5} - b^{0,5}\right)\left(a^{0,5} + b^{0,5}\right)} \cdot \frac{\left(a^{0,5} - b^{0,5}\right)^2}{a + b} = \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$$

Вариант 2. К-2А

1. а) $2 \cdot 36^{1/2} = 2 \cdot 6 = 12$; б) $27^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{3}$.

2. а) $a^{-1/2}\cdot a^{3/4}=a^{-1/2+3/4}=a^{1/4}$; **б)** $\dfrac{c^{2/3}\cdot c^{1/2}}{c^{1/6}}=c^{2/3+1/2-1/6}=c$;

в) $\left(x^{1/3}\right)^{-3}\cdot x^{2/3}=x^{-1}\cdot x^{2/3}=x^{-1/3}=\dfrac{1}{x^{1/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3. $y^{5/3}\sqrt[3]{y}=y^{5/3}\cdot y^{1/3}=y^2$.

4. а) $\dfrac{b+7b^{1/2}}{7+b^{1/2}}=\dfrac{b^{1/2}\left(b^{1/2}+7\right)}{b^{1/2}+7}=b^{1/2}$; **б)** $\dfrac{3+a^{1/2}}{a-9}=\dfrac{a^{1/2}+3}{\left(a^{1/2}-3\right)\left(a^{1/2}+3\right)}=\dfrac{1}{a^{1/2}-3}$.

5. $$\left(\frac{a^{1/2}-b^{1/2}}{a-b}-\frac{1}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right)\cdot\frac{a+2a^{1/2}b^{1/2}+b}{4b^{1/2}}=$$

$$=\left(\frac{a^{1/2}-b^{1/2}}{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}-\frac{1}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right)\cdot\frac{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^2}{4b^{1/2}}=\frac{a^{1/2}-b^{1/2}-a^{1/2}-b^{1/2}}{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^2}{4b^{1/2}}=\frac{-2b^{1/2}}{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)}\cdot\frac{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}{4b^{1/2}}=-\frac{a^{1/2}+b^{1/2}}{2\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)}=\frac{b^{1/2}+a^{1/2}}{2\left(b^{1/2}-a^{1/2}\right)}.$$

Вариант 3. К-2А

1. а) $2\cdot 27^{1/3}=2\cdot 3=6$; **б)** $36^{-1/2}=\dfrac{1}{36^{1/2}}=\dfrac{1}{6}$.

2. а) $b^{-1/3}\cdot b^{1/2}=b^{-1/3+1/2}=b^{1/6}$; **б)** $\dfrac{a^2\cdot a^{3/4}}{a^{1/4}}=a^{2+3/4-1/4}=a^{2,5}$;

в) $\left(y^2\right)^{-1/2}\cdot y^{3/2}=y^{-1}\cdot y^{3/2}=y^{-1+3/2}=y^{0,5}$.

3. $c^{7/4}\sqrt[4]{c}=c^{7/4}\cdot c^{1/4}=c^2$.

4. а) $\dfrac{5x^{1/2}+x}{5+x^{1/2}}=\dfrac{x^{1/2}\left(5+x^{1/2}\right)}{5+x^{1/2}}=x^{1/2}$; **б)** $\dfrac{a-4}{2+a^{1/2}}=\dfrac{\left(a^{1/2}-2\right)\left(a^{1/2}+2\right)}{a^{1/2}+2}=a^{1/2}-2$.

5. $$\frac{a+b}{a+2a^{0,5}b^{0,5}+b}:\left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}\right)=\frac{a+b}{\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)^2}:\left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)^2}:\frac{a+b+2a^{0,5}b^{0,5}-2a^{0,5}b^{0,5}}{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)}=\frac{a+b}{\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)^2}\cdot\frac{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)}{a+b}=\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$$

Вариант 4. К-2А

1. а) $3\cdot 8^{1/3}=3\cdot 2=6$; **б)** $64^{-1/2}=\dfrac{1}{64^{1/2}}=\dfrac{1}{8}$

2. а) $a^{2/3}\cdot a^{-1/2}=a^{2/3-1/2}=a^{1/6}$; **б)** $\dfrac{b^{1/2}\cdot b^{-1}}{b^{3/2}}=b^{1/2-1-3/2}=b^{-2}=\dfrac{1}{b^2}$;

в) $\left(c^{1/2}\right)^2\cdot c^{-8/3}=c^3\cdot c^{-8/3}=c^{3-8/3}=c^{1/3}$.

3. $x^{5/2}\sqrt{x}=x^{2,5}\cdot x^{0,5}=x^3$.

4. а) $\dfrac{a^{1/2}-2}{a^{1/2}-2a^{1/2}}=\dfrac{a^{1/2}-2}{a^{1/2}\left(a^{1/2}-2\right)}=\dfrac{1}{a^{1/2}}$; б). $\dfrac{1-a}{1+a^{1/2}}=\dfrac{\left(1-a^{1/2}\right)\left(1+a^{1/2}\right)}{1+a^{1/2}}=1-a^{1/2}$.

5. $\left(\dfrac{1}{a^{0,5}+b^{0,5}}-\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}\right)\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{2b^{0,5}}=\left(\dfrac{1}{a^{0,5}+b^{0,5}}-\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)}\right)\cdot\dfrac{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)^2}{2b^{0,5}}=$

$$=\frac{a^{0,5}-b^{0,5}-a^{0,5}-b^{0,5}}{\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)}\cdot\frac{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)^2}{2b^{0,5}}=-\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}=\frac{b^{0,5}-a^{0,5}}{b^{0,5}+a^{0,5}}$$

Контрольная работа 3

Вариант 1. К-3

1. Для решения системы уравнений $\begin{cases}2x+y=7\\ x^2-y=1\end{cases}$ используем метод сложения.

Складывая почленно левые и правые части уравнений получаем: $2x+y+x^2-y=$ $=7+1$ или $x^2+2x-8=0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $x_1=-4$ и $x_2=2$. Неизвестную y можно найти из любого уравнения, например, из первого. Получаем $y=7-2x$. Тогда для $x_1=-4$ находим $y_1=7-2\cdot(-4)=15$, для $x_2=2$ получаем $y_2=7-2\cdot 2=3$. Итак, система имеет два решения $(-4;\ 15)$ и $(2;\ 3)$.

Ответ: $(-4;\ 15)$ и $(2;\ 3)$.

2. Пусть стороны прямоугольника равны x(м) и y(м). Периметр фигуры равен сумме длин всех сторон. Поэтому периметр прямоугольника равен: $x+x+y+y=28$, откуда $x+y=14$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон, т.е. $xy=40$. Для нахождения сторон прямоугольника получили

систему уравнений $\begin{cases}x+y=14\\ xy=40\end{cases}$.

Так как сумма чисел x и y равна 14, а произведение этих чисел равно 40, то числа x и y по обратной теореме Виета - корни квадратного уравнения $t^2-14t+40=0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $t_1=4$ и $t_2=10$. Следовательно, стороны прямоугольника 4 м и 10 м.

Ответ: 4 м и 10 м.

3. Точки пересечения параболы $y=x^2+4$ и прямой $x+y=6$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют уравнения линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases}y=x^2+4\\ x+y=6\end{cases}$. Для решения системы используем способ подстановки. Подставим первое уравнение во второе: $x+x^2+4=6$ или $x^2+x-2=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=-2$ и $x_2=1$. Теперь из первого уравнения найдем соответствующие значения $y=x^2+4$. Для $x_1=-2$ получаем $y_1=(-2)^2+4=8$, для $x_2=1$ имеем $y_2=1^2+4=5$. Следовательно парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами $(-2;\ 8)$ и $(1;\ 5)$.

Ответ: $(-2;\ 8)$ и $(1;\ 5)$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 2y - x = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 29 \end{cases}$ используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $x = 2y - 7$ и подставим во второе уравнение: $(2y - 7)^2 - (2y - 7)y - y^2 = 29$. Упростим уравнение, раскрывая скобки и приводя подобные члены: $4y^2 - 28y + 49 - 2y^2 + 7y - y^2 = 29$ или $y^2 - 21y + 20 = 0$. Легко подобрать корни этого квадратного уравнения, используя формулы Виета: $y_1 + y_2 = 21$ и $y_1y_2 = 20$. Очевидно, что $y_1 = 1$ и $y_2 = 20$. Теперь, используя соотношение $x = 2y - 7$, найдем соответствующие значения x. Для $y_1 = 1$ получаем $x_1 = 2 \cdot 1 - 7 = -5$, для $y_2 = 20$ находим $x_2 = 2 \cdot 20 - 7 = 33$. Следовательно, данная система имеет два решения $(-5; 1)$ и $(33; 20)$.

Ответ: $(-5; 1)$ и $(33; 20)$.

Вариант 2. К-3

1. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ xy + y = 6 \end{cases}$ используем способ подстановки. Из первого уравнения найдем $x = 2 + 3y$ и подставим это выражение во второе уравнение: $(2 + 3y)y + y = 6$. Раскрываем скобки и преобразуем уравнение: $2y + 3y^2 + y = 6$ или $3y^2 + 3y - 6 = 0$ или $y^2 + y - 2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим два корня: $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$. Используя соотношение $x = 2 + 3y$, найдем значения x: $x_1 = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$ и $y_2 = 2 + 3 \cdot 1 = 5$. Итак, данная система имеет два решения: $(-4; -2)$ и $(5; 1)$.

Ответ: $(-4; -2)$ и $(5; 1)$.

2. Пусть одна сторона прямоугольника составляет x(см), другая - y(см). По условию одна сторона больше другой на 2 см. Поэтому получаем первое уравнение: $x = y + 2$. Также известно, что площадь прямоугольника (т.е. произведение его сторон) равна 120 см^2. Тогда имеем второе уравнение: $xy = 120$. Для нахождения сторон прямоугольника получаем систему уравнений $\begin{cases} x = y + 2 \\ xy = 120 \end{cases}$.

Решим эту систему методом подстановки. Подставим первое уравнение во второе: $(y + 2)y = 120$ или $y^2 + 2y - 120 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 10$ и $y_2 = -12$ (не подходит по смыслу задачи, т.к. $y > 0$). Тогда $x = y + 2 = 10 + 2 = 12$. Итак, стороны прямоугольника 10 см и 12 см.

Ответ: 10 см и 12 см.

3. Точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 10$ и прямой $x + 2y = 5$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют уравнениям линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$. Для решения этой системы используем способ подстановки. Из второго уравнения выразим $x = 5 - 2y$ и подставим в первое уравнение: $(5 - 2y)^2 + y^2 = 10$ или $25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 10$ или $5y^2 - 20y + 15 = 0$ или $y^2 - 4y + 3 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$. Найдем соответствующие значения x по

формуле $x = 5 - 2y$. Получаем: $x_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ и $x_2 = 5 - 2 \cdot 3 = -1$. Следовательно, окружность и прямая пересекаются в двух точках с координатами (-1; 3) и (3; 1).

Ответ: (-1; 3) и (3; 1).

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$ также используем способ подставки. Из первого уравнения найдем $y = 3x + 1$ и подставим это выражение во второе уравнение: $x^2 - 2x(3x + 1) + (3x + 1)^2 = 9$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $x^2 - 6x^2 - 2x + 9x^2 + 6x + 1 = 9$ или $4x^2 + 4x - 8 = 0$ или $x^2 + x - 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Используя формулу $y = 3x + 1$, найдем соответствующие значения y: $y_1 = 3 \cdot (-2) + 1 = -5$ и $y_2 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$. Итак, данная система имеет два решения: (-2; -5) и (1; 4).

Ответ: (-2; -5) и (1; 4).

Вариант 3. К-3

1. Решим систему уравнений $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$ методом подстановки. Из второго уравнения найдем $y = x^2 - 10$ и подставим в первое уравнение $x - 5(x^2 - 10) = 2$ или $x - 5x^2 + 50 = 2$ или $5x^2 - x - 48 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-48) = 1 + 960 = 961 = 31^2$ и его корни $x = \frac{1 \pm 31}{2 \cdot 5}$, т.е. $x_1 = \frac{32}{10} = 3{,}2$ и $x_2 = \frac{-30}{10} = -3$. По формуле $y = x^2 - 10$ находим соответствующие значения y: $y_1 = 3{,}2^2 - 10 = 10{,}24 - 10 = 0{,}24$ и $y_2 = (-3)^2 - 10 = -1$. Итак, данная система имеет два решения (3,2; 0,24) и (-3; -1).

Ответ: (3,2; 0,24) и (-3; -1).

2. Пусть стороны прямоугольника равны x(см) и y(см). Периметр фигуры равен сумме длин всех сторон, т.е. $x + x + y + y = 2x + 2y$. По условию эта величина равна 26 см. Получаем первое уравнение: $2x + 2y = 26$ или $x + y = 13$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон и составляет 42 см². Поэтому имеем второе уравнение: $xy = 42$. Для нахождения сторон прямоугольника получили систему уравнений $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 42 \end{cases}$.

Так как сумма чисел x и y равна 13, а произведение этих чисел равна 42, то числа x и y по обратной теореме Виета - корни квадратного уравнения $t^2 - 13t + 42 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $t_1 = 6$ и $t_2 = 7$. Следовательно, стороны прямоугольника 6 см и 7 см.

Ответ: 6 см и 7 см.

3. Точки пересечения параболы $y = x^2 - 8$ и прямой $x + y = 4$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют уравнениям линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$. Для решения этой системы используем способ подстановки. Подставим первое выражение во второе уравнение и получим: $x + x^2 - 8 = 4$ или $x^2 + x - 12 = 0$. Корни этого

квадратного уравнения $x_1 = -4$ и $x_2 = 3$. Используя формулу $y = x^2 - 8$, найдем соответствующие значения y: $y_1 = (-4)^2 - 8 = 8$ и $y_2 = 3^2 - 8 = 1$. Таким образом, данная система имеет два решения (- 4; 8) и (3; 1), которые являются координатами точек пересечения данной параболы и прямой.

Ответ: (- 4; 8) и (3; 1).

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x - 5y = 9 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3 \end{cases}$ используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $x = 5y + 9$ и подставим во второе уравнение. Получим: $(5y + 9)^2 + 3(5y + 9)y - y^2 = 3$ или $25y^2 + 90y + 81 + 15y^2 + 27y - y^2 = 3$ или $39y^2 + 117y + 78 = 0$ или $y^2 + 3y + 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = -1$ и $y_2 = -2$. Из соотношения $x=5y+9$ найдем значения x: $x_1 = 5 \cdot (-1) + 9 = 4$ и $x_2 = 5 \cdot (-2) + 9 = 1$. Таким образом, система уравнений имеет два решения (4; -1) и (-1; -2).

Ответ: (4; -1) и (-1; -2).

Вариант 4. К-3

1. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - xy = 8 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения найдем $y = -1 - 3x$ и подставим это соотношение во второе уравнение $x - x(-1 - 3x) = 8$ или $x + x + 3x^2 = 8$ или $3x^2 + 2x - 8 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100 = 10^2$ и его корни $x = \frac{-2 \pm 10}{6}$ т.е. $x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{-12}{6} = -2$. Теперь по формуле $y = -1 - 3x$ найдем соответствующие значения y: $y_1 = -1 - 3 \cdot \frac{4}{3} = -5$ и $y_2 = -1 - 3 \cdot (-2) = 5$.

Следовательно, система уравнений имеет два решения: $\left(1\frac{1}{3}; -5\right)$ и (-2; 5).

Ответ: $\left(1\frac{1}{3}; -5\right)$ и (-2; 5).

2. Пусть одна сторона прямоугольника составляет x(м), другая - y(м). Известно, что одна сторона прямоугольника больше другой на 4 см. Поэтому получаем первое уравнение: $x = y + 4$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон и составляет 45 м². Имеем второе уравнение: $xy = 45$. Для нахождения сторон прямоугольника получили систему уравнений $\begin{cases} x = y + 4 \\ xy = 45 \end{cases}$.

Используем способ подстановки. Подставим первое уравнение во второе и получим: $(y + 4)y = 45$ или $y^2 + 4y - 45 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = -9$ (не подходит по смыслу задачи, т.к. $y > 0$) и $y_2 = 5$. Тогда $x = y + 4 = 5 + 4 = 9$. Итак, стороны прямоугольника 5 м и 9 м.

Ответ: 5 м и 9 м.

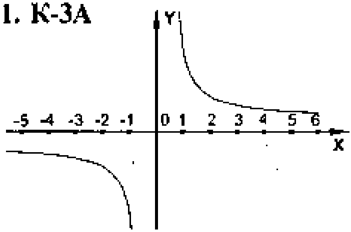
3. Точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 17$ и прямой $5x - 3y = 17$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют уравнениям линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$. Для ре-

шения этой системы используем способ подставки. Из второго уравнения находим $x=\frac{17+3y}{5}$ и подставим в первое уравнение $\left(\frac{17+3y}{5}\right)^2+y^2=17$ или $289+102y+9y^2+25y^2=425$ или $34y^2+102y-136=0$ или $y^2+3y-4=0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1=1$ и $y_2=-4$. Из соотношения $x=\frac{7+3y}{5}$ найдем соответствующие значения x: $x_1=\frac{17+3\cdot 1}{5}=4$ и $x_2=\frac{17+3\cdot(-4)}{5}=1$. Таким образом, окружность и прямая пересекаются в двух точках с координатами (4; 1) и (1; - 4). **Ответ:** (4; 1) и (1; - 4).

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-xy-2y^2=1 \end{cases}$ применим способ подстановки. Из первого уравнения найдем $x=1-2y$ и подставим во второе уравнение: $(1-2y)^2-(1-2y)y-2y^2=1$ или $1-4y+4y^2-y+2y^2-2y^2=1$ или $4y^2-5y=0$. Для решения этого квадратного уравнения разложим его левую часть на множители $y(4y-5)=0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $y=0$ (решение $y=0$) и $4y-5=0$ (корень $y=\frac{5}{4}$). Теперь по формуле $x=1-2y$ находим соответствующие значения x. Для $y=0$ получаем: $x=1-2\cdot 0=1$, для $y=\frac{5}{4}$ имеем: $x=1-2\cdot\frac{5}{4}=-1{,}5$. Следовательно, данная система уравнений имеет два решения (1; 0) и (-1,5; 1,25). **Ответ:** (1; 0) и (-1,5; 1,25).

Контрольная работа 3А
Вариант 1. К-3А

1. $y=\frac{3}{x}$

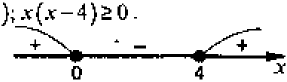


Ответ: а) $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$;
б) $E(y)=D(y)$; в) нечетная;
г) функция убывает на $D(y)$;
$y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$.

2. а) $y=\frac{3x-1}{2x^2-9x+10}$; $2x^2-9x+10\neq 0$, т.к. знаменатель;

$D=81-4\cdot 2\cdot 10=1$; $x_1=\frac{9+1}{4}=2{,}5$; $x_2=2$.

б) $y=\sqrt{x^2-4x}$; $x^2-4x\geq 0$, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\,+\infty)$; $x(x-4)\geq 0$.



Ответ: а) $x\neq 2$; $x\neq 2{,}5$; б) $(-\infty;\,0]\cup[4;\,+\infty)$.

3. $y=\frac{8}{x}$, $y=2x$; $\frac{8}{x}=2x$; $\frac{4}{x}=x$; $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm2$; $y_{1,2}=2\cdot(\pm2)=\pm4$.

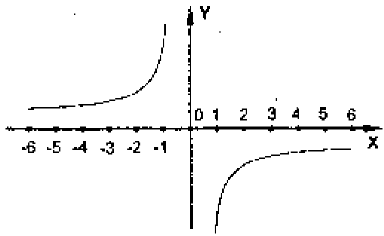
4. а) $\sqrt{5-4x}=3{,}2$; $5-4x=10{,}24$; $4x=5{,}24$; $x=-1{,}31$;

б) $\sqrt{4x^2-3x-1}=x+1$; $4x^2-3x-1=x^2+2x+1$; $3x-5x-2=0$; $D=25+4\cdot3\cdot2=49$;

$x_1=\frac{5+7}{6}=2$; $x_2=-\frac{1}{3}$; Проверка: $x_1=2$; $\sqrt{4\cdot4-6-1}=2+1$ – верно;

$x_2=-\frac{1}{3}$; $\sqrt{4\cdot\frac{1}{9}+1-1}=-\frac{1}{3}+1$ – верно.

Вариант 2. К-3А



1. $y=-\frac{3}{x}$

Ответ: а) $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;

б) $E(y)=D(y)$; в) нечетная;

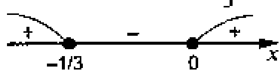
г) функция возрастает на $D(y)$;
$y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$.

2. а) $y=\frac{6x+2}{3x^2+5x-2}$; $3x^2+5x-2\neq0$, т.к. знаменатель;

$D=25+4\cdot3\cdot2=49$; $x_1=\frac{-5+7}{6}=\frac{1}{3}$; $x_2=-2$.

б) $y=\sqrt{4x+12x^2}$; $4x+12x^2\geq0$, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;\ +\infty)$; $3x^2+x\geq0$; $x(x+\frac{1}{3})\geq0$

Ответ: а) $x\neq-2$; $x\neq\frac{1}{3}$; б) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right]\cup[0;\ +\infty)$.



3. $y=\frac{12}{x}$; $y=\frac{x}{3}$; $\frac{12}{x}=\frac{x}{3}$; $x^2=36$; $x_{1,2}=\pm6$; $y_{1,2}=\pm\frac{6}{3}=\pm2$.

Ответ: $(\pm6;\ \pm2)$.

4. а) $\sqrt{2x-3}=1{,}6$; $2x-3=2{,}56$; $2x=5{,}56$; $x=2{,}78$;

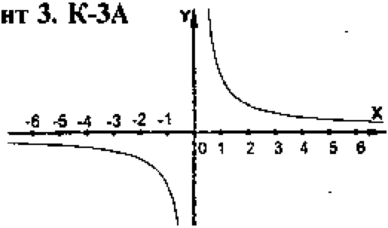
б) $\sqrt{3x^2+5x+8}=3+x$; $3x^2+5x+8=9+6x+x^2$; $2x^2-x-1=0$; $D=1+4\cdot2=9$;

$x_1=\frac{1+3}{4}=1$; $x_2=-0{,}5$; Проверка: $x_1=1$; $\sqrt{3+5+8}=3+1$ – верно;

$x_2=-0{,}5$; $\sqrt{3\cdot0{,}25-5\cdot0{,}5+8}=3-0{,}5$ – верно.

Ответ: а) $x=1$; б) $x=0{,}5$.

Вариант 3. К-3А



1. $y=\frac{2}{x}$

Ответ: а) $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$;

б) $E(y)=D(y)$; в) нечетная;

г) функция убывает на $D(y)$;

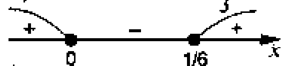
$y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$.

2. а) $y=\frac{4x-1}{5x^2-13x-6}$; $5x^2-13x-6\neq0$, т.к. знаменатель;

$D=169+4\cdot5\cdot6=289$; $x_1=\frac{13+17}{10}=3$; $x_2=-0{,}4$.

б) $y=\sqrt{18x^2-3x}$; $18x^2-3x\geq0$, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\,+\infty)$; $6x^2-x\geq0$; $x\,(x+\frac{1}{3})\geq0$.

Ответ: а) $x\neq0{,}6$; $x\neq2$; б) $(-\infty;\,0]\cup\left[\frac{1}{6};\,+\infty\right)$.



3. $y=\frac{8}{x}$, $y=\frac{x}{2}$; $\frac{8}{x}=\frac{x}{2}$; $x^2=16$; $x_{1,2}=\pm4$; $y_{1,2}=\pm\frac{4}{2}=\pm2$. **Ответ:** $(\pm4;\ \pm2)$.

4. а) $\sqrt{5-2x}=8{,}4$; $5-2x=70{,}56$; $2x=-65{,}56$; $x=-32{,}78$;

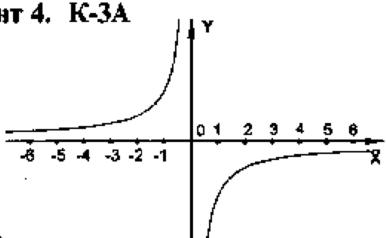
б) $\sqrt{2x^2-7x+7}=x-1$; $2x^2-7x+7=x^2-2x+1$; $x^2-5x+6=0$; $D=25-24=1$;

$x_1=\frac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$; Проверка: $x_1=3$; $\sqrt{18-21+7}=3-1$ – верно;

$x_2=2$; $\sqrt{8-14+7}=2-1$ – верно.

Ответ: а) 3; б) 2.

Вариант 4. К-3А



1. $y=-\frac{2}{x}$

Ответ: а) $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$;

б) $E(y)=D(y)$; в) нечетная;

г) функция возрастает на $D(y)$;

$y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$.

2. а) $y=\frac{2x+4}{6x^2+11x-2}$; $6x^2+11x-2\neq0$, т.к. знаменатель;

$D=121+4\cdot6\cdot2=169$; $x_1=\frac{-11+13}{12}=\frac{1}{6}$; $x_2=-2$.

б) $y=\sqrt{3x-x^2}$; $3x-x^2\geq0$, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\,+\infty)$; $x^2-3x\leq0$; $x(x-3)\leq0$.

Ответ: а) $x\neq-2$; $x\neq\frac{1}{6}$; б) $[0;\,3]$.

3. $y=6x;\ y=\dfrac{54}{x};\ 6x=\dfrac{54}{x};\ x^2=9;\ x_{1,2}=\pm3;\ y_{1,2}=6\cdot(\pm3)=\pm18$.

Ответ: $(\pm3;\ \pm18)$.

4. а) $\sqrt{3x+7}=2,5;\ 3x+7=6,25;\ 3x=-0,75;\ x=-0,25;$;

б) $\sqrt{x^2-6x-8}=1+2x;\ x^2-6x-8=1+4x+4x^2;\ 3x^2+10x+9=0;$

$D=100-4\cdot3\cdot9<0$; нет корней.

Ответ: а) - 0,25; **б)** нет корней.

Контрольная работа 4

Вариант 1. К-4

1. Используем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В этом примере $n = 23$, $a_1 = -15$ и $d = 3$. Тогда получаем: $a_{23} = -15 + 3(23 - 1) = -15 + 66 = 51$. **Ответ:** 51.

2. Для арифметической прогрессии 8; 4; 0; ... определим первый член a_1 и разность d. Очевидно, $a_1 = 8$. По определению $d = a_2 - a_1$ и, так как $a_2 = 4$, то $d = 4 - 8 = -4$. Для нахождения суммы первых шестнадцати членов применим формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$. При $n = 16$ получаем: $S_{16}=\dfrac{2\cdot8+(-4)(16-1)}{2}\cdot16=\dfrac{16-60}{2}\cdot16=-22\cdot16=-352$.

Ответ: -352.

3. Сначала покажем, что последовательность $b_n = 3n - 1$ является арифметической прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1}. Определим $b_{n-1} = 3\cdot(n - 1) - 1 = n - 4$. Тогда $b_n - b_{n-1} = (3n - 1) - (3n - 4) = 3n - 1 - 3n + 4 = 3$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n. Поэтому данная последовательность - арифметическая прогрессия и ее разность $d = 3$. Найдем также первый член этой прогрессии. Из формулы $b_n = 3n - 1$ при $n = 1$ находим $b_1 = 3\cdot1 - 1 = 2$.

Теперь легко найти сумму первых шестидесяти членов арифметической прогрессии по формуле $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$. При $n = 60$ имеем $S_n=\dfrac{2\cdot2+3(60-1)}{2}\cdot60=\dfrac{4+177}{2}\cdot60=181\cdot30=5430$. **Ответ:** 5430.

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d, то прежде всего найдем разность прогрессии, используя формулу n-го члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. По условию известны $a_1 = 25,5$ и $a_9 = 5,5$. Тогда имеем: $5,5 = 25,5 + d(9 - 1)$ или $5,5 = 25,5 + 8d$. Решим это линейное уравнение: $5,5 - 25,5 = 8d$, откуда $d = -2,5$.

Так как d отрицательна, то прогрессия убывающая, т.е. каждый следующий член меньше предыдущего ($a_n < a_{n-1}$). Поэтому наибольший член данной прогрессии - первый $a_1 = 25,5$. Следовательно, большее число 54,5 не может быть членом данной прогрессии. **Ответ:** нет.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 3 (числа 3, 6, 9, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 3$ и разность $d = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3$. Определим, какие члены этой прогрессии не превосходят числа 100. Для этого используем формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. При $a_1 = 3$ и $d = 3$ получаем: $a_n = 3 + 3 \cdot (n - 1) = 3n$. По условию $a_n \le 100$, т.е. $3n \le 100$. Решая это линейное неравенство, найдем $n \le \frac{100}{3}$ или $n \le 33\frac{1}{3}$. Так как n - число натуральное, то $n \le 33$.

Следовательно, надо найти сумму тридцати трех первых членов данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получаем: $S_{33} = \frac{2 \cdot 3 + 3(33-1)}{2} \cdot 33 = \frac{6+96}{2} \cdot 33 = 51 \cdot 33 = 1683$. **Ответ:** 1683.

Вариант 2. К-4

1. Используем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В нашем примере $a_1 = 70$, $d = -3$ и $n = 18$. Тогда получаем: $a_{18} = 70 + (-3) \cdot (18 - 1) = 70 - 51 = 19$. **Ответ:** 19.
2. Для арифметической прогрессии -21; -18; -15; ... определим первый член a_1 и разность d. Очевидно, $a_1 = -21$. По определению $d = a_2 - a_1$ и, так как $a_2 = -18$, то $d = -18 - (-21) = 3$. Для нахождения суммы первых двадцати членов используем формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 20$ получим: $S_{20} = \frac{2(-21)+3(20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{-42+57}{2} \cdot 20 = 150$. **Ответ:** 150.
3. Сначала покажем, что последовательность $b_n = 4n - 2$ является арифметической прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1}. Определим $b_{n-1} = 4 \cdot (n - 1) - 2 = 4n - 6$. Тогда $b_n - b_{n-1} = (4n - 2) - (4n - 6) = 4n - 2 - 4n + 6 = 4$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n. Поэтому данная последовательность по определению является арифметической прогрессией и ее разность $d = 4$. Найдем также первый член этой прогрессии. Из формулы $b_n = 4n - 2$ при $n = 1$ находим $b_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$. Теперь легко найти сумму первых сорока членов этой арифметич. прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 40$ имеем $S_{40} = \frac{2 \cdot 2 + 4(40-1)}{2} \cdot 40 = \frac{4+156}{2} \cdot 40 = 80 \cdot 40 = 3200$. **Ответ:** 3200.
4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d, то прежде всего найдем разность прогрессии, используя формулу n-го члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. По условию известны $a_1 = 11{,}6$ и $a_{15} = 17{,}2$. Тогда получаем: $17{,}2 = 11{,}6 + d(15 - 1)$ или $17{,}2 = 11{,}6 + 14d$. Решим это линейное уравнение: $17{,}2 - 11{,}6 = 14d$, откуда $d = 0{,}4$.

Теперь надо выяснить, является ли число 30,4 членом этой прогрессии. Если это действительно член прогрессии, то найдем его номер. Вновь используем формулу n-го члена: $30,4 = 11,6 + 0,4 \cdot (n - 1)$. Переносим число 11,6 в левую часть уравнения: $30,4 - 11,6 = 0,4 \cdot (n - 1)$ или $18,8 = 0,4 \cdot (n - 1)$. Разделим обе части уравнения на число 0,4: $\frac{18,8}{0,4} = n - 1$ или $47 = n - 1$, откуда $n = 48$. Следовательно, число 30,4 является членом данной прогрессии (номер этого члена - 48).

Ответ: да.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 7 (числа 7, 14, 21, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 7$ и разность $d = a_2 - a_1 = 14 - 7 = 7$. Определим, номера членов, которые не превосходят числа 150. Для этого используем формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. При $a_1 = 7$ и $d = 7$ находим: $a_n = 7 + 7 \cdot (n - 1) = 7n$. По условию $a_n \le 150$, т.е. $7n \le 150$. Решая это линейное неравенство, найдем $n \le \frac{150}{7}$ или $n \le 21\frac{3}{7}$. Так как n - число натуральное, то $n \le 21$.

Следовательно, надо найти сумму двадцати одного первого члена данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получаем: $S_{21} = \frac{2 \cdot 7 + 7(21-1)}{2} \cdot 21 = \frac{14+140}{2} \cdot 21 = 77 \cdot 21 = 1617$. **Ответ:** 1617.

Вариант 3. К-4

1. Используем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В этом примере $a_1 = 65$, $d = -2$ и $n = 32$. Тогда получаем: $a_{32} = 65 + (-2) \cdot (32 - 1) = 65 - 62 = 3$. **Ответ:** 3.

2. Для арифметической прогрессии 42; 34; 26; ... определим первый член a_1 и разность d. Очевидно, $a_1 = 42$. По определению $d = a_2 - a_1 = 34 - 42 = -8$ (т.к. $a_2 = 34$). Для нахождения суммы первых двадцати четырех членов применим формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 24$ получаем: $S_{24} = \frac{2 \cdot 24 + (-8)(24-1)}{2} \cdot 24 = \frac{84 - 184}{2} \cdot 24 = -1200$.

Ответ: - 1200.

3. Прежде всего покажем, что последовательность $b_n = 2n - 5$ является арифмет. прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и d_{n-1}. Определим $b_{n-1} = 2 \cdot (n - 1) - 5 = 2n - 7$. Тогда $b_n - b_{n-1} = (2n-5)-(2n-7) = 2n - 5 - 2n + 7 = 2$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n. Поэтому по определению данная последовательность – арифмет. прогрессия с разностью $d = 2$. Найдем также первый член этой прогрессии. Из формулы $b_n = 2n - 5$ при $n = 1$ находим $b_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$.

Теперь легко найти сумму первых восьмидесяти первых членов этой арифметической прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 80$

получим $S_{80} = \frac{2\cdot(-3)+d(80-1)}{2}\cdot 80 = \frac{-6+158}{2}\cdot 80 = 76\cdot 80 = 6080$.

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d, то сначала найдем разность прогрессии, используя формулу n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$. По условию известны $a_1 = -2{,}25$ и $a_{11} = 10{,}25$. Тогда получаем: $10{,}25 = -2{,}25 + d(11-1)$ или $10{,}25 = -2{,}25 + 10d$. Решим это линейное уравнение: $10{,}25 + 2{,}25 = 10d$ или $12{,}5 = 10d$, откуда $d = \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25$.

Теперь надо выяснить, является ли число 6,5 членом этой прогрессии. Если это действительно член прогрессии, то найдем его номер. Снова воспользуемся формулой n-го члена: $6{,}5 = -2{,}25 + 1{,}25\cdot(n-1)$. Перенесем число $(-2{,}25)$ в левую часть уравнения: $6{,}5 + 2{,}25 = 1{,}25\cdot(n-1)$ или $8{,}75 = 1{,}25\cdot(n-1)$. Разделим обе части уравнения на число 1,25: $\frac{8{,}75}{1{,}25} = n-1$ или $7 = n-1$, откуда $n = 8$.

Следовательно, число 6,5 является членом данной арифметической прогрессии (номер этого члена - 8). **Ответ:** да.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 9 (числа 9, 18, 27, ...) образуют арифмет. прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 9$ и разность $d = a_2 - a_1 = 18 - 9 = 9$. Определим, номера членов, которые не превосходят числа 80. Для этого используем формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$. При $a_1 = 9$ и $d = 9$ находим: $a_n = 9 + 9\cdot(n-1) = 9n$. По условию $a_n \le 80$, т.е. $9n \le 80$ или $n \le 8\frac{8}{9}$. Так как n - число натуральное, то $n \le 8$.

Следовательно, надо найти сумму восьми первых членов данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$, получаем: $S_8 = \frac{2\cdot 9 + 9(8-1)}{2}\cdot 8 = \frac{18+63}{2}\cdot 8 = 81\cdot 4 = 324$. **Ответ:** 324.

Вариант 4. К-4

1. Используем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$. В нашей задаче $n = 43$, $a_1 = -9$ и $d = 4$. Тогда получаем: $a_{43} = -9 + 4\cdot(43-1) = -9 + 168 = 159$. **Ответ:** 159.

2. Для арифметической прогрессии - 63; -58; - 53; ... найдем первый член a_1 и разность d. Очевидно, $a_1 = -63$. По определению $d = a_2 - a_1 = -58 - (-63) = 5$ (т.к. $a_2 = -58$). Для нахождения суммы первых четырнадцати членов применим формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$. При $n = 14$ получаем $S_{14} = \frac{2\cdot(-63)+5(14-1)}{2}\cdot 14 = \frac{-126+65}{2}\cdot 14 = -61\cdot 7 = -427$. **Ответ:** - 427.

3. Сначала покажем, что последовательность $b_n = 3n - 2$ является арифметической прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1}. Определим $b_{n-1} = 3\cdot(n-1) - 2 = 3n - 5$. Тогда

$b_n - b_{n-1} = (3n - 2) - (3n - 5) = 3n - 2 - 3n + 5 = 3$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n. Поэтому данная последовательность по определению является арифмет. прогрессией с разностью $d = 3$. Найдем также первый член прогрессии. Из формулы $b_n = 3n - 2$ при $n = 1$ находим $b_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

Теперь легко найти сумму первых ста двадцати членов этой арифметической прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 120$ получаем $S_{120} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (120-1)}{2} \cdot 120 = \frac{2+357}{2} \cdot 120 = 359 \cdot 60 = 21540$. **Ответ:** 21540.

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d, то прежде всего найдем разность прогрессии, используя формулу n-го члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. По условию известны $a_1 = -23{,}6$ и $a_{22} = 11$. Тогда получаем: $11 = -23{,}6 + d(22 - 1)$ или $11 = -23{,}65 + 21d$. Решим это линейное уравнение: $11 + 23{,}6 = 21d$ или $34{,}6 = 21d$, откуда $d = \frac{36{,}6}{21} = \frac{346}{210} = \frac{173}{105}$.

Теперь выясним, является ли число 35,8 членом этой прогрессии. Если это действительно член прогрессии, то найдем его номер. Снова воспользуемся формулой n-го члена: $35{,}8 = -23{,}6 + \frac{173}{105} \cdot (n-1)$. Перенесем число (- 23,6) в левую часть уравнения: $35{,}8 + 23{,}6 = \frac{173}{105} \cdot (n-1)$ или $59{,}4 = \frac{173}{105} \cdot (n-1)$.

Разделим обе части уравнения на число $\frac{173}{105}$ и получим: $59{,}4 : \frac{173}{105} \cdot (n-1)$ или $\frac{59{,}4 \cdot 105}{173} = n - 1$ или $\frac{6237}{173} = n - 1$ или $36\frac{9}{173} = n - 1$, откуда 0 $n = 37\frac{9}{173}$.

Так как n не равно натуральному числу, то в данной арифметической прогрессии нет члена, равного числу 35,8. **Ответ:** нет.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 6 (числа 6, 12, 18, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 6$ и разность $d = a_2 - a_1 = 12 - 6 = 6$ (т.к. $a_2 = 12$). Определим, номера членов, которые не превосходят числа 150. Для этого используем формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. При $a_1 = 6$ и $d = 6$ имеем: $a_n = 6 + 6 \cdot (n - 1) = 6n$. По условию $a_n \leq 150$, т.е. $6n \leq 150$ или $n \leq 25$.

Следовательно, надо найти сумму двадцати пяти первых членов данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получаем: $S_{25} = \frac{2 \cdot 6 + 6 \cdot (25-1)}{2} \cdot 25 = \frac{12+144}{2} \cdot 25 = 78 \cdot 25 = 1950$. **Ответ:** 1950.

Контрольная работа 4А

Вариант 1 К-4А

1. $2\cos\frac{\pi}{6} + tg\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1$.

2. $1-\cos^2\alpha\cdot tg^2\alpha=1-\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$

3. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5};\ tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\cdot5}{5\cdot3}=\frac{4}{3}.$

4. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+1}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=$

$=\frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha+1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}.$

5. $\left(1+tg^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ч.т.д.

Вариант 2. К-4А

1. $\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\pi=0,5-2(-1)=0,5+2=2,5.$

2. $1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot tg\alpha=1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$

3. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{576}{625}}=-\frac{7}{25};\ tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{7\cdot25}{25\cdot24}=-\frac{7}{24}.$

4. $\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\cos\alpha\left(\frac{1}{1-\cos\alpha}-\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)=$

$=\cos\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}=\cos\alpha\cdot\frac{2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=2ctg^2\alpha.$

5. $(1-\cos^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}=1$, ч.т.д.

Вариант 3. К-4А

1. $2\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-0=\sqrt{3}.$

2. $1-\sin^2\alpha\cdot ctg^2\alpha=1-\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$

3. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0,36}=0,8;\ tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{0,8}{0,6}=-\frac{4}{3}.$

4. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\sin\alpha\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)=$

$=\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}.$

5. $\cos^2\alpha(1+tg^2\alpha)-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, ч.т.д.

Вариант 4. К-4А

1. $2\sin\frac{\pi}{2}-tg\frac{\pi}{3}=2\cdot1-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$.

2. $1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha-tg\alpha=1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

3. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\frac{5}{13}$; $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12\cdot13}{13\cdot5}=\frac{12}{5}=2{,}4$.

4. $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\cos\alpha\left(\frac{1}{1-\sin\alpha}-\frac{1}{1+\sin\alpha}\right)=$

$=\cos\alpha\cdot\frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\cos\alpha\frac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=2tg\alpha$.

5. $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-tg\alpha\cos\alpha=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=$

$=\cos\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha$, ч.т.д.

Контрольная работа 5

Вариант 1. К-5

Используем формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$. В этой задаче $n=7$, $b_1=-32$, $q=\frac{1}{2}$. Тогда получаем: $b_7=b_1q^6=-32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=$ $=-\frac{32}{2^6}=-\frac{32}{64}=-\frac{1}{2}$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}$.

2. Для нахождения суммы шести первых членов геометрической прогрессии используем формулу $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. В данном случае $n=6$, $b_1=2$, $q=3$. Поэтому получаем: $S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{2(3^6-1)}{3-1}=3^6-1=729-1=278$. **Ответ:** 728.

3. Чтобы найти сумму бесконечной геометр. прогрессии 24; - 12; 6; ... надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q. Очевидно, что $b_1=24$. Знаменатель $q=\frac{b_2}{b_1}$ (по определению). Так как $b_2=-12$, то находим $q=\frac{-12}{24}=-\frac{1}{2}$. Воспользуемся формулой $S=\frac{b_1}{1-q}=24:\frac{3}{2}=24\cdot\frac{2}{3}=16$. **Ответ:** 16.

4. Чтобы найти сумму n первых членов геометрической прогрессии $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ надо знать ее первый член b_1 и знаменатель q. По условию задачи $b_2=0{,}04$ и $b_4=0{,}16$. Используя формулу n-го члена прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$, запишем эти члены: $b_2=b_1q^{2-1}=b_1q$ и $b_4=b_1q^{4-1}=b_1q^3$. Получаем систему уравнений $\begin{cases}b_1q=0{,}04\\b_1q^3=0{,}16\end{cases}$ для нахождения b_1 и q. Разделим второе уравнение на первое:

$\frac{b_1q^3}{b_1q}=\frac{0,16}{0,04}$ или $q^2=4$, откуда $q=\pm2$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q=2$. Из первого уравнения находим $b_1=\frac{0,04}{q}=\frac{0,04}{2}=0,02$.

Теперь легко вычислить сумму первых девяти членов этой прогрессии: $S_9=\frac{b_1(q^9-1)}{q-1}=\frac{0,02(2^9-1)}{2-1}=0,02\cdot511=10,22$. **Ответ:** 10,22.

5. а) Обозначим $x=0,(27)=0,2727...$ Так как в периоде этой дроби содержатся два знака, то найдем число $100x=100\cdot0,(27)=100\cdot0,2727...=27,2727...$ Вычислим разность $100x-x=27,2727...-0,2727...=27$. Получили линейное уравнение $99x=27$, откуда $x=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$.

б) Обозначим $x=0,5(6)=0,566...$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x=10\cdot0,5(6)=10\cdot0,566...=5,666...$ Вычислим разность $10x-x=5,666...-0,566...=5,1$. Получили линейное уравнение $9x=5,1$, откуда $x=\frac{5,1}{9}=\frac{51}{90}=\frac{17}{30}$.

Вариант 2. К-5

1. Используем формулу для n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$. В нашем случае $n=6$, $b_1=0,81$, $q=-\frac{1}{3}$. Тогда получаем: $b_6=b_1q^5=0,81\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5=$ $=-0,81\cdot\frac{1}{3^4\cdot3}=-\frac{0,81}{81\cdot3}=-\frac{0,01}{3}=-\frac{1}{300}$.

2. Для нахождения суммы семи первых членов геометр. прогрессии используем формулу $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. В этой задаче $n=7$, $b_1=6$, $q=2$. Поэтому получаем: $S_7=\frac{b_1(q^7-1)}{q-1}=\frac{6(2^7-1)}{2-1}=6\cdot127=762$.

3. Чтобы найти сумму бесконечной геом. прогрессии $-40; 20; -10; ...$ надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q. Очевидно, что $b_1=-40$. По определению $q=\frac{b_2}{b_1}$. Так как $b_2=20$, то находим $q=\frac{20}{-40}=-\frac{1}{2}$. Теперь по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$ вычислим сумму такой прогрессии $S=\frac{-40}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-40:\frac{3}{2}=-\frac{80}{3}=-26\frac{2}{3}$.

4. Сначала найдем первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии по условиям задачи $b_2=1,2$ и $b_4=4,8$. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$; $b_2=b_1q^{2-1}=b_1q$ и $b_4=b_1q^{4-1}=b_1q^3$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} b_1q=1{,}2 \\ b_1q^3=4{,}8 \end{cases}$. Разделим второе уравнение на первое. Имеем: $\frac{b_1q^3}{b_1q}=\frac{4{,}8}{1{,}2}$ или $q^2=4$, откуда $q=\pm 2$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q=2$. Найдем первый член прогрессии из первого уравнения $b_1=\frac{1{,}2}{q}=\frac{1{,}2}{2}=0{,}6$.

Теперь по формуле $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ вычислим сумму первых восьми членов прогрессии: $S_8=\frac{b_1(q^8-1)}{q-1}=\frac{0{,}6(2^8-1)}{2-1}=0{,}6\cdot255=153$. **Ответ:** 153.

5. а) Обозначим $x=0{,}(153)=0{,}153153...$ Так как в периоде этой дроби содержатся три знака, то найдем число $1000x=1000\cdot0{,}(153)=1000\cdot0{,}153153...=153{,}153...$ Вычислим разность $1000x-x=153{,}153...-0{,}153...=153$. Получили линейное уравнение $999x=153$, откуда $x=\frac{153}{999}=\frac{17}{111}$.

б) Обозначим $x=0{,}3(2)=0{,}322...$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x=10\cdot0{,}3(2)=10\cdot0{,}322...=3{,}22...$ Вычислим разность $10x-x=3{,}22...-0{,}32...=2{,}9$. Имеем линейное уравнение $9x=2{,}9$, откуда $x=\frac{2{,}9}{9}=\frac{29}{90}$.

Вариант 3. К-5

1. Используем формулу для n-го члена геометр. прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$. В этом примере $n=5$, $b_1=-125$, $q=\frac{1}{5}$. Тогда получаем:

$$b_5=b_1q^{5-1}=b_1q^4=-125\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^4=-\frac{125}{5^4}=-\frac{1}{5}.$$

2. Воспользуемся формулой для суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. В этой задаче $n=8$, $b_1=4$, $q=2$. Имеем:

$$S_8=\frac{b_1(q^8-1)}{q-1}=\frac{4(2^8-1)}{2-1}=4\cdot255=1020.$$

3. Чтобы найти сумму бесконечной геометрической прогрессии 36; - 12; 4; ... надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q. Очевидно, что $b_1=36$. По определению $q=\frac{b_2}{b_1}$. Так как $b_2=-12$, то находим $q=\frac{-12}{36}=-\frac{1}{3}$.

Используем формулу $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{36}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=36:\frac{4}{3}=36\cdot\frac{3}{4}=27.$

4. Сначала найдем первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии по условиям задачи $b_3 = 0,05$ и $b_5 = 0,45$. Используем формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$; $b_3 = b_1q^{3-1} = b_1q^2$ и $b_5 = b_1q^{5-1} = b_1q^4$.

Получаем систему уравнение $\begin{cases} b_1q^2 = 0,05 \\ b_1q^4 = 0,45 \end{cases}$. Разделим второе уравнение на первое. Получаем: $\frac{b_1q^4}{b_1q^2} = \frac{0,45}{0,05}$ или $q^2 = 9$, откуда $q = \pm\ 3$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q = 3$. Из первого уравнения найдем первый член прогрессии $b_1 = \frac{0,05}{q^2} = \frac{0,05}{3^2} = \frac{5}{100 \cdot 9} = \frac{1}{180}$.

Теперь по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ вычислим сумму первых восьми членов прогрессии. Имеем: $S_8 = \frac{b_1(q^8-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{180}(3^8-1)}{3-1} = \frac{1}{360} \cdot 6560 = 18\frac{2}{9}$.

5. а) Обозначим $x = 0,(162) = 0,162162...$ Так как в периоде этой дроби содержатся три знака, то найдем число $1000x = 1000 \cdot 0,(162) = 1000 \cdot 0,162162... = 162,162...$ Вычислим разность $1000x - x = 162,162... - 0,162... = 162$. Получили линейное уравнение $999x = 162$, откуда $x = \frac{162}{999} = \frac{18}{111}$.

б) Обозначим $x = 0,8(4) = 0,844...$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x = 10 \cdot 0,8(4) = 10 \cdot 0,844 ... = 8,444 ...$ Вычислим разность $10x - x = 8,444... - 0,844... = 7,6$. Имеем линейное уравнение $9x = 7,6$, откуда $x = \frac{7,6}{9} = \frac{76}{90} = \frac{38}{45}$.

Вариант 4. К-5

1. Используем формулу для n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$. В этом примере $n = 9$; $b_1 = 100000$ и $q = \frac{1}{5}$. Тогда получаем:

$$b_9 = b_1q^8 = 100000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^8 = \frac{3125 \cdot 32}{5^8} = \frac{5^5 \cdot 32}{5^8} = \frac{32}{5^3} = \frac{32}{125} = 0,256.$$

2. Используем формулу для нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$. В нашем случае $b_1 = 4$, $q = 4$ и $n = 5$. Поэтому получаем: $S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{6(4^5-1)}{4-1} = 2 \cdot (1024 - 1) = 2046$.

3. Чтобы найти сумму бесконечной геометрической прогрессии - 54; 18; - 6; ... надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q. Очевидно, что $b_1 = - 54$. По определению $q = \frac{b_2}{b_1}$. Так как $b_2 = 18$, то находит $q = \frac{18}{-54} = -\frac{1}{3}$. Вос-

пользуемся формулой $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{-54}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-54:\frac{4}{3}=-54\cdot\frac{3}{4}=-\frac{162}{4}=-40,5$.

4. Сначала найдем первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии по условиям задачи $b_3=3,6$ и $b_5=32,4$. Используем формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$: $b_3=b_1q^{3-1}=b_1q^2$ и $b_5=b_1q^{5-1}=b_1q^4$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} b_1q^2=3,6 \\ b_1q^4=32,4 \end{cases}$. Разделим второе уравнение на первое. Получаем: $\frac{b_1q^4}{b_1q^2}=\frac{32,4}{3.6}$ или $q^2=9$, откуда $q=\pm 3$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q=3$. Из первого уравнения найдем первый член прогрессии $b_1=\frac{3,6}{q^2}=\frac{3,6}{9}=0,4$.

Теперь по формуле $S_n=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ вычислим сумму пяти первых членов прогрессии. Имеем: $S_5=\frac{b_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=\frac{0.4\left(3^5-1\right)}{3-1}=0,2\cdot(243-1)=48,4$.

5. а) Обозначим $x=0,(72)=0,7272...$ Так как в периоде этой дроби содержатся два знака, то найдем число $100x=100\cdot 0,(72)=100\cdot 0,7272...=72,72...$ Вычислим разность $100x-x=72,72...-0,72...=72$. Получили линейное уравнение $99x=72$, откуда $x=\frac{72}{99}=\frac{8}{11}$.

б) Обозначим $x=0,7(4)=0,744...$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x=10\cdot 0,7(4)=10\cdot 0,744...=7,44...$ Вычислим разность $10x-x=7,44...-0,744...=6,7$. Имеем линейное уравнение $9x=6,7$, откуда $x=\frac{6,7}{9}=\frac{67}{90}$.

Контрольная работа 5А

Вариант 1. К-5А

1. а) $\sin 300^\circ=\sin(360^\circ-60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-tg\frac{2\pi}{3}=-tg\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

2. а) $\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha$;

б) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-ctg(2\pi-\alpha)=-ctg\alpha+ctg\alpha=0$;

в) $\cos 2\alpha+2\sin^2(\pi-\alpha)=\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha=1$.

3. $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos(\pi-\alpha)\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha.$

4. $\left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)^2-\sin 2\alpha=\left(\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2-\sin 2\alpha=$

$=\left(\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2-\sin 2\alpha=$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1.$

Вариант 2. К-5А

1. а) $\cos(-210^\circ)=\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg\,\dfrac{4}{3}\pi=tg\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=tg\,\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$

2. а) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha+\cos\alpha=0;$

б) $tg(\pi+\alpha)+ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha+tg\alpha=2tg\alpha.$

3. $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg\alpha$, ч.т.д.

4. $(ctg\alpha-tg\alpha)tg2\alpha=\left(\dfrac{1}{tg\alpha}-tg\alpha\right)\cdot\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}\cdot\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=2.$

Вариант 3. 5А

1. а) $\sin(-240^\circ)=-\sin 240^\circ=-\sin(180^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg\,\dfrac{3}{4}\pi=tg\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-tg\,\dfrac{\pi}{4}=-1.$

2. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha=2\cos\alpha$;

б) $tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+ctg(\pi+\alpha)=-ctg\alpha+ctg\alpha=0$;

в) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=1.$

3. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{1-1+2\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=ctg\alpha.$

4. $\sin 2\alpha + \left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^2 = \sin 2\alpha + \left(\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^2 =$

$= \sin 2\alpha + \left(\dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^2 =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Вариант 4. 5А

1. а) $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = 0{,}5$;

б) $tg\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) = -tg\dfrac{5\pi}{4} = -tg\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -tg\dfrac{\pi}{4} = -1$.

2. а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$; б) $tg(2\pi + \alpha) - ctg\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
$= tg\alpha + tg\alpha = 2tg\alpha$; в) $\dfrac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2tg 2\alpha$.

3. $\dfrac{\cos 2\alpha + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \dfrac{1 - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$.

4. $(tg\alpha + ctg\alpha)\sin 2\alpha = \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2.$

Контрольная работа 6

Вариант 1. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня:

$2\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[6]{1} = 2\sqrt[4]{3^4} + \sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[6]{1^6} = 2\cdot 3 + (-5) + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$.

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[3]{8\cdot 0{,}027} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{0{,}027} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{(0{,}3)^3} = 2\cdot 0{,}3 = 0{,}6$.

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел. Получаем: $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$.

2. а) Так как $x^3 = 5$, то по определению арифметич. корня находим $x = \sqrt[3]{5}$ – единственное решение данного уравнения.

б) Так как уравнение $y^4 = 15$ содержит неизвестную в четной (четвертой) степени, то уравнение имеет два корня $y = \pm\sqrt[4]{15}$.

в) Уравнение $z^8 = -1$ решений не имеет, т.к. любое число z в четной (восьмой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^8 \geq 0$. Поэтому выражение z^8 не может равняться отрицательному числу (- 1).

Ответ: а) $\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[4]{15}$; в) решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел. Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем: $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}=\sqrt[4]{\left(6+\sqrt{20}\right)\left(6-\sqrt{20}\right)}=\sqrt[4]{6^2-\left(\sqrt{20}\right)^2}=$
$=\sqrt[4]{36-20}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$.

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x.

а) Известно, что $f(x)=7x^8$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x)=7\cdot(-x)^8=7\cdot(-1)^8\cdot x^8=7x^8$. Видно, что $f(-x)=f(x)$. Следовательно, по определению функция $f(x)$ является четной.

б) Дана функция $f(x)=x^3+x$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x)=(-x)^3+(-x)=(-1)^3x^3-x=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x)$. Получили, что $f(-x)=-f(x)$. Следовательно, по определению данная функция является нечетной.

Ответ: **а)** четная; **б)** нечетная.

5. **а)** Так как $f(x)=x^{17}$, то $f(3,7)=3,7^{17}$ и $f(4,1)=4,1^{17}$. Числа 3,7 и 4,1 положительные и $3,7<4,1$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 17. Получаем неравенство того же знака: $3,7^{17}<4,1^{17}$, т.е. $f(3,7)<f(4,1)$.

б) Найдем сначала $f(-7,2)=(-7,2)1^{17}=(-1)^{17}\cdot7,2^{17}=-7,2^{17}$ и $f(-6,3)=(-6,3)^{17}=$ $=(-1)^{17}\cdot6,3^{17}=-6,3^{17}$. Прежде всего сравним числа $7,1^{17}$ и $6,3^{17}$. Числа 7,2 и 6,3 положительные и $7,2>6,3$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 17. Получаем неравенство того же знака: $7,2^{17}>6,3^{17}$. Умножим обе части неравенства на отрицательное число (-1). Знак неравенства при этом меняется на противоположный: $-7,2^{17}<-6,3^{17}$ или $f(-7,2)<f(-6,3)$.

Ответ: **а)** $f(3,7)<f(4,1)$; **б)** $f(-7,2)<f(-6,3)$.

Вариант 2. К-6

1. **а)** Воспользуемся определением арифметического корня: $5\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{16}-\sqrt{1}=$ $=5\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt[4]{2^4}-\sqrt{1^2}=5\cdot(-2)+2-1=-10+2-1=-9$.

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[4]{81\cdot0,0016}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{0,0016}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{0,2^4}=3\cdot0,2=0,6$.

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел. Получаем: $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{40}{5}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$.

2. **а)** Так как $x^3=21$, то по определению арифметич. корня находим $x=\sqrt[3]{21}$ – единственное решение данного уравнения.

б) Так как уравнение $y^4=17$ содержит неизвестную в четной (четвертой) степени, то уравнение имеет два корня $y=\pm\sqrt[4]{17}$.

в) Уравнение $z^4=-8$ решений не имеет, т.к. любое число z в четной (четвертой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^4\geq0$. Поэтому выражение z^4 не может равняться отрицательному числу (-8).

Ответ: **а)** $\sqrt[3]{21}$; **б)** $-\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[4]{17}$; **в)** решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел. Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:
$$\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}=\sqrt[3]{\left(12-\sqrt{19}\right)\left(12+\sqrt{19}\right)}=\sqrt[3]{12^2-\left(\sqrt{19}\right)^2}=\sqrt[3]{144-19}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5.$$

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x.

а) Известно, что $f(x)=3x^{17}$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x)=3(-x)^{17}=3(-1)^{17}x^{17}=-3x^{17}=-f(x)$. Так как выполнено соотношение $f(-x)=-f(x)$, то по определению данная функция $f(x)$ является нечетной.

б) Дана функция $f(x)=x^7+x^4$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x)=(-x)^7+(-x)^4=(-1)^7x^7+(-1)^4x^4=-x^7+x^4$. Получили $f(x)=-x^7+x^4$. Сравнивая эту функцию $f(x)=-x^7+x^4$ с функцией $f(-x)=-x^7+x^4$, видим, что $f(-x)\neq f(x)$. Поэтому данная функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x)=-(x^7+x^4)=-x^7-x^4$. Сравнивая выражение для $f(-x)=-x^7+x^4$ и $-f(x)=-x^7-x^4$, видим, что $f(x)\neq -f(x)$. Поэтому данная функция не является нечетной.

Следовательно, данная функция $f(x)$ определенной четности не имеет.

Ответ: а) нечетная; б) не является ни четной, ни нечетной.

5. а) Так как $f(x)=x^{24}$, то найдем $f(5{,}3)=5{,}3^{24}$ и $f(5{,}9)=5{,}9^{24}$. Числа 5,3 и 5,9 положительные и $5{,}3<5{,}9$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 24. Получаем неравенство того же знака: $5{,}3^{24}<5{,}9^{24}$, т.е. $f(5{,}3)<f(5{,}9)$.

б) Найдем сначала $f(-3{,}8)=(-3{,}8)^{24}=(-1)^{24}\cdot 3{,}8^{24}=3{,}8^{24}$ и $f(-2{,}9)=(-2{,}9)^{24}=$ $=(-1)^{24}\cdot 2{,}9^{24}=2{,}9^{24}$. Числа 3,8 и 2,9 положительные и $3{,}8>2{,}9$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 24. Получаем неравенство того же знака: $3{,}8^{24}>2{,}9^{24}$, т.е. $f(3{,}8)>f(2{,}9)$.

Ответ: а) $f(5{,}3)<f(5{,}9)$; б) $f(3{,}8)>f(2{,}9)$.

Вариант 3. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня: $3\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{-27}+\sqrt[8]{1}=$
$$=3\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[8]{1^8}=3\cdot 2+(-3)+1=6-3+1=4.$$

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[3]{125\cdot 0{,}008}=\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{0{,}008}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{0{,}2^3}=5\cdot 0{,}2=1$.

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел.

Получаем: $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[5]{\dfrac{128}{4}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$.

2. а) Так как $x^3=11$, то по определению арифметического корня находим $x=\sqrt[3]{11}$ - единственное решение данного уравнения.

б) Так как уравнение $y^6=7$ содержит неизвестную в четной (шестой) степени, то уравнение имеет два корня $y=\pm\sqrt[6]{7}$.

в) Уравнение $z^{12}=-4$ решений не имеет, т.к. любое число z в четной (двенадцатой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^{12}\geq 0$. Поэтому выражение z^{12} не может равняться отрицательному числу (-4).

Ответ: а) $\sqrt[3]{11}$; б) $-\sqrt[6]{7}$, $\sqrt[6]{7}$; в) решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел. Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем: $\sqrt[4]{11-\sqrt{40}}\cdot\sqrt[4]{11+\sqrt{40}}=\sqrt[4]{\left(11-\sqrt{40}\right)\left(11+\sqrt{40}\right)}=\sqrt[4]{11^2-\left(\sqrt{40}\right)^2}=$
$=\sqrt[4]{121-40}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$.

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x.

а) Известно, что $f(x)=3x^5$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x)=3(-x)^5=3(-1)^5x^5=-3x^5=-f(x)$. Так как выполнено соотношение $f(-x)=-f(x)$, то по определению данная функция $f(x)$ является нечетной.

б) Дана функция $f(x)=x^6+x^3$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x)=(-x)^6+(-x)^3=(-1)^6x^6+(-1)^3x^3=x^6-x^3$. Сравнивая функцию $f(x)=x^6+x^3$ с функцией $f(-x)=x^6-x^3$, видим, что эти функции не совпадают, т.е. $f(-x)\neq f(x)$. Поэтому данная функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x)=-x^6-x^3$. Сравнивая выражения для $f(-x)=x^6-x^3$ и $-f(x)=-x^6-x^3$, видим, что $f(-x)\neq -f(x)$. Поэтому данная функция не является нечетной.

Следовательно, данная функция $f(x)$ определенной четности не имеет.

Ответ: а) нечетная; б) не является ни четной, ни нечетной.

5. а) Так как $f(x)=x^{11}$, то найдем $f(1{,}7)=1{,}7^{11}$ и $f(1{,}9)=1{,}9^{11}$. Числа 1,7 и 1,9 положительные и $1{,}7<1{,}9$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 11. Получаем неравенство того же знака: $1{,}7^{11}<1{,}9^{11}$, т.е. $f(1{,}7)<f(1{,}9)$.

б) Найдем сначала $f(-6{,}7)=(-6{,}7)^{11}=(-1)^{11}\cdot 6{,}7^{11}=-6{,}7^{11}$ и $f(-4{,}7)=(-4{,}7)^{11}=$ $=(-1)^{11}\cdot 4{,}7^{11}=-4{,}7^{11}$. Прежде всего сравним числа $6{,}7^{11}$ и $4{,}7^{11}$. Числа 6,7 и 4,7 положительные и $6{,}7>4{,}7$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 11. Знак неравенства при этом сохраняется. Имеем: $6{,}7^{11}>4{,}7^{11}$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-1). Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-6{,}7^{11}<-4{,}7^{11}$, т.е. $f(-6{,}7)<f(-4{,}7)$.

Ответ: а) $f(1{,}7)<f(1{,}9)$; б) $f(-6{,}7)<f(-4{,}7)$.

Вариант 4. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня: $7\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}+\sqrt[6]{1}=$ $=7\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[3]{(-5)^3}+\sqrt[6]{1^6}=7\cdot 3+(-5)+1=21-5+1=17$;

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[3]{0{,}125\cdot 27}=\sqrt[3]{0{,}125}\cdot\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{0{,}5^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}=0{,}5\cdot 3=1{,}5$;

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел. Получаем: $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\dfrac{80}{5}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$.

2. а) Так как уравнение $x^5=8$ содержит неизвестную в нечетной (пятой) степени, то оно имеет единственное решение $x=\sqrt[5]{8}$.

б) Так как уравнение $y^7=11$ содержит неизвестную в нечетной (седьмой) степени, то оно имеет единственный корень $y=\sqrt[7]{11}$.

в) Уравнение $z^6 = -3$ решений не имеет, т.к. число z в четной (шестой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^6 \geq 0$. Поэтому выражение z^6 не может равняться отрицательному числу (- 3).

Ответ: **а)** $\sqrt[5]{8}$; **б)** $\sqrt[7]{11}$; **в)** решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел. Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:
$$\sqrt[5]{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7+\sqrt{17}} = \sqrt[5]{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)} = \sqrt[5]{7^2-\left(\sqrt{17}\right)^2} = \sqrt[5]{49-17} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$$

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x.

а) Известно, что $f(x) = 15x^6$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = 15(-x)^6 = 15 \cdot (-1)^6 x^6 = 15x^6 = f(x)$. Так как выполнено соотношение $f(-x) = f(x)$, то по определению данная функция является четной.

б) Дана функция $f(-x) = x^4 + x^3$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 = (-1)^4x^4 + (-1)^3x^3 = x^4 - x^3$. Сравнивая функцию $f(x) = x^4 + x^3$ с функцией $f(-x) = x^4 - x^3$, видим, что эти они не совпадают, т.е. $f(-x) \neq f(x)$. Поэтому данная функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x) = -x^4 - x^3$. Сравнивая выражения для $f(-x) = x^4 - x^3$ и $-f(x) = -x^4 - x^3$, видим, что они также не равны, т.е. $f(-x) \neq -f(x)$. Поэтому данная функция не является нечетной.

Следовательно, данная функция $f(x)$ определенной четности не имеет.

Ответ: **а)** четная; **б)** не является ни четной, ни нечетной.

5. а) Так как $f(x) = x^9$, то найдем $f(3{,}6) = 3{,}6^9$ и $f(3{,}8) = 3{,}8^9$. Числа 3,6 и 3,8 положительные и $3{,}6 < 3{,}8$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 9. Знак неравенства при этом сохраняется. Имеем: $3{,}6^9 < 3{,}8^9$, т.е. $f(3{,}6) < f(3{,}8)$.

б) Найдем сначала $f(-4{,}1) = (-4{,}1)^9 = (-1)^9 \cdot 4{,}1^9 = -4{,}1^9$ и $f(-3{,}7) = (-3{,}7)^9 = (-1)^9 \cdot 3{,}7^9 = -3{,}7^9$. Прежде всего сравним числа $4{,}1^9$ и $3{,}7^9$. Числа 4,1 и 3,7 положительные $4{,}1 > 3{,}7$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 9. Знак неравенства при этом сохраняется. Имеем: $4{,}1^9 > 3{,}7^9$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-1). Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-4{,}1^9 < -3{,}7^9$, т.е. $f(-4{,}1) < f(-3{,}7)$.

Ответ: **а)** $f(3{,}6) < f(3{,}8)$; **б)** $f(-4{,}1) < f(-3{,}7)$.

Контрольная работа 6А

Вариант 1. К-6А

1. $a_1 = -7$, $d = 4$; $a_{18} = a_1 + 17d = 7 + 17 \cdot 4 = 75$,

2. - 8, - 4, 0... — арифмет. прогр. $a_1 = -8$, $a_2 = -4$, $d = a_2 - a_1 = -4 - (-8) = 4$,
$$S_{16} = \frac{2a_1 + 15d}{2} \cdot 16 = (-16 + 15 \cdot 4) \cdot 8 = 352.$$

3. $a_n = 5-2_n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;
$$a_{n-1} = 4 - 5(n-1) = 9 - 5n\ ;\ a_{n+1} = 4 - 5(n+1) = -1 - 5n\ ;$$

$4-5n=\frac{9-5n-1-5n}{2}$ - верно,значит, (a_n)-арифм. прогр.,ч.т.д.

4. $a_1=5,\ a_9=29;\ a_9=a_1+8d,\ d=\frac{a_9-a_1}{8}=\frac{29-5}{8}=3;$

$a_n=a_1+d(n-1)=5+3(n-1)=2+3n;$

$104=2+3n;\ n=\frac{102}{3}=34\in N$, значит, $104=a_{34}$. **Ответ:** да.

5. $2,4,6,\ldots$ – арифм. прогрессия;

$a_1=2,\ d=2;\ S_{50}=\frac{2a_1+49d}{2}\cdot 50=\frac{4+98}{2}\cdot 50=2550.$

Вариант 2. К-6А

1. $a_1=-8,\ d=2,\ a_{20}=a_1+19d=-8+2\cdot 19=30.$

2. 7; 11; 15;... – арифм. прогр.; $a_1=7,\ a_2=11,\ d=a_2-a_1=11-7=4,$

$S_{18}=\frac{2a_1+17d}{2}\cdot 18=(14+17\cdot 4)\cdot 9=738.$

3. $a_n=4-5n$ Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};\ a_{n-1}=4-5(n-1)=9-5n;\ a_{n+1}=4-5(n+1)=-1-5n;$

$4-5n=\frac{9-5n-1-5n}{2}$ – верно, значит, (a_n) – арифм. прогр., ч.т.д.

4. $a_1=-1,\ a_{10}=-46;\ a_{10}=a_1+9d,\ d=\frac{a_{10}-a_1}{9}=\frac{-46+1}{9}=-5;$

$a_n=a_1+d(n-1)=-1-5(n-1)=4-5n;\ -86=4-5n,$

$n=18\in N$, значит, $-86=a_{18}$. **Ответ:** да.

5. 2; 3; 4;...; 92 – арифм. прогр.; $a_1=2,\ d=1;\ a_n=2+1(n-1)=1+n;$

$92=1+n,\ n=91$, значит, $92=a_{91}$;

$S=S_{91}=\frac{a_1+a_{91}}{2}\cdot 91=\frac{2+92}{2}\cdot 91=47\cdot 91=4277.$

Вариант 3. К-6А

1. $a_1=30,\ d=-2,\ a_{19}=a_1+18d=30-18\cdot 2=-6.$

2. -16; -10; -4;... – арифм. прогр.; $a_1=-16,\ a_2=10,\ d=a_2-a_1=-10-(-16)=6,$

$S_{17}=\frac{2a_1+16d}{2}\cdot 17=\frac{-32+96}{2}\cdot 17=544.$

3. $a_n=2+5n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};\ a_{n-1}=2+5(n-1)=5n-3;\ a_{n+1}=2+5(n+1)=5n+7;$

$2+5n=\frac{5n-3+5n+17}{2}$ – верно, значит, (a_n) – арифм. прогр., ч.т.д.

4. $a_1 = 3,\ a_7 = -9;\ a_7 = a_1 + 6d,\ d = \dfrac{a_7 - a_1}{6} = \dfrac{-9-3}{6} = -2;$

$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + (-2)(n-1) = 5 - 2n;\ -35 = 5 - 2n,$

$2n = 40,\ n = 20 \in N$, значит, $-35 = a_{20}$. **Ответ: является.**

5. 1; 3; 5;...– арифм. прогр.; $a_1 = 1,\ d = 2;\ S_{50} = \dfrac{2 + 2\cdot 49}{2}50 = 2500.$

Вариант 4. К-6А

1. $a_1 = -10,\ d = -3,\ a_{21} = a_1 + 20d = -10 - 20\cdot 3 = -70.$

2. 10; 6; 2;... – арифм. прогр.; $a_1 = 10,\ a_2 = 6,\ d = a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4;$

$S_{18} = \dfrac{2a_1 + 17d}{2}\cdot 18 = (20 - 17\cdot 4)\cdot 9 = -432.$

3. $a_n = -10 + 3n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};\ a_{n-1} = -10 + 3(n-1) = 3n - 13;\ a_{n+1} = -10 + 3(n+1) = 3n - 7;$

$-10 + 3n = \dfrac{3n - 13 + 3n - 7}{2}$ – верно, значит, (a_n) – арифм. прогр., ч.т.д.

4. $a_1 = -2,\ a_{20} = -192;\ a_{20} = a_1 + 19d,\ d = \dfrac{a_{20} - a_1}{19} = \dfrac{-192 + 2}{19} = -10;$

$a_n = a_1 + d(n-1) = -2 - 10(n-1) = 8 - 10n;\ -92 = 8 - 10n,$

$10n = 100,\ n = 10 \in N$, значит, $-92 = a_{10}$. **Ответ: является.**

5. 2; 3; 4;...; 102 – арифм. прогр.; $a_1 = 2,\ d = 1;\ a_n = n + 1;\ 102 = n + 1;$

$n = 101$, значит, $102 = a_{101};\ S = S_{101} = \dfrac{a_1 + a_{101}}{2}\cdot 101 = \dfrac{2 + 102}{2}\cdot 101 = 52\cdot 101 = 5252.$

Контрольная работа 7

Вариант 1 К-7

1. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем.

а) $3\cdot 16^{\frac{1}{2}} = 3\cdot\sqrt{16} = 3\sqrt{4^2} = 3\cdot 4 = 12;$ **б)** $27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{1}{3}.$

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$.

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому получаем: $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} = x^1 = x.$

в) При возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Тогда имеем: $\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^{\frac{2}{3}\cdot 3} \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^2 \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^{2-\frac{3}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$. Тогда $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}} = y^2$.

4. а) В числителе дроби вынесем $x^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

Получаем: $\dfrac{x - 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - 5} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - 5\right)}{x^{\frac{1}{2}} - 5} = x^{\frac{1}{2}}$.

б) Разложим знаменатель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{a - 16} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 4\right)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + 4}.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (разложим знаменатель первой дроби на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\left(\frac{a}{a^{0.5}b^{0.5} + b} - \frac{b^{0.5}}{a^{0.5} + b^{0.5}}\right) \cdot \frac{3b^{1.5}}{a^{0.5} - b^{0.5}} = \left(\frac{a}{b^{0.5}\left(a^{0.5} + b^{0.5}\right)} - \frac{b^{0.5}}{a^{0.5} + b^{0.5}}\right) \cdot \frac{3b^{1.5}}{a^{0.5} - b^{0.5}} =$$

$$= \frac{a - b^{0.5}b^{0.5}}{b^{0.5}\left(a^{0.5} + b^{0.5}\right)} \cdot \frac{3b^{1.5}}{a^{0.5} - b^{0.5}} = \frac{(a-b)\cdot 3b^{1.5}}{b^{0.5}(a-b)} = \frac{3b^{1.5}}{b^{0.5}} = 3b.$$

Вариант 2. К-7

1. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем.

а) $5 \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot \sqrt{9} = 5\sqrt{3^2} = 5 \cdot 3 = 15$; б) $125^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{1}{5}$.

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)} = b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$.

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому получаем: $\dfrac{y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-1}}{y^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{y^{\frac{2}{3}+(-1)}}{y^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{y^{-\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = y^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = y^{-\frac{2}{3}}$.

в) При возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Тогда имеем: $(a^{\frac{3}{4}})^4 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{4}\cdot 4} \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^3 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{3+\left(-\frac{3}{2}\right)} = a^{\frac{3}{2}}$.

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$. Тогда $x^{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt[4]{x}=x^{\frac{7}{4}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{4}+\frac{1}{4}}=x^{2}$.

4. а) В знаменателе дроби вынесем $y^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь. Получаем: $\dfrac{y^{\frac{1}{2}}+7}{y+7y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{y^{\frac{1}{2}}+7}{y^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{1}{2}}+7\right)}=\dfrac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$.

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{b-9}{b^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}-3^{2}}{b^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{\left(b^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(b^{\frac{1}{2}}-3\right)}{b^{\frac{1}{2}}+3}=b^{\frac{1}{2}}-3.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (расположив знаменатель второй дроби на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\left(\frac{c^{0.5}}{c^{0.5}-d^{0.5}}-\frac{d}{c-c^{0.5}d^{0.5}}\right)\cdot\frac{5c^{1.5}}{c^{0.5}+d^{0.5}}=\left(\frac{c^{0.5}}{c^{0.5}-d^{0.5}}-\frac{d}{c^{0.5}\left(c^{0.5}-d^{0.5}\right)}\right)\cdot\frac{5c^{1.5}}{c^{0.5}+d^{0.5}}=$$

$$=\frac{c^{0.5}\cdot c^{0.5}-d}{c^{0.5}\left(c^{0.5}-d^{0.5}\right)}\cdot\frac{5c^{1.5}}{c^{0.5}+d^{0.5}}=\frac{(c-d)\cdot5c^{1.5}}{c^{0.5}(c-d)}=\frac{5c^{1.5}}{c^{0.5}}=5c.$$

Вариант 3. К-7

1. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем.

а) $14\cdot8^{\frac{1}{3}}=14\cdot\sqrt[3]{8}=14\sqrt[3]{2^3}=14\cdot2=28$. б) $32^{-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{32^{\frac{1}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{32}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{1}{2}$.

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=x^{\frac{2}{6}}=x^{\frac{1}{3}}$.

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому получаем: $\dfrac{a\cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{a^{1-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{5}{8}-\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{8}}$.

в) При повторном возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Тогда имеем:

$$\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^{8}\cdot b^{-\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{8}\cdot8}\cdot b^{-\frac{1}{3}}=b^{1}\cdot b^{-\frac{1}{3}}=b^{\frac{2}{3}}.$$

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{a^5} = x^{\frac{5}{3}}$.
Тогда $\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{3}{2}}$.

4. а) В числителе дроби вынесем $a^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

Получаем: $\dfrac{a+3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+3} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+3)}{a^{\frac{1}{2}}+3} = a^{\frac{1}{2}}$.

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{x-36}{x^{\frac{1}{2}}-6} = \frac{(x^{\frac{1}{2}})^2-6^2}{x^{\frac{1}{2}}-6} = \frac{(x^{\frac{1}{2}}-6)(x^{\frac{1}{2}}+6)}{x^{\frac{1}{2}}-6} = x^{\frac{1}{2}}+6.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (разложим знаменатели дробей на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\left(\frac{a+b}{a^{1.5}-a^{0.5}b} - \frac{a-b}{a^{1.5}+a^{0.5}b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^{0.5}} = \left(\frac{a+b}{a^{0.5}(a-b)} - \frac{a-b}{a^{0.5}(a+b)}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^{0.5}} =$$

$$= \frac{(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)}{a^{0.5}(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^{0.5}} = \frac{\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)(a^2-b^2)}{a^{0.5}(a^2-b^2)\cdot a^{0.5}} =$$

$$= \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a} = \frac{2a\cdot 2b}{a} = 4b.$$

Вариант 4. К-7

а) $0{,}3\cdot 32^{\frac{1}{5}} = 0{,}3\cdot\sqrt[5]{32} = 0{,}3\cdot\sqrt[5]{2^5} = 0{,}3\cdot 2 = 0{,}6$; б) $16^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{1}{2}$.

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)} = a^{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$.

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому получаем: $\dfrac{x\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{x^{1-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$.

в) При повторном возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Тогда имеем:

$$\left(c^{\frac{1}{6}}\right)^6\cdot c^{-\frac{3}{7}} = c^{\frac{1}{6}\cdot 6}\cdot c^{-\frac{3}{7}} = c^1\cdot c^{-\frac{3}{7}} = c^{1-\frac{3}{7}} = c^{\frac{4}{7}}.$$

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{a^5}=x^{\frac{5}{3}}$.

Тогда $\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}=a^1=a$.

4. а) В числителе дроби вынесем $x^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

Получаем: $\dfrac{15x^{\frac{1}{2}}+x}{15+x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(15+x^{\frac{1}{2}}\right)}{15+x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}$.

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{x-121}{x^{\frac{1}{2}}+11}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-11^2}{x^{\frac{1}{2}}+11}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+11\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-11\right)}{x^{\frac{1}{2}}+11}=x^{\frac{1}{2}}-11.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (разложив знаменатели дробей на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\left(\frac{x-y}{x^{1,5}+x^{0,5}y}-\frac{x+y}{x^{1,5}-x^{0,5}y}\right)\cdot\frac{y^2-x^2}{xy}=\left(\frac{x-y}{x^{0,5}(x+y)}-\frac{x+y}{x^{0,5}(x-y)}\right)\cdot\frac{y^2-x^2}{xy}=$$

$$=\frac{(x-y)(x-y)-(x+y)(x+y)}{x^{0,5}(x+y)(x-y)}\cdot\frac{y^2-x^2}{xy}=\frac{\left((x-y)^2-(x+y)^2\right)\left(y^2-x^2\right)}{x^{0,5}\left(x^2-y^2\right)\cdot xy}=$$

$$=\frac{-(x-y+x+y)(x-y-x-y)}{x^{0,5}xy}=\frac{-2x\cdot(-2y)}{x^{0,5}xy}=\frac{4xy}{x^{0,5}xy}=\frac{4}{x^{0,5}}.$$

Контрольная работа 7А

Вариант 1. К-7А

1. $b_1=-25$, $q=-\frac{1}{5}$; $b_7=b_1\cdot q^6=-25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6=-\frac{5^5}{5^6}=-\frac{1}{625}$.

2. $b_1=11$, $q=2$; $S_5=\dfrac{b_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=\dfrac{11\left(2^5-1\right)}{2-1}=11\cdot31=341$.

3. $15;\ 5;\ 1\frac{2}{3};\ldots$ – геометр. прогр. $b_1=15$, $b_2=5$, $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{3}$; $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{15}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{15\cdot3}{2}=22,5$.

4. $b_5=81$, $b_3=36$; $b_5=b_3\cdot q^2$; $q=\pm\sqrt{\dfrac{b_5}{b_3}}=\pm\sqrt{\dfrac{81}{36}}=\pm1,5$; $b_1=\dfrac{b_3}{q^2}=\dfrac{36}{2,25}=16$;

если $q=1,5$, то $S_5=\dfrac{16\cdot\left(1,5^5-1\right)}{1,5-1}=211$; если $q=-1,5$, то $S_5=\dfrac{16\cdot\left(-1,5^5-1\right)}{-1,5-1}=55$.

5. а) $0,(31)=0,3131...=0,31+0,0031+...0,31;\ 0,0031...$ – геометр. прогр.

$b_1=0,31;\ q=0,01;\ 0,(31)=S=\dfrac{0,31}{1-0,01}=\dfrac{31}{99}.$

б) $0,5(6)=0,566...=0,5+0,06+0,006+...0,06;0,006...$ – геометр. прогр.

$b_1=0,06,\ q=0,1;\ 0,5(6)=0,5+S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0,06}{1-0,1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{90}=\dfrac{51}{90}.$

Вариант 2. К-7А

1. $b_1=4,\ q=\dfrac{1}{4};\ b_6=b_1\cdot q^5=4\cdot\dfrac{1}{4^5}=\dfrac{1}{256}.$

2. $b_1=4,\ q=2;\ S_7=\dfrac{b_1\left(q^7-1\right)}{q-1}=\dfrac{4\left(2^7-1\right)}{2-1}=4\cdot127=508.$

3. $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};...$ – геометр. прогр.; $b_1=1,\ b_2=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{2};\ S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

4. $b_2=4,\ b_4=1;\ b_4=b_2\cdot q^2;\ q=\pm\sqrt{\dfrac{b_4}{b_2}}=\pm\dfrac{1}{2};\ b_1=\dfrac{b_2}{q};$

Если $q=\dfrac{1}{2}$, то $b_1=8;\ S_6=\dfrac{8\cdot\left(\dfrac{1}{2^6}-1\right)}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{8\cdot63\cdot2}{64}=15,75;$

Если $q=-\dfrac{1}{2}$, то $b_1=-8;\ S_6=\dfrac{-8\cdot\left(\dfrac{1}{2^6}-1\right)}{-\dfrac{1}{2}-1}=-5,25.$

5. а) $0,(31)=0,313131...=0,31+0,0031+0,000031...0,31;\ 0,0031...$ – геом. прогр.

$b_1=0,31;\ q=0,01;\ 0,(31)=S=\dfrac{0,31}{1-0,01}=\dfrac{31}{99}.$

б) $0,2(3)=0,233...=0,2+0,03+0,003+...0,03;0,003;...$ – геометр. прогр.

$b_1=0,03,\ q=0,1;\ 0,2(3)=0,2+S=0,2+\dfrac{0,03}{1-0,1}=\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{90}=\dfrac{2}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{7}{30}.$

Вариант 3. К-7А

1. $b_1=-18,\ q=\dfrac{1}{3};\ b_8=b_1\cdot q^7=-18\cdot\dfrac{1}{3^7}=-\dfrac{2}{243}.$

2. $b_1=5,\ q=2;\ S_8=\dfrac{b_1\left(q^8-1\right)}{q-1}=\dfrac{5\cdot\left(2^8-1\right)}{2-1}=5\cdot225=1275.$

3. $-16;\ -8;\ -4;...$ – геометр. прогр.; $b_1=-16,\ b_2=-8,\ q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{2};\ S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}=-32.$

4. $b_3=-4,\ b_5=-16;\ b_5=b_3\cdot q^2;\ q=\pm\sqrt{\dfrac{b_5}{b_3}}=\pm2;\ b_1=\dfrac{b_3}{q^2}=-1;$

Если $q=2$, то $S_8=\dfrac{-1\cdot(2^8-1)}{2-1}=-255$. Если $q=-2$, то $S_8=\dfrac{-1\cdot(2^8-1)}{-2-1}=\dfrac{255}{3}=85.$

5. а) $0,(23)=0,232323...=0,23+0,0023+0,000023...0,23;\ 0,0023;...$ – геом. прогресс.

$b_1=0,23;\ q=0,01;\ 0,(23)=S=\dfrac{0,23}{1-0,01}=\dfrac{23}{99};$

б) $0,1(3)=0,133...=0,1+0,03+0,003+...0,03;0,003;...$ – геометр. прогр.

$b_1=0,03,\ q=0,1;\ 0,1(3)=0,1+S=\dfrac{1}{10}+\dfrac{0,03}{1-0,1}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{4}{30}=\dfrac{2}{15}.$

Вариант 4. К-7-А

1. $b_1=-8,\ q=\dfrac{1}{2};\ b_7=b_1\cdot q^6=-8\cdot\dfrac{1}{2^6}=-\dfrac{8}{64}=-\dfrac{1}{8}.$

2. $b_1=-1,\ q=-2;\ S_7=\dfrac{b_1(q^7-1)}{q-1}=\dfrac{-1\cdot(-2^7-1)}{-2-1}=-\dfrac{129}{3}=-43.$

3. $9;\ -3;\ 1;...$ – геометр. прогр.; $b_1=9,\ b_2=-3,\ q=\dfrac{b_2}{b_1}=-\dfrac{1}{3};\ S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{9}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{9\cdot3}{4}=6,75.$

4. $b_2=0,08,\ b_4=1,28;\ b_4=b_2\cdot q^2;\ q=\pm\sqrt{\dfrac{b_4}{b_2}}=\pm4;\ b_1=\dfrac{b_2}{q};$

Если $q=4$, то $b_1=0,02;\ S_6=\dfrac{0,02\cdot(4^6-1)}{4-1}=\dfrac{0,02\cdot4095}{3}=27,3.$

Если $q=-4$, то $b_1=0,02;\ S_6=\dfrac{0,02\cdot(4^6-1)}{-4-1}=\dfrac{0,02\cdot4095}{5}=16,38.$

5. а) $0,(17)=0,1717...=0,17+0,0017...0,17;\ 0,0017;...$ – геом. прогр.

$b_1=0,17;\ q=0,01;\ 0,(17)=S=\dfrac{0,17}{1-0,01}=\dfrac{17}{99}.$

б) $0,3(5)=0,355...=0,3+0,05+0,005+...0,05;0,005;...$ – геометр. прогр.

$b_1=0,05,\ q=0,1;\ 0,3(5)=0,3+S=\dfrac{3}{10}+\dfrac{0,05}{1-0,1}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{5}{90}=\dfrac{32}{90}=\dfrac{16}{45}.$

Контрольная работа 8

Вариант 1. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $\sin0^\circ=0,\ \cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

Вычислим: $5\sin0^\circ+3\cos60^\circ=5\cdot0+3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}=1\dfrac{1}{2}.$

б) Учтем, что $sin\frac{\pi}{2}=1$, $tg\frac{\pi}{4}=1$. Находим: $2sin\frac{\pi}{2}-3tg\frac{\pi}{4}=2\cdot1-3\cdot1=2-3=-1$.

2. Учтем, что $tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ и основное тригонометрическое тождество. Тогда получаем: $1-sin\alpha cos\alpha tg\alpha=1-sin\alpha cos\alpha\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=1-sin^2\alpha=$
$=sin^2\alpha+cos^2\alpha-sin^2\alpha=cos^2\alpha$.

3. Используем основное тригонометрическое тождество $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$. Так как по условию $sin\alpha=\frac{5}{13}$, то получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^2+cos^2\alpha=1$ или
$\frac{25}{169}+cos^2\alpha=1$, откуда $cos^2\alpha=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$. Так как по условию угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$), то $cos\alpha$ величина отрицательная. Поэтому $cos\alpha=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$. Теперь найдем
$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{5}{13}:\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{13}{12}\right)=-\frac{5}{12}$.

4. Учтем, что $tg\,\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, и сложим дроби, приведя их к общему знаменателю. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством. Тогда получаем: $\frac{1}{tg\alpha}+\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=1:\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}+\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=$
$=\frac{cos\alpha\cdot(1+cos\alpha)+sin\alpha\cdot sin\alpha}{sin\alpha(1+cos\alpha)}=\frac{cos\alpha+cos^2\alpha+sin^2\alpha}{sin\alpha(1+cos\alpha)}=$
$=\frac{cos\alpha+\left(cos^2\alpha+sin^2\alpha\right)}{sin\alpha(1+cos\alpha)}=\frac{cos\alpha+1}{sin\alpha(1+cos\alpha)}=\frac{1}{sin\alpha}$.

5. Для доказательства тождества $\frac{1}{sin\,x}-sin\,x=cos\,xctgx$ преобразуем его левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части приведем выражения к общему знаменателю и учтем основное тригонометрическое тождество. Получаем:
$\frac{1}{sin\,x}-sin\,x=\frac{1-sin\,x\cdot sin\,x}{sin\,x}=\frac{1-sin^2x}{sin\,x}=\frac{sin^2x+cos^2x-sin^2x}{sin\,x}=\frac{cos^2x}{sin\,x}$.
В правой части учтем, что $ctgx=\frac{cos\,x}{sin\,x}$. Тогда имеем:
$cos\,xctgx=cos\,x\cdot\frac{cos\,x}{sin\,x}=\frac{cos^2x}{sin\,x}$. После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Вариант 2. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $cos180° = -1$, $tg45° = 1$. Тогда получаем: $cos180° + 4tg45° = -1 + 4 \cdot 1 = -1 + 4 = 3$.

б) Учтем, что $cos\frac{\pi}{2} = 0$, $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Находим: $3cos\frac{\pi}{2} - 2sin\frac{\pi}{6} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

2. Учтем, что $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ и основное тригонометр. тождество. Получаем:

$$1 - ctg\,\alpha\,cos\alpha\,sin\alpha = 1 - \frac{cos\alpha}{sin\alpha}cos\alpha\,sin\alpha = 1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha + cos^2\alpha - cos^2\alpha = sin^2\alpha.$$

3. Используем основное тригонометрическое тождество $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Так как по условию $cos\alpha = \frac{8}{17}$, то получаем: $sin^2\alpha + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$ или $sin^2\alpha + \frac{64}{289} = 1$, откуда $sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$. Так как по условию угол α лежит в четвертой четверти (т.е. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$), то $sin\alpha$ - величина отрицательная. Поэтому $sin\alpha = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17}$. Теперь найдем

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \left(-\frac{15}{17}\right) : \frac{8}{17} = -\frac{15}{17} \cdot \frac{17}{8} = -\frac{15}{8}.$$

4. Учтем, что $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, и сложим дроби, приведя их к общему знаменателю. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством (т.е. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$). Тогда получаем: $\frac{1}{ctg\alpha} + \frac{cos\alpha}{1 + sin\alpha} = 1$; $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} + \frac{cos\alpha}{1 + sin\alpha} =$

$$= \frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{1 + sin\alpha} = \frac{sin\alpha(1 + sin\alpha) + cos\alpha \cdot cos\alpha}{cos\alpha(1 + sin\alpha)} = \frac{sin\alpha + sin^2\alpha + cos^2\alpha}{cos\alpha(1 + sin\alpha)} = \frac{1}{cos\alpha}$$

5. Для доказательства тождества $\frac{1}{cos\beta} - cos\beta = sin\beta\,tg\beta$ преобразуем его левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части приведем выражения к общему знаменателю и учтем основное тригонометрическое тождество. Получаем: $\frac{1}{cos\beta} - cos\beta = \frac{1 - cos\beta\,cos\beta}{cos\beta} = \frac{1 - cos^2\beta}{cos\beta} =$

$$= \frac{sin^2\beta + cos^2\beta - cos^2\beta}{cos\beta} = \frac{sin^2\beta}{cos\beta}.$$

В правой части учтем, что $tg\beta = \frac{sin\beta}{cos\beta}$. Тогда имеем: $sin\beta\,tg\beta = sin\beta \cdot \frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{sin^2\beta}{cos\beta}$. После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Вариант 3. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $sin30^\circ=\frac{1}{2}$, $tg45^\circ=1$. Вычислим: $6sin30^\circ-2tg45^\circ=6\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1=1$

б) Учтем, что $sin\pi=0$, $cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Находим: $4sin\pi+2cos\frac{\pi}{3}=4\cdot0+2\cdot\frac{1}{2}=0+1=1$.

2. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество (т.е. $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$). Тогда получаем: $(1-sin\alpha)(1+sin\alpha)=1^2-sin^2\alpha=sin^2\alpha+cos^2\alpha-sin^2\alpha=cos^2\alpha$

3. Используем основное тригонометрическое тождество $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$. Так как по условию $sin\alpha=-\frac{3}{5}$, то получаем: $\left(-\frac{3}{5}\right)^2+cos^2\alpha=1$ или $\frac{9}{25}+cos^2\alpha=1$, откуда $cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$. Так как по условию угол α лежит в третьей четверти (т.е. $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$), то $cos\alpha$ величина отрицательная. Поэтому $cos\alpha=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$. Теперь найдем $tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

4. Приведем дроби к общему знаменателю. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество. Тогда получаем:

$$\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}+\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}=\frac{sin\alpha(1-cos\alpha)+sin\alpha(1+cos\alpha)}{(1+cos\alpha)(1-cos\alpha)}=$$

$$=\frac{sin\alpha-sin\alpha cos\alpha+sin\alpha+sin\alpha cos\alpha}{1^2-cos^2\alpha}=\frac{2sin\alpha}{1-cos^2\alpha}=\frac{2sin\alpha}{sin^2\alpha+cos^2\alpha-cos^2\alpha}=\frac{2}{sin\alpha}$$

5. Для доказательства тождества $\frac{(1+cos\alpha)^2-(1-cos\alpha)^2}{4cos\alpha}-sin^2\alpha=ctg\alpha\,sin\alpha\,cos\alpha$ преобразуем его левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части в числителе дроби используем формулы для разности квадрата чисел. Сократим дробь и учтем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$$\frac{(1+cos\alpha)^2-(1-cos\alpha)^2}{4cos\alpha}-sin^2\alpha=\frac{(1+cos\alpha+1-cos\alpha)(1+cos\alpha-1+cos\alpha)}{4cos\alpha}-sin^2=$$

$$=\frac{2\cdot2cos\alpha}{4cos\alpha}-sin^2\alpha=1-sin^2\alpha=sin^2\alpha+cos^2\alpha-sin^2=cos^2\alpha$$

В правой части учтем, что $ctg\alpha=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}$. Тогда имеем: $ctg\alpha\,sin\alpha\,cos\alpha=$ $=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}sin\alpha\,cos\alpha=cos\alpha\cdot cos\alpha=cos^2\alpha$. После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Вариант 4. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $\sin 180°=0$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$. Вычислим: $3\sin 180° - 2\cos 60° = 3\cdot 0 - 2\cdot\frac{1}{2} = -1$

б) Учтем, что $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $tg\frac{\pi}{4}=1$. Находим: $6\sin\frac{\pi}{2} - 5tg\frac{\pi}{4} = 6\cdot 1 - 5\cdot 1 = 6-5=1$.

2. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество (т.е. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$). Тогда получаем: $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1^2-\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

3. Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Так как по условию $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, то получаем: $\sin^2\alpha+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1$ или $\sin^2\alpha+\frac{16}{25}=1$, откуда $\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$. Так как по условию угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$), то $\sin\alpha$ величина положительная. Поэтому $\sin\alpha=\sqrt{\frac{9}{25}}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$. Теперь найдем $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{5}:\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$.

4. Приведем дроби к общему знаменателю. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество. Тогда получаем:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)-\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha}{1^2-(\sin\alpha)^2}=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2tg\alpha.$$

5. Для доказательства тождества $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{2}-\cos^2\alpha=$ $=tg\alpha\cos\alpha\sin\alpha$ преобразуем его левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части в числителе дроби используем формулу для квадрата суммы и квадрата разности чисел. Получаем:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{2}-\cos^2\alpha=$$

$$\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{2}-\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2}-\cos^2\alpha=\frac{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{2}-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

В правой части учтем, что $tg=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Тогда имеем: $tg\alpha\cos\alpha\sin\alpha=$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha\sin\alpha=\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\sin^2\alpha$. После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Контрольная работа 8 (итоговая)

Вариант 1. К-8А

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+(0,014)^0-4\cdot27^{\frac{2}{3}}=3^2+1-4\cdot(3^3)^{\frac{2}{3}}=9+1-4\cdot9=-26.$

б) $\frac{625^{-\frac{1}{3}}\cdot5}{25^{\frac{1}{3}}}=\frac{(5^4)^{-\frac{1}{3}}\cdot5}{(5^2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{5^{-\frac{4}{3}}\cdot5}{5^{\frac{2}{3}}}=5^{-\frac{4}{3}+1-\frac{2}{3}}=5^{-1}=0,2;$

в) $(2+\sqrt{3})^2-\sqrt{48}-\sqrt[3]{125}=4+4\sqrt{3}+3-\sqrt{16\cdot3}-5=2+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2;$

г) $\cos(-240^\circ)-\sin(-300^\circ)+tg225^\circ=\cos240^\circ+\sin300^\circ+tg225^\circ=$

$=\cos(180^\circ+60^\circ)+\sin(360^\circ-60^\circ)+tg(180^\circ+45^\circ)=$

$=-\cos60^\circ-\sin60^\circ+tg45^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$

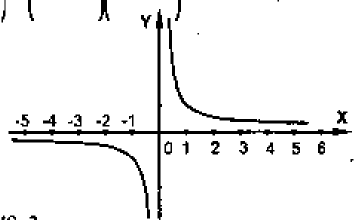
2. а) $\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg\alpha;$

б) $\frac{2}{2-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{4-b}=\frac{2}{2-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{\left(2-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+b^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{4+2b^{\frac{1}{2}}-4}{\left(2-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+b^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{2b^{\frac{1}{2}}}{4-b}.$

3. $y=\frac{1}{x};$

$y\geq0$ при $x\geq0;$

$y\leq0$ при $x\leq0.$



4. 2; 4; 6; ...- арифм. прогр.

$\alpha_1=2,\ \beta=2;\ \delta_{50}=\frac{2\alpha_1+49\beta}{2}\cdot50=\frac{2\cdot2+49\cdot2}{2}\cdot50=51\cdot50=2550.$

5. $a_1=-3,\ a_2=8;\ \beta=a_2-a_1=8-(-3)=11;$

$D_{11}=\frac{2\alpha_1+10\beta}{2}\cdot11=\frac{-6+110}{2}\cdot11=52\cdot11=572.$

Вариант 2. К-8А

1.а) $(16,017)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}+5\cdot16^{\frac{3}{4}}=1-5^3+5\cdot(2^4)^{\frac{3}{4}}=1-125+5\cdot2^3=1-125+40=-84;$

б) $\frac{9^{-1}\cdot 27^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{\left(3^2\right)^{-1}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{-2}\cdot 3^{\frac{6}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{-2+\frac{6}{5}-\frac{1}{5}} = 3^{-1} = \frac{1}{3};$

в) $\sqrt{72}+\left(3-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt[4]{81} = \sqrt{2\cdot 36}+9-6\sqrt{2}+2-3 = 6\sqrt{2}-6\sqrt{2}+8 = 8;$

г) $\sin(-390°)-\cos(-780°)+\sqrt{3}tg(-120°) = -\sin 390° - \cos 780° - \sqrt{3}tg120° =$

$= -\sin(360°+30°)-\cos(720°+60°)-\sqrt{3}tg(180°-60°) =$

$= -\sin 30° - \cos 60° + \sqrt{3}tg60° = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3 = 2.$

2. а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1+\sin 2\alpha;$

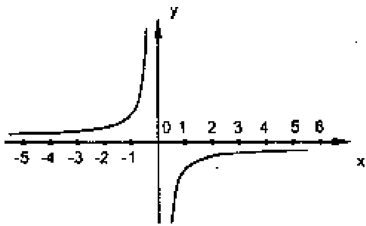
б) $\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{2}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}-1+2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)} =$

$= \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}+1}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}-1}.$

3. $y = -\frac{1}{x};$

$y \ge 0$ при $x \le 0;$

$y \le 0$ при $x \ge 0.$



4. 1; 3; 5; ...; 99 – арифм. прогр.

$\alpha_1 = 1,\ \beta = 2;\ \eta = 50;\ \varsigma = \varsigma_{50} = \frac{2\alpha_1+49\beta}{2}\cdot 50 = \frac{2+49\cdot 2}{2}\cdot 50 = 2550.$

5. $\beta_6 = 200;\ \rho = 10;\ \beta_6 = \beta_1\cdot\rho^5;\ \beta_1 = \frac{\beta_6}{\rho^5} = \frac{200}{100000} = \frac{1}{500};$

$\varsigma_n = \frac{\beta_6\cdot\rho-\beta_1}{\rho-1} = \frac{200\cdot 10-\frac{1}{500}}{10-1} = 222,222.$

Вариант 3. К-8А

1. а) $5\cdot 32^{\frac{3}{5}}+(7,028)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5\left(2^5\right)^{\frac{3}{5}}+1-5^2 = 5\cdot 8+1-25 = 16;$

б) $\frac{64^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{-2}}{4^{\frac{1}{10}}} = \frac{\left(2^6\right)^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{-2}}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{10}}} = \frac{2^{\frac{6}{5}}\cdot 2^{-2}}{2^{\frac{1}{5}}} = 2^{\frac{6}{5}-2-\frac{1}{5}} = 2^{-1} = 0,5;$

в) $\sqrt{20}+\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\sqrt[3]{27}=\sqrt{5\cdot 4}+5-2\sqrt{5}+1-3=2\sqrt{5}+6-3-2\sqrt{5}=3;$

г) $\sin(-225^\circ)-\sqrt{3}\cos(-390^\circ)-tg315^\circ=-\sin 225^\circ-\sqrt{3}\cos 390^\circ-tg315^\circ=$

$=-\sin(180^\circ+45^\circ)-\sqrt{3}\cos(360^\circ+30^\circ)-tg(360^\circ-45^\circ)=$

$=\sin 45^\circ-\sqrt{3}\cos 30^\circ+tg45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$

2. а) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1-1+2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha;$

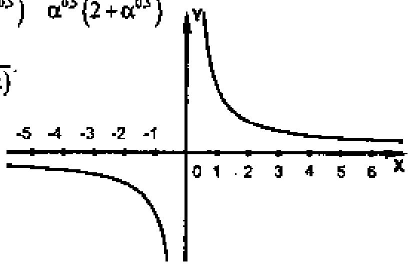
б) $\frac{4}{4-\alpha}+\frac{2-\alpha^{0.5}}{2\alpha^{0.5}+\alpha}=\frac{4}{\left(2-\alpha^{0.5}\right)\left(2+\alpha^{0.5}\right)}+\frac{2-\alpha^{0.5}}{\alpha^{0.5}\left(2+\alpha^{0.5}\right)}=$

$\frac{4\alpha^{0.5}+4-4\alpha^{0.5}+\alpha}{\alpha^{0.5}\left(2-\alpha^{0.5}\right)\left(2+\alpha^{0.5}\right)}=\frac{4+\alpha}{\alpha^{0.5}(4-\alpha)}.$

3. $y=\frac{2}{x};$

$y\geq 0$ при $x\geq 0;$

$y\leq 0$ при $x\leq 0.$



4. 10; 11; 12; ...; 99 – арифм. прогр. $\alpha_1=10,\ \beta=1;\ \alpha_\eta=10+\beta(\eta-1)=$

$=10+\eta-1=9+\eta$; $99=9+\eta$, $\eta=90$, значит, $99=\alpha_{90}$;

$\varsigma=\varsigma_{90}=\frac{2\alpha_1+89\beta}{2}\cdot 90=(20+89)\cdot 45=4905.$

5. $\alpha_1=75,\ \alpha_2=60$; $\beta=\alpha_2-\alpha_1=-15;\ \varsigma_{10}=\frac{2\alpha_1+\beta\cdot 9}{2}\cdot 10=(2\cdot 75-9\cdot 15)\cdot 5=75.$

Вариант 4. К-8А

1. а) $(-5{,}13)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}-27^{\frac{4}{3}}=1+5^3-\left(3^3\right)^{\frac{4}{3}}=1+125-3^4=126-81=45;$

б) $\frac{16^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-1}}{4^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(2^4\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-1}}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2^{-\frac{4}{3}}\cdot 2^{-1}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{-\frac{4}{3}-1-\frac{2}{3}}=2^{-3}=\frac{1}{8};$

в) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt[5]{32}-\sqrt{48}=4+4\sqrt{3}+3-2-\sqrt{16\cdot 3}=5+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=5.$

г) $\cos(-240^\circ)-\sqrt{2}\sin(-315^\circ)-tg(-405^\circ)=\cos 240^\circ+\sqrt{2}\sin 315^\circ+tg405^\circ=$

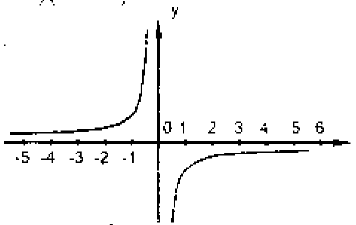
$=\cos(180^\circ+60^\circ)+\sqrt{2}\sin(360^\circ-45^\circ)+tg(360^\circ+45^\circ)=$

$=-\cos 60^\circ-\sqrt{2}\sin 45^\circ+tg45^\circ=-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1=-0{,}5-1+1=-0{,}5.$

2. а) $(sin\,\alpha - cos\,\alpha)^2 = sin^2\alpha - 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha + cos^2\alpha = 1 - sin\,2\alpha$;

б) $\dfrac{3+\alpha^{0,5}}{\alpha-3\alpha^{0,5}} - \dfrac{6}{\alpha-9} = \dfrac{3+\alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(\alpha^{0,5}-3)} - \dfrac{6}{(\alpha^{0,5}-3)(\alpha^{0,5}+3)} =$

$= \dfrac{\alpha+6\alpha^{0,5}+9-6\alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(\alpha^{0,5}-3)(\alpha^{0,5}+3)} = \dfrac{\alpha+9}{\alpha^{0,5}(\alpha-9)}$.



3. $y = -\dfrac{2}{x}$;

$y \geq 0$ при $x \leq 0$;

$y \leq 0$ при $x \geq 0$.

4. 100; 101; 102; ...; 999 – арифм. прогр. $\alpha_1 = 100$, $\beta = 1$; $\alpha_\eta = 100 + \eta - 1 = 99 + \eta$; $999 = 99 + \eta$, $\eta = 900$, значит, $999 = \alpha_{900}$;

$\varsigma = \varsigma_{900} = \dfrac{2\alpha_1 + 899\beta}{2} \cdot 900 = (200+899)\cdot 450 = 494550$.

5. $\beta_5 = 81$, $\rho = 0.5$; $\beta_5 = \beta_1 \cdot \rho^4$, $\beta_1 = \dfrac{\beta_5}{\rho^4} = \dfrac{81}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 81\cdot 16$;

$\varsigma_5 = \dfrac{\beta_5\cdot\rho - \beta_1}{\rho - 1} = \dfrac{81\cdot 0,5 - 81\cdot 16}{0,5-1} = \dfrac{81\cdot 15,5}{0,5} = 2511$.

Контрольная работа 9

Вариант 1. К-9

1. Для вычисления значения тригонометрической функции используем формулу приведения.

а) $sin\,150° = sin(180° - 30°) = sin\,30° = \dfrac{1}{2}$; б) $tg\dfrac{3\pi}{4} = tg\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -tg\dfrac{\pi}{4} = -1$.

2. а) Используем формулы приведения и получим: $cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -sin\,\alpha$ и $sin(\pi - \alpha) = sin\,\alpha$. Поэтому $cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) + sin(\pi-\alpha) = -sin\,\alpha + sin\,\alpha = 0$.

б) Используем формулу для синуса суммы двух углов. Имеем:

$sin(\alpha+\beta) - sin\,\beta\,cos\,\alpha = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta - sin\,\beta\,cos\,\alpha = sin\,\alpha\,cos\,\beta$.

в) Применим формулу для косинуса двойного угла. Получаем:

$cos\,2\alpha + 2\,sin^2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha + 2\,sin^2\alpha = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$.

3. Используем формулу для синуса двойного угла и преобразуем левую часть тождества: $2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha\,cos\,2\alpha = (2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha)cos\,2\alpha = sin\,2\alpha\cdot cos\,2\alpha =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(2\,sin\,\alpha\,cos\,2\alpha) = \dfrac{1}{2}sin\,4\alpha$. Видно, что левая часть равна правой.

Следовательно, тождество доказано.

4. а) В числителе дроби используем формулу для разности синусов двух углов, в знаменателе - для суммы косинусов двух углов. Тогда получим: $\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\cos3\alpha+\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}}=\frac{2\cos2\alpha\sin(-\alpha)}{2\cos2\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-tg\alpha$$

. Была использована нечетность функции синус, т.е. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

б) В числителе дроби используем основное тригонометрическое тождество (т.е. $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$) и формулу для косинуса двойного угла (т.е. $\cos2\alpha=$ $=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$), в знаменателе - формулу приведения $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

Тогда получаем: $\frac{1-\cos2\alpha}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha}=$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha.$$

Вариант 2. К-9

1. Для вычисления значения тригонометрической функции используем формулы приведения.

а) $\cos210°=\cos(360°-150°)=\cos(-150°)=\cos150°=\cos(180°-30°)=-\cos30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При решении было учтено, что период функции косинус 360° и функция косинус - четная, т.е. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

б) Учтем, что функция тангенс - нечетная, т.е. $tg(-\alpha)=-tg\alpha$. Поэтому получаем: $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-tg\frac{\pi}{4}=-1$.

2. а) Учтем периодичность функции синус (т.е. $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$) и формулу приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$. Поэтому: $\sin(2\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $=\sin\alpha-(-\sin\alpha)=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha$.

б) Используем формулу для косинуса разности двух углов:

$\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$.

в) Применим формулу для синуса двойного угла и учтем, что $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Тогда получаем: $\sin2\alpha tg\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\sin^2\alpha$.

3. В числителе дроби используем формулу для синуса двойного угла, в знаменателе - формулу для косинуса двойного угла. Тогда получаем: $\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2(2\sin\alpha\cos\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=2tg2\alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

4. а) Используем в числителе дроби формулу для разности косинусов двух углов, в знаменателе - формулу для суммы синусов двух углов. Тогда получим:

$$\frac{\cos 5\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha}=\frac{-2\sin\frac{5\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha-\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}}=\frac{-2\sin 3\alpha\sin 2\alpha}{2\sin 3\alpha\cos(-2\alpha)}=\frac{-2\sin 2\alpha}{\cos(-2\alpha)}=$$

$=\frac{-2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-2tg2\alpha$. Было учтено, что $\cos(-2\alpha)=\cos 2\alpha$.

б) В числителе дроби используем формулу для косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, в знаменателе - формулу приведения $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$. Тогда получаем:

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=2\cos\alpha .$$

Вариант 3. К-9

а) $tg135°=tg(180°-45°)=tg(-45°)=-tg45°=-1$. Было учтено, что период функции тангенс равен $180°$ и эта функция является нечетной, т.е. $tg(-\alpha)=-tg\alpha$.

б) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Была учтена нечетность функции синус, т.е. $\sin(\alpha)=-\sin\alpha$.

2. а) Используем формулы приведения и периодичность функции косинус:

$\cos(\pi+\alpha)=\cos(2\pi-(\pi-\alpha))=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Получаем: $\cos(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha+\cos\alpha=0$.

б) Применим формулу для синуса разности двух углов. Имеем:

$\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta$.

в) Используем формулу для косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество. Тогда получаем: $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=$

$=2\cos^2\alpha-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

3. Для доказательства тождества преобразуем его левую часть. Изменим порядок умножения. Имеем: $4\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha=2\cos 2\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)=2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha=$ $=2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$. Была использована формула для синуса двойного угла. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

4.а) В числителе дроби применим формулу для суммы косинусов двух углов, в знаменателе - формулу для разности синусов двух углов. Имеем:

$$\frac{\cos\alpha+\cos3\alpha}{\sin3\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-\alpha}{2}}=\frac{2\cos2\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos2\alpha\sin\alpha}=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin\alpha}=$$

$=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha$. Была учтена четность функции косинус, т.е. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

б) Используем основное тригонометрическое тождество, формулу для косинуса двойного угла и формулу

приведения: $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$

Тогда: $(1+\cos2\alpha)ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$=2\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$.

Вариант 4. К-9

1. Используем формулы приведения.

а) $ctg135°=\frac{\cos135°}{\sin135°}=\frac{\cos(180°-45°)}{\sin(180°-45°)}=\frac{-\cos45°}{\sin45°}=-ctg45°=-1$.

б) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Была учтена периодичность функции косинус и ее четность, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

2. а) Для функции $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ используем формулы приведения: $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha$. Для функции $ctg(\pi-\alpha)$ используем ее

периодичность и нечетность: $ctg(\pi-\alpha)=ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$. Тогда находим:

$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg(\pi-\alpha)=ctg\alpha-ctg\alpha=0$.

б) Применим формулу для косинуса разности двух углов:

$\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$.

в) Учтем, что $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, и применим формулу для синуса двойного угла.

Получаем: $\frac{2tg\alpha}{sin2\alpha} = 2\frac{sin\alpha}{cos\alpha} : (2\,sin\alpha\,cos\alpha) = \frac{2\,sin\alpha}{cos\alpha(2\,sin\alpha\,cos\alpha)} =$

$= \frac{2\,sin\alpha}{2\,sin\alpha\,cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$.

3. Для доказательства тождества преобразуем его левую часть. В числителе дроби используем формулу для косинуса двойного угла, в знаменателе - формулу для синуса двойного угла. Имеем:

$\frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{4\,sin\alpha\,cos\alpha} = \frac{cos\,2\alpha}{2(2\,sin\alpha\,cos\alpha)} = \frac{cos2\alpha}{2\,sin\,2\alpha} = \frac{ctg2\alpha}{2}$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

4. а) Используем в числителе дроби формулу для разности синусов двух углов, в знаменателе - формулу для суммы косинусов двух углов. Тогда получаем:

$$\frac{sin\,2\alpha - sin\,4\alpha}{cos\,4\alpha + cos\,2\alpha} = \frac{2\,cos\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\,sin\frac{2\alpha-4\alpha}{2}}{2\,cos\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\,cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2}} = \frac{2\,cos\,3\alpha\,sin(-\alpha)}{2\,cos\,3\alpha\,cos\alpha} =$$

$= \frac{sin(-\alpha)}{cos\alpha} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha$. Была учтена нечетность функции синус, т.е. $sin(-\alpha) = -sin\alpha$.

б) Применим в числителе дроби формулы приведения и учтем периодичность функции косинус: $cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\alpha$.

В знаменателе дроби используем основное тригонометрическое тождество и формулу для косинуса двойного угла. Получаем: $\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{1-cos2\alpha} =$

$$= \frac{sin\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha - (cos^2\alpha - sin^2\alpha)} = \frac{sin\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha - cos^2\alpha + sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{sin\alpha}{2\,sin^2\alpha} = \frac{1}{2\,sin\alpha}.$$

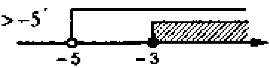
Контрольная работа 9 (итоговая)

Вариант 1. К-9А

1. $\left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha} - \frac{12\alpha}{9-\alpha^2}\right) : \frac{3-\alpha}{3} = \left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha} - \frac{12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)}\right) \cdot \frac{3}{3-\alpha} =$

$$= \frac{9+6\alpha+\alpha^2-12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)} \cdot \frac{3}{3-\alpha} = \frac{\alpha^2-6\alpha+9}{(3-\alpha)^2\cdot(3+\alpha)} \cdot 3 = \frac{(3-\alpha)^2\cdot 3}{(3-\alpha)^2\cdot(3+\alpha)} = \frac{3}{3+\alpha}$$

2. $\begin{cases}3x+2\ge x-4\\5-3x<20\end{cases}$; $\begin{cases}3x-x\ge -4-2\\3x>5-20\end{cases}$; $\begin{cases}2x\ge -6\\3x>-15\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge -3\\x>-5\end{cases}$



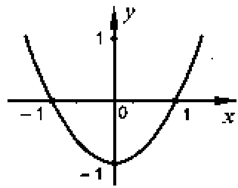
Ответ: $x\ge -3$.

3. $\frac{x-1}{3x^2-4x+1}=\frac{x-1}{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3x-1}$; $3x^2-4x+1=0$; $x_1=\frac{4+2}{6}=1$; $x_2=\frac{1}{3}$.

4. $y=x^2-1$;

$y>0$ при $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$;

$y<0$ при $x\in(-1;\ 1)$.



5. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8$;

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8)=-0{,}96$.

6. Пусть x - коэффициент пропорциональности. Тогда $7x$ г, $3x$ г – меди и цинка соответственно содержится в куске латуни. Учитывая, что латунь весит 500 г, получаем уравнение: $7x+3x=500$; $10x=500$; $x=50$; 50 – коэффициент пропорциональности.

$7\cdot 50=350$(г) - меди в латуни; $3\cdot 50=150$(г) - цинка в латуни.

Ответ: 350 г; 150 г .

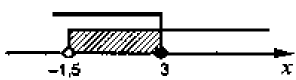
7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+30)$м – длина, $x(x+30)$ м^2 – площадь или 6175м^2. Получаем уравнение: $x(x+30)=6175$;

$x^2+30x-6175=0$; $x_1=\frac{-30+180}{2}=65$; $x_2<0$ – не удовлетворяет условию задачи. 65 м – ширина, 65+30=95 м – длина. **Ответ:** 95 м, 65 м.

Вариант 2. К-9А

1. $\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a}{a-1}\right)\cdot\frac{a+1}{1-3a}=\frac{a^2-2a+1-a-a^2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a+1}{1-3a}=\frac{1-3a}{(a-1)(1-3a)}=\frac{1}{a-1}$.

2. $\begin{cases}3x+2<7x-4\\-\frac{x}{3}\ge -1\end{cases}$; $\begin{cases}4x>6\\\frac{x}{3}\le 1\end{cases}$; $\begin{cases}x>1{,}5\\x\le 3\end{cases}$



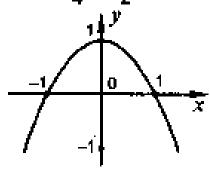
Ответ: $(1{,}5;\ 3]$.

3. $\frac{2x^2-5x+3}{x-1}=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}{x-1}=2x-3$; $2x^2-5x+3=0$; $x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$; $x_2=1$.

4. $y=-x^2+1$;

$y>0$ при $x\in(-1;\ 1)$;

$y<0$ при $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$.



5. $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-0{,}6^2 = 0{,}64;\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}36-0{,}64 = -0{,}28.$

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда в составе будут $10x$ г, $5x$ г, $2x$ г – воды, спирта, мела соответственно. Учитывая, что масса состава составляет 680 г, получаем уравнение: $10x+5x+2x=680$; $17x=680$; $x=40$; 40 – коэффициент пропорциональности. $10\cdot 40=400$ г – воды в составе; $5\cdot 40=200$ г – спирта в составе; $2\cdot 40=80$ г – мела в составе.

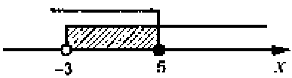
Ответ: 400 г, 200 г, 80 г.

7. Пусть xм – ширина. Тогда $(x+40)$м – длина, $x(x+40)$ м^2 – площадь или 7700м^2. Получаем уравнение: $x(x+40)=7700$;
$x^2+40x-7700=0$; $x_1=\dfrac{-40+160}{2}=70$; $x_2<0$ – не удовлетворяет условию задачи. 70м – ширина, 70+40=110м – длина. **Ответ:** 110 м, 70 м.

Вариант 3. К-9А

1. $\left(\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\dfrac{1}{a+1}=\left(\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{4a}{(a-1)(a+1)}\right)\cdot\dfrac{1}{a+1}=$
$$=\frac{a^2-2a+1+4a}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{a^2+2a+1}{(a+1)^2\cdot(a-1)}=\frac{(a+1)^2}{(a+1)^2\cdot(a-1)}=\frac{1}{a-1}.$$

2. $\begin{cases}x+2\le 17-2x\\ 9-5x<24\end{cases}$; $\begin{cases}3x\le 15\\ 5x>-15\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 5\\ x>-3\end{cases}$.



Ответ: $(-3;\ 5]$.

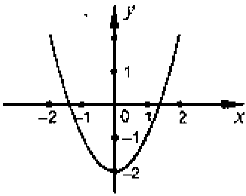
3. $\dfrac{4x^2+7x+3}{x+1}=\dfrac{4(x+1)\left(x+\dfrac{3}{4}\right)}{x+1}=4x+3$; $4x^2+7x+3=0$; $x_1=\dfrac{-7+1}{8}=-\dfrac{3}{4}$; $x_2=-1$

Ответ: $4x+3$.

4. $y=x^2-2$;

$y>0$ при $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\ +\infty\right)$;

$y<0$ при $x\in\left(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$.



5. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$;
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=-0{,}96.$

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда в сплаве будет: $49x$ т, x т – железа и углерода соответственно. Учитывая, что масса сплава составляет 1 т, получаем уравнение: $49x+x=1$; $50x=1$;
$x=\dfrac{1}{50}$; $\dfrac{1}{50}$ – коэффициент пропорциональности. $\dfrac{49}{50}$ т $=\dfrac{49}{50}\cdot 1000=980$ кг железа в сплаве; $\dfrac{1}{50}$ т $=20$ кг – углерода в сплаве. **Ответ:** 980 кг, 20 кг.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+31)$ м – длина, $x(x+31)$ м^2 – площадь или 1830 м^2. Получаем уравнение: $x(x+31)=1830$;

$x^2+31x-1830=0$; $D=961+4\cdot 1830=91^2$; $x_1=\dfrac{-31+91}{2}=30$; $x_2<0$

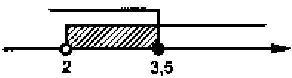
не удовлетворяет условию задачи. 30 м – ширина, $30+31=61$ м – длина.
Ответ: 61 м, 30 м.

Вариант 4. К-9А

1. $\left(\dfrac{a}{5+a}+\dfrac{5+a}{5-a}\right):\dfrac{3a+5}{a+5}=\dfrac{5a-a^2+25+10a+a^2}{(5+a)(5-a)}\cdot\dfrac{5+a}{3a+5}=$

$=\dfrac{25+15a}{(5-a)(3a+5)}=\dfrac{5(5+3a)}{(5-a)(3a+5)}=\dfrac{5}{5-a}$.

2. $\begin{cases}2x+9\ge 6x-5\\ -\dfrac{x}{2}<-1\end{cases}$; $\begin{cases}4x\le 14\\ \dfrac{x}{2}>1\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 3{,}5\\ x>2\end{cases}$



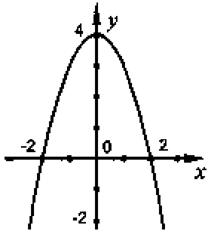
Ответ: $(2;3{,}5]$.

3. $\dfrac{x-1{,}5}{2x^2-5x+3}=\dfrac{x-1{,}5}{2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}=\dfrac{1}{2x-2}$; $2x^2-5x+3=0$; $x_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2}$; $x_2=1$

4. $y=-x^2+4$;

$y>0$ при $x\in(-2;2)$;

$y<0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.



5. $cos^2\alpha=1-sin^2\alpha=1-0{,}8^2=0{,}36$;

$cos\,2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=0{,}36-0{,}64=-0{,}28$.

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда $4x$ кг, x кг – ячменя и риса в крахмале соответственно. Учитывая, что масса крахмала составляет 45 кг, получаем уравнение: $4x+x=45$; $5x=45$; $x=9$;

9 – коэффициент пропорциональности.

$4\cdot 9=36$ кг - ячменя в крахмале, 9 кг - риса в крахмале. **Ответ:** 36 кг, 9 кг.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+36)$ м – длина, $x(x+36)$ м^2 – площадь или 6400 м^2. Получаем уравнение: $x(x+36)=6400$;

$x^2+36x-6400=0$; $D=1296+4\cdot 6400=164^2$; $x_1=\dfrac{-36+164}{2}=64$; $x_2<0$

не удовлетворяет условию задачи. 64 м – ширина, 64+36=100 м – длина.
Ответ: 100 м, 64 м.

Контрольная работа 10

Вариант 1. К-10

1. В скобках приведем дроби к общему знаменателю $(a-2)(a+2)$: Получаем:

$$\left(\frac{a+2}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right)\cdot\frac{a-2}{3a+2}=\frac{(a+2)(a+2)-a(a-2)}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a-2}{3a+2}=\frac{(a+2)^2-a^2+2a}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a-2}{3a+2}=$$

$$=\frac{a^2+4a+4-a^2+2a}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a-2}{3a+2}=\frac{6a+4}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a-2}{3a+2}=\frac{2(3a+2)(a-2)}{(a-2)(a+2)(3a+2)}=\frac{2}{a+2}.$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases}x-y=6\\ xy=16\end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x=y+6$ и подставим во второе уравнение: $(y+6)y=16$ или $y^2+6y-16=0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($a=1$, $k=\frac{b}{3}=3$, $c=-16$).

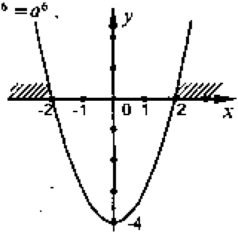
Находим дискриминант $D_1=k^2-ac=3^2-1\cdot(-16)=9+16=25=5^2$ и корни $y=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-3\pm\sqrt{5^2}}{1}=-3\pm5$, т.е. $y_1=2$ и $y_2=-8$. Теперь по формуле $x=y+6$ найдем соответствующие значения x: $x_1=2+6=8$ и $x_2=-8+6=-2$. Итак, данная система имеет два решения: (8; 2) и (-2; -8).

Ответ: (8; 2) и (-2; -8).

3. В левой части неравенства $5x-1{,}5(2x+3)<4x+1{,}5$ раскроем скобки и приведем подобные члены: $5x-3x-4{,}5<4x+1{,}5$ или $2x-4{,}5<4x+1{,}5$. Перенесем слагаемые, зависящие от x, в правую часть неравенства, не зависящие от x – в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $-4{,}5-1{,}5<4x-2x$. Вновь приведем подобные члены: $-6<2x$. Разделим обе части неравенства на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем равносильное неравенство: $\frac{-6}{2}<\frac{2x}{2}$ или $-3<x$, т.е. $x>-3$. **Ответ:** $x>-3$.

4. Запишем данный корень в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{7}{6}}$.

5. График функции $y=x^2-4$ получается из графика функции $y=x^2$ смещением на четыре единицы вниз. Из рисунка видно, что функция принимает положительные значения ($y>0$) при $x<-2$ и при $x>2$, т.е. в промежутках $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$. Эти промежутки заштрихованы.



6. Учтем, что $sin 2\alpha = 2 sin\alpha cos\alpha$ (формула синуса двойного угла). Так как по условию $sin\alpha$ известен, то надо найти $cos\alpha$. Используем основное тригоном. тождество: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Так как $sin\alpha = 0{,}8$, то подставляя, получим: $0{,}8^2 + cos^2\alpha = 1$ или $0{,}64 + cos^2\alpha = 1$. Откуда $cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$. Так как угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), то значение $cos\alpha$ отрицательное. Поэтому $cos\alpha = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$. Теперь найдем $sin 2\alpha = 2 \cdot 0{,}8 \cdot (-0{,}6) = -0{,}96$.

7. Пусть по плану бригада должна была изготовить x деталей в час и за y часов выполнить всю работу (т.е. сделать 40 деталей). Тогда получаем первое уравнение: $xy = 40$. На самом деле бригада делала в час на 8 деталей больше, т.е. $(x + 8)$ деталей и работала на 2 часа меньше, т.е. $(y - 2)$ часа. За это время она изготовила $(x + 8)(y - 2)$ деталей, что на 8 деталей больше запланированного, т.е. $40 + 8 = 48$ деталей. Имеем второе уравнение: $(x + 8)(y - 2) = 48$.

Для нахождения неизвестных x и y получили систему уравнений $\begin{cases} xy = 40 \\ (x+8)(y-2) = 48 \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 40 \\ xy + 8y - 2x = 64 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во второе: $40 + 8y - 2x = 64$ или $8y - 2x = 24$ или $4y - x = 12$. Выразим из этого соотношения $x = 4y - 12$ и подставим в первое уравнение системы: $(4y - 12)y = 40$ или $4y^2 - 12y - 40 = 0$ или $y^2 - 3y - 10 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 = 7^2$ и его корни $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{7^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2}$, т.е. $y_1 = 5$ и $y_2 = -2$ (не подходит, т.к. по смыслу задачи $y > 0$). Тогда по формуле $x = 4y - 12$ найдем $x = 4 \cdot 5 - 12 = 20 - 12 = 8$. Итак, по плану бригада должна была изготовить 8 деталей в час.

Ответ: 8 деталей в час.

Вариант 2. К-10

1. В скобках приведем дроби к общему знаменателю и используем формулу для квадрата суммы двух чисел. Тогда получаем:

$$\left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x}{x+3}\right) : \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+3)(x+3) - x(x-3)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+3)^2 - x^2 + 3x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 3x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{9x+9}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{9(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+1)} = \frac{9}{x-3}.$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 15 \end{cases}$ применим способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x = y + 2$ и подставим во второе уравнение: $(y + 2)y = 15$ или $y^2 + 2y - 15 = 0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($a = 1, b = 2$ и $k = \frac{b}{2} = 1, c = -15$). Найдем его дискриминант $D_1 = k^2 - ac = 1^2 - 1 \cdot (-15) = 1 + 15 = 16 = 4^2$ и корни $y = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{4^2}}{1} = -1 \pm 4$, т.е. $y_1 = 3$ и $y_2 = -5$. По формуле $x = y + 2$ найдем соответствующие значения x: $x_1 = 3 + 2 = 5$ и $x_2 = -5 + 2 = -3$. Итак, данная система имеет два решения: (5; 3) и (-3; -5).

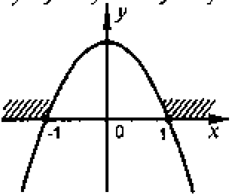
Ответ: (5; 3) и (-3; -5).

3. Для решения неравенства $2x - 4,5 > 6x - 0,5(4x - 3)$ раскроем скобки в правой части и приведем подобные члены: $2x - 4,5 > 6x - 2x + 1,5$ или $2x - 4,5 > 4x + 1,5$. Перенесем члены, зависящие от x, в правую часть неравенства, не зависящие от x, - в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $-4,5 - 1,5 > 4x - 2x$. Вновь приведем подобные члены: $-6 > 2x$. Разделим обе части неравенства на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем равносильное неравенство: $\frac{-6}{2} > \frac{2x}{2}$ или $-3 > x$, т.е. $x < -3$.

Ответ: $x < -3$.

4. Запишем корень в данном выражении в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $y^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[10]{y^3} = y^{\frac{1}{5}} \cdot y^{\frac{3}{10}} = y^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}} = y^{\frac{5}{10}} = y^{\frac{1}{2}}$

5. График функции $y = -x^2 + 1$ получается из графика функции $y = -x^2$ при его смещении на одну единицу вверх. Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) при $x < -1$ и при $x > 1$, т.е. в промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.



6. Используем формулу для синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$. По условию величина $\cos\alpha$ известна. Поэтому надо найти $\sin\alpha$. Используем основное тригоном. тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Так как $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, то подставляя эту величину, получим: $\sin^2\alpha + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$ или $\sin^2\alpha + \frac{25}{169} = 1$. Откуда $\sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. По условию угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), поэтому значение $\sin\alpha$ положительное и

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$. Теперь найдем $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$.

7. Пусть скорость первого велосипедиста x км/ч, тогда расстояние 45 км он проезжает за время $\frac{45}{x}$. Скорость второго велосипедиста на 3 км/ч больше, т.е. $(x + 3)$ км/ч. Такое же расстояние он проехал за время $\frac{45}{x+3}$ ч. Так как второй велосипедист выехал на 30 минут позже первого, а приехал на 15 минут раньше, то на путь он затратил на 30 + 15 = 45 мин = $\frac{45}{60}$ ч = $\frac{3}{4}$ ч меньше, чем первый велосипедист. Поэтому получаем уравнение: $\frac{45}{x}=\frac{45}{x+3}+\frac{3}{4}$.

Умножим все члены уравнения на наименьший общий знаменатель дробей $4x(x+3)$. Тогда получаем: $45\cdot4(x+3)=45\cdot4x+3x(x+3)$. Разделим все члены уравнения на число 3: $15\cdot4(x+3)=15\cdot4x+x(x+3)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $60x+180=60x+x^2+3x$ или $0=x^2+3x-180$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D=b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot(-180)=$ $=9+720=729=27^2$ и его корни $y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{27^2}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm27}{2}$, т.е. $x_1=12$ и $x_2=-15$ (не подходит, т.к. по смыслу задачи $x>0$). Следовательно, скорость первого велосипедиста 12 км/ч. **Ответ:** 12 км/ч.

Вариант 3. К-10

1. В скобках вычтем дроби, приведя их к общему знаменателю. Используем формулу для квадрата суммы двух чисел. Получаем:

$$\left(\frac{m+5}{m-5}-\frac{m}{m+5}\right)\frac{m+5}{3m+5}=\frac{(m+5)(m+5)-m(m-5)}{(m-5)(m+5)}\cdot\frac{m+5}{3m+5}=$$

$$=\frac{(m+5)^2-m^2+5m}{(m-5)(m+5)}\cdot\frac{m+5}{3m+5}=\frac{m^2+10m+25-m^2+5m}{(m-5)(m+5)}\cdot\frac{m+5}{3m+5}=$$

$$=\frac{15m+25}{(m-5)(m+5)}\cdot\frac{m+5}{3m+5}=\frac{5(3m+5)(m+5)}{(m-5)(m+5)(3m+5)}=\frac{5}{m-5}.$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases}x+2y=11\\xy=14\end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x=11-2y$ и подставим во второе уравнение: $(11-2y)y=14$ или $2y^2-11y+14=0$. Найдем его дискриминант $D=b^2-4ac=$ $=(-11)^2-4\cdot2\cdot14=121-112=9=3^2$ и его корни $y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{11\pm\sqrt{3^2}}{2\cdot2}=$ $=\frac{11\pm3}{4}$ т.е. $y_1=\frac{14}{4}=3{,}5$ и $y_2=\frac{8}{4}=2$. По формуле $x=11-2y$ найдем соответствующие значения x: $x_1=11-2\cdot3{,}5=11-7=4$ и $x_2=11-2\cdot2=11-4=7$. Следовательно, система имеем два решения: (4; 3,5) и (7; 2).

Ответ: (4; 3,5) и (7; 2).

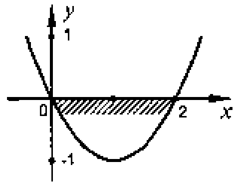
3. Для решения неравенства $5x-3(x-1{,}5)<4x+1{,}5$ раскроем скобки в левой части и приведем подобные члены $5x-3x+4{,}5<4x+1{,}5$ или $2x+4{,}5<4x+1{,}5$. Перенесем члены, зависящие от x, в правую часть неравенства, не зависящие от x, - в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $4{,}5-1{,}5<4x-2x$. Вновь приведем подобные члены: $3<2x$. Разделим обе части неравенства на положительное

число 2. При этом знак неравенства сохраняется и получаем равносильное неравенство: $\frac{3}{2} < \frac{2x}{2}$ или $1,5 < x$, т.е. $x > 1,5$.

Ответ: $x > 1,5$.

4. В данном выражении запишем корень в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $a^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$.

5. Для построения графика функции $y = x^2 - 2x$ запишем ее в другом виде, выделив полный квадрат разности чисел. Получаем: $y = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x - 1)^2 - 1$. Поэтому график данной функции получается из графика функции $y = x^2$ его смещением на одну единицу вправо и на одну единицу вниз. Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) при $0 < x < 2$, т.е. в промежутке $(0; 2)$. Этот промежуток заштрихован.



6. Применим формулу для синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. По условию известна величина $\sin\alpha$, поэтому надо найти $\cos\alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Подставим значение $\sin\alpha = -0,6$ и получим: $(-0,6)^2 + \cos^2\alpha = 1$ или $0,36 + \cos^2\alpha = 1$. Откуда $\cos^2\alpha = 1 - 0,36 = 0,64$. По условию известно, что угол α находится в третьей четверти (т.е. $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$), поэтому величина $\cos\alpha$ отрицательная и $\cos\alpha = -\sqrt{0,64} = -\sqrt{0,8^2} = -0,8$. Теперь найдем $\sin 2\alpha = 2\cdot(-0,6)\cdot(-0,8) = 0,96$.

7. Пусть бригада должна была изготавливать по плану по x деталей в день и закончить работу за y дней. Тогда получаем первое уравнение $xy = 210$. Реально бригада изготавливала в день на 10 деталей больше, т.е. $(x + 10)$ деталей, и работала на один день меньше, т.е. $(y - 1)$ день. За это время было сделано $(x + 10)(y - 1)$ деталей, что на 30 деталей больше плана, т.е. $210 + 30 = 240$ деталей. Получаем второе уравнение: $(x + 10)(y - 1) = 240$.

Для нахождения неизвестных x и y имеем систему уравнений: $\begin{cases} xy = 210 \\ (x+10)(y-1) = 240 \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 210 \\ xy + 10y - x = 250 \end{cases}$. Подставим первое уравнение во второе: $210 + 10y - x = 250$ или $10y - x = 40$. Найдем отсюда $x = 10y - 40$ и подставим в первое уравнение системы: $(10y - 40)y = 210$ или $y^2 - 4y - 21 = 0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($a = 1$; $k = \frac{b}{2} = -2$; $c = -21$). Найдем его дискриминант $D = k^2 - ac = (-2)^2 - 1\cdot(-21) =$

$= 4 + 21 = 25 = 5^2$ и его корни $y = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{5^2}}{1} = 2 \pm 5$, т.е. $y_1 = 7$ и $y_2 = -3$ (не подходит, т.к. по смыслу задачи $y > 0$). Теперь по формуле $x = 10y - 40$ найдем $x = 10 \cdot 7 - 40 = 70 - 40 = 30$. Следовательно, по плану бригада должна была делать по 30 деталей в день.

Ответ: 30 деталей.

Вариант 4. К-10

1. В скобках вычтем дроби, приведя их к общему знаменателю. Используем формулу для квадрата суммы двух чисел. Получаем:

$$\left(\frac{y+1}{y-1} - \frac{y}{y+1}\right) : \frac{3y+1}{y^2+y} = \frac{(y+1)(y+1) - y(y-1)}{(y-1)(y+1)} : \frac{3y+1}{y^2+y} = \frac{(y+1)^2 - y^2 + y}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y^2+y}{3y+1} =$$

$$= \frac{y^2 + 2y + 1 - y^2 + y}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y(y+1)}{3y+1} = \frac{(3y+1)y(y+1)}{(y-1)(y+1)(3y+1)} = \frac{y}{y-1}.$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y^2 = 3 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x = 5 - y$ и подставим во второе уравнение системы: $5 - y - y^2 = 3$ или $0 = y^2 + y - 2$. Решим это квадратное уравнение ($a = 1$, $b = 1$ и $c = -2$). Найдем его дискриминант $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) =$

$= 1 + 8 = 9 = 3^2$ и корни $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, т.е. $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$.

Используя формулу $x = 5 - y$, найдем соответствующие значения x: $x^1 = 5 - 1 = 4$ и $x_2 = 5 - (-2) = 7$. Итак, система имеет два решения: $(4; 1)$ и $(7; -2)$.

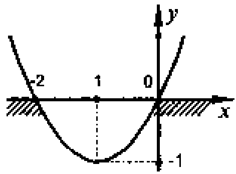
Ответ: $(4; 1)$ и $(7; -2)$.

3. Для решения неравенства $x - 2{,}5(2x - 1) > x - 1{,}5$ раскроем скобки в левой части и приведем подобные члены: $x - 5x + 2{,}5 > x - 1{,}5$ или $-4x + 2{,}5 > x - 1{,}5$. Перенесем члены, зависящие от x, в правую часть неравенства, не зависящие от x, - в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $2{,}5 + 1{,}5 > x + 4x$. Вновь приведем подобные члены: $4 > 5x$. Разделим обе части неравенства на положительное число 5. При этом знак неравенства сохраняется и получаем равносильное неравенство: $\frac{4}{5} > \frac{5x}{5}$ или $0{,}8 > x$, т.е. $x < 0{,}8$.

Ответ: $x < 0{,}8$.

4. В данном выражении запишем корень в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $y^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[8]{y^3} = y^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{8}} = y^{\frac{3}{4} + \frac{3}{8}} = y^{\frac{9}{8}}$.

5. Для построения графика функции $y = x^2 + 2x$ выделим полный квадрат суммы чисел: $y = (x^2 + 2x + 1) - 1 = =(x + 1)^2 - 1$. Видно, что такой график получается из графика функции $y = x^2$ при его смещении на одну единицу влево и на одну единицу вниз. Из рисунка видно, что функция принимает положительные значения при $x < -2$ и при $x > 0$, т.е. в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$.



6. Используем формулу для синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. По условию известна величина $\cos\alpha$, поэтому надо найти значение $\sin\alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Подставим значение $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ и получим: $\sin^2\alpha + \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1$ или $\sin^2\alpha + \frac{64}{289} = 1$. Откуда $\sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$. Так как угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), то величина $\sin\alpha$ положительная и $\sin\alpha = \sqrt{\frac{225}{289}} = \sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$. Теперь находим $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{240}{289}$.

7. Пусть расстояние между пунктами *A* и *B* x км. Если бы автобус ехал со скоростью 60 км/ч, то он потратил бы на этот путь время $\frac{x}{60}$ ч. Но с такой скоростью он ехал только половину пути (т.е. $\frac{x}{2}$ км) и потратил время $\frac{x}{2} : 60 = \frac{x}{120}$ ч. Затем автобус задержался на 30 мин $= \frac{1}{2}$ ч. Оставшуюся половину пути автобус ехал со скоростью на 15 км/ч больше, т.е. $60 + 15 = 75$ км/ч. При этом было затрачено время $\frac{x}{2} : 75 = \frac{x}{150}$ ч. В итоге автобус приехал без опоздания. Поэтому получаем уравнение: $\frac{x}{60} = \frac{x}{120} + \frac{1}{2} + \frac{x}{150}$. Умножим обе части этого уравнения на наименьший общий знаменатель дробей – число 600. Тогда получаем: $10x = 5x + 300 + 4x$ или $10x = 9x + 300$ или $10x - 9x = 300$, откуда $x = 300$. Следовательно, расстояние между пунктами *A* и *B* 300 км.

Ответ: 300 км.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С–1. Функция

Область определения и область значений функции

1. 1) $f(x)=12x-5$; $f(2)=12\cdot 2-5=19$; $f(0)=12\cdot 0-5=-5$; $f(-1)=12\cdot(-1)-5=-17$;

2) $f(x)=x^2-8x$; $f(10)=10^2-8\cdot 10=20$; $f(-2)=(-2)^2-8\cdot(-2)=20$; $f(0)=0^2-8\cdot 0=0$;

3) Чтобы найти значение функции $g(x)$ в данной точке, надо в формулу, задающую функцию, подставить заданное значение аргумента x. Тогда для функции

$g(x)=\frac{x-5}{x+3}$ получаем: $g(-2)=\frac{-2-5}{-2+3}=\frac{-7}{1}=-7$; $g(2)=\frac{2-5}{2+3}=\frac{-3}{5}=-0{,}6$;

$g(0)=\frac{0-5}{0+3}=\frac{-5}{3}=-1\frac{2}{3}$. **Ответ:** $g(-2)=-7$; $g(2)=-0{,}6$; $g(0)=-1\frac{2}{3}$.

2. 1) Так как функция $g(x)$ принимает заданное значение, то в формулу, задающую функцию, надо подставить это значение и решить уравнение для нахождения x. Поэтому для функции $g(x)=8-3x$ получаем линейное уравнение.

а) $5=8-3x$ или $5-8=-3x$ или $-3=-3x$, откуда $x=1$;

б) $11=8-3x$ или $11-8=-3x$ или $3=-3x$, откуда $x=-1$;

в) $0=8-3x$ или $-8=-3x$, откуда $x=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

2) $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$; а) $-\frac{1}{3}x+2=1$, $-\frac{1}{3}x=-1$, $x=3$;

б) $-\frac{1}{3}x+2=4$, $-\frac{1}{3}x=2$, $x=-6$; в) $-\frac{1}{3}x+2=0$, $-\frac{1}{3}x=-2$, $x=6$.

Ответ: 1) а) $x=1$; б) $x=-1$; в) $x=2\frac{2}{3}$; 2) а) $x=3$; б) $x=-6$; в) $x=6$; .

3. 1) Функция определена, если выполнены все действия в формуле, которая задает функцию.

а) Для функции $f(x)=19-2x$ при любом значении x можно выполнить умножение числа 2 на величину x и вычитание из числа 19 выражения $2x$. Поэтому область определения этой функции – любое x.

б) Для функции $g(x)=\frac{40}{x}$ можно выполнить деление числа 40 на величину x для всех x, кроме нуля. Поэтому область определения этой функции любое x, кроме нуля (т.е. $x\neq 0$).

в) Для функции $\varphi(x)=x^2-4$ при любом значении x можно найти квадрат этой величины (т.е. x^2) и вычесть число 4. Следовательно, область определения этой функции – любое x.

г) Для функции $y=\sqrt{x}$ извлечь корень четной (второй) степени можно только из неотрицательного числа x. Поэтому область определения этой функции $x \geq 0$ или промежуток $[0;\ +\infty)$.

Ответ: а) любое x; б) $x \neq 0$; в) любое x; г) $x \geq 0$.

2) а) $g(x)=8-x^2$; $D(g)=R$; б) $f(x)=-\dfrac{5}{x}$; $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;

в) $\varphi(x)=x-2$; $D(\varphi)=R$; г) $y=\dfrac{8}{x+2}$; $x+2\neq 0$, $x\neq -2$; $D(y)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$.

4. Область значений функции – те значения, которые принимает функция y при изменении x в области определения.

а) Для функции $y=37x+1$ область определения – любые значения x. При этом функция y также принимает любые значения из промежутка $(-\infty;\ +\infty)$, что и является областью значений функции.

б) Для функции $y=-23$ (которую можно задать в виде $y=-23+0\cdot x$) величина x может быть любой. Однако при этом значении y только одно: $y=-23$, что и является областью значений данной функции.

в) Для функции $y=\dfrac{19}{x}$ область определения – любое x, кроме нуля. При этом функция принимает любые значения y, кроме нуля. Это и является областью значений функции.

г) Для функции $y=\sqrt{x}$ область определения $x \geq 0$. При этом по определению арифметического корня величина y может быть только неотрицательной, т.е. $y \geq 0$. Это и есть область значений данной функции.

д) Для функции $y=|x|$ область определения – любые значения x (т.к. можно найти модуль любого числа x). При этом по определению величина y может быть только неотрицательной, т.е. $y \geq 0$. Эти значения y являются областью значений данной функции.

Ответ: а) любое y, б) $y=-23$, в) $y \neq 0$, г) $y \geq 0$, д) $y \geq 0$.

5. а) Для функции $f(x)=\dfrac{5x^2}{x^2+1}$ сначала вычислим значения $f(2)$ и $f(-2)$. Для этого вместо x подставим его значение. Получаем: $f(2)=\dfrac{5\cdot 2^2}{2^2+1}=\dfrac{5\cdot 4}{4+1}=\dfrac{5\cdot 4}{5}=4$ и $f(-2)=\dfrac{5\cdot(-2)^2}{(-2)^2+1}=\dfrac{5\cdot 4}{4+1}=\dfrac{5\cdot 4}{5}=4$. Теперь вычислим $f(2)+f(-2)=4+4=8$.

б) $g(x)=\dfrac{2x^2-5x}{10}$; $g(3)+g(-3)=g(3)-g(3)=0$.

Ответ: а) 8; б) 0.

6. Для функции $f(x) = kx + b$ известны два значения $f(2) = 7$ и $f(3) = 12$, т.е. при $x = 2$ величина $f = 7$ и при $x = 3$ величина $f = 12$. Запишем эти условия, подставив в формулу $f = kx + b$ данные значения x и f. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 7 = k\cdot 2 + b \\ 12 = k\cdot 3 + b \end{cases}$ или $\begin{cases} 7 = 2k + b \\ 12 = 3k + b \end{cases}$. Для нахождения коэффициентов k и b используем способ подстановки. Из первого уравнения найдем $b = 7 - 2k$ и подставим эту величину во второе уравнение: $12 = 3k + 7 - 2k$ или $12 = k + 7$, откуда $k = 12 - 7 = 5$. Теперь найдем $b = 7 - 2\cdot 5 = 7 - 10 = -3$.

Ответ: $k = 5$, $b = -3$.

7. а) $f(x) = \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{101}{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt{x-8}$.

С–2. График функции

1. 1) а) $f(-3) = -2$; б) $f(-2) = 2$; в) $f(0) = 1$; г) $f(3) = 0$;

2) а) $f(x) = 2$; $x_1 = -2$; $x_2 = -0{,}5$; $x_3 = 3{,}5$; б) $f(x) = 0$; $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 3$; в) $f(x) = -2$; $x = -3$; 3) $f_{max} = 3$, $f_{min} = -2$; 4) $E(f) = [-2;\ 3]$.

2. 1) а) $y = 0{,}5x - 3$;

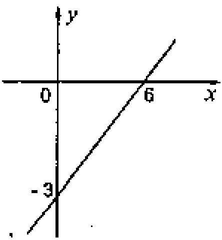
x	0	6
y	-3	0

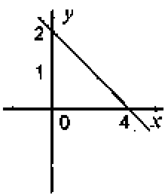
б) $y = -0{,}5x + 2$;

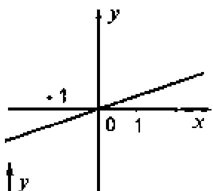
x	0	4
y	2	0

в) $y = \dfrac{x}{3}$;

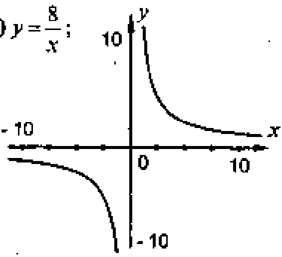
x	0	3
y	0	1



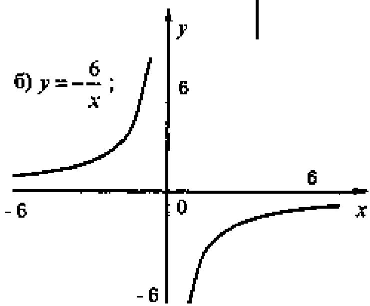




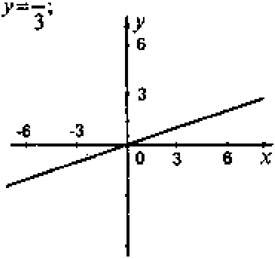
2) а) $y = \dfrac{8}{x}$;



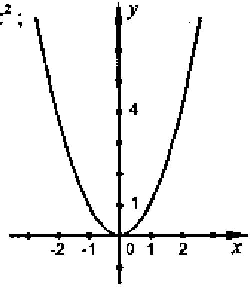
б) $y = -\dfrac{6}{x}$;



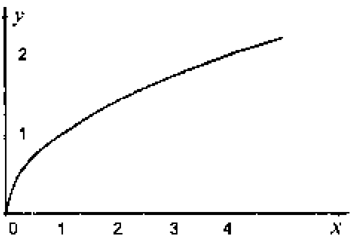
в) $y=\dfrac{x}{3}$;



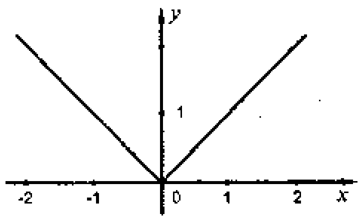
3) а) $y=x^2$;



б) $y=\sqrt{x};\ x\ge 0$;



в) $y=|x|$.

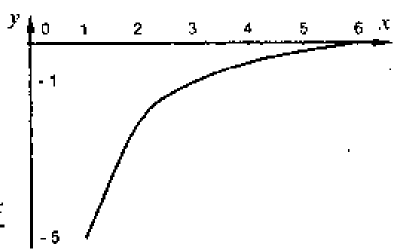


3. а) $y=\dfrac{10}{x^2+1};\ 0\le x\le 6$;

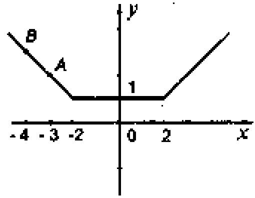
x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	5	2	1	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{26}$	$\frac{10}{37}$

б) $y=\dfrac{x-6}{x}=1-\dfrac{6}{x};\ 1\le x\le 6$.

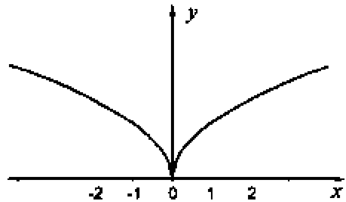
x	1	2	3	4	5	6
y	-5	-2	-1	-0,5	-0,2	0



4. а) Как видно из записи функции, она состоит из трех частей: $y_1 = -x - 1$ при $x < -2$, $y_2 = 1$ при $-2 \le x \le 2$ и $y_3 = x - 1$ при $x > 2$. Построим эти графики в указанных промежутках. Например, для функции y_1 возьмем две точки. При $x = -3$ находим $y = -(-3) - 1 = 2$ (точка А), при $x = -4$ получаем $y = -(-4) - 1 = 3$ (точка В). Через точки A и B проводим прямую.



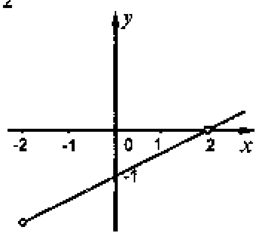
б) Построим график функции $y = \sqrt{|x|}$ сначала при $x \ge 0$. Для таких значений x по определению $|x| = x$. Поэтому строим график функции $y_1 = \sqrt{x}$. При $x < 0$ по определению $|x| = -x$ и строим график функции



$y_2 = y_2 = \sqrt{-x}$. Легко сообразить, что графики функций y_1 и y_2 симметричны относительно оси ординат. Например, при $x = -4$ и $x = 4$ значения функций одинаковы: $y(-4) = \sqrt{|-4|} = \sqrt{4} = 2$ и $y(4) = \sqrt{|4|} = \sqrt{4} = 2$.

5. $f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \le x \le 1 \\ 1, & -1 < x \le 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 4 \end{cases}$.

6. Чтобы построить график функции $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8}$, сначала упростим ее. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь. Получаем: $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x^3 - 2x^2) - (4x - 8) = x^2(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 4) = (x - 2)(x - 2)(x + 2) = (x - 2)^2(x + 2)$ и $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2)$. Тогда: $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+2)}{2(x-2)(x+2)} = \dfrac{x-2}{2}$. Кроме того необходимо учесть, что знаменатель в функции $f(x)$ не может равняться нулю, т.е. $(x - 2)(x + 2) \ne 0$ или $x \ne 2$ и $x \ne -2$. Построим график линейной функции $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$. Из этого графика удаляем точки с координатами $x = 2$ и $x = -2$.



7. 1) 1ч со скоростью, равной 4 км/ч; 2) 5 – 1 = 4(ч);

3) 7 – 5 = 2(ч) скорость равна $\frac{4}{2} = 2$(км/ч); 4) 4 км; 4 км; 2 км; 5) шоссе находится на расстоянии 2 км от дома, значит, от озера до шоссе он шел 1ч.

8. 1) мотоциклист на 2 ч; 2) 5 ч; 1,5 ч; 3) $\frac{75}{5} = 15$ (км/ч); $\frac{75}{1,5} = 50$ (км/ч);

4) мотоциклист на 1,5ч; 5) через 1ч; 6) 75 – 52,5 = 22,5(км).

С–3. Свойства функции

1. 1) а) $x_1 = -2,5, x_2 = 1$; б) $f(x) > 0$ при $x \in [-3;\ -2,5) \cup (1;\ 3]$; $f(x) < 0$ при $x \in (-2,5;\ 1)$; 2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-0,25;\ 2]$; $f(x)$ убывает при $x \in [-3;\ -0,25]$ и $[2;\ 3]$; 3) $x_{max} = 2$, $x_{min} = -0,25$; 4) $E(f) = [-0,25;\ 2]$.

2. 1) а) $y = 28x + 35$; $D(y) = R$, $E(y) = R$, $y > 0$ при $x > -\frac{35}{28}$, $y < 0$ при $x < -\frac{35}{28}$, $y = 0$ при $x = -\frac{35}{28}$, $f(x)$ возрастает на R ; б) $y = -0,38x - 19$; $D(y) = R$, $E(y) = R$, $y > 0$ при $< -\frac{19}{0,38} = -50$, $y < 0$ при $x > -50$, $y = 0$ при $x = -50$, $f(x)$ убывает на R ; в) $y = 38x$; $D(y) = R$, $E(y) = 38$, $y > 0$ на R.

2) а) $y = \frac{25}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $f(x)$ убывает на $D(y)$; б) $y = -\frac{56}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0 + \infty)$; $y > 0$ при $x < 0$, $y < 0$ при $x > 0$, $f(x)$ возрастает на $D(y)$.

3. 1) а) $y = \frac{1}{3}x - 15$, $\frac{1}{3}x = 15$, $x = 45$; б) $y = -0,2x + 46$, $-0,2x = -46$, $x = 230$;

в) $y = -24$ нет нулей функции.

2) Напомним: что нулями функции называются такие значения аргумента x, при которых значение функции y равна нулю. Поэтому для нахождения нулей функции надо подставить $y = 0$ в формулу, задающую функцию, и из получившегося уравнения определить x.

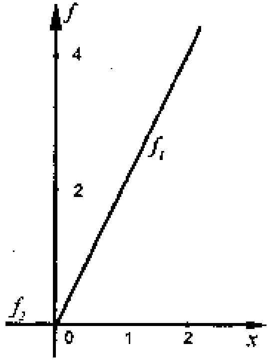
а) $0 = 7x(x + 4)$. Произведение множителей x и $(x + 4)$ равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$) и $x + 4 = 0$ (корень $x = -4$). Следовательно, в двух точках $x = 0$ и $x = -4$ значение функции равно нулю.

б) $0 = 9(x^2 + 5)$. Разделим обе части этого уравнения на число 9 и получим квадратное уравнение $x^2 + 5 = 0$ или $x^2 = -5$. Очевидно, что такое уравнение корней не имеет, т.к. величина x^2 неотрицательная при всех значениях x, Следовательно, данная функция не равна нулю при всех x.

в) $0 = x(x+1)(x-2)$. Произведение трех множителей x, $(x+1)$ и $(x-2)$ равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$) и $x - 2 = 0$ (решение $x = 2$). Следовательно, в таких трех точках x значение функции равно нулю.

Ответ: **а)** $x = 0$ и $x = -4$; **б)** нет; **в)** $x = 0$, $x = -1$ и $x = 2$.

3) **а)** $y = \sqrt{x+2}$; $x = -2$; **б)** $y = \sqrt{x^2 - 1}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; **в)** $y = \sqrt{x^2+1}$, нет нулей функции.



4. Для построения графика функции $f(x) = x + |x|$ воспользуемся определением модуля числа: $|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$. Тогда получаем

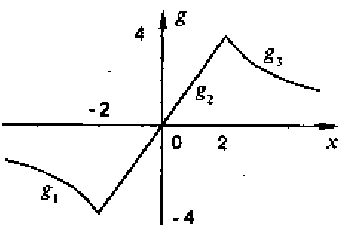
$$f(x) = \begin{cases} x + x, \text{ если } x \geq 0 \\ x - x, \text{ если } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, \text{ если } \geq 0 \\ 0, \text{ если } x < 0 \end{cases}.$$

Видно, что график функции состоит из двух частей: $f_1 = 2x$ при $x \geq 0$ и $f_2 = 0$ при $x < 0$. Построим эти части в указанных промежутках. Опишем свойства данной функции, которые следуют из графика.

а) Область определения функции – любые значения x: область значений функции f – все неотрицательные значения, т.е. $f \geq 0$.

б) Функция $f(x)$ возрастает при $x \geq 0$. Наименьшее значение функции $f = 0$.

5. Сначала построим график данной функции. Он состоит из трех частей: $g_1 = \dfrac{8}{x}$ при $x < -2$, $g_2 = 2x$ при $-2 \leq x \leq 2$ и $g_3 = \dfrac{8}{x}$ при $x > 2$. Построим эти части в указанных промежутках. Из графика следуют следующие свойства функции.



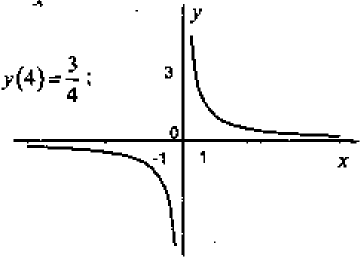
а) Область определения функции – все значения x; область значений функции – $-4 \leq g \leq 4$.

б) Функция $g(x)$ убывает при $x < -2$ и $x > 2$, возрастает при $-2 \leq x \leq 2$.

в) Наименьшее значение функции $g = -4$ и достигается при $x = -2$, наибольшее значение функции $g = 4$ и достигается при $x = 2$.

С–4. Функция $y=\frac{k}{x}$ и ее график

1. $y=\frac{3}{x}$; $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;



а) $y(-4)=-\frac{3}{4}$; $y(-2)=-\frac{3}{2}$; $y(2)=\frac{3}{2}$; $y(4)=\frac{3}{4}$;

б) $-3=\frac{3}{x}$; $x=-1$; $-2=\frac{3}{x}$; $x=-\frac{3}{2}$;

$2=\frac{3}{x}$; $x=\frac{3}{2}$; $3=\frac{3}{x}$; $x=1$;

в) $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$.

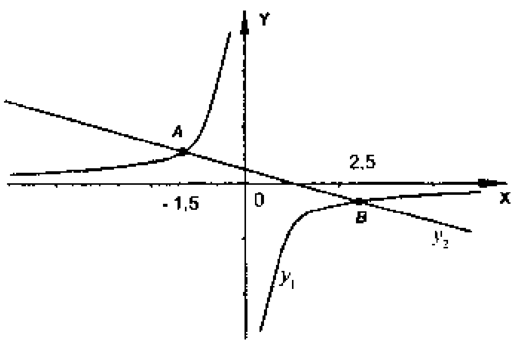
2. $y=\frac{126}{x}$; **а)** $21=\frac{126}{6}$ – верно, значит, точка A принадлежит графику;

б) $-42=\frac{126}{-3}$ – верно, значит, точка B принадлежит графику;

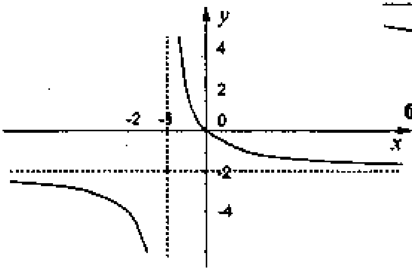
в) $-126=\frac{26}{0}$ – неверно, значит, точка C не принадлежит графику;

г) $14=\frac{126}{-9}$ – неверно, значит, точка D не принадлежит графику.

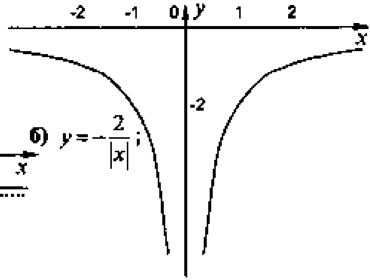
3. Для графического решения уравнения $-\frac{4}{x}=-x+1$ построим графики функций $y=-\frac{4}{x}$ (гипербола) и $y_2=-x+1$ (прямая). Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B. Абсциссы этих точек $x_1=-1{,}5$ и $x_2=2{,}5$, соответственно, являются корнями данного уравнения.



4. а) График функции $y=\frac{2}{x+1}-2$ получается из графика функции $y=\frac{2}{x}$ при его смещении на одну единицу влево и на две единицы вниз.



б) $y=-\dfrac{2}{|x|}$;



5. Обратно пропорциональная зависимость имеет вид $y=\dfrac{k}{x}$. Известно, что график этой функции проходит через точку A(–16; 0,5). Поэтому подставим значения $x=-16$ и $y=-0,5$ в формулу для функции. Получаем: $-0,5=\dfrac{k}{-16}$. Найдем коэффициент $k=-0,5\cdot(-16)=8$. Следовательно, данная функция $y=\dfrac{8}{x}$.

С–5. Квадратный трехчлен и его корни

1. 1) а) $x^2-5x+6=0$; $D=25-4\cdot6=1$; $x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$; б) $-y^2-3y+4=0$; $y^2+3y-4=0$; $D=9+4\cdot4=25$; $y_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$; $y_2=-4$; в) $7a^2-21a+14=0$; $a^2-3a+2=0$; $D=9-4\cdot2=1$; $a_1=\dfrac{3+1}{2}=2$; $a_2=1$; г) $6b^2-12=0$; $b^2-4=0$; $b_{1,2}=\pm2$.

Ответ: а) $x_1=3$, $x_2=2$; б) $y_1=1$, $y_2=-4$; в) $a_1=2$, $a_2=1$; г) $b_1=-2$, $b_2=2$.

2) а) Для решения квадратного уравнения $2y^2-y-6=0$ используем формулу Виета. Найдем его дискриминант $D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)=1+48=49=7^2$ и его корни $y=\dfrac{-b^2\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-(-1)^2\pm\sqrt{7^2}}{2\cdot2}=\dfrac{1\pm7}{4}$, т.е. $y_1=\dfrac{1+7}{4}=2$ и $y_2=\dfrac{1-7}{4}=-1,5$.

б) Для решения квадратного уравнения $6a^2+5a+1=0$ также используем формулу Виета. Находим дискриминант этого уравнения $D=5^2-4\cdot6\cdot1=25-24=1=1^2$ и его корни $a=\dfrac{-5\pm\sqrt{1^2}}{2\cdot6}=\dfrac{-5\pm1}{12}$, т.е. $a_1=\dfrac{-5+1}{12}=\dfrac{-4}{12}=-\dfrac{1}{3}$ и $a_2=\dfrac{-5-1}{12}=-\dfrac{1}{2}$.

в) Квадратное уравнение $0,3x^2+0,1x=0$ является неполным. Поэтому его удобно решать, раскладывая левую часть на множители. Вынесем x за скобки: $x(0,3x+0,1)=0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Поэтому получаем два линейных уравнения: $x=0$ (решение $x_1=0$) и $0,3x+0,1=0$ (откуда $0,3x=-0,1$ и $x_2=\dfrac{-0,1}{0,3}=-\dfrac{1}{3}$).

г) Квадратное уравнение $c^2 - 3 = 0$ также является неполным. Разложим его левую часть на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $\left(c-\sqrt{3}\right)\left(c+\sqrt{3}\right)=0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $c-\sqrt{3}=0$ (решение $c_1 = \sqrt{3}$) и $c+\sqrt{3}=0$ (корень $c_2 = -\sqrt{3}$).

Ответ: а) $y_1 = 2$ и $y_2 = -1{,}5$; б) $a_1 = -\frac{1}{3}$ и $a_2 = -\frac{1}{2}$; в) $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$; г) $c_1 = \sqrt{3}$ и $c_2 = -\sqrt{3}$.

3) а) $0{,}5x^2 - x - 0{,}5 = 0$; $x^2 - 2x - 1 = 0$; $D = 4 + 4 = 8$; $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$;

б) $-50a^2 + 5a + 1 = 0$; $50a^2 - 5a - 1 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 50 = 225$; $a_1 = \dfrac{5+15}{100} = 0{,}2$; $a_2 = -0{,}1$;

в) $36b^2 + 12b - 1 = 0$; $D = 144 + 4 \cdot 36 = 2 \cdot 144$; $b_{1,2} = \dfrac{-12 \pm 12\sqrt{2}}{2 \cdot 36} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{6}$.

Ответ: а) $1 \pm \sqrt{2}$; б) $a_1 = 0{,}2$, $a_2 = -0{,}1$; в) $\dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{6}$.

2. 1) Выделим квадрат двучлена из квадратного трехчлена.

а) В выражении $x^2 - 6x + 11$ запишем член $(-6x)$ в виде $-2 \cdot x \cdot 3$. Тогда понятно, что вторым числом является число 3. К данному выражению прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 3^2. Получаем: $x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 11 = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$.

б) В выражении $2y^2 - 4y - 1$ прежде всего вынесем число 2 за скобки: $2y^2 - 4y - 1 = 2\left(y^2 - 2y - \frac{1}{2}\right)$. Запишем член $(-2y)$ в виде $-2 \cdot y \cdot 1$. Тогда понятно, что вторым числом является число 1. К выражению в скобках прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 1^2. Получаем: $2\left(\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2\right) - 1^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left((y-1)^2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = 2\left((y-1)^2 - \frac{3}{2}\right)$. Теперь раскроем внешние скобки в этом выражении. Имеем: $2(y-1)^2 - 3$. Следовательно, был выделен квадрат двучлена: $2y^2 - 4y - 1 = 2(y-1)^2 - 3$.

в) Учтем, что $-2a = -2 \cdot a \cdot 1$. Поэтому вторым числом является число 1. Поэтому к данному выражению прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 1^2. Получаем: $a^2 - 2a = (a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2) - 1^2 = (a-1)^2 - 1$.

Ответ: а) $(x-3)^2 + 2$; б) $2(y-1)^2 - 3$; в) $(a-1)^2 - 1$.

2) а) $-y^2 + 4y + 1 = -\left(y^2 - 4y - 1\right) = -\left(y^2 - 4y + 4 - 5\right) = -(y-2)^2 + 5$;

б) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 5 = \frac{1}{3}\left(x^2 - 6x + 15\right) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 6x + 9 + 6\right) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$.

3. а) В квадратном трехчлене $y^2 - 4y + 7$ выделим квадрат двучлена. Учтем, что $-4y = -2 \cdot y \cdot 2$. Тогда вторым числом является число 2. Поэтому к данному выражению прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 2^2. Получаем: $y^2-4y+7=(y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2)-2^2+7=(y-2)^2-4+7=(y-2)^2+3$. При любых значениях y величина $(y-2)^2$ неотрицательная, т.е. $(y-2)^2\geq 0$. Поэтому выражение $(y-2)^2+3$ положительно при всех y, что и требовалось доказать.

б) $-y^2+6y-12=-\left(y^2-6y+12\right)=-\left(y^2-6y+9+3\right)=-\left(y-3\right)^2-3<0$.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

4. а) $a^2-10a+27$; $a_0=\dfrac{10}{2}=5$; б) $-a^2-6a-15$; $a_0=\dfrac{6}{-2}=-3$.

Ответ: а) $a_0=5$; б) $a_0=-3$.

5. После уменьшения большей стороны 5 см на a см она стала равна $(5-a)$ см. После увеличения меньшей стороны 3 см на a см она стала равна $(3+a)$ см. При этом площадь прямоугольника S равна произведению его сторон, т.е. $(5-a)(3+a)=15+2a-a^2$. Выделим в этом квадратном трехчлене квадрат двучлена: $S=-(a^2-2a-15)=-((a^2-2a+1)-1-15)=-((a-1)^2-16)=$ $=16-(a-1)^2$. При любом значение a выражение $(a-1)^2$ неотрицательно, т.е. $(a-1)^2\geq 0$. Тогда величина $-(a-1)^2\leq 0$ и выражение $16-(a-1)^2\leq 16$. Очевидно, что наибольшее значение этого выражения будет при $a=1$ и будет составлять величину $S=16$. Следовательно, наибольшая площадь получившегося прямоугольника будет при $a=1$ см.

Ответ: $a=1$ см.

С–6. Разложение квадратного трехчлена на множители

1. 1) а) $x^2-7x+12=0$; $D=49-4\cdot 12=1$; $x_1=\dfrac{7+1}{2}=4$; $x_2=3$; $x^2-7x+12=$ $=(x-4)(x-3)$; б) $5x^2-5x-10=0$; $x^2-x-2=0$; $D=1+4\cdot 2=9$;

$x_1=\dfrac{1+3}{2}=2$; $x_2=-1$; $5x^2-5x-10=5(x-2)(x+1)$;

в) $4x^2-144x=(2x-12)(2x+12)$; г) $10x^2+29x-30=0$; $D=841+40\cdot 30$.

2) а) Чтобы разложить квадратный трехчлен $x^2-2x-63$ на множители, найдем его корни. Для этого решим квадратное уравнение $x^2-2x-63=0$. Найдем его дискриминант $D_1=k^2-ac=(-1)^2-1\cdot(-63)=1+63=64=8^2$ (т.к. $a=1$, $k=\dfrac{b}{2}=-1$, $c=-63$) и корни $x=\dfrac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\dfrac{1\pm\sqrt{8^2}}{1}=1\pm 8$, т.е. $x_1=9$ и $x_2=-7$.

Теперь по формуле $a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим квадратный трехчлен на множители. Получаем: $1\cdot(x-9)(x-(-7))=(x-9)(x+7)$.

б) Сначала найдем корни квадратного трехчлена $6x^2+5x-4$. Вычисляем дискриминант $D=b^2-4ac=5^2-4\cdot 6\cdot(-4)=25+96=121=11^2$ (т.к. $a=6$, $b=5$, $c=-4$) и корни $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{11^2}}{2\cdot 6}=\dfrac{-5\pm 11}{12}$, т.е. $x_1=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ и $x_2=\dfrac{-16}{12}=-\dfrac{4}{3}$. Теперь разложим квадратный трехчлен:

$6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\left(-\frac{4}{3}\right)\right)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$. Число 6 можно представить в виде произведения $6 = 2 \cdot 3$ и внести эти множители в скобки. Имеем:
$6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=2\cdot3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot3\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)=$
$=\left(2x-2\cdot\frac{1}{2}\right)\left(3x+3\cdot\frac{4}{3}\right)=(2x-1)(3x+4)$.

в) В данном выражении $17x^2-425$ вынесем общий множитель 17 за скобки и разложим разность квадратов чисел на множители: $17x^2-425=17(x^2-25)=$ $=17(x^2-5^2)=17(x-5)(x+5)$.

г) В выражении $5x^2-30x+35$ вынесем общий множитель 5 за скобки: $5x^2-30x+35=$ $=5(x^2-6x+7)$. Теперь разложим квадратный трехчлен x^2-6x+7 на множители. Найдем его корни. Определим дискриминант $D_1=k^2-ac=(-3)^2-1\cdot7=9-7=2$ и корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{1}=3\pm\sqrt{2}$. Теперь по формуле $a(x-x_1)(x-x_2)$ раскладываем квадратный трехчлен: $x^2-6x+7=1\cdot(x-(3+\sqrt{2}))\cdot$ $\cdot(x-(3-\sqrt{2}))=(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$. Тогда данное выражение имеет вид: $5x^2-30x+35=5(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$.

Ответ: а) $(x-9)(x+7)$; б) $(2x-1)(3x+4)$; в) $17(x-5)(x+5)$;
г) $5(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$.

2. 1) Квадратный трехчлен ax^2+bx+c нельзя представить в виде произведения многочленов первой степени, если этот квадратный трехчлен не имеет действительных корней, т.е. если его дискриминант отрицательный. Проверим это.

а) Найдем дискриминант квадратного трехчлена x^2-3x+4. Получаем: $D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot4=9-16=-7<0$. Тогда этот трехчлен не раскладывается на множители.

б) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $-2x^2+4x-7$. Имеем $D=b^2-4ac=4^2-4\cdot(-2)\cdot(-7)=16-56=-40<0$. Следовательно, этот трехчлен также не раскладывается на множители.

2) а) $x^2-10x+27=0$; $D=100-4\cdot27<0$; б) $-7x^2+6x-2=0$; $7x^2-6x+2=0$; $D=36-47\cdot2<0$; в) $x^2+1=0$; $D=-4<0$.

3.1) а) $\frac{a^2-4}{7a+14}=\frac{(a-2)(a+2)}{7(a+2)}=\frac{a-2}{7}$; б) $\frac{b^2-b-6}{9b+18}=\frac{(b-3)(b+2)}{9(b+2)}=\frac{b-3}{9}$;
$D=1+4\cdot6=25$; $b_1=\frac{1+5}{2}=3$, $b_2=-2$; в) $\frac{7+6c-c^2}{21-3c}=\frac{c^2-6c-7}{3c-21}=$
$=\frac{c^2-6c+9-16}{3(c-7)}=\frac{(c-3)^2-4^2}{3(c-7)}=\frac{(c-3-4)(c-3+4)}{3(c-7)}=\frac{(c-7)(c+1)}{3(c-7)}=\frac{c+1}{3}$.

2) Чтобы сократить дробь, надо разложить числитель и знаменатель на множители.

а) Числитель дроби разложим на множители, используя формулу разности квадратов чисел: $y^2 - 49 = y^2 - 7^2 = (y-7)(y+7)$. Найдем корни знаменателя $y^2 + 5y - 14$. Получаем $y_1 = -7$ и $y_2 = 2$. Теперь разложим квадратный трехчлен на множители: $y^2 + 5y - 14 = (x+7)(y-2)$. Наконец, сократим данную дробь:

$$\frac{y^2-49}{y^2+5y-14} = \frac{(y-7)(y+7)}{(y+7)(y-2)} = \frac{y-7}{y-2}.$$

б) В числителе дроби вынесем сначала общий множитель x за скобки: $x^3 + x^2 - 72x = x(x^2 + x - 72)$. Теперь найдем корни квадратного трехчлена: $x^2 + x - 72$. Получаем: $x_1 = -9$ и $x_2 = 8$. Тогда имеем: $x^2 + x - 72 = (x+9)(x-8)$. Поэтому числитель дроби имеет вид: $x(x+9)(x-8)$. В знаменателе дроби вынесем общий множитель 9 за скобки: $9x - 72 = 9(x-8)$. Теперь можно сократить дробь: $\frac{x^3+x^2-72x}{9x-72} = \frac{x(x+9)(x-8)}{9(x-8)} = \frac{x(x+9)}{9}$.

в) В числителе дроби вынесем общий множитель a за скобки: $5a - a^2 = a(5-a)$. Найдем корни квадратного трехчлена $5 + 34a - 7a^2 = -7a^2 + 34a + 5$. Определим дискриминант $D = b^2 - 4ac = 34^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 5 = 1156 + 140 = 1296 = 36^2$ и корни $a = \frac{-34 \pm \sqrt{36^2}}{2 \cdot (-7)} = \frac{-34 \pm 36}{-14}$, т.е. $a_1 = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$ и $a_2 = \frac{-70}{-14} = 5$. Тогда знаменатель имеет вид: $-7a^2 + 34a + 5 = -7\left(a + \frac{1}{7}\right) \cdot (a-5) = 7\left(a + \frac{1}{7}\right)(-1)(a-5) = (7a+1)(5-a)$. Теперь сократим дробь:

$$\frac{5a-a^2}{5+34a-7a^2} = \frac{a(5-a)}{(7a+1)(5-a)} = \frac{a}{7a+1}.$$

Ответ: а) $\frac{y-7}{y-2}$; б) $\frac{x(x+9)}{9}$; в) $\frac{a}{7a+1}$.

4. 1) $\frac{y^2-11y-26}{9y+18} = \frac{(y-13)(y+2)}{9(y+2)} = \frac{y-13}{9} = f(x)$;

$y^2 - 11y - 26 = 0$; $D = 121 + 4 \cdot 26 = 225$; $y_1 = \frac{11+15}{2} = 13$; $y_2 = -2$;

$f(-5) = \frac{-5-13}{9} = -2$; $f(31) = \frac{31-13}{9} = 2$; $f(112) = \frac{112-13}{9} = 9$.

2) $\frac{x^2-18x+80}{5x-50} = \frac{x^2-18x+81-1}{5(x-10)} = \frac{(x-9)^2-1}{5(x-10)} = \frac{(x-9-1)(x-9+1)}{5(x-10)} = \frac{(x-10)(x-8)}{5(x-10)} =$

$= \frac{x-8}{5} = f(x)$; $f(-12) = \frac{-12-8}{5} = -4$; $f(8{,}5) = \frac{8{,}5-8}{5} = 0{,}1$; $f(48) = \frac{48-8}{5} = 8$.

5. Чтобы упростить данное выражение, разложим знаменатель второй дроби на множители: $a^2 + 2a - 15 = (a + 5)(a - 3)$ и вычтем дроби:

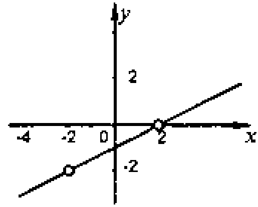
$$\frac{8a-3}{a+5}-\frac{40-27a}{a^2+2a-15}=\frac{8a-3}{a+5}-\frac{40-27a}{(a+5)(a-3)}=\frac{(8a-3)(a-3)-(40-27a)}{(a+5)(a-3)}=$$

$$=\frac{8a^2-24a-3a+9-40+27a}{(a+5)(a-3)}=\frac{8a^2-31}{(a+5)(a-3)}=\frac{8a^2-31}{a^2+2a-15}.$$

6.

$$y=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{2x^2-8}=\frac{x^2(x-2)-4(x-2)}{2(x^2-4)}=$$

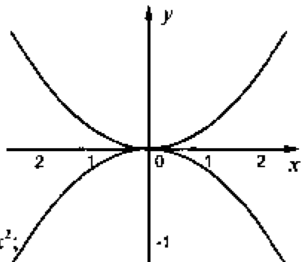
$$=\frac{(x-2)(x^2-4)}{2(x^2-4)}=\frac{x-2}{2};\ x\neq\pm 2.$$



С–7. Функция $y = x^2$, ее график и свойства

1. $f(x)=\frac{1}{5}x^2$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	5



$$f(-2,5)=f(2,5)=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4};$$

$$f(-3,5)=f(3,5)=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{20};\ g(x)=-\frac{1}{5}x^2;$$

$$g(-2,5)=g(2,5)=-f(2,5)=-\frac{5}{4};\ g(-3,5)=g(3,5)=-f(3,5)=-\frac{49}{20}.$$

2. а) Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2$ и прямой $y = 200$. Очевидно, что точки пересечения принадлежат двум графикам. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнениям данных функций $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 200 \end{cases}$. Для решения такой системы уравнений подставим второе уравнение в первое и получим: $200 = 2x^2$. Решим это квадратное уравнение: $0 = 2x^2 - 200$ или $0 = x^2 - 100$ или $0 = (x - 10)(x + 10)$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x - 10 = 0$ (корень $x_1 = 10$) и $x + 10 = 0$ (решение $x_2 = -10$). Ординаты точек пересечения находим из второго уравнения системы: $y = 200$. Итак: графики функций пересекаются в двух точках с координатами: (10;200) и (-10;200).

Ответ: (10; 200) и (–10; 200).

б) $y = 800$, $800 = 2x^2$; $x^2 = 400$; $x_{1,2} = \pm 20$; $(20; 800)$, $(-20; 800)$.

в) Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2$ и прямой $y = 50x$. Следовательно, эти координаты удовлетворяют системе уравнений
$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 50x \end{cases}$. Для ее решения подставим второе уравнение в первое: $50x = 2x^2$.

Решим это квадратное уравнение: $0 = 2x^2 - 50x$ или $0 = 2x(x - 25)$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x_1 = 0$) и $x - 25 = 0$ (решение $x_2 = 25$). Соответствующие значения ординат найдем из второго уравнения системы: $y = 50x$: $y_1 = 50 \cdot 0 = 0$ и $y_2 = 50 \cdot 25 = 1250$. Итак, графики данных функций пересекаются в двух точках с координатами: $(0; 0)$ и $(25; 1250)$.

г) $y = -3200x$, $-3200x = 2x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1600$; $(0; 0)$, $(-1600; 5120000)$.

Ответ: **а)** $(10; 200)$ и $(-10; 200)$; **б)** $(20; 800)$ и $(-20; 800)$; **в)** $(0; 0)$ и $(25; 1250)$; **г)** $(0; 0)$ и $(-1600; 5120000)$.

3. Для того, чтобы определить, принадлежит ли данная точка графику функции $y = -25x^2$, подставим абсциссу этой точки в формулу для нахождения функции и вычислим значение y. Если ордината точки равна этому значению y, то точка принадлежит графику функции; если не равна значению y, то точка не принадлежит графику.

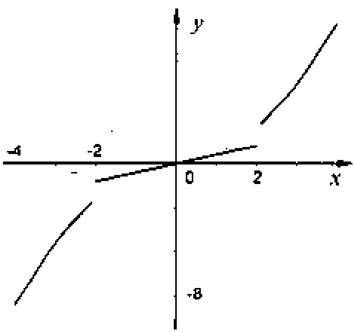
а) Для точки $A(-2; -100)$ найдем значение функции при $x = -2$: $y = -25 \cdot (-2)^2 = -25 \cdot 4 = -100$. Видим, что полученное значение y равно ординате точки A. Следовательно, эта точка принадлежит графику функции.

б) Для точки $B(2; 100)$ найдем значение функции при $x = 2$: $y = -25 \cdot 2^2 = -25 \cdot 4 = -100$. Видим, что полученное значение y не равно ординате точки B, т.к. $-100 \neq 100$. Поэтому эта точка не принадлежит графику функции.

в) $C(\frac{1}{5}; -1)$; $-1 = -25 \cdot \frac{1}{5^2}$ – верно, значит, принадлежит.

Ответ: **а)** да; **б)** нет; **в)** да.

4. График данной функции состоит из трех частей: параболы $y_1 = x^2$ при $x > 2$, прямой $y_2 = x$ при $-2 \le x \le 2$ и параболы $y_3 = -x^2$ при $x < -2$. Построим графики этих функций в указанных промежутках. При $x = 2$ значение функции y_2 существует и равно $y_2 = 2$, а значение функции y_1 не существует (т.к. эта функция существует только при $x > 2$).



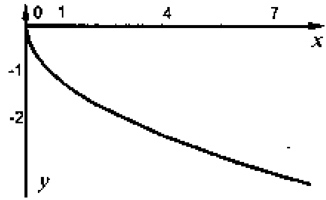
5. а) $y=\frac{1}{3}x^2,\ x\in[-3;6];\ y_{min}=y(0)=0;\ y_{max}=y(6)=\frac{1}{3}\cdot6^2=12;$

б) $y=-\frac{1}{4}x^2,\ x\in[-2;8];\ y_{min}=y(8)=-\frac{1}{4}\cdot8^2=-16;\ y_{max}=y(0)=0$.

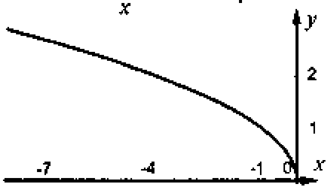
6. $h=\frac{9t^2}{2};\ 120=\frac{10\cdot t^2}{2};\ 12=\frac{t^2}{2};\ t^2=24;\ t=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ (с).

7. а) $y=2\sqrt{x}$;

б) $y=-\sqrt{x}$;

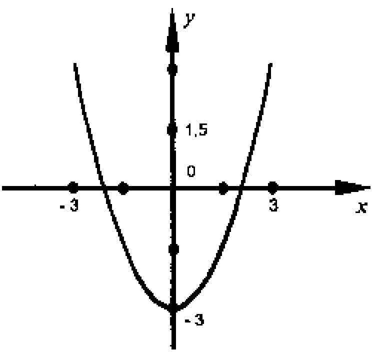


в) $y=\sqrt{-x}$.

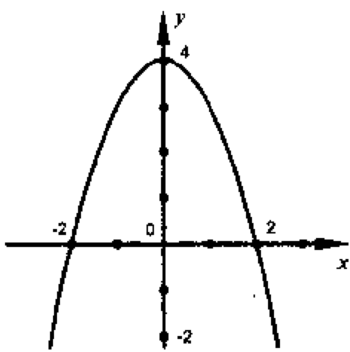


С–8. График квадратичной функции

1. а) $y=x^2-3$;

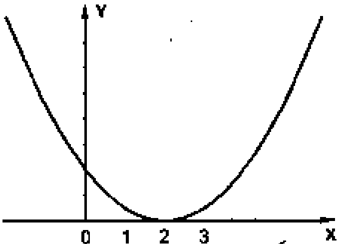


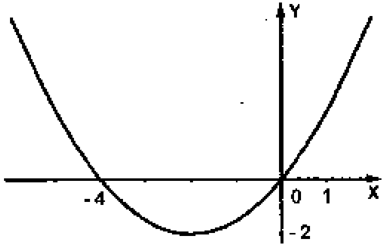
б) $y=-x^2+4$;



в) $y=(x-2)^2$;

г) График функции $y=(x+2)^2-4$ получается из графика $y=x^2$ при его смещении на две единицы влево и на четыре единицы вниз.





2. а) $f(x)=x^2-6x+4$; $m=\frac{6}{2}=3$; $n=f(3)=9-18+4=-5$; $(3;\ -5)$;

б) $f(x)=-x^2-4x+1$; $m=\frac{4}{-2}=-2$; $n=f(-2)=-4+8+1=5$; $(-2;\ 5)$;

в) Найдем координаты вершины параболы $f(x)=3x^2-12x+2$. Как известно, абсцисса m вершины параболы $f(x)=ax^2+bx+c$ ищется по формуле $m=-\frac{b}{2a}$. В нашем случае $a=3$ и $b=-12$, поэтому $m=-\frac{-12}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}=2$. Ордината вершины параболы равна значению функции при $x=m$, т.е. $y=f(m)$. Получаем: $n=f(m)=f(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+2=3\cdot 4-24+2=12-24+2=-10$. Следовательно, координаты вершины параболы $(2;-10)$.

Ответ: $(2;\ -10)$.

3. $f(x)=x^2-6x+4$;

а) $x_1=0{,}7$; $x_2=5{,}2$;

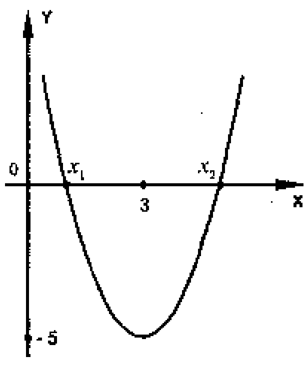
$f(x)>0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$;

$f(x)<0$ при $x\in(x_1;x_2)$

б) $f(x)$ возрастает при $x\in[3;\ +\infty)$;

$f(x)$ убывает при $x\in(-\infty;3]$;

$f_{min}=-5$



4. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$;

а) $x_1 \approx -4{,}2$; $x_2 \approx 0{,}2$;

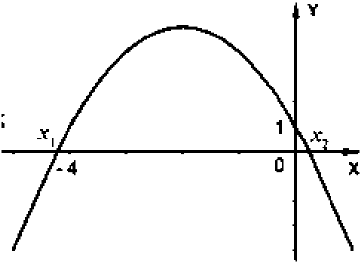
$f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

б) $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2]$;

$f(x)$ убывает при $x \in [-2; +\infty)$;

$f_{наиб} = 5$.

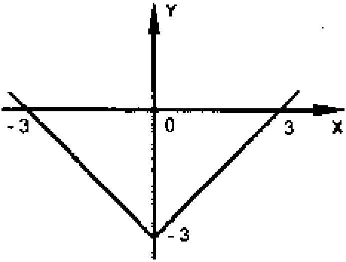


5. $y = x^2 + 6x + 5$, $x \in [-6; 2]$; $m = -\dfrac{6}{2} = -3$; $n = f(-3) = 9 - 18 + 5 = -4$;

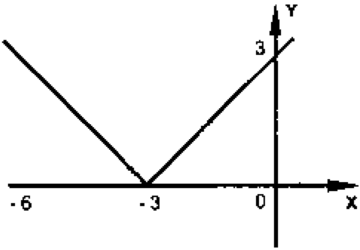
$(-3; -4)$; $y(2) = 4 + 12 + 5 = 21$; $E(y) = [-4; 21]$.

Ответ: $E(y) = [-4; 21]$.

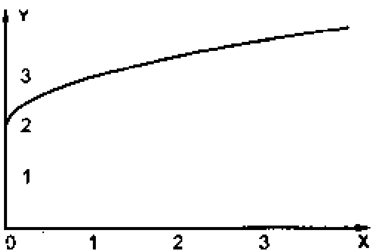
6. а) $y = |x| - 3$;



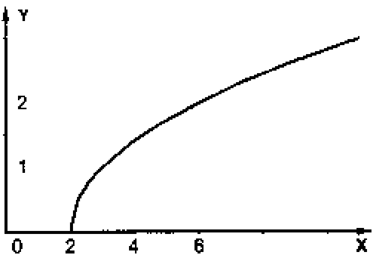
б) $y = |x + 3|$;



в) $y = \sqrt{x} + 2$;



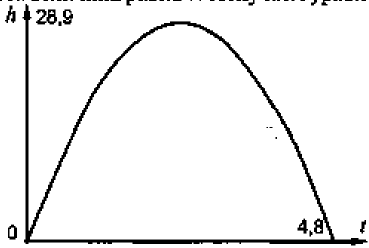
г) $y = \sqrt{x - 2}$.



7. Задача решается аналогично предыдущей. Абсцисса вершины параболы $f(x)=ax^2+bx+c$ ищется по формуле $m=-\dfrac{b}{2a}$. Для данной параболы $y=x^2+bx+c$ коэффициент $a=1$. Поэтому $m=-\dfrac{b}{2}$. По условию задачи точка $M(5;\,7)$ – вершина параболы. Значит, абсцисса вершины параболы $m=5$. Получаем уравнение $5=-\dfrac{b}{2}$, откуда $b=-10$. Ордината вершины параболы равна значению функции при $x=m$, т.е. $y=5^2+(-10)\cdot 5+c=25-50+c=-25+c$. По условию задачи эта величина равна 7. Получаем уравнение $-25+c=7$, откуда $c=32$.

Ответ: $b=-10$; $c=32$.

8. $h=24t-5t^2$;



1) $h_{н}=28{,}8$; 2) мяч поднимался вверх при $t\in[0;\,2{,}4]$, опускался вниз при $t\in[2{,}4;\,4{,}8]$; 3) через 4,8 с.

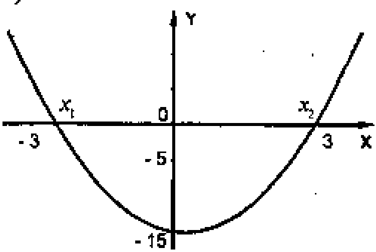
С–9. Решение неравенства второй степени

1. 1) $y=2x^2-x-15$; а) вверх;

б) $2x^2-x-15=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 15=121$;

$x_2=\dfrac{1+11}{4}=3$, $x_1=-2{,}5$

в)



г) $y>0$ при $x\in(-\infty;\,x_1)\cup(x_2;\,+\infty)$;

$y<0$ при $x\in(x_1;\,x_2)$.

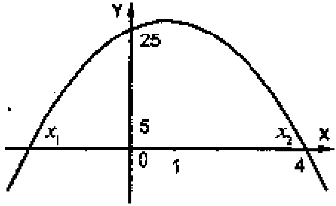
2) $y=-3x^2+5x+28$; а) вниз;

б) $3x^2-5x-28=0$;

$D=25+12\cdot 28=19^2$;

$x_2=\dfrac{5+19}{6}=4$; $x_1=-\dfrac{7}{3}$

в)

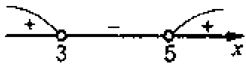


г) $y>0$ при $x\in(x_1;\,x_2)$;

$y<0$ при $x\in(-\infty;\,x_1)\cup(x_2;\,+\infty)$

2. а) $x^2-8x+15>0$; $D=64-60=4$;

$$x_1=\frac{8+2}{2}=5;\ x_2=3$$



Ответ: $(-\infty;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$.

б) Разложим левую часть неравенства на множители и сведем данное неравенство второй степени к двум системам линейных неравенств. Для неравенства $3x^2+11x-4<0$ найдем корни квадратного трехчлена. Определим его дискриминант $D=b^2-4ac=11^2-4\cdot3\cdot(-4)=121+48=169=13^2$ и

корни $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-11\pm\sqrt{13^2}}{2\cdot3}=\dfrac{-11\pm13}{6}$, т.е. $x_1=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ и $x_2=\dfrac{-24}{6}=-4$.

Раскладывая квадратный трехчлен на множители, получаем неравенство:

$3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x+4)<0$ или $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x+4)<0$. Так как произведение двух множителей отрицательно, то эти множители имеют противоположные знаки. Возникают два случая.

1) $\begin{cases}x-\dfrac{1}{3}>0\\ x+4<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>\dfrac{1}{3}\\ x<-4\end{cases}$. Очевидно, что такая система неравенств решений не имеет.

2) $\begin{cases}x-\dfrac{1}{3}<0\\ x+4>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<\dfrac{1}{3}\\ x>-4\end{cases}$. Значения $-4<x<\dfrac{1}{3}$ удовлетворяют этой системе неравенств. Этот промежуток и является решением данного неравенства.

Ответ: $\left(-4;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

в) Разложим левую часть неравенства $x^2-9>0$ на множители, используя форформулу для разности квадратов чисел: $(x-3)(x+3)>0$. Так как произведение этих множителей положительно, то множители имеют одинаковые знаки. Поэтому возможны два случая.

1) $\begin{cases}x-3<0\\ x+3<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<3\\ x<-3\end{cases}$. Числа $x<-3$ являются решением данной системы неравенств.

2) $\begin{cases}x-3>0\\ x+3>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>3\\ x>-3\end{cases}$. Такой системе удовлетворяют значения $x>3$.

Объединяя решения, полученные при рассмотрении этих двух случаев, находим решение данного неравенства: $x<-3$ и $x>3$.

Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup(3;\ +\infty)$.

г) $2x-x^2>0;\ x^2-2x<0;\ x(x-2)<0.$

Ответ: (0; 2).

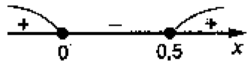
3. а) $x^2\le 4;\ \ (x-2)(x+2)\le 0.$

Ответ: $[-2;\ 2]$.

б) $x^2>5;\ x^2-5>0;\ \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)>0.$

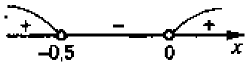
Ответ: $\left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};\ +\infty\right)$.

в) $2x^2\ge x;\ x^2-\dfrac{x}{2}\ge 0;\ x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\ge 0.$



Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[0{,}5;\ +\infty)$.

г) $-3x<6x^2;\ -\dfrac{x}{2}<x^2;\ x^2+\dfrac{x}{2}>0;\ x(x+\dfrac{1}{2})>0$.

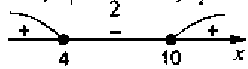


Ответ: $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(0;\ +\infty)$.

4. а) Для доказательства неравенства $5a^2-2a+1>0$ найдем дискриминант квадратного уравнения $D=(-2)^2-4\cdot 5\cdot 1=4-20=-16<0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трехчлен $5a^2-2a+1$ не имеет корней и, следовательно, не меняет своего знака. Определим этот знак, например, при $a=0$. Получаем: $5\cdot 0^2-2\cdot 0+1=1>0$. Следовательно, данный квадратный трехчлен положительный при всех значениях a, что и требовалось доказать.

б) $6a<a^2+10>0;\ a^2-6a+10>0;\ D=36-4\cdot 10<0;$ т.к. $b=1>0$, то любое a – решение, ч.т.д.

5. а) $y=\sqrt{x^2-14x+40};\ x^2-14x+40\ge 0;\ D=196-160=36;\ x_1=\dfrac{14+6}{2}=10;\ x_2=4.$



Ответ: а) $(-\infty;\ 4]\cup[10;\ +\infty)$;

б) $y=\dfrac{9}{\sqrt{8x-2x^2}};\ 8x-2x^2>0;\ 2x^2-8x<0;\ x^2-4x<0;\ x(x-4)<0.$

Ответ: б) (0; 4).

6. а) Для того, чтобы промежуток (1; 5) был множеством решений неравенства $x^2-6x+c<0$, необходимо, чтобы числа 1 и 5 были корнями данного трехчлена. В этом случае выполнена теорема Виета: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$, т.е. $1+5=-(-6)=6$ и $1\cdot 5=5=c$. Легко проверить, что при $c=5$ решением неравенства $x^2-6x+5<0$ действительно является промежуток (1; 5).

б) Чтобы промежуток $(-\infty;\ +\infty)$ был решением $x^2-6x+c<0$, надо чтобы дискриминант квадратного трехчлена был отрицательный и значение этого трехчлена в любой точки было также отрицательным. Найдем дискриминант $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 36 - 4c$. Решая неравенство $36 - 4c < 0$, получаем $c > 9$. Определим знак квадратного трехчлена $x^2 - 6x + c$ в любой точке, например, при $x = 0$. Получаем: $0^2 - 6 \cdot 0 + c = c$. Эта величина должна быть отрицательной, т.е. $c < 0$. Но условия $c > 9$ и $c < 0$ противоречат друг другу. Следовательно, ни при каких значениях c промежуток $(-\infty;\ +\infty)$ не будет решением неравенства $x^2 - 6x + c < 0$.

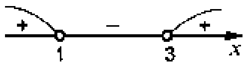
Ответ: а) $c = 5$; б) ни при каких c.

7. $\dfrac{x^2 - 12x + 35}{(x-6)^2} < 0$; $x^2 - 12x + 35 = 0$; $D = 144 - 140 = 4$; $x_1 = \dfrac{12+2}{2} = 7$; $x_2 = 5$; $\dfrac{(x-7)(x-5)}{(x-6)^2} < 0$

Ответ: $(5;\ 6) \cup (6;\ 7)$.

С–10. Решение неравенств методом интервалов

1. 1) а) $(x-1)(x-3) > 0$.

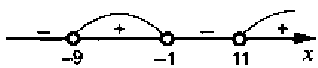


Ответ: $(-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$.

б) $(x+2)(x-5) < 0$.

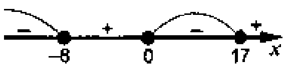
Ответ: $(-2;\ 5)$.

в) $(x+9)(x+1)(x-11) > 0$.



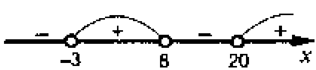
Ответ: $(-9;\ -1) \cup (11;\ +\infty)$.

г) $x(x+8)(x-17) \le 0$.



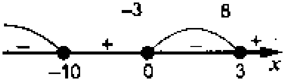
Ответ: $(-\infty;\ -8] \cup [0;\ 17]$.

2) а) На координатной прямой отметим точки, в которых левая часть неравенства $(x + 3)(x - 8)(x - 20) > 0$ равно нулю. Этими числами будут значения: $x_1 = -3, x_2 = 8, x_3 = 20$. Указанные точки разбивают числовую ось на четыре промежутка. В крайнем правом промежутке (т.е. при $x > 20$) все три множителя $(x + 3)(x - 8)$ и $(x - 20)$ положительные. Поэтому их произведение также положительно, т.е. $(x + 3)(x - 8)(x - 20) > 0$. При переходе к каждому следующему интервалу, знак данного выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения. Из рисунка видно, что неравенство выполняется при $-3 < x < 8$ и $x > 20$.



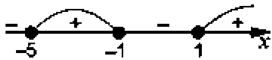
Ответ: $(-3;\ 8) \cup (20;\ +\infty)$.

б) $x(x+10)(x-3) \le 0$.



Ответ: $(-\infty;\ -10] \cup [0;\ 3]$.

в) Для решения неравенства $(x^2 - 1)(x + 5) \ge 0$ разложим первую скобку на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $(x + 1)(x - 1)(x + 5) \ge 0$. На координатной прямой отметим значения x, при которых данное выражение равно нулю: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -5$. Эти точки разбили числовую ось на четыре промежутка. В последнем интервале (т.е. при $x > 1$) все три множителя положительные и произведение их также положительное. При переходе к каждому следующему промежутку знак данного выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения. Из рисунка видно, что данное неравенство выполнено при $-5 \le x \le -1$ и $x \ge 1$.



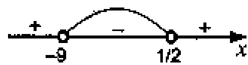
Ответ: $[-5;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$.

г) На координатной прямой отметим точки, в которых левая часть неравенства $(x^2+1)(x+6)(x-5) \le 0$ равна нулю: $x_1 = -6$, $x_2 = 5$, (заметим, что выражение x^2+1 в нуль не обращается). Они разбивают числовую ось на три промежутка. В крайнем интервале (т.е. при $x > 5$) множители $(x+6)$ и $(x-5)$ положительные, а выражение (x^2+1) всегда положительное. Поэтому произведение трех множителей положительное, т.е. $(x^2+1)(x+6)(x-5) > 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак этого выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения. Из рисунка видно, что решением неравенства является промежуток $-6 \le x \le 5$.

Ответ: $[-6;\ 5]$.

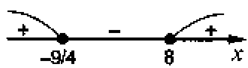
2. 1) а) $(2x-1)(x+9) < 0$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+9) < 0$.

Ответ: $\left(-9;\ \frac{1}{2}\right)$.



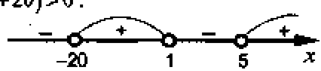
б) $(8-x)(4x+9) \le 0$; $(x-8)\left(x+\frac{9}{4}\right) \ge 0$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{9}{4}\right] \cup [8;\ +\infty)$.



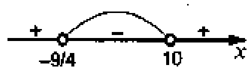
в) $-(x-1)(5-x)(x+20) > 0$; $(x-1)(x-5)(x+20) > 0$.

Ответ: $(-20;\ 1) \cup (5;\ +\infty)$.

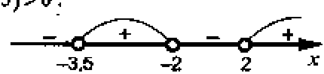


2) а) $(4x+9)(10-x) > 0$; $\left(x+\frac{9}{4}\right)(x-10) < 0$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{4};\ 10\right)$.



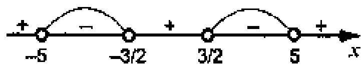
б) $(4-x^2)(10x+35) < 0$; $(x-2)(x+2)(x+3{,}5) > 0$.



Ответ: $(-3{,}5;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

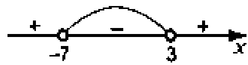
в) $\left(4x^2-9\right)\left(25-x^2\right)\left(3x^2+2\right)>0;\ \left(x^2-\frac{9}{4}\right)\left(x^2-25\right)<0;$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)(x+5)<0.$



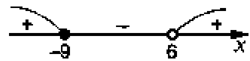
Ответ: $\left(-5;\ -\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ 5\right).$

3. 1) а) $\frac{x-3}{x+7}<0.$



Ответ: $(-7;\ 3).$

б) $\frac{x+9}{x-6}\geq 0.$



Ответ: $(-\infty;\ -9]\cup(6;\ +\infty).$

в) $\frac{7x}{4x-10}\leq 0;\ \ \frac{x}{x-2{,}5}\leq 0.$

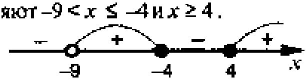
Ответ: $[0;\ 2{,}5).$

2) а) $\frac{2x-10}{x+8}<0;\ \ \frac{x-5}{x+8}<0.$

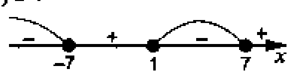
Ответ: $(-8;\ 5).$

б) Для решения неравенства $\frac{x^2-16}{x+9}\geq 0$ разложим числитель дроби на множители $\frac{(x-4)(x+4)}{x+9}\geq 0$. На координатной прямой отметим значения x, при которых числитель и знаменатель дроби равны нулю: $x_1=4, x_2=-4, x_3=-9$. Эти точки разбили числовую ось на четыре интервала. В крайнем промежутке (т.е. при $x>4$) выражения $(x-4)$, $(x+4)$, $(x+9)$ положительные, поэтому данная дробь также положительная. При переходе к следующему интервалу знак данного выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков дроби $\frac{x^2-16}{x+9}$. Учтем, что делить на ноль нельзя, поэтому $x\neq -9$. Из рисунка видно, что неравенству удовлетворяют $-9<x\leq -4$ и $x\geq 4$.

Ответ: $(-9;\ -4]\cup[4;\ +\infty).$



в) $\frac{(x-1)\left(x^2-49\right)}{x^2+8}\leq 0;\ \ (x-1)(x-7)(x+7)\leq 0.$



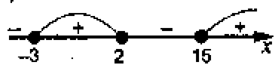
Ответ: $(-\infty;\ -7]\cup[1;\ 7].$

4. а) $y=\sqrt{(10-x)(x+21)};\ \ (10-x)(x+21)\geq 0;$

$(x-10)(x+21)\leq 0.$

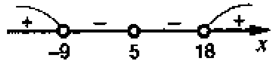
Ответ: $[-21;\ 10].$

б) $y=\sqrt{(x-2)(x-15)(x+3)}$; $(x-2)(x-15)(x+3)\geq 0$.



Ответ: $[-3;2]\cup[15;+\infty)$.

5. а) $(x+9)(x-5)^2(x-18)>0$.

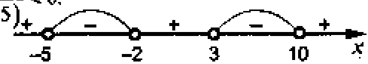


Ответ: $(-\infty;-9)\cup(18;+\infty)$.

б) $\dfrac{x^2-13x+30}{x^2+7x+10}<0$; $x^2-13x+30=0$; $D=169-4\cdot 30=49$; $x_1=\dfrac{13+7}{2}=10$; $x_2=3$;

$x^2+7x+10=0$; $D=49-4\cdot 10=9$;

$x_1=\dfrac{-7+3}{2}=-2$; $x_2=-5$; $\dfrac{(x-10)(x-3)}{(x+2)(x+5)}<0$.



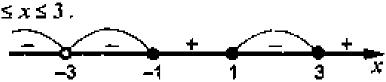
Ответ: $(-5;-2)\cup(3;10)$.

в) $x^3-5x^2+6x\geq 0$; $x\left(x^2-5x+6\right)\geq 0$; $x^2-5x+6=0$; $D=25-24=1$;

$x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$; $x(x-2)(x-3)\geq 0$.

Ответ: $[0;2]\cup[3;+\infty)$.

г) Прежде всего разложим числитель дроби x^4-10x^2+9 на множители. Для этого прежде всего найдем корни такого биквадратного выражения. Введем новую переменную $t=x^2\geq 0$. Получаем уравнение $t^2-10t+9=0$, корни которого $t_1=1$, $t_2=9$. Оба корня удовлетворяют условию $t\geq 0$ и являются решениями данного уравнения. Вернемся к неизвестной x и получим два простейших квадратных уравнения: $x^2=1$ (корни $x=\pm 1$) и $x^2=9$ (решения $x=\pm 3$). Теперь многочлен можно разложить на множители: $x^4-10x^2+9=$ $=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. Тогда неравенство $\dfrac{x^4-10x^2+9}{4x+12}\leq 0$ имеет вид: $\dfrac{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{4(x+3)}\leq 0$ или $(x-1)(x+1)(x-3)\leq 0$ (при условии, что $x+3\neq 0$, т.е. $x\neq -3$). Решим это неравенство методом интервалов. Отметим точки, при которых данное выражение равно нулю: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$. На координатной прямой отметим эти точки. Они разбили числовую ось на четыре промежутка. При $x>3$ (в последнем интервале) множители $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-3)$ положительные. Поэтому их произведение также положительное. При переходе от одного промежутка к другому знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков произведения $(x-1)(x+1)(x-3)$. Учтем также, что $x\neq -3$. Из рисунка видно, что решением данного неравенства являются промежутки: $x<-3$; $-3<x\leq -1$ и $1\leq x\leq 3$.



Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup[1;3]$.

С–11. Целое уравнение и его корни

1. а) $x^5+3x^6-x^3+1=0$; $3x^6+x^5-x^3+1=0$ – шестая степень;

б) $(x+4)(x-7)(x+8)=0$ – третья степень; в) $x^2(x+4)-(x-2)(x^2+1)=3$;

$x^3+4x^2-(x^3-2x^2+x-2)-3=0$; $6x^2-x-1=0$ – вторая степень;

г) В уравнении $(x^3-2)(3x^2+1)-3(x^5-2)=4$ раскроем скобки и приведем подобные члены: $3x^5+x^3-6x^2-2-3x^5+6=4$ или $x^3-6x^2=0$. Видно, что наибольшая степень многочлена $x^3-6x^2=0$ равна трем. Следовательно, данное уравнение имеет третью степень (является кубическим).

Ответ: а) шестая; б) третья; в) вторая; г) третья.

2. а) $x^3-4x=0$; $x(x^2-4)=0$; $x(x-2)(x+2)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm 2$.

б) Число является корнем данного уравнения, если при его подстановке в уравнение вместо неизвестной получается верное числовое равенство. Для уравнения $x^2(x+1)+(x+4)=4$ проверим данные числа $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Получаем:

При $x=-3$: $(-3)^2\cdot(-3+1)+(-3+4)=9\cdot(-2)+1=-7$. Видно, что это число не равно 4. Следовательно, $x=-3$ не является корнем данного уравнения.

При $x=-2$; $(-2)^2\cdot(-2+1)+(-2+4)=4\cdot(-1)+2=-2$. Полученное число также не равно 4. Поэтому $x=-2$ тоже не является корнем данного уравнения.

При $x=-1$: $(-1)^2\cdot(-1+1)+(-1+4)=1\cdot 0+3=3$. Очевидно, что $x=-1$ также не корень данного уравнения.

При $x=0$: $0^2\cdot(0+1)+(0+4)=0\cdot 1+4=4$. Так как полученное значение левой части уравнения равно 4, то $x=0$ – корень уравнения.

Аналогично проверяем, что числа 1; 2; 3 не являются корнями данного уравнения.

в) $x^4-5x^2+4=0$; $D=25-4\cdot 4=9$; $x_1^2=\dfrac{5+3}{2}=4$; $x_2^2=1$; $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 1$.

Ответ: а) -2; 0; 2; б) число 0; в) -2; -1; 1; 2.

3. 1) а) $(12x+1)(3x-1)-(6x+2)^2=10$; $36x^2+3x-12x-1-(36x^2+24x+4)-10=0$;

$-9x-1-24x-4-10=0$; $33x=-15$; $x=-\dfrac{15}{33}$;

б) $(3x+7)(3x-7)-3x(3x+1)=5$; $9x^2-49-9x^2-3x-5=0$; $3x=-54$; $x=-18$;

в) $\dfrac{6x-1}{4}-\dfrac{3x+1}{3}=\dfrac{1}{4}$; $18x-3-12x-4-3=0$; $6x=10$; $x=\dfrac{5}{3}$;

г) $\dfrac{x(2-x)}{2}+\dfrac{x(3+2x)}{4}=1$; $2x(2-x)+x(3+2x)-4=0$;

$4x-2x^2+3x+2x^2-4=0$; $7x-4=0$; $x=\dfrac{4}{7}$.

2) а) $(6x-1)(x+1)=20$; $6x^2+5x-21=0$; $D=25+4\cdot 6\cdot 21=529$;

$x_1=\dfrac{-5+23}{12}=\dfrac{3}{2}$; $x_2=-\dfrac{28}{12}=-\dfrac{7}{3}$;

б) Используя формулы сокращенного умножения, раскроем скобки и приведем подобные члены: $(x-7)(x+7)-11x-30=(x+5)^2+(x-2)^2$ или $x^2-49-11x-30=x^2+10x+25+x^2-4x+4$ или $x^2-11x-79=2x^2+6x+29$ или $0=(2x^2-x^2)+(6x+11x)+(29+79)$ или $0=x^2+17x+108$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D=b^2-4ac=17^2-4\cdot1\cdot108=289-432=-143$. Так как дискриминант отрицательный, то уравнение решений не имеет.

в) Для решения уравнения $\frac{x^2}{16}-\frac{x}{8}=\frac{x+1}{3}$ умножим все члены на наименьшее общее кратное чисел 16, 8, 3, т.е. на число 48: $3x^2-6x=16x+16$ или $3x^2-22x-16=0$. Используем формулу для корней с четным 2^ого^ коэффициентом. Найдем дискриминант $D_1=k^2-ac=(-11)^2-3\cdot(-16)=121+48=169=13^2$ и корни уравнения $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{11\pm\sqrt{13^2}}{3}=\frac{11\pm13}{3}$, т.е. $x_1=8$ и $x_2=-\frac{2}{3}$.

г) $17-2x+\frac{x(3x+4)}{2}=54\frac{1}{2}$; $34-4x+3x^2+4x-109=0$; $3x^2=75$; $x^2=25$; $x_{1,2}=\pm5$;

Ответ: а) $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{7}{3}$; б) решений нет; в) $x_1=8$ и $x_2=-\frac{2}{3}$; г) $x_{1,2}=\pm5$

4. а) $x-13=0$; б) $(x-4)(x+11)=0$; $x^2+7x-44=0$; в) $(x-2)(x+2)(x-5)=0$; $(x^2-4)(x-5)=0$; $x^3-4x-5x^2+20=0$; $x^3-5x^2-4x+20=0$.

5. а) Умножим все члены уравнения $\frac{x(x-1)}{4}+\frac{(x-3)^2}{2}=\frac{(4-x)^2}{3}-\frac{1}{3}$ на наименьшее общее кратное чисел 4, 2, 3, т.е. на число 12. Получаем $3x(x-1)+6(x-3)^2=$ $=4(4-x)^2-4$. Используя формулу для квадрата разности чисел, раскроем скобки и приведем подобные члены: $3x^2-3x+6x^2-36x+54=64-32x+4x^2-4$ или $9x^2-39x+54=4x^2-32x+60$ или $5x^2-7x-6=0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot5\cdot(-6)=49+120=169=13^2$ и его корни $x=\frac{-k\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{13^2}}{2\cdot5}=\frac{7\pm13}{10}$, т.е. $x_1=2$ и $x_2=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$.

б) $x+1=\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{x(x+2)}{4}+\frac{x-1}{2}$; $4x+4=2(x^2-6x+9)+x^2+2x+2x-2$; $2x^2-12x+18+x^2+4x-2-4x-4=0$; $3x^2-12x+12=0$; $x^2-4x+4=0$; $(x-2)^2=0$; $x=2$.

Ответ: а) $x_1=2$ и $x_2=-\frac{3}{5}$; б) $x=2$.

6. а) $x^6+6x^4+7x^2+8=0$; уравнение не имеет корней, т.к. $x^6+6x^4+7x^2+8>0$ при всех x; б) $12x^5+11x^3+10x-4=140$; верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое

слагаемое было бы меньше нуля, а правая 140 > 0); в) $9x(x-1)-(3x+4)(3x-4)=$ $=51-9x$; $9x^2-9x-9x^2+16=51-9x$; $16=51$ – нет корней.

г) В левой части уравнения $7x^5+14x^4-21x^2-49x=13$ вынесем общий множитель 7 за скобки: $7(x^5+2x^4-3x^2-7x)=13$. Пусть корень этого уравнения x является целым числом. Тогда величина $(x^5+2x^4-3x^2-7x)$ также целое число. Поэтому выражение, стоящее в левой части уравнения, кратно числу 7. В правой части уравнения находится число 13, которое делится на 7 с остатком. Поэтому число кратное семи не может равняться числу, делящемуся на 7 с остатком. Следовательно, данное уравнение не имеет целых корней.

Ответ: а) верно; б) верно; в) верно; г) утверждение верно.

С–12. Уравнения с параметрами

1. а) $3(x-4)-5(x+2)=cx-6$; $3(6-4)-5(6+2)=6c-6$; $6-40=6c-6$;

$6c=-34+6$; $6c=-28$; $c=-\dfrac{14}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{14}{3}$.

б) Для решения этой задачи можно использовать два подхода.

Первый подход. Так как корнем уравнения $16x^2+2(b-4)x+(2-3b)=0$ является число 4, то при его подстановки в уравнение получаем верное равенство: $16\cdot4^2+2(b-4)\cdot4+(2-3b)=0$ или $256+8b-32+2-3b=0$ или $5b=-226$, откуда $b=-\dfrac{226}{5}$. Подставим эту величину b в данное уравнение:

$16x^2+2\left(-\dfrac{226}{5}-4\right)x+\left(2+3\cdot\dfrac{226}{5}\right)$ или $20x^2-123x+172=0$. Решим это квадратное уравнение и найдем второй корень $x_2=\dfrac{43}{20}=2\dfrac{3}{20}$.

Второй подход. Запишем формулы Виета для суммы и произведения корней данного квадратного уравнения: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2(b-4)}{16}=\dfrac{b-4}{8} \\ x_1x_2=\dfrac{2-3b}{16} \end{cases}$. Так как один корень уравнения известен ($x_1=4$), то подставим его в систему уравнений:

$\begin{cases} 4+x_2=\dfrac{b-4}{8} \\ 4x_2=\dfrac{2-3b}{16} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=\dfrac{4-b}{8}-4 \\ x_2=\dfrac{2-3b}{64} \end{cases}$. Приравниваем правые части этих уравнений: $\dfrac{4-b}{8}-4=\dfrac{2-3b}{64}$. Умножим все члены уравнения на 64 и получим: $32-8b-256=2-3b$ или $-226=5b$, $b=-\frac{226}{5}$. Теперь из второго уравнения $x_2=\frac{2-3b}{64}$ находим $x_2=\frac{2+3\cdot\frac{226}{5}}{64}=\frac{668}{5\cdot 64}=\frac{43}{20}=2\frac{3}{20}$.

Ответ: $b=-45\frac{1}{5}$, $x_2=2\frac{3}{20}$.

2. Прежде всего убедимся, что при $b=0$ уравнение не имеет решений. Подставим значение $b=0$ в уравнение $bx-1=0$ и получим $0\cdot x-1=0$ или $-1=0$. Так как это равенство не выполняется, то при $b=0$ данное уравнение решений не имеет. Найдем корень данного уравнения: $bx=1$, откуда $x=\frac{1}{b}$ (т.к. $b\neq 0$).

По условию задачи надо найти такие целые значения b, чтобы число x также было целым. Очевидно, что $x=\frac{1}{b}$ будет целым числом, если b будет делителем числа 1. Поэтому $b=\pm 1$.

Ответ: $b=\pm 1$.

3. $5x-3a=2$; $x=\frac{2+3a}{5}$; а) $\frac{2+3a}{5}>0$; $2+3a>0$; $a>-\frac{2}{3}$;

б) $\frac{2+3a}{5}<0$; $a<-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2+3a}{5}>10$; $2+3a>50$; $3a>48$; $a>16$;

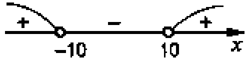
г) Прежде всего решим уравнение $5x-3a=2$. Получаем, $5x=3a+2$, откуда $x=\frac{3a+2}{5}$. Теперь найдем значения a, при которых этот корень принадлежит промежутку $(1;2)$. Получаем двойное линейное неравенство $1<\frac{3a+2}{5}<2$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 5. При этом знак неравенства сохраняется $1\cdot 5<\frac{3a+2}{5}\cdot 5<2\cdot 5$ или $5<3a+2<10$. Вычтем из всех частей неравенства число 2: $5-2<3a+2-2<10-2$ или $3<3a<8$. Разделим все части неравенства на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется: $\frac{3}{3}<\frac{3a}{3}<\frac{8}{3}$ или $1<a<2\frac{2}{3}$. Итак, при $1<a<2\frac{2}{3}$ корень уравнения $5x-3a=2$ принадлежит промежутку $(1;2)$.

Ответ: а) $a>-\frac{2}{3}$; б) $a<-\frac{2}{3}$; в) $a>16$; г) при $1<a<2\frac{2}{3}$.

4. а) $4x^2+8x+b=0$; $D=64-4\cdot 4b>0$; $64-16b>0$; $16b<64$; $b<4$;

Ответ: $b<4$.

б) $5x^2+bx+5=0$; $D=b^2-4\cdot 5\cdot 5>0$; $b^2-100>0$; $(b-10)(b+10)>0$



Ответ: $b\in(-\infty;\,-10)\cup(10;\,+\infty)$.

5. а) Квадратное уравнение $2x^2 - 6x + t = 0$ имеет один корень, если его дискриминант равен нулю. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot t = 36 - 8t$. Приравняем его к нулю: $36 - 8t = 0$, откуда $t = \frac{36}{8} = 4{,}5$.

б) $x^2 + tx + 4 = 0$; $D = t^2 - 4 \cdot 4 = 0$; $t^2 = 16$; $t_{1,2} = \pm 4$.

Ответ: а) $t = 4{,}5$; б) $t_{1,2} = \pm 4$.

6. а) $4x^2 + cx + 6 = 0$; $D = c^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 < 0$; $c^2 - 96 < 0$; $\left(c - 4\sqrt{6}\right)\left(c + 4\sqrt{6}\right) < 0$.

Ответ: $c \in \left(-4\sqrt{6};\ 4\sqrt{6}\right)$.

б) $x^2 + 6x + c = 0$; $D = 36 - 4c < 0$; $4c > 36$; $c > 9$.

Ответ: $c \in (9;\ +\infty)$.

7. Сначала решим уравнение $a(x + 1) = 5$. Раскроем скобки и запишем уравнение в виде: $ax + a = 5$ или $ax = 5 - a$. Легко проверить, что при $a = 0$ это уравнение не имеет решений. Следовательно, $a \neq 0$ и можно найти корень уравнения $x = \frac{5-a}{a}$. Найдем, при каких значениях a этот корень будет положительным числом. Для этого решим неравенство $\frac{5-a}{a} > 0$ методом интервалов. На числовой прямой отметим значения a, при которых числитель и знаменатель дроби равны нулю, т.е. $a_1 = 5$ и $a_2 = 0$. Эти точки разбивают координатную прямую на три интервала. При $a > 5$ (в крайнем промежутке) числитель $(5 - a)$ отрицательный, знаменатель a положительный. Поэтому дробь $\frac{5-a}{a}$ имеет отрицательный знак. При переходе к каждому следующему промежутку знак дроби меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков дроби $\frac{5-a}{a}$. Видно, что эта дробь положительна при $0 < a < 5$. Теперь из этого промежутка выберем целые значения a: 1; 2; 3; 4. Итак, при этих целых значениях a корень уравнения $a(x + 1) = 5$ является положительным числом.

Ответ: при $a = 1$; 2; 3; 4.

8. $x^2 + bx = 0$; при $b = 0$, $x = 0$ – единственный корень;

$x^2 - bx - 5 = 0$; $D = b^2 + 4 \cdot 5 > 0$ при любом b имеет два корня;

$x^2 + bx + 5 = 0$; $D = b^2 - 4 \cdot 5 > 0$ не при любом b;

$x^2 - 2b = 0$ при $b = 0$, $x = 0$ – единственный корень;

$bx^2 - 2 = 0$ при $b = 0$ нет корней; $x^2 - 4x + b = 0$; $D = 16 - 4b > 0$ не при любом b.

Ответ: $x^2 - bx - 5 = 0$.

9. Запишем данное уравнение $x^2 + n^2(x - 1) - x = 0$ в виде: $x^2 + n^2x - n^2 - x = 0$ или $x^2 + (n^2 - 1)x - n^2 = 0$. Для этого квадратного уравнения запишем формулу Виета для суммы корней: $x_1 + x_2 = -(n^2 - 1)$. Т. к. по условию задачи корни x_1 и x_2 являются противоположными числами (т. е. $x_2 = -x_1$), то получаем: $0 = -(n^2 - 1)$ или $0 = n^2 - 1$, откуда $n^2 = 1$ и $n = \pm 1$. Проверим найденные значения n.

Подставим $n = \pm 1$ в данное уравнение: $x^2 + 1 \cdot (x - 1) - x = 0$ или $x^2 - 1 = 0$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = \pm 1$ действительно являются противоположными числами.

Ответ: при $n = \pm 1$.

10. Сначала решим квадратное уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4$ и корни $x = \frac{2a \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2a + 2}{2} = a \pm 1$. По условию задачи эти корни принадлежат промежутку (1; 5). Получаем два двойных линейных неравенства $\begin{cases} 1 < a + 1 < 5 \\ 1 < a - 1 < 5 \end{cases}$.

Вычтем из всех частей первого неравенства число 1 и прибавим ко всем частям второго неравенства также число 1. Получаем: $\begin{cases} 1 - 1 < a - 1 - 1 < 5 - 1 \\ 1 + 1 < a - 1 + 1 < 5 + 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < a < 4 \\ 2 < a < 6 \end{cases}$. Изобразим на координатной прямой эти решения (первого – сверху, второго – снизу). Видно, что оба неравенства выполнены при $2 < a < 4$, т.е. промежуток (2; 4) является решением системы неравенства.

Ответ: при $2 < a < 4$.

С–13. Решение уравнений с помощью разложения на множители и введения вспомогательной переменной

1. 1) а) $9x^3 - 27x^2 = 0$; $x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$;

б) $x^3 - 64x = 0$; $x(x^2 - 64) = 0$; $x(x - 8)(x + 8) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 8$

в) $x^3 + 0{,}8x = 0$; $x(x^2 + 0{,}8) = 0$; $x = 0$;

Ответ: а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; б) $x_1 = -8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$; в) $x = 0$.

2) Используем разложение левой части уравнения на множители.

а) В уравнении $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$ сгруппируем члены $(x^3 - 4x^2) - (9x - 36) = 0$ и вынесем общие множители за скобки: $x^2(x - 4) - (9x - 4) = 0$ или $(x - 4)(x^2 - 9) = 0$. Используем формулу для разности квадратов чисел: $(x - 4)(x - 3)(x + 3) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то любой из них может равняться нулю. Поэтому получаем три линейных уравнения: $x - 4 = 0$ (корень $x = 4$), $x - 3 = 0$ (решение $x = 3$) и $x + 3 = 0$ (корень $x = -3$). Итак, данное уравнение имеет три корня: $x = 4$, $x = 3$ и $x = -3$.

б) $x^6 + 3x^4 - x^2 - 3 = 0$; $x^4(x^2 + 3) - (x^2 + 3) = 0$; $(x^2 + 3)(x^4 - 1) = 0$; $x^4 = 1$; $x_{1,2} = \pm 1$.

в) Перенесем все члены уравнения в левую часть и сгруппируем их: $(y^3 - 2y^2) - (y - 2) = 0$ или $y^2(y - 2) - (y - 2) = 0$ или $(y - 2)(y^2 - 1) = 0$. Используем формулу для разности квадратов и разложим левую часть на множители: $(y - 2)(y - 1)(y + 1) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем три линейных уравнения: $y - 2 = 0$ (корень $y = 2$), $y - 1 = 0$ (решение $y = 1$) и $y + 1 = 0$ (корень $y = -1$). Следовательно, данное уравнение имеет три корня: $y = 2$, $y = 1$ и $y = -1$.

Ответ: а) $x = 4$, $x = 3$ и $x = -3$; б) $x = 1$, $x = -1$; в) $y = 2$, $y = 1$ и $y = -1$.

2. а) $(x^2-7)^2-4(x^2-7)-45=0$; $x^2-7=y$; $y^2-4y-45=0$; $D=16+4\cdot45=196$; $y_1=\frac{4+14}{2}=9$; $y_2=-5$; $x^2-7=9$; $x^2=16$; $x_{1,2}=\pm4$; $x^2-7=-5$; $x^2=2$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

б) Для решения уравнения введем вспомогательную переменную. В уравнении $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$ введем вспомогательную переменную $t=x^2+2x$. Получим квадратное уравнение $t^2-2t-3=0$. Решая его, находим два корня $t_1=-1$ и $t_2=3$. Теперь вернемся к неизвестной x. Для $t=-1$ получаем квадратное уравнение: $x^2+2x=-1$ или $x^2+2x+1=0$ или $(x+1)^2=0$, которое имеет один корень $x=-1$. Для $t=3$ получаем квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$, которое имеет два корня $x=-3$ и $x=1$. Итак, данное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=-3$ и $x=1$.

в) В уравнении $(x^2-x+1)(x^2-x-7)=65$ введем новую переменную $t=x^2-x$. Тогда уравнение имеет вид: $(t+1)(t-7)=65$ или $t^2-6t-7=65$ или $t^2-6t-72=0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1=12$ и $t_2=-6$. Теперь вернемся к старой неизвестной x. Для $t=12$ получаем квадратное уравнение: $x^2-x=12$ корни которого $x_1=-3$ и $x_2=4$. Для $t=-6$ получаем квадратное уравнение $x^2-x=-6$, которое не имеет корней, т.к. $D=1-4\cdot6<0$. Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=-3$ и $x=4$.

Ответ: а) $x=-4$, $x=4$, $x=1$, $x=\pm\sqrt{2}$; б) $x=-1$, $x=-3$, $x=1$; в) $x=-3$ и $x=4$.

3. а) $x^4-13x^2+36=0$; $D=169-4\cdot36=25$; $x_1^2=\frac{13+5}{2}=9$; $x_2^2=4$; $x_{1,2}=\pm3$; $x_{3,4}=\pm2$;

б) $x^4-5x^2+4=0$; $D=25-4\cdot4=9$; $x^2=\frac{5+3}{2}=4$ и $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm2$; $x_{3,4}=\pm1$;

в) $x^4+5x^2-6=0$; $D=25+4\cdot6=49$; $x^2=\frac{-5+7}{2}=1$ и $x^2=-6$; $x_{1,2}=\pm1$;

г) $x^4+7x^2-44=0$; $D=49+4\cdot44=225$; $x^2=\frac{-7+15}{2}=4$ и $x^2<0$; $x_{1,2}=\pm2$;

д) $x^4+9x^2+8=0$; $D=81-4\cdot8=49$; $x_1^2=\frac{-9+7}{2}<0$; $x_2^2<0$ нет корней;

е) $x^4+16x^2=0$; $x^2(x^2+16)=0$, $x^2=0$; $x=0$.

4. Если график функции $y=x^4-8x^2-9$ пересекает ось абсцисс, то ордината этих точек пересечения равна нулю, т.е. $y=0$. Для нахождения абсцисс точек получаем биквадратное уравнение $0=x^4-8x^2-9$. Введем вспомогательную переменную $t=x^2\geq0$. Получаем квадратное уравнение $0=t^2-8t-9$. Корни этого уравнения $t=-1$ (не подходит, т.к. $t\geq0$) и $t=9$. Теперь вернемся к старой неизвестной x. Получаем квадратное уравнение $x^2=9$, корни которого $x_1=-3$ и $x_2=3$.

Ответ: $x_1=-3$ и $x_2=3$.

5. $x^5+x^4+3x^3+3x^2+2x+2=0$; $x^4(x+1)+3x^2(x+1)+2(x+1)=0$;

$(x+1)(x^4+3x^2+2)=0$; $x_1=-1$; $x^4+3x^2+2=0$; $D=9-4\cdot2=1$;

$x^2=\frac{-3+1}{2}<0$ и $x^2=-2<0$. **Ответ:** -1.

6. Для решения уравнения $\frac{x^2-4}{x}+\frac{x}{x^2-4}=3\frac{1}{3}$ введем вспомогательную переменную $t=\frac{x^2-4}{x}$, тогда $\frac{1}{t}=\frac{x}{x^2-4}$. Учтем, что $3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$, и получим уравнение $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$. Умножим все члены уравнения на $3t$ и получим квадратное уравнение $3t^2-10t+3=0$. Используем формулу для корней уравнения с четным вторым коэффициентом. Найдем дискриминант $D_1=k^2-ac=(-5)^2-3\cdot3=25-9=16=4^2$ и корни $t=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{5\pm\sqrt{4^2}}{3}=\frac{5\pm4}{4}$, т.е. $t_1=3$ и $t_2=\frac{1}{3}$. Вернемся к неизвестной x. Для $t=3$ получаем уравнение: $\frac{x^2-4}{x}=3$ или $x^2-3x-4=0$, корни которого $x=-1$ и $x=4$. Для $t=\frac{1}{3}$ получаем уравнение: $\frac{x^2-4}{x}=\frac{1}{3}$ или $3x^2-x-12=0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D=(-1)^2-4\cdot3\cdot(-12)==1+144=145$ и его корни $x=\frac{1\pm\sqrt{145}}{6}$. Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня: $x=-1$, $x=4$, $x=\frac{1+\sqrt{145}}{6}$ и $x=\frac{1-\sqrt{145}}{6}$.

Ответ: $x=-1$, $x=4$, $x=\frac{1+\sqrt{145}}{6}$ и $x=\frac{1-\sqrt{145}}{6}$.

7. а) x^3-7x+6; $x^3-x-6x+6=0$; $x(x^2-1)-6(x-1)=0$; $x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$; $(x-1)(x^2+x-6)=0$; $x_1=1$; $x^2+x-6=0$; $D=1+4\cdot6=25$; $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$; $x_2=-3$;

б) Для решения уравнения $x^3-43x+42=0$ разложим его левую часть на множители. Представим член $(-43x)$ в виде: $-43x=-x-42x$ и сгруппируем члены уравнения: $x^3-x-42x+42=0$ или $(x^3-x)-(42x-42)=0$ или $x(x-1)(x+1)-42(x-1)=0$ или $(x-1)(x(x+1)-42)=0$ или $(x-1)(x^2+x-42)=0$. Произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из них равен нулю. Получаем два уравнения: линейное $x-1=0$ (корень $x=1$) и квадратное $x^2+x-42=0$ (решения $x=-7$ и $x=6$). Итак, данное уравнение имеет три корня: $x=1$, $x=-7$ и $x=6$.

Ответ: а) 2; –3; б) $x=1$, $x=-7$ и $x=6$.

8. а) Для решения $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=360$ умножим крайние скобки и средние скобки. Получаем: $((x+1)(x+4))((x+2)(x+3))=360$ или $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=360$. Введем вспомогательную переменную $t=x^2+5x$. Имеем уравнение $(t+4)(t+6)=360$ или $t^2+10t-336=0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D_1=k^2-ac=5^2-1\cdot(-336)=361=19^2$ и корни $t=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-5\pm19}{1}$, т.е. $t_1=14$ и $t_2=-24$. Теперь вернемся к неизвестной x.

Для $t = 14$ получаем уравнение: $x^2 + 5x = 14$ или $x^2 + 5x - 14 = 0$, корни которого $x_1 = 2$ и $x_2 = -7$. Для $t = -24$ получаем уравнение: $x^2 + 5x = -24$ или $x^2 + 5x + 24 = 0$, которое не имеет корней. Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = 2$ и $x = -7$.

б) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=105$; $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-105=0$;

$x^2-8x=y$; $(y+7)(y+15)-105=0$; $y^2+22y=0$; $y_1=0$; $y_2=-22$;

$x^2-8x=0$; $x_1=0$; $x_2=8$; $x^2-8=-22$; $x^2-8x+22=0$;

корней нет, т.к. $D=64-4\cdot 22<0$.

Ответ: а) $x = 2$ и $x = -7$; б) $x = 0$ и $x = 8$.

9. а) $x^4-6x^2+a=0$; $x^2=y$; $y^2-6y+a=0$; $f(y)=y^2-6y+a$;

$$D=36-4a<0 \text{ или } \begin{cases} f(0)>0 \\ m=\dfrac{6}{2}=3>0 \end{cases} \text{ – нет решений;}$$

$36-4a<0$; $4a>36$; $a>9$.

б) $x^4+ax^2+9=0$; $x^2=y$; $y^2+ay+9=0$; $D=a^2-36<0$; $(a-6)(a+6)<0$;

$$-6<a<6 \text{ или } \begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}<0 \\ f(0)=9>0 \end{cases}; \ -a<0; a>0.$$

Ответ: а) $a > 9$; б) $a > 0$.

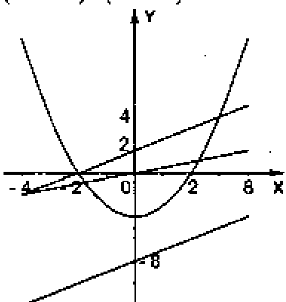
С–14. Графический способ решения систем уравнений

1. $\begin{cases} y=-0,5x^2+8 \\ xy=6 \end{cases}$. Три решения: $(-4,4;\ -1,5)$, $(0,8;\ 7,8)$, $(3,5;\ 1,8)$.

2. $y=x^2-4$;

а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=x+2 \end{cases}$ построим графики функций $y_1=x^2-4$ (парабола) и $y_2=x+2$ (прямая). Видно, что эти графики пересекаются в двух точках $A(-2;\ 0)$ и $B(3;\ 5)$. Координаты этих точек являются решениями данной системы уравнений.

Ответ: $A(-2;\ 0)$ и $B(3;\ 5)$.



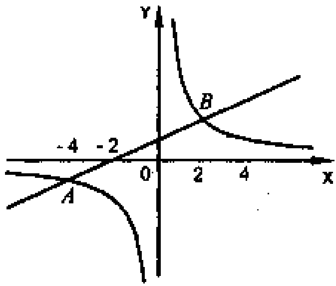
б) $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=0,5x \end{cases}$; две точки пересечения: $C(-1,8;\ -0,8)$, $D(2,2;\ 1,2)$.

Ответ: $(-1,8;\ -0,8)$, $(2,2;\ 1,2)$.

в) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 8 \end{cases}$; нет точек пересечения.

Ответ: нет точек пересечения.

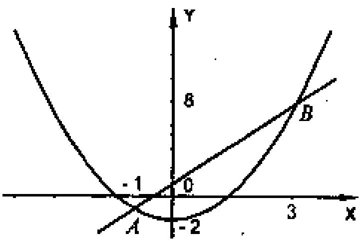
3. а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} xy = 8 \\ y - x = 2 \end{cases}$ выразим из каждого уравнения y и построим графики функций $y_1 = \dfrac{8}{x}$ (гипербола) и $y_2 = x + 2$ (прямая). Видно, что эти графики пересекаются в двух точках $A(-4;\ -2)$ и $B(2;\ 4)$. Координаты этих точек являются решениями данной системы уравнений.



Ответ: $A(-4; -2)$ и $B(2; 4)$.

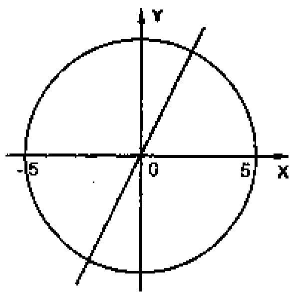
б) $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.

Ответ: $(-1; -1)$, $(3; 7)$.



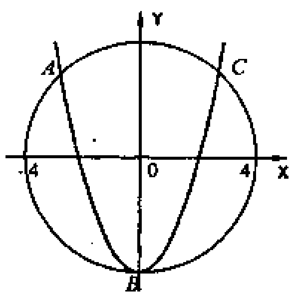
в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$.

Ответ: $(-2{,}2; -4{,}4)$, $(2{,}2; 4{,}4)$.



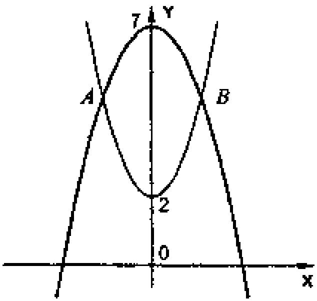
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$.

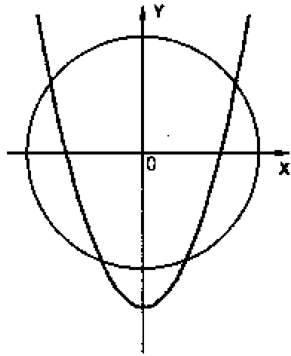
Ответ: $(-3{,}2; 2{,}5)$, $(3{,}2; 2{,}5)$, $(0; -4)$.



4. а) Ответ: два решения. **б)** Построим окружность $x^2 + y^2 = 9$ с центром в начале координат радиусом три единицы и параболу $y = x^2 - 4$. Видно, что графики пересекаются в четырех точках A, B, C, D. Координаты этих точек и являются решениями системы уравнений. Следовательно, данная система имеет четыре решения.

Ответ: четыре решения.





5. а) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = |x| \end{cases}$;

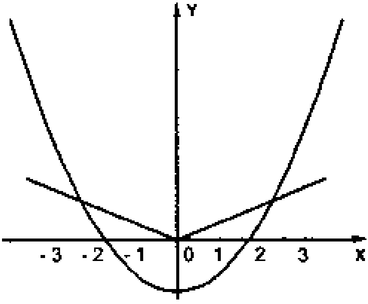
две точки пересечения.

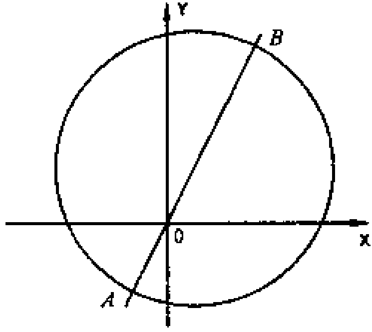
Ответ: $A(-2{,}2;\ 2{,}2)$, $B(2{,}2;\ 2{,}2)$.

б) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$;

две точки пересечения.

Ответ: $A(-1{,}2;\ -2{,}4)$, $B(3{,}2;\ 6{,}4)$.





6. Построим окружность $x^2 + y^2 = 16$ с центром в начале координат радиусом четыре единицы и прямую $y = x - k$. Эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $x = k$ и ось ординат – в точке $y = -k$. Возможны три взаимных положения окружности и прямой (очевидно, что при измерении k прямой перемещается параллельно самой себе).

Первое такое положение – прямая касается окружности, как изображено на рисунке. Найдем, при каком значении k это достигается. Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник OAB, в котором $\angle A = 90°$ (т.к. радиус OA перпендикулярен касательной AB), $\angle B = \angle 0 = 45°$ (т.к. угловой коэффициент прямой $y=x-k$ равен 1). Тогда $OA = AB = 4$ и $OB = k$. Запишем теорему Пифагора: $AO^2 + AB^2 = OB^2$ или $4^2 + 4^2 = k^2$ или $32 = k^2$, откуда $k = \pm 4\sqrt{2}$. При этом случай $k = 4\sqrt{2}$ соответствует рисунку. Случай $k = -4\sqrt{2}$ соответствует касанию прямой и окружности в точке, симметричной точке A относительно начала координат (на рисунке не изображено). Очевидно, что при $k = \pm 4\sqrt{2}$ у окружности и прямой есть только одна общая точка (точка касания) и данная система уравнений имеет одно решение.

Легко изобразить, что при $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$ окружность и прямая пересекаются, т.е. имеют две общие точки. Следовательно, данная система уравнений имеет два решения.

При $k < -4\sqrt{2}$ и $k > 4\sqrt{2}$ прямая и окружность общих точек не имеют. Поэтому система уравнений решений не имеет. Эти же результаты можно получить и аналитически. Подставим $y = x - k$ в первое уравнение системы. Имеем: $x^2 + (x-k)^2 = 16$ или $2x^2 - 2xk + k^2 - 16 = 0$. Найдем дискриминант квадратного уравнения: $D_1 = (-k)^2 - 2\cdot(k^2 - 16) = k^2 - 2k^2 + 32 = -k^2 = -k^2 + 32$.

Если этот дискриминант D_1 равен нулю, то квадратное уравнение имеет единственное решение. Получаем условие: $-k^2 + 32 = 0$. откуда $k^2 = 32$ и $k = \pm 4\sqrt{2}$. В этом случае система также имеет единственное решение.

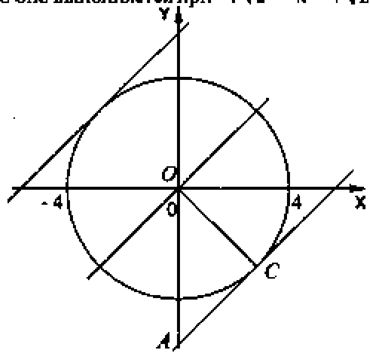
Если $D_1 > 0$, то квадратное уравнение (и система) имеет два решения. Из неравенства $-k^2 + 32 > 0$ находим, что оно выполняется при $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$.

При $D_1 < 0$ квадратное уравнение (и система) решений не имеет. Неравенство $-k^2 + 32 < 0$ справедливо при $k < -4\sqrt{2}$ и $k > 4\sqrt{2}$.

Ответ: а) при $k = -4\sqrt{2}$ и $k = 4\sqrt{2}$;

б) при $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$;

в) при $k < -4\sqrt{2}$ и $k < 4\sqrt{2}$.



С–15. Решение систем уравнений второй степени

1. Чтобы выяснить, является ли пара чисел $x = 6$ и $y = -8$ решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$, подставим эти числа в каждое уравнение системы.

Получаем: $\begin{cases} 6^2 + (-8)^2 = 100 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) - 2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 36 + 64 = 100 \\ 18 - 16 - 2 = 0 \end{cases}$. Видим, что каждое из уравнений (при таких x и y) превратилось в верное числовое равенство. Следовательно, пара чисел $x = 6$ и $y = -8$ является решением данной системы.

Ответ: является.

2. $\begin{cases} x^2 - 3y + 12 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x^2 - 3(x+4) + 12 = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{matrix}$; $x(x-3) = 0$

$x_1 = 0$; $y_1 = 4$; $(0;\ 4)$; $x_2 = 3$; $y_2 = 7$; $(3;\ 7)$.

Проверка: $(0;\ 4)$; $\begin{cases} 0^2 - 3 \cdot 4 + 12 = 0 \\ 4 = 0 + 4 \end{cases}$ – верно;

$(3;\ 7)$; $\begin{cases} 3^2 - 3 \cdot 7 + 12 = 0 \\ 7 = 3 + 4 \end{cases}$ – верно.

3. 1) а) $\begin{cases} x^2 + 2y = 6 \\ y = x - 1 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x^2 + 2(x-1) = 6 \\ x^2 + 2x - 2 = 6 \end{matrix}$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$;

$x_1 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$; $x_2 = -4$; $y_1 = 1$; $y_2 = -5$.

б) $\begin{cases} x = y - 2 \\ xy - y = 10 \end{cases}$ $\Bigg|$ $y(y-2) - y = 10$; $y^2 - 3y - 10 = 0$; $D = 9 + 4 \cdot 10 = 49$;

$y_1 = \dfrac{3+7}{2} = 5$; $y_2 = -2$; $x_1 = 3$; $x_2 = -4$.

в) $\begin{cases} xy + x^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x(x+2) + x^2 = 4 \\ 2x^2 + 2x - 4 = 0 \end{matrix}$; $x^2 + x - 2 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$;

$x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$; $x_2 = -2$; $y_1 = 3$; $y_2 = 0$.

Ответ: **а)** $(2;\ 1)$, $(-4;\ -5)$; **б)** $(3;\ 5)$; $(-4;\ -2)$; **в)** $(1;\ 3)$; $(-2;\ 0)$.

2) а) Для решений данной системы уравнений используем способ подстановки.

При решении системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ выразим из второго уравнения величину $x = 7 + 2y$ и подставим в 1ое уравнение. Получаем: $(7 + 2y)^2 - y^2 = 24$ или $49 + 28y + 4y^2 - y^2 = 24$ или $3y^2 + 28y + 25 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = -\frac{25}{3} = -8\frac{1}{3}$ и $y_2 = -1$. По формуле $x = 7 + 2y$ находим соответствующие значение x: $x_1 = 7 + 2\cdot\left(-\frac{25}{3}\right) = 7 - \frac{50}{3} = -\frac{29}{3} = -9\frac{2}{3}$ и $x_2 = 7 + 2\cdot(-1) = 7 - 2 = 5$. Итак, данная система уравнений имеет два решения $\left(-9\frac{2}{3};\ -8\frac{1}{3}\right)$ и $(5; -1)$.

б) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + y^2 = 14 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} x = 11 - 3y \\ 2(11 - 3y) + y^2 - 14 = 0 \end{array} \right.$;

$y^2 - 6y + 8 = 0$; $D = 36 - 4\cdot 8 = 4$; $y_1 = \frac{6+4}{2} = 5$; $y_2 = 1$; $x_1 = -4$; $x_2 = 8$.

в) Из второго уравнения системы $\begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases}$ выразим величину $x = 3y - 10$ и подставим в первое уравнение: $y^2 - (3y - 10)y = 12$ или $y^2 - 3y^2 + 10y = 12$ или $2y^2 - 10y + 12 = 0$ или $y^2 - 5y + 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. По формуле $x = 3y - 10$ найдем соответствующие значения x: $x_1 = 3\cdot 2 - 10 = -4$ и $x_2 = 3\cdot 3 - 10 = -1$. Следовательно, данная система уравнений имеет два решения $(-4; 2)$ и $(-1; 3)$.

Ответ: а) $\left(-9\frac{2}{3};\ -8\frac{1}{3}\right)$, $(5; -1)$; б) $(-4; 5)$; $(8; 1)$; в) $(-4; 2)$ и $(-1; 3)$.

3) а) $\begin{cases} (x-2)(y-1) = 30 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} (x-2)(2x-11) = 30 \\ y = 2x - 10 \end{array} \right.$; $2x^2 - 15x - 8 = 0$;

$D = 225 + 4\cdot 2\cdot 8 = 289$; $x_1 = \frac{15+17}{4} = 8$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $y_1 = 6$; $y_2 = -11$.

б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 14 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} (10+3y)^2 - y(10+3y) + y^2 = 14 \\ x = 10 + 3y \end{array} \right.$;

$100 + 60y + 9y^2 - 10y - 3y^2 + y^2 - 14 = 0$; $7y^2 + 50y + 86 = 0$; $D = 2500 - 4\cdot 7\cdot 86 = 92$;

$y_{1,2} = \frac{-50 \pm 2\sqrt{23}}{2\cdot 7} = \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7}$; $x_{1,2} = 10 + \frac{75 \pm 3\sqrt{23}}{7} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}$.

Ответ: а) $(8; 6)$; $\left(-\frac{1}{2}; -11\right)$; б) $\left(\frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7};\ \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7}\right)$.

4. Данная система уравнение $\begin{cases}3x+2y=11\\5x-3y=12\\x^2+y^2-xy-y=6\end{cases}$ содержит две неизвестные x и y и три уравнения. Поэтому сначала решим систему двух уравнений $\begin{cases}3x+2y=11\\5x-3y=12\end{cases}$ с двумя неизвестными и для найденных значений x и y проверим, выполняется ли третье уравнение. Для решения этой системы используем, например, способ сложения. Умножим первое уравнение на 3, а второе – на число 2. Получаем систему равносильных уравнений $\begin{cases}9x+6y=33\\10x-6y=24\end{cases}$. Сложим эти уравнения: $9x + 6y + 10x - 6y = 33 + 24$ или $19x = 57$, откуда $x = 3$. Для нахождения y подставим эту величину в первое уравнение $3x + 2y = 11$. Получаем: $3 \cdot 3 + 2y = 11$ или $9 + 2y = 11$, откуда $y = 1$. Итак, система, образованная первыми двумя уравнениями, имеем единственное решение $x = 3$, $y = 1$.

Проверим, удовлетворяет ли пара чисел $x = 3$ и $y = 1$ последнему уравнению систему $x^2 + y^2 - xy - y = 6$. Подставляем эти значения в уравнение и получаем: $3^2 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 9 + 1 - 3 - 1 = 6$. Видно, что при таких значениях x и y третье уравнение является верным числовым равенством.

Следовательно, данная система уравнений имеет одно решение (3; 1).

Ответ: одно решение (3; 1).

5. а) $\begin{cases}x^2-y^2=9\\xy=20\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}x^2-\dfrac{400}{x^2}=9\\y=\dfrac{20}{x}\end{array}\right.$; $x^4-9x^2-400=0$; $D=81+4\cdot 400=1681$;

$x^2=\dfrac{9+41}{2}=25$; $x_{1,2}=\pm 5$; $y_{1,2}=\pm 4$.

б) $\begin{cases}x^2-3y^2=22\\x^2+3y^2=28\end{cases}$ $\Big|$ $22+3y^2=28-3y^2$; $6y^2=6$; $y_{1,2}=\pm 1$; $x^2=22+3=25$; $x_{1,2}=\pm 5$.

в) При решении системы уравнений $\begin{cases}x^2+2x+3y=3\\x^2+x+2y=4\end{cases}$ надо найти более простую связь между неизвестными x и y. Для этого почленно вычтем из первого уравнения второе: $x^2 + 2x + 3y - x^2 - x - 2y = 3 - 4$ или $x + y = -1$. Выразим из этого соотношения $y = -1 - x - 2y = 3 - 4$ или $x + y = -1$. Выразим из этого соотношения $y = -1 - x$ и подставим, например, в первое уравнение системы: $x^2 + 2x + 3(-1 - x) = 3$ или $x^2 + 2x - 3 - 3x = 3$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. По формуле $y = -1 - x$ находим соответствующие значения y: $y_1 = -1-(-2) = 1$ и $y_2 = -1-3 = -4$. Итак, данная система уравнений имеет два решения $(-2; 1)$ и $(3; -4)$.

Ответ: а) $(\pm5;\ \pm4)$; б) $(5;\ \pm1)$; $(-5;\ \pm1)$; в) $(-2; 1)$ и $(3; -4)$.

6. Очевидно, что координаты точек пересечения окружности $x^2 + (y-2)^2 = 5$ и параболы $y = x^2 - 1$ удовлетворяют уравнениям двух этих линий, т.е. являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$. Для решения этой системы удобно почленно сложить уравнения: $x^2 + (y-2)^2 + y = 5 + x^2 - 1$ или $y^2 - 4y + 4 + y = 4$ или $y^2 - 3y = 0$. Разложим левую часть этого неполного квадратного уравнения на множители $y(y-3) = 0$ и найдем корни: $y_1 = 0$ и $y_2 = 3$. Подставим эти значения во второе уравнение системы и найдем величины x. Для $y = 0$ получаем: $0 = x^2 - 1$ или $1 = x^2$, откуда $x = \pm1$. Для $y = 3$ имеем: $3 = x^2 - 1$ или $4 = x^2$, откуда $x = \pm2$. Таким образом, данная система уравнений имеет четыре решения: $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(-2; 3)$ и $(2; 3)$, т.е. определены координаты четырех точек пересечения.

Ответ: $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(-2; 3)$ и $(2; 3)$.

7. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2y - x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{2y-1} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{5}{6} = 0 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$; $6y + 12y - 6 - 5y(2y-1) = 0$;

$18y - 6 - 10y^2 + 5y = 0$; $10y^2 - 23y + 6 = 0$; $D = 529 - 40\cdot6 = 289$;

$y_1 = \dfrac{23+17}{20} = 2$; $y_2 = \dfrac{3}{10}$; $x_1 = 3$; $x_2 = -0{,}4$.

б) Для решения системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{16}{3} \\ x - y = 6 \end{cases}$ умножим обе части первого уравнения на $3xy$. Получаем систему равносильных уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 16xy \\ x - y = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x^2 - 16xy + 3y^2 = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}$. Используем метод подстановки.

Из второго уравнения выразим $x = y + 6$ и подставим в первое уравнение: $3(y+6)^2 - 16y(y+6) + 3y^2 = 0$ или $3y^2 + 36y + 108 - 16y^2 - 96y + 3y^2 = 0$ или $0 = 10y^2 + 60y - 108$ или $0 = 5y^2 + 30y - 54$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $D_1 = k^2 - ac = 15^2 - 5\cdot(-54) = 225 + 270 = 495 = 9\cdot55$ и его корни $y = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{9\cdot55}}{5} = \dfrac{-15 \pm 3\sqrt{55}}{5}$. Теперь по формуле $x = y + 6$.

найдем величину $x=\frac{-15\pm3\sqrt{55}}{5}+6= =\frac{-15\pm3\sqrt{55}+30}{5}=\frac{15\pm3\sqrt{55}}{5}$. Итак, данная система уравнений имеет два решения: $\left(\frac{15+3\sqrt{55}}{5};\ \frac{-15+3\sqrt{55}}{5}\right)$ и $\left(\frac{15-3\sqrt{55}}{5};\ \frac{-15-3\sqrt{55}}{5}\right)$.

Ответ: а) $(-0,4;\ 0,3)$; б) $\left(\frac{15+3\sqrt{55}}{5};\ \frac{-15+3\sqrt{55}}{5}\right)$ и $\left(\frac{15-3\sqrt{55}}{5};\ \frac{-15-3\sqrt{55}}{5}\right)$.

С–16. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

1. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда $\begin{cases}x-y=5\\ xy=84\end{cases}$ $\begin{vmatrix}x=5+y\\ y(5+y)=84\end{vmatrix}$;

$y^2+5y-84=0$; $D=25+4\cdot84=361$; $y_1=\frac{-5+19}{2}=7$; $y_2=-12$; $x_1=12$; $x_2=-7$.

Ответ: 12 и 7 или – 7 и – 12.

2. Пусть один катет прямоугольного треугольника равен x см, другой – y см. По условию один катет больше другого на 7 см. Получаем первое уравнение: $x-y=7$. Известно, что гипотенуза треугольника равна 13 см. Запишем теорему Пифагора и получим второе уравнение: $x^2+y^2=13^2=169$. Имеем систему уравнений $\begin{cases}x-y=7\\ x^2+y^2=169\end{cases}$. Для решения используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $x=y+7$ и подставим во второе уравнение: $(y+7)^2+y^2=169$ или $y^2+14y+49+y^2=169$ или $2y^2+14y-120=0$ или $y^2+7y-60=0$. Решаем это квадратное уравнение. Находим $D=7^2-4\cdot1\cdot(-60)=$ $=49+240=289=17^2$ и корни $y=\frac{-7\pm17}{2}$, т.е. $y_1=5$ и $y_2=-12$ (не подходит, т.к. $y>0$). Определяем $x=5+7=12$. Итак, катеты треугольника 5 см и 12 см.

Ответ: 5 см и 12 см.

3. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м^2 – площадь или 2080 м^2;

$2(x+y)$ м – периметр или 184 м. Получаем систему:

$\begin{cases}xy=2080\\ 2(x+y)=184\end{cases}$ $\begin{vmatrix}y(92-y)=2080\\ x=92-y\end{vmatrix}$; $y^2-92y+2080=0$;

$D=8464-4\cdot2080=144$; $y_1=\frac{92+12}{2}=52$; $y_2=40$; $x_1=40$; $x_2=52$.

Ответ: 40 м и 52 м.

4. Пусть стороны прямоугольника x см и y см. По условию его периметр (т.е. сумма длин всех сторон) равен 20 см. Поэтому получаем первое уравнение: $2x + 2y = 20$ или $x + y = 10$. Сумма площадей квадратов, построенных на сторонах прямоугольника (т.е. x^2 и y^2), равна 104 см^2. Имеем второе уравнение: $2x^2 + 2y^2 = 104$ или $x^2 + y^2 = 52$. Итак, получили систему уравнение $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $y = 10 - x$ и подставим во второе уравнение: $x^2 + (10 - x)^2 = 52$ или $x^2 + 100 - 20x + x^2 = 52$ или $x^2 - 10x + 24 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 4$ и $x_2 = 6$. Теперь по формуле $y = 10 - x$ найдем y: $y_1 = 10 - 4 = 6$ и $y_2 = 10 - 6 = 4$. Итак, стороны прямоугольника 6 см и 4 см.

Ответ: 6 см и 4 см.

5. Пусть даны числа x и y. Известно, что произведение xy на 29 больше их суммы $(x + y)$. Получаем первое уравнение: $xy - (x + y) = 29$. Если к первому числу x прибавить удвоенное второе число $2y$, то получится 19. Имеем второе уравнение: $x + 2x = 19$. Получили систему уравнений: $\begin{cases} xy - (x + y) = 29 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$. Из второго уравнения выразим $x = 19 - 2y$ и подставим в первое уравнение: $(19 - 2y)y - (19 - y) - y - 29$ или $19y - 2y^2 - 19 + 2y - y = 29$ или $0 = 2y^2 - 20y + 48$ или $0 = y^2 - 10y + 24$. Корни этого уравнения: $y_1 = 4$ и $y_2 = 6$. По формуле $x = 19 - 2y$ найдем соответствующие значения x: $x_1 = 19 - 2 \cdot 4 = 11$ и $x_2 = 19 - 2 \cdot 6 = 7$. Итак, есть две пары таких чисел: $x = 11, y = 4$ и $x = 7, y = 6$.

Ответ: $x = 11, y = 4$ и $x = 7, y = 6$.

6. Пусть скорость первой группы туристов x км/ч, второй группы – y км/ч. Тогда за 2 часа первая группа прошла $2x$ км, вторая группа – $2y$ км. Сумма этих расстояний равна расстоянию между пунктами, т.е. 18 км. Поэтому получаем первое уравнение: $2x + 2y = 18$ или $x + y = 9$.

Первая группа затрачивает на прохождение пути $\frac{18}{x}$ ч, вторая группа – $\frac{18}{y}$ ч. По условию одной из групп понадобилось на 54 мин $= \frac{54}{60}$ ч $= \frac{9}{10}$ ч больше, чем другой. Имеем второе уравнение: $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$. Умножим обе части уравнение на $\frac{10}{9}xy$ и получаем: $20y - 20x = xy$.

Имеем систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 9 \\ 20y - 20x = xy \end{cases}$. Из первого уравнения выразим

$y = 9 - x$ и подставим во второе уравнение: $20(9 - x) - 20x = x(9 - x)$ или $180 - 20x - 20x = 9x - x^2$ или $x^2 - 49x + 180 = 0$. Корни этого квадратного уравнения: $x_1 = 4$ и $x_2 = 45$. Теперь найдем соответствующие значения y: $y_1 = 9 - 4 = 5$ и $y_2 = 9 - 45 = -36$. Очевидно, что второе решение не подходит, т.к. скорость второй группы туристов отрицательная. Система имеет одно решение: $x = 4$, $y = 5$.

Ответ: 4 км/ч и 5 км/ч.

7. Пусть 1 – вся работа, x ч – выполняет всю работу I машинистка, тогда $(x+3)$ч – выполняет всю работу II; $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+3}$ часть работы – производительность I и II. Известно, что за $6\frac{2}{3}$ ч обе машинистки, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{20}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1$; $\frac{2x+3}{x(x+3)}-\frac{3}{20}=0$;

$40x+60-3x(x+3)=0$; $40x+60-3x^2-9x=0$; $3x^2-31x-60=0$;

$D=961+4\cdot3\cdot60=1681$; $x_1=\frac{31+41}{6}=12$, $x_2<0$; 12 ч и 15ч требуется I и II машинистке, чтобы выполнить всю работу.

Ответ: 12 и 15 ч.

С–17. Последовательности

1. **а)** 10, 11, 12, 13, 14; **б)** 1, 4, 9, 16, 25; **в)** 4, 7, 10, 13, 16.
2. Чтобы найти любой член последовательности $a_n = 5n - 2$, надо вместо n подставить номер этого члена. Поэтому получаем:

а) $a_1 = 5\cdot1 - 2 = 3$, **б)** $a_6 = 5\cdot6 - 2 = 28$, **в)** $a_{10} = 5\cdot10 - 2 = 48$,

г) $a_{100} = 5\cdot100 - 2 = 498$, **д)** $a_k = 5\cdot k - 2 = 5k - 2$, **е)** $a_{k+1} = 5\cdot(k+1) - 2 = 5k + 5 - 2 = 5k + 3$.

Ответ: **а)** 3, **б)** 28, **в)** 48, **г)** 498, **д)** $5k-2$, **е)** $5k+3$.

3. **а)** $x_n = n + 6$; $x_2 = 2 + 6 = 8$; $x_5 = 5 + 6 = 11$; $x_{10} = 10 + 6 = 16$;

б) $x_n = \frac{2n-1}{3}$; $x_2 = \frac{2\cdot2-1}{3}=1$; $x_5 = \frac{2\cdot5-1}{3}=3$; $x_{10} = \frac{2\cdot10-1}{3}=\frac{19}{3}$;

в) $x_n = n^2$; $x_2 = 2^2 = 4$; $x_5 = 5^2 = 25$; $x_{10} = 10^2 = 100$; **г)** $x_n = n(n-1)$; $x_2 = 2(2-1) = 2$; $x_5 = 5(5-1) = 20$; $x_{10} = 10(10-1) = 90$;

д) $x_n = n^3 - n$; $x_2 = 2^3 - 2 = 6$; $x_5 = 5^3 - 5 = 120$; $x_{10} = 10^3 - 10 = 990$; **е)** $x_n = (-1)^n\cdot n$; $x_2 = (-1)^2\cdot2 = 2$; $x_5 = (-1)^5\cdot5 = -5$; $x_{10} = (-1)^{10}\cdot10 = 10$.

4. Известно, что член последовательности $a_n = 55 - 4n$ равен 15, т.е. $a_n = 15$. Для нахождения номера n этого члена получаем уравнение: $15 = 55 - 4n$ или $15 - 55 = -4n$ или $-40 = -4n$, откуда $n = 10$.

Ответ: $n = 10$.

5. а) Чтобы найти пять первых членов последовательности $\{c_n\}$ (если $c_1 = 3$), подставим поочередно в формулу $c_{n+1} = c_n + 4$ значения $n = 1, 2, 3, 4$. Получаем: при $n = 1$: $c_{1+1} = c_1 + 4$ или $c_2 = c_1 + 4 = 3 + 4 = 7$; при $n = 2$: $c_{2+1} = c_2 + 4$ или $c_3 = c_2 + 4 = 7 + 4 = 11$; при $n = 3$: $c_{3+1} = c_3 + 4$ или $c_4 = c_3 + 4 = 11 + 4 = 15$ и при $n = 4$: $c_{4+1} = c_4 + 4$ или $c_5 = c_4 + 4 = 15 + 4 = 19$.

Ответ: $c_1 = 3$, $c_2 = 7$, $c_3 = 11$, $c_4 = 15$, $c_5 = 19$.

б) $C_1=4$, $C_{n+1}=2C_n$; $C_2=2C_1=8$, $C_3=2C_2=16$, $C_4=2C_3=32$, $C_5=2C_4=64$.

6. 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; 0,42857.

7. Если данное число является членом последовательности $a_n = n^2 - 2n + 3$, то, подставив вместо a_n это число, можно решить получившееся квадратное уравнение и найти номер такого члена.

а) При $a_n = 3$ получаем уравнение: $3 = n^2 - 2n + 3$ или $0 = n^2 - 2n$ или $0 = n(n-2)$. Корни этого уравнения $n_1 = 0$ (не подходит, т.е. n – число натуральное) и $n_2 = 2$. Поэтому второй член данной последовательности равен 3.

б) При $a_n = 66$ имеем уравнение: $66 = n^2 - 2n + 3$ или $0 = n^2 - 2n - 63$. Корни этого уравнения $n_1 = -7$ (не подходит, т.к. n – число натуральное) и $n_2 = 9$. Поэтому девятый член данной последовательности равен 66.

в) При $a_n = 103$ имеем уравнение: $103 = n^2 - 2n + 3$ или $0 = n^2 - 2n - 100$. Корни этого уравнения $n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{101}$ не являются натуральными числами. Поэтому никакой член данной последовательности не равен 103, т.е. число 103 не является членом данной последовательности.

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

8. Запишем данную формулу для значений n, равных $1, 2, 3, \dots, k-1$.

а) Получаем: $b_2 = b_1 + 4, b_3 = b_2 + 4, b_4 = b_3 + 4, \dots, b_k = b_{k-1} + 4$. Сложим левые и правые части этих равенств: $b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k-1} + 4 \cdot (k-1)$. Сократим в обеих частях одинаковые суммы $b_2 + b_3 + \dots + b_{k-1}$ и получим: $b_k = b_1 + 4 \cdot (k-1)$. Учтем, что $b_1 = 4$, тогда $b_k = 4 + 4 \cdot (k-1) = 4(1 + k - 1) = 4k$. Итак, k-ый член этой последовательности можно найти по формуле $b_k = 4k$.

б) Получаем равенства: $b_2 = 5b_1, b_3 = 5b_2, b_4 = 5b_3, \dots, b_k = 5b_{k-1}$. Перемножим левые и правые части этих равенств. Имеем: $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_k = 5b_1 \cdot 5b_2 \cdot 5b_3 \cdot \dots \cdot b_{k-1}$ или $b_2b_3b_4 \cdot \dots \cdot b_k = 5^{k-1} b_1b_2b_3 \cdot \dots \cdot 5b_{k-1}$. Разделим обе части этого равенства на $b_2b_3b_4 \cdot \dots \cdot b_{k-1}$ и получим: $b_k = b_1 \cdot 5^{k-1}$. Учтем, что $b_1=1$, и найдем $b_k = 5^{k-1}$.

Ответ: а) $b_k = 4k$; б) $b_k = 5^{k-1}$.

С–18. Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена

1. $a_1 = 3{,}4$; $a_2 = -0{,}2$; $d = a_2 - a_1 = -0{,}2 - 3{,}4 = -3{,}6$;
$a_3 = a_2 + d = -0{,}2 - 3{,}6 = -3{,}8$; $a_4 = a_2 + 2d = -0{,}2 - 2 \cdot 3{,}6 = -7{,}4$;
$a_5 = a_2 + 3d = -0{,}2 - 3 \cdot 3{,}6 = -11$; $a_6 = a_5 + d = -11 - 3{,}6 = -14{,}6$.

2. Чтобы найти нужные члены арифметической прогрессии, воспользуемся формулой n-го члена $b_n = b_1 + d(n-1)$. По условию известны $b_1 = -0{,}8$ и $d = 4$, тогда $b_n = -0{,}8 + 4(n-1) = 4n - 4{,}8$. Теперь подставим номера нужных членов. Получаем:

а) $b_3 = 4 \cdot 3 - 4{,}8 = 12 - 4{,}8 = 7{,}2$; б) $b_7 = 4 \cdot 7 - 4{,}8 = 28 - 4{,}8 = 23{,}2$; в) $b_{24} = 4 \cdot 24 - 4{,}8 = 96 - 4{,}8 = 91{,}2$; г) $b_{k+1} = 4 \cdot (k+1) - 4{,}8 = 4k - 0{,}8$.

Ответ: а) 7,2; б) 23,2; в) 91,2; г) $b_{k+1} = 4k - 0{,}8$.

3. а) $a_1 = 16, a_8 = 37; a_8 = a_1 + 7d, 7d = a_8 - a_1, d = \dfrac{a_8 - a_1}{7} = \dfrac{37-16}{7} = 3.$

б) Используем формулу n–го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$. В этой задаче известны $a_1 = 4$, $a_{18} = -11$, $n = 18$. Подставим эти значения в формулу и получим линейное уравнение для нахождения d: $-11 = 4 + d(18-1)$

или $-11 = 4 + 17d$ или $-15 = 17d$, откуда $d = -\dfrac{15}{17}$.

в) $a_1 = 0{,}5,\ a_{23} = -2{,}3;\ a_{23} = a_1 + 22d,$

$$d = \frac{a_{23} - a_1}{22} = \frac{-2{,}3 - 0{,}5}{22} = -\frac{2{,}8}{22} = -\frac{1{,}4}{11} = -\frac{14}{110} = -\frac{7}{55}.$$

Ответ: а) 3; б) $d = -\dfrac{15}{17}$; в) $-\dfrac{7}{55}$.

4. $a_1 = 106; d = 12; a_6 = a_1 + 5d = 106 + 5 \cdot 12 = 166; a_{12} = a_1 + 11d = 106 + 11 \cdot 12 = 238$

5. а) Снова воспользуемся формулой n–го члена арифметической прогрессии $x_n = x_1 + d(n-1)$. По условию задачи известны $x_1 = 14$, $d = 0{,}5$ и $x_n = 17{,}5$. Найдем порядковый номер члена x_n. Подставим эти величины в формулу и получим линейное уравнение для нахождения n: $17{,}5 = 14 + 0{,}5(n-1)$ или

$3{,}5 = 0{,}5(n-1)$, откуда $n - 1 = \dfrac{3{,}5}{0{,}5} = 7$ и $n = 8$.

б) $x_n = 19 = x_1 + d(n-1) = 13{,}5 + 0{,}5n;\ 19 = 13{,}5 + 0{,}5n;\ 0{,}5n = 5{,}5;\ n = 11,$

значит, $19 = x_{11}$; в) $x_n = 34 = 13{,}5 + 0{,}5n;\ 0{,}5n = 20{,}5;\ n = 41$, значит, $34 = x_{41}$.

Ответ: а) 8; б) 11; в) 41.

6. $a_1 = 18,\ d = a_2 - a_1 = 4 - 18 = -14;$

а) $-38 = a_1 + d(n-1) = 18 - 14(n-1) = 32 - 14n;$

$14n = 70,\ n = 5$, значит, $-38 = a_5$; б) $-64 = 32 - 14n; 14n = 96,$

$n = \dfrac{48}{7} \notin N$, значит, -64 не встретится среди данных чисел.

в) $-80 = 32 - 14n;\ 14n = 112,\ n = 8$, значит, $-80 = a_8$.

Ответ: а) $n = 5$; б) не встретится; в) $n = 8$.

7. Если между членами 2 и 22 вставить четыре числа, то число 2 будет первым членом арифметической прогрессии (т.е. $a_1 = 2$), а число 22 – шестым членом этой прогрессии (т.е. $a_6 = 22$). Найдем разность прогрессии d. Используя формулу n–го члена арифмет. прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем уравнение:

$22 = 2 + d(6 - 1)$ или $22 - 2 = 5d$, откуда $d = 4$. Теперь по той же формуле найдем вставленные числа: $a_2 = a_1 + d = 2 + 4 = 6$, $a_3 = a_1 + 2d = 2 + 2 \cdot 4 = 10$, $a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 4 = 14$, $a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 4 = 18$. Итак, между числами 2 и 22 надо вставить числа 6, 10, 14, 18. Тогда все шесть чисел составят арифметическую прогрессию.

Ответ: 6, 10, 14, 18.

8. Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, запишем члены: $a_2 = a_1 + d(2-1) = a_1 + d$, $a_{n-2} = a_1 + d(n-2-1) = a_1 + d(n-3)$, $a_5 = a_1 + d(5-1) = a_1 + 4d$, $a_{n-5} = a_1 + d(n-5-1) = a_1 + d(n-6)$. Теперь проверим данное равенство $a_2 + a_{n-2} = a_5 + a_{n-5}$, вычислив его левую и правую части. Левая часть равна: $a_2 + a_{n-2} = a_1 + d + a_1 + d(n-3) = 2a_1 + d(1 + n - 3) = 2a_1 + d(n-2)$, правая часть: $a_5 + a_{n-5} = a_1 + 4d + a_1 + d(n-6) = 2a_1 + d(4 + n - 6) = 2a_1 + d(n-2)$. Видно, что левая часть равна правой. Равенство доказано.

9. В данной арифметической прогрессии первый член равен 7 (т.е. $a_1 = 7$), второй – квадрату натурального числа n (т.е. $a_2 = n^2$), третий – квадрату следующего натурального числа $n + 1$ (т.е. $a_3 = (n+1)^2$). Запишем разность этой прогрессии $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, откуда $2a_2 = a_1 + a_3$. Получаем: $2n^2 = 7 + (n+1)^2$ или $2n^2 = 7 + n^2 + 2n + 1$ или $n^2 - 2n - 8 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $n_1 = 4$ и $n_2 = -2$ (не подходит, т.к. n – число натуральное). Теперь получаем: $a_2 = 4^2 = 16$ и $a_3 = (4+1)^2 = 5^2 = 25$.

Ответ: $a_2 = 16$ и $a_3 = 25$.

10. Прежде всего заметим, что если числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, то выполняется равенство $2a_2 = a_1 + a_3$ (см. предыдущую задачу). Поэтому, если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то выполняется равенство: $\frac{2}{a+c} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$. Умножим его части на произведение $(a+c)(b+c)(a+b)$ и получим: $2(b+c)(a+b) = (a+c)(a+b) + (a+c)(b+c)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc = a^2 + ab + ac + bc + ab + ac + bc + c^2$ или $2b^2 = a^2 + c^2$. Но, так как числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то и выполняется именно такое равенство: $2b^2 = a^2 + c^2$. Следовательно, числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

С–19. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

1. Для арифметической прогрессии –16, –13, ... определим первый член $a_1 = -16$ и разность $d = a_2 - a_1 = -13 - (-16) = 3$. Воспользуемся формулой суммы n первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ и получим

$S_n=\frac{2\cdot(-16)+3(n-1)}{2}\cdot n=\frac{-32+3n-3}{2}\cdot n=\frac{(3n-35)n}{2}$. Теперь легко найти необходимые суммы:

а) $S_6=\frac{(3\cdot6-35)\cdot6}{2}=(18-35)\cdot3=-51$; б) $S_{16}=\frac{(3\cdot16-35)\cdot16}{2}=(48-35)\cdot8=104$;

в) $S_{25}=\frac{(3\cdot25-35)\cdot25}{2}=\frac{(75-35)\cdot25}{2}=500$;

г) $S_{k+1}=\frac{(3\cdot(k+1)-35)\cdot(k+1)}{2}=\frac{(3k+3-35)\cdot(k+1)}{2}=\frac{(3k-32)(k+1)}{2}$.

Ответ: **а)** -51; **б)** 104; **в)** 500; **г)** $\frac{(3k-32)(k+1)}{2}$.

2. **а)** $a_1=4$; $d=2$; $S_{12}=\frac{2a_1+11d}{2}\cdot12=\frac{2\cdot4+11\cdot2}{2}\cdot12=180$;

б) $a_1=-5$; $d=3$; $S_{12}=(2\cdot(-5)+11\cdot3)\cdot6=23\cdot6=138$;

в) $a_1=16{,}5$; $d=-1{,}5$; $S_{12}=(2\cdot16{,}5+11\cdot(-1{,}5))\cdot6=99$;

г) $a_1=1+\sqrt{3}$; $d=-\sqrt{3}$; $S_{12}=\left(2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)+11\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\right)\cdot6=\left(2-9\sqrt{3}\right)\cdot6=12-54\sqrt{3}$.

Ответ: **а)** 180; **б)** 138; **в)** 99; **г)** $12-54\sqrt{3}$.

3. Прежде всего убедимся, что данная последовательность является арифметической прогрессией. Найдем разность двух соседних членов $a_n=3n+2$ и $a_{n-1}=3(n-1)+2=3n-1$. Получаем: $a_n-a_{n-1}=3n+2-(3n-1)=3n+2-3n+1=3$. Видно, что эта разность величина постоянная (т.е. не зависит от номера n). Следовательно, данная последовательность – арифметическая прогрессия с разностью $d=3$. Найдем ее первый член по формуле $a_n=3n+2$. Получаем: $a_1=3\cdot1+2=5$. Воспользуемся формулой суммы n первых членов прогрессии $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2\cdot5+3(n-1)}{2}\cdot n=\frac{10+3n-3}{2}\cdot n=\frac{(3n+7)n}{2}$.

Найдем нужные суммы: $S_5=\frac{(3\cdot5+7)\cdot5}{2}=\frac{22\cdot5}{2}=55$; $S_{40}=\frac{(3\cdot40+7)\cdot40}{2}=$ $=\frac{127\cdot40}{2}=2540$; $S_k=\frac{(3k+7)k}{2}$.

Ответ: $S_5=55$; $S_{40}=2540$; $S_k=\frac{(3k+7)k}{2}$.

4. а) $a_1=1, d=1, S_{80}-?;\ S_{80}=\frac{2a_1+79d}{2}\cdot 80=81\cdot 40=3240;$

б) $a_1=10, d=1, S_{90}-?;\ S_{90}=\frac{2a_1+89d}{2}\cdot 90=(20+89)\cdot 45=4905;$

в) Очевидно, что четные члены 2, 4, 6, ... образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 2$ и разностью $d = 2$. Таких чисел, не превышающих 100, ровно пятьдесят (каждое второе), т.е. $n = 50$. Используем формулу для суммы n первых членов прогрессии $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ и найдем:

$$S_{50}=\frac{2\cdot 2+2(50-1)}{2}\cdot 50=\frac{6+98}{2}\cdot 50=51\cdot 50=2550.$$

Ответ: а) 3240; б) 4908; в) 2550.

5. а) $a_1=8, a_7=24;\ a_7=a_1+6d;\ d=\frac{a_7-a_1}{6}=\frac{24-8}{6}=\frac{8}{3};$

$$S_{10}=\frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10=(16+24)\cdot 5=200;$$

б) Прежде всего найдем первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии по известным условиям $a_4 = 16$ и $a_{12} = 88$. Используем формулу n–го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ и запишем эти условия:

$\begin{cases} a_1+d(4-1)=16 \\ a_1+d(12-1)=88 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1+3d=16 \\ a_1+11d=88 \end{cases}$. Вычтем из второго уравнения первое:

$a_1 + 11d - (a_1 + 3d) = 88 - 16$ или $8d = 72$, откуда $d = 9$. Из первого уравнения найдем $a_1 = 16 - 3d = 16 - 3\cdot 9 = 16 - 27 = -11$. Теперь по формуле суммы n первых членов прогрессии $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ легко найти

$$S_{10}=\frac{2(-11)+d(10-1)}{2}\cdot 10=\frac{-22+81}{2}\cdot 10=59\cdot 5=295.$$

Ответ: а) 200; б) 295.

6. $a_1=15, d=2;\ S_{26}=\frac{2a_1+25d}{2}\cdot 26=(30+50)\cdot 13=1040.$

Ответ: 1040.

7. Используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ запишем условия задачи $S_3 = 48$ и $S_6 = 141$. Получаем: $\frac{2a_1+d(3-1)}{2}\cdot 3=48$ и $\frac{2a_1+d(6-1)}{2}\cdot 6=141$. Упростим эти уравнения,

раскрывая скобки и выполняя необходимые действия: $a_1 + d = 16$ и $2a_1 + 5d = 47$. Решим полученную систему уравнений. Из первого уравнения выразим $a_1 = 16 - d$ и подставим во второе уравнение: $2(16 - d) + 5d = 47$ или $32 - 2d + 5d = 47$ или $3d = 15$, откуда $d = 5$. Находим $a_1 = 16 - 5 = 11$.

Ответ: $a_1 = 11$ и $d = 5$.

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 10 км, за второй час – на 15 км, за третий час – на 20 км. Поэтому

$$a_1 = 10,\ d = 5;\ \ S_n = 135;\ n - ?;\ 135 = \frac{2\cdot 10 + 5\cdot(n-1)}{2}\cdot n;$$

$$270 = (20 + 5n - 5)\cdot n,\ n(5n + 15) - 270 = 0,\ n(n+3) - 54 = 0,\ n^2 + 3n - 54 = 0;$$

$$D = 9 + 4\cdot 54 = 225;\ n_1 = \frac{-3+15}{2} = 6;\ n_2 < 0 \text{ – не удовлетворяет условию задачи.}$$

Итак, через 6ч легковой автомобиль догонит грузовой.

Ответ: через 6ч.

9. а) Прежде всего, нужно найти сумму чисел, стоящих в левой части уравнения. Пусть последний член x является n–ым членом прогрессии. Тогда, используя формулу n–го члена, запишем $x = a_1 + d(n - 1) = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$ (т.к. $a_1 = 3$, $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$). Также можно записать, что $3 + 7 + 11 + ... + x =$

$$= \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \frac{2\cdot 3 + 4(n-1)}{2}\cdot n = \frac{6 + 4n - 4}{2}\cdot n = \frac{4n+2}{2}\cdot n = (2n+1)\cdot n = 2n^2 + n = 289.$$

Итак, получили систему уравнений: $\begin{cases} x = 4n - 1 \\ 2n^2 + n = 289 \end{cases}$. Решим сначала второе уравнение системы: $2n^2 + n = 289$ или $2n^2 + n - 289 = 0$. Корни этого уравнения

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-289)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2313}}{4} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{257}}{4}$$

не являются натуральными числами. Следовательно, полученная система и данное уравнение решений не имеют.

б) $8 + 5 + 2 + ... + x = 270;\ d = -3;\ a_1 = 8;\ S_n = 270 = \dfrac{16 - 3(n-1)}{2}\cdot n;\ 540 = n(19 - 3n);$

$$3n^2 - 19n + 540 = 0;\ D = 361 - 4\cdot 3\cdot 540 < 0 \text{ – решений нет}.$$

10. а) Надо воспользоваться определением арифметической прогрессии и найти разность соседних членов. Сначала найдем формулу n–го члена данной последовательности. Запишем сумму: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, тогда $a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1)) = 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) =$ $= 5n^2 + 3n - (5n^2 - 7n + 2) = 5n^2 + 3n - 5n^2 + 7n - 2 = 10n - 2$. Таким образом, получили $a_n = 10n - 2$. Теперь найдем разность между соседними членами последовательности: $a_n - a_{n-1} = 10n - 2 - (10(n-1) - 2) = 10n - 2 - (10n - 10 - 2) =$

$=10n-2-(10n-12)=10n-2-10n+12=10$. Видно, что эта разность является постоянным числом и не зависит от номера n. Следовательно, по определению данная последовательность – арифметическая прогрессия.

б) $S_n=3n^2$; $3n^2=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$; $\frac{d}{2}=3$; $d=6$; $a_1-\frac{d}{2}=0$; $a_1=3$.

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

в) $S_n=(4n-1)n=4n^2-n$; $4n^2-n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$;

$\begin{cases}\frac{d}{2}=4,\ d=8\\ a_1-\frac{d}{2}=-1,\ a_1=3\end{cases}$. Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

Ответ: а) да; б) да; в) да.

С–20. Геометрическая прогрессия. Формула n–го члена

1. $b_1=0,3$; $b_2=1,8$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1,8}{0,8}=6$; $b_3=b_2\cdot q=1,8\cdot 6=10,8$;

$b_4=b_3\cdot q=10,8\cdot 6=64,8$; $b_5=b_4\cdot q=64,8\cdot 6=388,8$;

$b_6=b_5\cdot q=388,8\cdot 6=2331,8$.

Ответ: 10,8; 64,8; 388,8; 2331,8.

2. $b_1=1,6$; $q=2$; $b_3=b_1q^2=1,6\cdot 4=6,4$; $b_5=b_3q^2=6,4\cdot 4=25,6$;

$b_7=b_5q^2=25,6\cdot 4=102,4$; $b_k=b_1q^{k-1}=1,6\cdot 2^{k-1}=0,8\cdot 2^k$.

Ответ: 6,4; 25,6; 102,4; $0,8\cdot 2^k$.

3. а) Используем формулу n–го члена геометрической прогрессии $a_n=a_1q^{n-1}$. В этой задаче $a_1=3$, $q=2$ и $n=6$. Тогда $a_6=3\cdot 2^5=3\cdot 32=96$.

б) $a_1=64$; $q=-\frac{1}{4}$; $a_7=a_1q^6=64\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{1}{64}$; в) $a_1=125$; $q=\frac{1}{5}$; $a_5=a_1q^4=5^3\cdot\frac{1}{5^4}=\frac{1}{5}$;

г) $a_1=2\sqrt{2}$; $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $a_8=a_1q^7=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2^{7/2}}=\frac{1}{4}$.

Ответ: а) 96; б) $\frac{1}{64}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{4}$.

4. а) Используем формулу n–го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$.

В нашем случае $b_6=\frac{1}{27}$, $q=\frac{1}{3}$ и $n=6$. Получаем уравнение $\frac{1}{27}=b_1\left(\frac{1}{3}\right)^5$

или $\frac{1}{27}=b_1\cdot\frac{1}{243}$, откуда $b_1=\frac{1}{27}:\frac{1}{243}=\frac{1}{27}\cdot 243=9$;

б) $b_7 = 256$, $q = -2$; $b_7 = b_1 \cdot q^6$, $256 = b_1 \cdot 2^6$; $b_1 = \dfrac{256}{64} = 4$.

5. а) По условию задачи $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$. Запишем эти члены, используя формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$: $b_1 q^2 = 12$ и $b_1 q^4 = 48$.

Почленно разделим второе уравнение на первое. Имеем уравнение: $\dfrac{b_1 q^4}{b_1 q^2} = \dfrac{48}{12}$

или $q^2 = 4$, откуда $q = \pm 2$.

б) $b_4 = 25$; $b_6 = 16$; $b_6 = b_4 q^2$; $q = \sqrt{\dfrac{b_7}{b_7}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

Ответ: а) $q = \pm 2$; б) $q = \dfrac{4}{5}$.

6. После вставки четырех чисел образуется геометрическая прогрессия. При этом

число $\dfrac{1}{9}$ – ее первый член (т.е. $b_1 = \dfrac{1}{9}$), число 27 – шестой член (т.е. $b_6 = 27$).

Воспользуемся формулой n-го члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$. Для шестого члена

($n = 6$) получаем уравнение: $27 = \dfrac{1}{9} \cdot q^5$, откуда $q^5 = 27 \cdot 9 = 243$ и $q = \sqrt[5]{243} = 3$.

Теперь можно найти нужные числа: $b_2 = b_1 q = \dfrac{1}{9} \cdot 3 = \dfrac{1}{3}$; $b_3 = b_1 q^2 = \dfrac{1}{9} \cdot 3^2 = 1$;

$b_4 = b_1 q^3 = \dfrac{1}{9} \cdot 3^3 = \dfrac{1}{9} \cdot 27 = 3$; $b_5 = b_1 q^4 = \dfrac{1}{9} \cdot 3^4 = \dfrac{1}{9} \cdot 81 = 9$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$, 1, 3, 9.

7. Запишем формулу n-го члена данной геометрической прогрессии $a_n = a_1 q^{n-1}$. Теперь проверим, являются ли последовательности геометрическими прогрессиями. Для этого найдем отношение соседних членов.

а) $\dfrac{2a_n}{2a_{n-1}} = \dfrac{2a_1 q^{n-1}}{2a_1 q^{n-2}} = q^{n-1-(n-2)} = q^{n-1-n+2} = q$. Так как отношение этих членов величина постоянная (т.е. не зависит от номера n), то по определению такая последовательность является геометрической прогрессией.

б) $\dfrac{a_n + 3}{a_{n-1} + 3} = \dfrac{a_1 q^{n-1} + 3}{a_1 q^{n-2} + 3}$. Видно, что отношение соседних членов не является постоянной величиной. Следовательно, данная последовательность – не геометрическая прогрессия.

в) $\dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}}} = \dfrac{\sqrt{a_1 q^{n-1}}}{\sqrt{a_1 q^{n-2}}} = \sqrt{\dfrac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{n-2}}} = \sqrt{q^{n-1-(n-2)}} = \sqrt{q}$. Отношение этих членов –

величина постоянная. Поэтому данная последовательность по определению является геометрической прогрессией.

Ответ: а) да, б) нет, в) да.

8. По условию известно, что $a_4 - a_2 = 18$ и $a_5 - a_3 = 36$. Используем формулу n-го члена геометрической прогрессии $a_n = a_1q^{n-1}$ и запишем условия: $\begin{cases} a_1q^3 - a_1q = 18 \\ a_1q^4 - a_1q^2 = 36 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1q(q^2-1) = 18 \\ a_1q^2(q^2-1) = 36 \end{cases}$. Для решения этой системы почленно разделим второе уравнение на первое: $\dfrac{a_1q^2(q^2-1)}{a_1q(q^2-1)} = \dfrac{36}{18}$, откуда $q = 2$.

Подставим это значение в первое уравнение $a_1 \cdot 2(2^2 - 1) = 18$ или $6a_1 = 18$, откуда $a_1 = 3$.

Ответ: $a_1 = 3$ и $q = 2$.

9. Используя формулу n-го члена геометр. прогрессии, запишем ее четыре первых члена: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$. Сумма крайних членов равна 52, т.е. $a_1 + a_1q^3 = 52$. Сумма средних членов равна 16, т.е. $a_1q + a_1q^2 = 16$. Получили систему уравнений: $\begin{cases} a_1 + a_1q^3 = 52 \\ a_1q + a_1q^2 = 16 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1(1+q^3) = 52 \\ a_1q(1+q) = 16 \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе: $\dfrac{a_1(1+q^3)}{a_1q(1+q)} = \dfrac{52}{16}$ или $\dfrac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \dfrac{13}{4}$ или $\dfrac{1-q+q^2}{q} = \dfrac{13}{4}$ или $4 - 4q + 4q^2 = 13q$ или $4q^2 - 17q + 4 = 0$. Решим это квадратное уравнение $q = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot4\cdot4}}{8} = \dfrac{17\pm5}{8}$, т.е. $q_1 = 4$ и $q = \dfrac{1}{4}$. Из первого уравнения системы найдем $a_1 = \dfrac{52}{1+q^3}$. Для $q = 4$ получаем: $a_1 = \dfrac{52}{1+4^3} = \dfrac{52}{65}$,

$a_2 = a_1q = \dfrac{52}{65}\cdot 4 = \dfrac{208}{65}$, $\quad a_3 = a_1q^2 = \dfrac{52}{65}\cdot 4^2 = \dfrac{52\cdot16}{65} = \dfrac{832}{65}$,

$a_4 = a_1q^3 = \dfrac{52}{65}\cdot 4^3 = \dfrac{52\cdot64}{65} = \dfrac{3328}{65}$.

Для $q = \dfrac{1}{4}$ находим: $a_1 = \dfrac{52}{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3} = \dfrac{52}{1+\dfrac{1}{64}} = \dfrac{52\cdot64}{65} = \dfrac{3328}{65}$, $a_2 = a_1q = \dfrac{3328}{65}\cdot\dfrac{1}{4}$,

$a_3 = a_1q^2 = \dfrac{3328}{65}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{208}{65}$, $a_4 = a_1q^3 = \dfrac{3328}{65}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{52}{65}$.

Ответ: $\dfrac{52}{65}, \dfrac{208}{65}, \dfrac{832}{65}, \dfrac{3328}{65}$.

10. Если числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то ее знаменатель $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, отсюда $b^2 = ac$. Сначала упростим левую часть данного равенства:
$(a + b + c)(a - b + c) = ((a + c) + b)((a + c) - b) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$.
Так как $ac = b^2$, то получаем: $a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Видим, что левая часть равна правой. Следовательно, данное равенство является тождеством.

С–21. Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

1. а) Используем формулу суммы *n* первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. В нашем случае $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{4}$ и $n = 5$. Тогда получаем:

$$S_5 = \frac{32\left(\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{32\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{32 \cdot \left(-\frac{1023}{1024}\right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{1023}{32} : \frac{3}{4} = \frac{1023 \cdot 4}{32 \cdot 3} = \frac{341}{8} = 42\frac{5}{8}.$$

б) $b_1 = -4$, $q = 2$; $S_5 = \frac{-4(2^5 - 1)}{2 - 1} = -124$; **в)** $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$; $S_5 = \frac{27\left(-\frac{1}{3^5} - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} =$

$$= \frac{244 \cdot 27 \cdot 3}{4 \cdot 243} = \frac{4941}{243} = \frac{183}{9} = \frac{61}{3};$$ **г)** $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$; $S_5 = \frac{2\sqrt{3}(3^{5/2} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{54 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

Ответ: а) $42\frac{5}{8}$; б) -124; в) $\frac{61}{3}$; г) $\frac{54 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

2. а) $b_1 = 3$, $q = \frac{6}{3} = 2$; $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot 63}{1} = 189$; **б)** $b_1 = 5$, $q = -\frac{2,5}{5} = -\frac{1}{2}$;

$$S_6 = \frac{5\left(\frac{1}{64} - 1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 21}{32} = \frac{105}{32};$$ **в)** $b_1 = 4$, $q = \frac{4^2}{4} = 4$;

$$S_6 = \frac{4(4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{4 \cdot 4095}{3} = 5460;$$ **г)** $b_1 = \sqrt{3}$, $q = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; $S_6 = \frac{\sqrt{3}(27 - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

Ответ: а) 189; б) $\frac{105}{32}$; в) 5460; г) $\frac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

3. а) $a_1=64,\ q=\frac{1}{4}=;\ S_5=\dfrac{64\left(\frac{1}{4^5}-1\right)}{\frac{1}{4}-1}=\dfrac{64\cdot1023\cdot4}{4^5\cdot3}=\dfrac{341}{4}$;

б) $a_1=10,\ q=\frac{1}{2};\ S_8=\dfrac{10\left(\frac{1}{2^8}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{10\cdot255\cdot2}{2^8}=\dfrac{5\cdot255}{2^6}=\dfrac{1275}{64}$;

в) $a_1=3,\ q=-2;\ S_4=\dfrac{3(16-1)}{-3}=-15$; г) $a_1=3\sqrt{2},\ q=\sqrt{2};\ S_6=\dfrac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{21\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

4. а) $b_3=\frac{1}{25};\ b_4=\frac{1}{125};\ q=\frac{b_4}{b_3}=\frac{1}{5};\ b_3=b_1q^2;\ b_1=\frac{b_3}{q^2}=1;\ S_4=\dfrac{\frac{1}{5^4}-1}{\frac{1}{5}-1}=\dfrac{624\cdot5}{625\cdot4}=\dfrac{156}{125}$;

б) Прежде всего найдем первый член b_1 и знаменатель q прогрессии. Известно, что $b_2=6$, $b_4=24$ и $q>0$. Запишем эти условия, используя формулу n-го члена: $b_1q=6$ и $b_1q^3=24$. Разделим почленно второе уравнение на первое: $\frac{b_1q^3}{b_1q}=\frac{24}{6}$ или $q^2=4$. Учтем, что $q>0$ и найдем $q=2$. Подставим это значение в первое уравнение: $2b_1=6$, откуда $b_1=3$. Используем формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_4=\dfrac{3(2^4-1)}{2-1}=3\cdot15=45$.

5. а) Воспользуемся формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. В этой задаче известны: $n=5$, $S_5=93$ и $q=2$. Подставим эти величины в формулу и получим: $93=\dfrac{b_1(2^5-1)}{2-1}$ или $93=b_1\cdot31$, откуда $b_1=3$.

б) $q=\frac{2}{3};\ S_4=65{,}65=\dfrac{b_1\left(\frac{16}{81}-1\right)}{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{b_1\cdot65\cdot3}{81},\ b_1=27$.

Ответ: а) 3; б) 27.

6. а) Если данная последовательность является геометрической прогрессией, то отношение любых двух соседних членов будет величиной постоянной. Проверим это. $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{2\cdot3^n}{2\cdot3^{n-1}}=3^{n-(n-1)}=3$. Следовательно, такая последо-

вательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 3$. Определим ее первый член $x_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$. Теперь легко найти суму ее первых пяти членов: $S_5 = \dfrac{6\left(3^5 - 1\right)}{3-1} = 3 \cdot 242 = 726$.

б) $x_n = 2^n$; $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 2$, значит, $\{x_n\}$ – геометрическая прогрессия;

в) $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{3^n - 3}{3^{n-1} - 3}$. Такое отношение не является постоянной величиной, т.е. зависит от номера n. Поэтому данная последовательность не является геометрической прогрессией.

Ответ: **а)** да, $S_5 = 726$; **б)** да; **в)** нет.

7. Пусть дана геометрич. прогрессия $\{b_n\}$. Известно, что $b_6 - b_4 = 72$, $b_3 - b_5 = 9$. Используя формулу n-го члена, запишем эти условия: $b_1q^5 - b_1q^3 = 72$ и $b_1q^2 - b_1q^4 = 9$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} b_1q^5 - b_1q^3 = 72 \\ b_1q^2 - b_1q^4 = 9 \end{cases}$. Разделим почленно первое уравнение на второе: $\dfrac{b_1q^3\left(q^2 - 1\right)}{b_1q^2\left(1 - q^2\right)} = \dfrac{72}{9}$ или $-q = 8$, откуда $q = -8$. Из второго уравнения системы находим: $b_1 = \dfrac{9}{q^2\left(1 - q^2\right)} =$

$$= \frac{9}{(-8)^2\left(1 - (-8)^2\right)} = \frac{9}{64 \cdot (-63)} = -\frac{1}{448}.$$

Теперь найдем суммы восьми первых членов этой прогрессии:

$$S_8 = \left(-\frac{1}{448}\right) \cdot \frac{(-8)^8 - 1}{(-8) - 1} = \frac{8^8 - 1}{4032}.$$

Ответ: $\dfrac{8^8 - 1}{4032}$.

8. Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии, запишем ее первые три члена: b_1; b_1q; b_1q^2. Так как их сумма равна 13, то имеем первое уравнение: $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 13$. Квадраты этих членов: b_1^2; $b_1^2q^2$; $b_1^2q^4$. Их сумма равна 91. Получаем второе уравнение: $b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 91$ или

$$\frac{b_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right)\left(1 - q^2\right)}{1 - q^2} = 91 \text{ или } \frac{b_1^2\left(1 - \left(q^2\right)^3\right)}{1 - q^2} = 91 \text{ или } \frac{b_1^2\left(1 - q^6\right)}{1 - q^2} = 91.$$

Получили систему уравнение: $\begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q}=13 \\ \dfrac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2}=91 \end{cases}$.

Возведем первое уравнение системы в квадрат: $\begin{cases} \dfrac{b_1^2(1-q^3)^2}{(1-q)^2}=169 \\ \dfrac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2}=91 \end{cases}$. Разделим

первое уравнение на второе: $\dfrac{(1-q^3)^2(1-q^2)}{(1-q)^2(1-q^6)}=\dfrac{169}{91}=\dfrac{13}{7}$. Разложим числитель и

знаменатель дроби на множители и сократим ее:

$\dfrac{(1-q^3)(1-q^3)(1-q)(1+q)}{(1-q)(1-q)(1-q^3)(1+q^3)}=\dfrac{13}{7}$ или $\dfrac{(1-q^3)(1+q)}{(1-q)(1+q^3)}=\dfrac{13}{7}$ или

$\dfrac{(1-q)(1+q+q^2)(1+q)}{(1-q)(1+q)(1-q+q^2)}=\dfrac{13}{7}$ или $\dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2}=\dfrac{13}{7}$ или $7+7q+7q^2=$
$=13-13q+13q^2$ или $0=6q^2-20q+6$ или $0=3q^2-10q+3$. Корни этого

квадратного уравнения $q_1=3$ и $q_2=\dfrac{1}{3}$.

Для каждого значения q найдем 1-ый член прогрессии b_1 и сумму пяти первых

членов. Из первого уравнения системы выразим $b_1=\dfrac{13(1-q)}{1-q^3}=\dfrac{13}{1+q+q^2}$.

При $q=3$ получаем: $b_1=\dfrac{13}{1+3+3^2}=1$ и $S_5=\dfrac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=\dfrac{242}{2}=121$. Для $q=\dfrac{1}{3}$

имеем: $b_1=\dfrac{13}{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=13:\dfrac{13}{9}=9$ и $S_5=\dfrac{9\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=9\cdot\dfrac{242}{243}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{9\cdot 242\cdot 3}{243\cdot 2}=\dfrac{121}{9}$

Ответ: $q=3$, $b_1=1$, $S_5=121$ и $q=\dfrac{1}{3}$, $b_1=9$, $S_5=\dfrac{121}{9}$.

С–22. Бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q| < 1$

1. При условии, что $|q| < 1$, сумма геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, q – ее знаменатель. а) Найдем знаменатель $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Очевидно, что $|q| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$. Поэтому

$$S = \frac{36}{1-\frac{1}{3}} = 36 : \frac{2}{3} = 36 \cdot \frac{3}{2} = 54.$$

б) $b_1 = \frac{1}{8}$, $b_2 = \frac{1}{4}$, $q = 2$, $q > 1$, значит, это не бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

в) В данной прогрессии $b_1 = 0{,}6$ и $b_2 = -0{,}06$. Поэтому $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-0{,}06}{0{,}6} = -0{,}1 = -\frac{1}{10}$.

Очевидно, что $|q| = \left|-\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10} < 1$. Тогда $S = \frac{0{,}6}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = 0{,}6 : \frac{11}{10} = 0{,}6 \cdot \frac{10}{11} = \frac{6}{11}$.

г) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = 1$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|q| < 1$, $S = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$;

д) $b_1 = 3\sqrt{3}$, $b_2 = 3$, $q = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|q| < 1$, $S = \frac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{9}{\sqrt{3}-1}$;

е) В этом примере $b_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $b_2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$. Найдем $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$ Тогда $|q| = \left|\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2+\sqrt{2}} < 1$.

Находим $S = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} : \left(1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} : \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2-1} = 3\sqrt{2}+4.$$

Ответ: а) 54; б) нет; в) $\frac{6}{11}$; г) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$; д) $\frac{9}{\sqrt{3}-1}$; е) $3\sqrt{2}+4$.

2. а) $S=8$, $q=\frac{1}{2}$, $8=\frac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=2b_1$, $b_1=4$; **б)** $S=54$, $q=-\frac{1}{3}$, $54=\frac{b_1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3b_1}{4}$, $b_1=72$;

в) $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{1}{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{b_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3b_1}{2}$, $b_1=\sqrt{3}$;

г) $S=2\left(\sqrt{2}+1\right)$; $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{b_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $b_1=\sqrt{2}(2-1)=\sqrt{2}$.

3. а) $0{,}8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$;

б) $0,(17)=0{,}171717...=0{,}17+0{,}0017+0{,}000017+...=\frac{0{,}17}{1-0{,}01}=\frac{0{,}17}{0{,}99}=\frac{17}{99}$;

в) $2,(4)=2{,}4444...=2+0{,}4+0{,}04+0{,}004+...=2+\frac{0{,}4}{1-0{,}1}=2+\frac{0{,}4}{0{,}9}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9}$;

г) Запишем данное число в виде суммы обыкновенных дробей $3,(16)=3{,}1616...=3+\frac{16}{100}+\frac{16}{10000}+...$. Видно, что числа $\frac{16}{100}$, $\frac{16}{10000}$, ... образуют бесконечную геом. прогрессию с первым членом $b_1=\frac{16}{100}$ и знаменателем $q=\frac{1}{100}$. Найдем ее сумму: $S=\frac{16}{100}+\frac{16}{1000}+...=\frac{16}{100}:\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{16}{100}:\frac{99}{100}=$ $=\frac{16}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{16}{99}$. Поэтому данное число $3,(16)=3+\frac{16}{99}=\frac{297+16}{99}=\frac{313}{99}$.

Используем и другой способ. Обозначим $x=3,(16)=3{,}16...$ В периоде этой дроби два знака. Поэтому найдем $100x=100\cdot 3,(16)=100\cdot 3{,}1616...=316{,}16...$ Вычислим разность $100x-x=316{,}16...-3{,}16...$ или $99x=313$. Тогда находим $x=\frac{313}{99}$.

д) $0{,}4(5)=0{,}4555...=0{,}4+0{,}05+0{,}005+...=\frac{2}{5}+\frac{0{,}05}{1-0{,}1}=\frac{2}{5}+\frac{0{,}05}{0{,}9}=\frac{2}{5}+\frac{5}{90}=\frac{41}{90}$;

е) $0{,}6(12)=0{,}61212...=0{,}6+0{,}012+0{,}00012+...=\frac{3}{5}+\frac{0{,}012}{1-0{,}01}=$

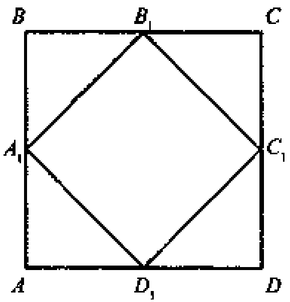
$=\frac{3}{5}+\frac{0{,}012}{0{,}99}=\frac{3}{5}+\frac{12}{990}=\frac{3}{5}+\frac{6}{495}=\frac{3}{5}+\frac{2}{165}=\frac{101}{165}$;

Ответ: а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{17}{99}$; в) $\frac{22}{9}$; г) $\frac{313}{99}$; д) $\frac{41}{90}$; е) $\frac{101}{165}$.

4. $q=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $S=\frac{6\left(\sqrt{30}+5\right)}{5}$. $\frac{6\left(\sqrt{30}+5\right)}{5}=\frac{b_1}{1-\frac{\sqrt{3}}{6}}=\frac{6b_1}{6-\sqrt{3}}$;

$b_1=\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{30}+5\right)}{5}$, $b_3=b_1q^2=\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{30}+5\right)}{5}\cdot\frac{3}{36}=\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{30}+5\right)}{3}$.

5. Прежде всего покажем, что периметры таких квадратов образуют бесконечную геометрическую прогрессию, и найдем ее знаменатель. Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a_n, сторона вписанного квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна a_{n+1}. Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1D_1; $AA_1=AD_1=\frac{a_n}{2}$, т.к. точки A_1 и D_1 – середины сторон AB и AD соответственно, $A_1D_1=a_{n+1}$. Запишем теорему



Пифагора: $A_1D_1^2=AA_1^2+AD_1^2$ или $a_{n+1}^2=\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2$ или $a_{n+1}^2=\frac{a_n^2}{2}$, откуда $a_{n+1}=\frac{a_n}{\sqrt{2}}$. Вычислим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{\sqrt{2}a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Видно, что такое отношение является постоянной величиной (т.е. не зависит от номера n). Следовательно, последовательность длин сторон квадратов образует геометр. прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Так как $|q|=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, то это – бесконечная геометрическая прогрессия.

Рассмотрим теперь последовательность, образованную периметрами квадратов $P_n=4a_n$. Найдем отношение $\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{4a_{n+1}}{4a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, периметры также образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как сторона первого квадрата $a_1=8$ см, $P_1=4\cdot 8=32$ см.

Найдем сумму периметров всех таких квадратов: $S=\frac{P_1}{1-q}=\frac{32}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{32\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{64+32\sqrt{2}}{1}=64+32\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $64+32\sqrt{2}$ (см).

6. Запишем второй член b_2 бесконечной геометрической прогрессии: $b_2 = b_1q$ (по условию он равен 24) или $24 = b_1q$. Сумма прогрессии равна 108, т.е. $\frac{b_1}{1-q} = 108$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases} 24 = b_1q \\ \frac{b_1}{1-q} = 108 \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе: $b_1q : \frac{b_1}{1-q} = \frac{24}{108}$ или $q(1-q) = \frac{2}{9}$ или $0 = 9q^2 - 9q + 2$.

Корни этого квадратного уравнения $q = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 9 \cdot 2}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18}$, т.е. $q = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ и $q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. Оба значения подходят, т.к. $|q| < 1$.

Теперь из первого уравнения найдем $b_1 = \frac{24}{q}$. Для $q = \frac{2}{3}$ получаем $b_1 = 24 : \frac{2}{3} = 36$, для $q = \frac{1}{3}$ находим $b_1 = 24 : \frac{1}{3} = 72$. Итак, условиям задачи удовлетворяют две прогрессии, для которых $b_1 = 36$, $q = \frac{2}{3}$ и $b_1 = 72$, $q = \frac{1}{3}$.

Ответ: $b_1 = 36$, $q = \frac{2}{3}$ и $b_1 = 72$, $q = \frac{1}{3}$.

С–23. Иррациональные уравнения

1. 1) а) $\sqrt{x} = 9$, $x = 81$; б) $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$; в) $\sqrt{x} = 0$, $x = 0$;

2) а) $\sqrt{x-1} = 2$, $x - 1 = 4$, $x = 5$; б) $\sqrt{2x+1} = 0{,}5$, $2x + 1 = \frac{1}{4}$, $2x = -\frac{3}{4}$, $x = -\frac{3}{8}$;

в) $\sqrt{2-x} = 0$, $2 - x = 0$, $x = 2$;

3)а) $\sqrt{x+6} = x$, $x \geq 0$, $x + 6 = x^2$, $x^2 - x - 6 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 6 = 25$, $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$, $x_2 < 0$;

б) Обе части уравнения $\sqrt{3-2x} = x$ возведем в квадрат: $3 - 2x = x^2$ или $0 = x^2 + 2x - 3$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Так как при возведении в квадрат могут появиться посторонние решения, то необходимо проверить полученные корни, подставив их в исходное уравнение.

Для $x = -3$ имеем: $\sqrt{3 - 2(-3)} = -3$ или $\sqrt{9} = -3$ или $3 = -3$ (напомним, что $\sqrt{9}$ по определению арифметического корня число положительное). Видно, что равенство не выполняется. Следовательно, $x = -3$ не является корнем данного уравнения (постороннее решение). Для $x = 1$ получаем: $\sqrt{3 - 2 \cdot 1} = 1$ или $\sqrt{1} = 1$ или $1 = 1$. Имеем верное равенство. Следовательно, $x = 1$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

в) $\sqrt{40-x^2}=3x$, $x\ge 0$, $40-x^2=9x^2$, $10x^2=40$, $x^2=4$, $x=2$.

2. а) $\sqrt{x}=-1$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$; б) $\sqrt{2x}=0$ – есть корни;

в) Уравнение $\sqrt{x-1}=-\sqrt{2}$ не имеет решений, т.к. по определению арифметического корня $\sqrt{x-1}\ge 0$. Число ($-\sqrt{2}$) отрицательное. Разумеется, неотрицательная величина не может равняться отрицательному числу.

г) Рассмотрим подкоренное выражение в уравнении $\sqrt{-5-x^2}=10$. Имеем: $-5-x^2=-(5+x^2)$. При всех значениях x величина $x^2\ge 0$, величина $5+x^2\ge 5$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (–1). Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-(5+x^2)\le -5$. Поэтому корень из отрицательной величины $-(5+x^2)$ не существует. Следовательно, данное иррациональное уравнение корней не имеет.

д) По определению арифметич. корня $\sqrt{x^2+4x}\ge 0$ и $\sqrt{7x}\ge 0$. Сумма этих неотрицательных величин также величина неотрицательная и не может равняться отрицательному числу (–0,5). Поэтому данное уравнение корней не имеет.

Ответ: а) нет корней, б) есть корни, в) нет корней, г) нет корней, д) нет корней.

3. 1) а) Возведем обе части уравнения $\sqrt{3x^2+2x-8}=\sqrt{x^2+x-2}$ в квадрат: $3x^2+2x-8=x^2+x-2$ или $2x^2+x-6=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=-2$ и $x_2=\frac{3}{2}$. Так как при возведении в квадрат могут появиться посторонние решения, то необходимо проверить корни, подставив их в уравнение.

Для $x=-2$ получаем: $\sqrt{3(-2)^2+2(-2)-8}=\sqrt{(-2)^2-2-2}$ или $\sqrt{12-4-8}=$ $=\sqrt{4-2-2}$ или $\sqrt{0}=\sqrt{0}$ или $0=0$. Т. к. равенство выполняется, то $x=-2$ – корень уравнения. Для $x=\frac{3}{2}$ имеем: $\sqrt{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}-8}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-2}$ или $\sqrt{\frac{27}{4}+3-8}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}-2}$ или $\sqrt{\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}$. Это равенство также является верным, поэтому $x=\frac{3}{2}$ тоже корень уравнения.

б) Возведем в квадрат обе части уравнения $\sqrt{5-4x}=2-x$ и получим: $5-4x=4-4x+x^2$ или $x^2=1$, откуда $x=\pm 1$. Проверим корни. Для $x=1$ получаем: $\sqrt{5-4\cdot 1}=2-1$ или $\sqrt{1}=\sqrt{1}$ или $1=1$. Т. к. равенство верное, то $x=1$ – решение данного уравнения. При $x=-1$: $\sqrt{5-4(-1)}=2-(-1)$ или $\sqrt{9}=3$ или $3=3$. Равенство выполняется, поэтому $x=-1$ также корень уравнения.

Ответ: а) $x=-2$ и $x=\frac{3}{2}$, б) $x=1$ и $x=-1$.

2) а) $\sqrt{4x^2+7x}=x-2$, $4x^2+7x=x^2-4x+4$, $3x^2+11x-4=0$,

$D=121+4\cdot3\cdot4=169$, $x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$.

Проверка: $x_1=\frac{1}{3}$, $\sqrt{4\cdot\frac{1}{9}+7\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}-2$ — ложно,

$x_2=-4$; $\sqrt{4\cdot16-7\cdot4}=-4-2$ — ложно;

б) $\sqrt{11x^2+24x-2}=2x+1$, $11x^2+24x-2=4x^2+4x+1$, $7x^2+20x-3=0$,

$D=400+4\cdot7\cdot3=484$, $x_1=\frac{-20+22}{14}=\frac{1}{7}$, $x_2=-3$.

Проверка: $x_1=\frac{1}{7}$, $\sqrt{11\cdot\frac{1}{49}+24\cdot\frac{1}{7}-2}=\frac{2}{7}+1$ — верно,

$x_2=-3$; $\sqrt{11\cdot9-24\cdot3-2}=-6+1$ — ложно.

Ответ: а) нет корней; б) 1/7.

4. а) $\sqrt{2-x}+0{,}01=0$, $\sqrt{2-x}=-0{,}01$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-3}=-2$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$;

в) $\sqrt{-x^2-5}=25$ – нет корней, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$;

г) $\sqrt{2x-x^2-3}=7$, $-x^2+2x-3\ge0$, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$; $x^2-2x+3\le0$,

$D=4-4\cdot3<0$, значит, у неравенства нет решений, следовательно, нет корней и у уравнения.

5. 1) а) Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{x+13}=2+\sqrt{x+1}$ и возведем обе части в квадрат: $x+13=4+4\sqrt{x+1}+x+1$ или $8=4\sqrt{x+1}$ или $2=\sqrt{x+1}$. Вновь возведем обе части этого уравнения в квадрат: $4=x+1$, откуда $x=3$. Проверим этот корень, подставив его в данное уравнение: $\sqrt{3+13}-\sqrt{3+1}=2$ или $\sqrt{16}-\sqrt{4}=2$ или $4-2=2$. Равенство выполняется, следовательно $x=3$ – корень данного уравнения.

б) Возведем обе части уравнения $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2x$ в квадрат: $3x+4+2\sqrt{(3x+4)(x-4)}+x-4=4x$ или $\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0$. Очевидно, такое выражение равно нулю, если подкоренное выражение равно нулю. Получаем уравнение $(3x+4)(x-4)=0$, корни которого $x=-\frac{4}{3}$ и $x=4$. Очевидно, что при $x=-\frac{4}{3}$ величина $\sqrt{x}$ не существует. Поэтому $x=-\frac{4}{3}$ не является решением данного уравнения. Подставим значение $x=4$ в уравнение.

Получаем: $\sqrt{3\cdot4+4}+\sqrt{4-4}=2\sqrt{4}$ или $\sqrt{16}+\sqrt{0}=2\cdot2$ или $4+0+0$. Так как равенство верное, то $x=4$ – корень данного уравнения.

Ответ: а) $x=3$; б) $x=4$.

2) а) $\sqrt{11x^2+24x-2}=2x+1$, $11x^2+24x-2=4x^2+4x+1$, $7x^2+20x-3=0$.

$\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}$, $(4+x)(5-x)=8$, $20+x-x^2=8$, $x^2-x-12=0$,

$D=49$, $x_1=\dfrac{1+7}{2}=4$, $x_2=-3$. Проверка: $x_1=4$, $\sqrt{8}\cdot\sqrt{1}=2\sqrt{2}$ – верно,

$x_2=-3$, $\sqrt{1}\cdot\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ – верно.

б) $\sqrt{8+x}\cdot\sqrt{8-x}=x$, $64-x^2=x^2$, $x^2=32$, $x_{1,2}=\pm4\sqrt{2}$.

Проверка: $x_1=4\sqrt{2}$, $\sqrt{8+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8-4\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ – верно,

$x_2=-4\sqrt{2}$, $\sqrt{8-4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8+4\sqrt{2}}=-4\sqrt{2}$ – ложно.

Ответ: а) -3; 4; б) $4\sqrt{2}$.

3) а) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$, $7-\sqrt{x+1}=4$, $\sqrt{x+1}=3$, $x+1=9$, $x=8$.

Проверка: $\sqrt{7-3}=2$ – верно.

С–24. Четные и нечетные функции

1. 1) а) $f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная;

б) $f(-x)=(-x)^8-3(-x)^4=x^8-3x^4=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная;

в) $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная.

2) а) $g(-x)=-4(-x)^4+(-x)^2=-4x^4+x^2=g(x)$, значит, $g(x)$ – четная;

б) Докажем, что функция $g(x)=(x+2)(x-3)+x$ является четной. Раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $g(x)=x^2-3x+2x-6+x$ или $g(x)=x^2-6$. Найдем значение $g(-x)=(-x)^2-6=(-1)^2\cdot x^2-6=x^2-6$. Видим, что $g(-x)=g(x)$. Тогда по определению функция $g(x)$ – четная.

в) $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)^4-(-x)^2-1}=\dfrac{1}{x^4-x^2-1}=g(x)$, значит, $g(x)$ – четная.

2. 1) а) $f(-x)=(-x)^7=-x^7=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная;

б) $f(-x)=\dfrac{12}{-x}=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная;

в) $f(-x)=(-x)^3+3=-(x^3-x)=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

2) а) $g(-x)=(-x)^9+\dfrac{1}{(-x)^5}=-(x^9+\dfrac{1}{x^5})=-g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

в) $f(-x)=(-x)^3+x=-(x^3+x)=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

2) а) $g(-x)=(-x)^9+\dfrac{1}{(-x)^3}=-(x^9+\dfrac{1}{x^3})=-g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

б) Докажем, что функция $g(x)=(x+2)^2-(x-2)^2$ является нечетной. Используем формулу для разности квадратов чисел: $g(x)=(x+2+x-2)(x+2-(x-2))=$ $=2x\cdot 4=8x$. Найдем значение $g(-x)=8\cdot(-x)=-8x=-(8x)=-g(x)$. Получили, что $g(-x)=-g(x)$. Следовательно, функция по определению является нечетной.

в) $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)^9-x}=-\dfrac{1}{x^9+x}=-g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

3. Воспользуемся определением четной и нечетной функцией.

а) Если $f(x)$ – четная функция, то по определению $f(-x)=f(x)$. Подставим в это соотношение $x=8$ и получим: $f(-8)=f(8)$. Так как $f(-8)=13$, то и $f(8)=13$.

б) Если $f(x)$ – нечетная функция, то по определению $f(-x)=-f(x)$. Подставим в это соотношение $x=8$ и получим: $f(-8)=-f(8)$. Умножим обе части этого равенства на число (-1). Тогда: $(-1)f(-8)=(-1)\cdot(-f(8))$ или $-f(-8)=f(8)$ или $f(8)=-f(-8)$. Так как $f(-8)=13$, то $f(8)=-13$.

Ответ: а) $f(-8)=13$, б) $f(8)=-13$.

4. 1) а) $y(-x)=\dfrac{8}{(-x)^4}=\dfrac{8}{x^4}=y(x)$, значит, y – четная.

б) $y(-x)=-\dfrac{7}{(-x)^9}=\dfrac{7}{x^9}=-y(x)$, значит, y – нечетная.

в) Докажем, что функция $y(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$ не имеет определенной четности. Найдем значение $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^3-1}=\dfrac{1}{(-1)^3x^3-1}=\dfrac{1}{-x^3-1}=-\dfrac{1}{x^3+1}$. Сравнивая величины $y(-x)=-\dfrac{1}{x^3+1}$ и $y(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$, видим, что $y(-x)\neq y(x)$. Поэтому функция $y(x)$ не является четной. Найдем значение $-y(x)=-\dfrac{1}{x^3-1}$. Сравнивая величины $y(-x)=-\dfrac{1}{x^3+1}$ и $-y(x)=-\dfrac{1}{x^3-1}$, видим, что $y(-x)\neq -y(x)$. Поэтому функция $y(x)$ не является нечетной. Следовательно, данная функция не имеет определенной четности.

г) $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^4+1}=\dfrac{1}{x^4+1}=y(x)$, значит, y – четная.

Ответ: а) четная; б) нечетная; в) не имеет определенной четности; г) четная.

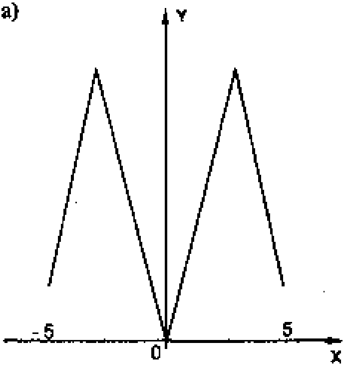
2) а) $y=\frac{x^4}{5x}=\frac{x^3}{5}$, $y(-x)=\frac{(-x)^3}{5}=\frac{-x^3}{5}=-y(x)$, значит, y − нечетная;

б) $y=\frac{7x}{x^5}=\frac{7}{x^4}$, $y(-x)=\frac{7}{(-x)^4}=\frac{7}{x^4}=y(x)$, значит, y − четная;

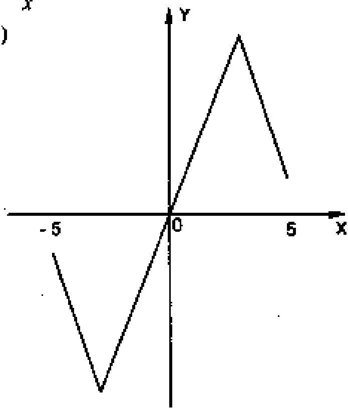
в) $y=\frac{x^3-2x^2}{3x-6}=\frac{x^2(x-2)}{3(x-2)}=\frac{x^2}{3}$, $y(-x)=\frac{(-x)^2}{3}=\frac{x^2}{3}=y(x)$, значит, y − четная;

г) $y=\frac{x+15}{x^2+3x}=\frac{5(x+3)}{x(x+3)}=\frac{5}{x}$, $y(-x)=\frac{5}{-x}=-\frac{5}{x}=-y(x)$, значит, y − нечетная.

5. а)

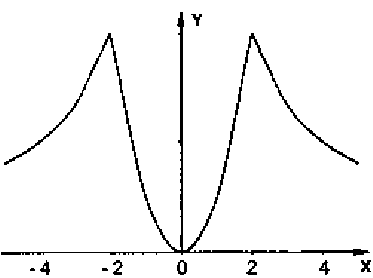


б)

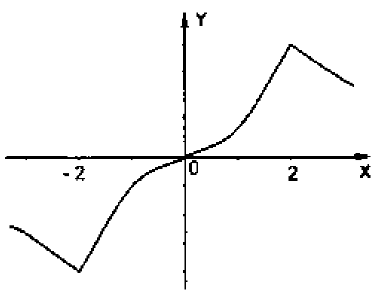


6. $g(x)=\begin{cases}0{,}5x^2, & 0\le x\le 2\\ \frac{4}{x}, & x>2\end{cases}$

а)



б)



7. а) $f(-x)=|-x+5|+|-x-5|=|x-5|+|x+5|=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная;

б) $f(-x)=|-x+5|-|-x-5|=|x-5|-|x+5|=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная;

в) $f(-x)=\dfrac{5(-x)^2}{(-x)^2-4}=\dfrac{5x^2}{x^2-4}=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная;

г) $f(-x)=\dfrac{6(-x)^3}{(-x)^2-9}=-\dfrac{6x^3}{x^2-9}=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная;

д) $f(-x)=\dfrac{2(-x)^4}{(-x-2)^2}=\dfrac{2x^4}{(x+2)}\neq\pm f(x)$, значит, $f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

е) $f(-x)=\dfrac{(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{(-x)^2+4x+3}=\dfrac{-(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)}=-(x+2)$,

$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)}=x-2$, $f(-x)\neq\pm f(x)$, значит,

$f(x)$ – ни четная, ни нечетная.

С–25. Функция $y = x^n$

1. 1) $f(x)=x^{100}$ а) $f(0{,}125)<f(0{,}13)$, т.к. $|0{,}125|<|0{,}13|$;

б) $f(-245)>f(-239)$, т.к. $|-245|>|-239|$; в) $f(-5{,}7)=f(5{,}7)$, т.к. $|-5{,}7|=|5{,}7|$;

г) $f(-12{,}4)>f(10{,}7)$, т.к. $|-12{,}4|>|10{,}7|$;

2) а) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)>f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, т.к. $\left|\dfrac{2}{3}\right|>\left|\dfrac{3}{5}\right|$; б) $f\left(-\dfrac{3}{7}\right)>f\left(-\dfrac{2}{5}\right)$, т.к. $\left|-\dfrac{3}{7}\right|>\left|-\dfrac{2}{5}\right|$;

в) $f(-0{,}325)=f\left(\dfrac{13}{40}\right)$, т.к. $|-0{,}325|=\left|\dfrac{13}{40}\right|$; г) $f\left(-\dfrac{4}{7}\right)>f(0{,}57)$, т.к. $\left|-\dfrac{4}{7}\right|>|0{,}57|$.

2. $g(x)=x^{105}$; 1) а) $g(1{,}023)<g(1{,}13)$; т.к. $1{,}023<1{,}13$;

б) $g(-2{,}7)<g(-2{,}2)$; т.к. $-2{,}7<-2{,}2$; в) $g(-4{,}1)<g(4{,}1)$; т.к. $-4{,}1<4{,}1$;

г) $g(20{,}8)>g(-21{,}3)$; т.к. $20{,}8>-21{,}3$;

2) а) $g\left(\dfrac{4}{7}\right)<g\left(\dfrac{3}{5}\right)$; т.к. $\dfrac{4}{7}<\dfrac{3}{5}$; б) $g\left(-\dfrac{8}{11}\right)<g(-0{,}7)$; т.к. $-\dfrac{8}{11}<-0{,}7$;

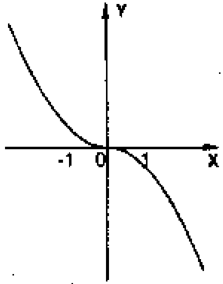
в) $g\left(-\dfrac{5}{7}\right)<g\left(\dfrac{9}{13}\right)$; т.к. $-\dfrac{5}{7}<\dfrac{9}{13}$; г) $g\left(-\dfrac{19}{25}\right)=-g(0{,}76)$; т.к. $-\dfrac{19}{25}=-0{,}76$;

3. $x^n=2500$; а) 2 корня; б) 1 корень.

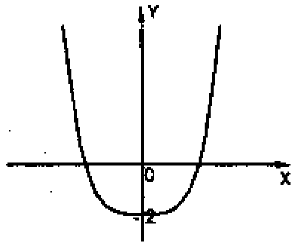
4. а) $x^3=-27$, $x=-3$; б) $x^3=\dfrac{8}{125}$, $x=\dfrac{2}{5}$;

в) $x^4=-81$, нет корней, т.к. $E(x^4)=[0;+\infty)$; г) $x^4=625$, $x=\pm5$.

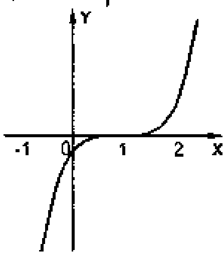
5. а)



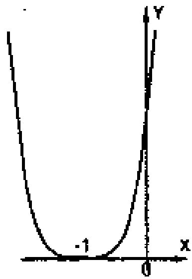
б)



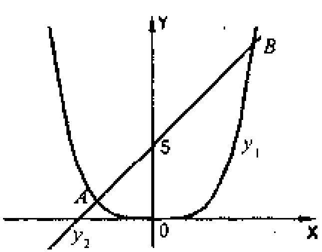
в)



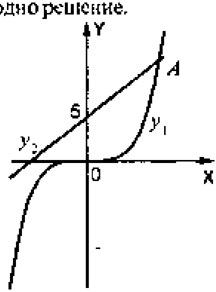
г)



6. а) Для анализа уравнения $x^4 = 32x + 5$ построим графики функций $y_1 = x^4$ и $y_2 = 32x + 5$. Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B. Следовательно, данное уравнение имеет два корня.



б) Для определения числа корней уравнения $x^3 = 32x + 5$ построим графики функций $y_1 = x^3$ и $y_2 = 32x + 5$. Видно, что эти графики пересекаются в одной точке A. Следовательно, уравнение имеет одно решение.



в) $x^3 = 32x + 5$, три корня; г) $x^3 = 0,5x - 8$, один корень.

7. а) $y=x^9$; $548,471=(-2,1)^9$ – ложно, значит, точка A не принадлежит графику; $-10,8973=(-0,973)^9$ – ложно, значит, точка B не принадлежит графику;

б) $y=x^8$; $0,98746=1,2^8$ – ложно, значит, точка C не принадлежит графику; $250,4781=(-2,01)^8$ – ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

С–26. Определение корня *n*–й степени

1. 1) **а)** $\sqrt{0{,}16}=0{,}4$; **б)** $\sqrt[3]{216}=6$; **в)** $\sqrt[4]{0{,}0001}=0{,}1$; **г)** $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$.

2) **а)** $6\sqrt[3]{0{,}125}=6\cdot 0{,}5=3$; **б)** $0{,}7\sqrt[4]{81}=0{,}7\cdot 3=2{,}1$;

в) $4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=4\cdot\frac{3}{2}=6$; **г)** $6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}=6\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-8$.

Ответ: а) 3; б) 2,1; в) 6; г) –8.

2. 1) **а)** Запишем число $\frac{16}{81}$ в виде четвертой степени дроби $\frac{2}{3}$ (т.е. $\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$,

а число $\left(-\frac{1}{8}\right)$ в виде третьей степени дроби $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (т.е. $-\frac{1}{8}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$).

Воспользуемся определением корня *n*–й степени. Тогда получаем:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

б) $\sqrt[5]{0{,}00032}+\sqrt[3]{-0{,}008}=0{,}2-0{,}2=0$;

в) $1{,}5\sqrt[6]{\frac{1}{64}}-\sqrt[4]{\frac{81}{625}}=1{,}5\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$.

2) **а)** $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}}-\sqrt[4]{\frac{81}{625}}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}$; **б)** $\sqrt[3]{0{,}216}-\sqrt[5]{-0{,}01024}=0{,}6+0{,}4=1$;

в) Запишем число $7\frac{19}{32}$ в виде неправильной дроби, $7\frac{19}{32}=\frac{243}{32}$, а эту дробь – в виде пятой степени числа $\frac{3}{2}$, т.е. $\frac{243}{32}=\left(\frac{3}{2}\right)^5$. Число 12,25 также представим в виде неправильно дроби: $12{,}25=12\frac{1}{4}=\frac{49}{4}$, а эту дробь – в виде квадрата числа $\frac{7}{2}$, т.е. $\frac{49}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2$. Тогда по определению корня *n*-й степени получаем:

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}+\sqrt{12{,}25}=\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=\frac{10}{2}=5.$$

3. **а)** $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}=3$;

б) Прежде всего оценим число 23 кубами двух последовательных целых чисел, т.е. $8<23<27$ или $2^3<23<3^3$. Из всех частей этого двойного неравенства извлечем кубический корень. Знак неравенства при этом сохраняется. Получаем: $\sqrt[3]{2^3}<\sqrt[3]{23}<\sqrt[3]{3^3}$ или $2<\sqrt[3]{23}<3$;

в) $0<\sqrt[4]{0{,}8}<1$; **г)** $1<\sqrt[5]{30}<\sqrt[5]{32}=2$.

Ответ: а) 2 и 3; б) 2 и 3; в) 0 и 1; г) 1 и 2.

4. 1) а) $\left(\sqrt{13}\right)^2=13$; **б)** $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3=7$; **в)** $\left(-\sqrt[4]{21}\right)^4=21$; **г)** $-\sqrt[4]{21^4}=-21$; **д)** $\left(-\sqrt[5]{2}\right)^5=-2$.

2) а) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3=8\cdot3=24$; **б)** $\left(-3\sqrt[4]{5}\right)^4=81\cdot5=405$; **в)** $\left(-\sqrt[5]{14}\right)^5=-14$;

г) $-2\sqrt[5]{7^5}=-14$; **д)** $\left(-\sqrt[6]{5}\right)^6=5$.

5. а) $x^3=5,\ x=\sqrt[3]{5}$; **б)** $x^6=17,\ x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{17}$; **в)** $\frac{1}{8}x^2-2=0,\ x^2=16,\ x_{1,2}=\pm4$;

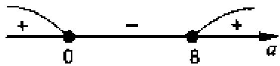
г) $\frac{1}{2}x^5+16=0,\ x^5=-32,\ x=-2$.

Ответ: **а)** $\sqrt[3]{5}$; **б)** $\pm\sqrt[6]{17}$; **в)** ±4; **г)** -2.

6. а) $\sqrt[10]{y-3},\ y-3\ge0,\ y\ge3$;

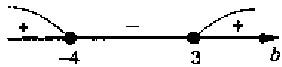
б) Выражение $\sqrt[9]{x+5}$ имеет смысл при любых значениях x, т.к. корень нечетной степени (девятой) можно извлечь из любого числа (отрицательного, нуля, положительного).

в) $\sqrt[4]{a(a-8)},\ a(a-8)\ge0,\ a\in(-\infty;\ 0]\cup[8;\ +\infty)$;



г) Выражение $\sqrt[8]{b^2+b-12}$ имеет смысл при тех значениях переменной b, для которых подкоренное выражение неотрицательно (т.к. корень четной (восьмой) степени можно извлечь только из неотрицательного числа). Получаем неравенство: $b^2+b-12\ge0$. Решая это квадратное неравенство любым способом, например, методом интервалов, найдем: $b\le-4$ и $b\ge3$. Только при таких значениях b данное выражение имеет смысл.

Ответ: $b\in(-\infty;\ -4]\cup[3;\ +\infty)$.



7. а) $x^{10}-31x^5-32=0,\ x^5=y$, тогда $y^2-31y-32=0,\ D=961+4\cdot32=1089$,

$$y_1=\frac{31+33}{2}=32,\ y_2=-1,\ x_1^5=32,\ x_1=2,\ x_2^5=-1,\ x_2=-1.$$

б) $x^8-82x^4+81=0,\ x^4=y$, тогда $y^2-82y+81=0,\ D=6724-4\cdot81=6400$,

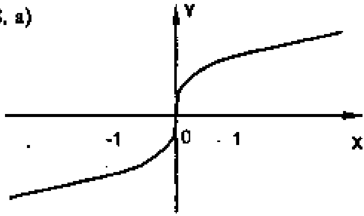
$$y_1=\frac{82+80}{2}=81,\ y_2=1,\ x^4=81,\ x_{1,2}=\pm3,\ x^4=1,\ x_{3,4}=\pm1.$$

в) $x^4+2x^2-15=0,\ x^2=y$, тогда $y^2+2y-15=0,\ D=4+4\cdot15=64$,

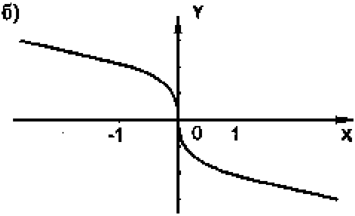
$$y_1=\frac{-2+8}{2}=3,\ y_2=-5,\ x^2=3,\ x_{1,2}=\pm\sqrt{3},\ x^2=-5 \text{ – нет корней.}$$

Ответ: **а)** $x_1=2,\ x_2=-1$; **б)** $x_{1,2}=\pm3,\ x_{3,4}=\pm1$; **в)** $\pm\sqrt{3}$.

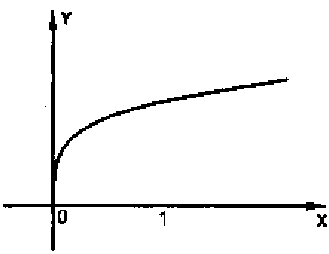
8. а)



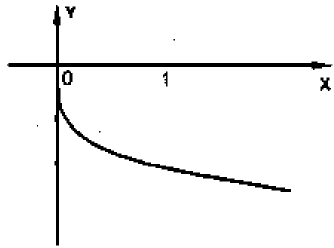
б)



в)



г)



С–27. Свойства арифметического корня

1. а) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Получаем: $\sqrt[4]{16\cdot 81}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{3^4}=2\cdot 3=6$.

б) $\sqrt[3]{2^6\cdot 5^3}=2^2\cdot 5=20$; в) $\sqrt[5]{0,00032\cdot 5^{10}}=0,2\cdot 5^2=5$;

г) Учтем, что корень из отношений двух чисел равен отношению корней из этих чисел. Получаем: $\sqrt[6]{\frac{3^6}{5^{12}}}=\frac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{5^{12}}}=\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{(5^2)^6}}=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$.

Ответ: а) 6; б) 20; в) 5; г) $\frac{3}{25}$.

2. а) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{4\cdot 8}=\sqrt[5]{2^5}=2$; б) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{3^4}=3$;

в) Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел. Имеем: $\sqrt[3]{50}\cdot\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{50\cdot 20}=\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10$.

г) $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}=\frac{3}{5}$; д) $\sqrt[5]{9^5\cdot 2^3}\cdot\sqrt[5]{2^7}=9\cdot\sqrt[5]{2^3\cdot 2^7}=9\cdot\sqrt[5]{2^{10}}=9\cdot 2^2=36$;

е) $\sqrt[8]{3^{13}}\cdot\sqrt[8]{5^8\cdot 3^3}=5\cdot\sqrt[8]{3^{13}\cdot 3^3}=5\cdot\sqrt[8]{3^{16}}=5\cdot 3^2=45$.

Ответ: а) 2; б) 3; в) 10; г) $\frac{3}{5}$; д) 36; е) 45.

3. а) $\sqrt{36x^2}=6x$; б) $\sqrt[3]{27y^6}=3y^2$; в) $\sqrt[5]{32x^5y^{15}}=2xy^3$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{16x^8y^4}{625}}=\dfrac{2x^2y}{5}$.

4. а) $\sqrt{16a}=4\sqrt{a}$; б) $\sqrt{50b^3}=5b\sqrt{2b}$; в) $\sqrt[3]{40\cdot c^5}=\sqrt[3]{8\cdot 5\cdot c^3\cdot c^2}=2c\sqrt[3]{5c^2}$;

г) $\sqrt[4]{243x^7}=\sqrt[4]{81\cdot 3x^4\cdot x^3}=3x\sqrt[4]{3x^3}$.

5. а) $4\sqrt{3x}=\sqrt{16\cdot 3x}=\sqrt{48x}$; б) $2\sqrt[3]{2y}=\sqrt[3]{8\cdot 2y}=\sqrt[3]{16y}$; в) $a\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3a^4}$;

г) $b\sqrt[5]{4b^2}=\sqrt[5]{b^5\cdot 4b^2}=\sqrt[5]{4b^7}$.

6. а) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}=\sqrt{16-7}=3$;

б) Учтем, что произведение корней из чисел равно корню и произведения чисел. Используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}=\sqrt[3]{\left(7-\sqrt{22}\right)\left(7+\sqrt{22}\right)}=\sqrt[3]{7^2-\left(\sqrt{22}\right)^2}=\sqrt[3]{49-22}=\sqrt[3]{3^3}=3;$$

в) $\sqrt[4]{\sqrt{629}-2}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{629}+2}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{629}-2\right)\left(\sqrt{629}+2\right)}=\sqrt[4]{629-4}=5$.

7. а) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ – верно при $a,\ b\ge 0$;

б) $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$ – верно при $a\le 0,\ b\ge 0$;

в) $\sqrt{a^3b^3}=ab\sqrt{ab}$ – верно при $ab\ge 0$, т.е. при $a,\ b\ge 0$ или $a,b\le 0$.

8. а) $\sqrt{8xy^2}=-2y\sqrt{2x}$; б) $\sqrt[4]{-81a^5}=\sqrt[4]{-3^4\cdot a^4\cdot a}=-3a\sqrt[4]{-a}$;

в) $\sqrt[6]{a^7b^7}=\sqrt[6]{a^6b^6ab}=|a||b|\sqrt[6]{ab}=ab\sqrt[6]{ab}$.

9. а) $x\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2x^3}{x^2}}=\sqrt[3]{2x}$; б) $ax\sqrt{\dfrac{7}{ax}}=\sqrt{\dfrac{7a^2x^2}{ax}}=\sqrt{7ax}$;

в) $by\sqrt[4]{\dfrac{3}{b^2y^3}}=\sqrt[4]{\dfrac{3b^4y^4}{b^2y^3}}=\sqrt[4]{3b^2y}$.

10. $8b\sqrt[5]{3b^{-4}}-3\sqrt[5]{96b}-b^2\sqrt[5]{3b^{-9}}=8\sqrt[5]{3b^5\cdot b^{-4}}-3\sqrt[5]{32\cdot 3b}-\sqrt[5]{b^{10}\cdot 3b^{-9}}=$

$=8\sqrt[5]{3b}-3\cdot 2\sqrt[5]{3b}-\sqrt[5]{3b}=\sqrt[5]{3b}$

С–28. Свойства арифметического корня (продолжение)

1. а) $\sqrt{\dfrac{3}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; б) Используем свойство арифметического корня: корень из отношения двух чисел равен отношению корней из этих чисел. Получаем:

$\sqrt[3]{\dfrac{4}{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{5}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^4}}=\dfrac{1}{a}$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{8}{b^{15}}}=\dfrac{\sqrt[5]{8}}{b^3}$.

2. а) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$;

в) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{7\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}}=\dfrac{7}{4}\cdot\sqrt[3]{16}$; г) Запишем данное выражение в виде $\dfrac{4}{\sqrt[4]{125}}=\dfrac{4}{\sqrt[4]{5^3}}$.

Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель на $\sqrt[4]{5}$. Получаем: $\dfrac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{5}}=\dfrac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3\cdot 5}}=\dfrac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^4}}=\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{5}$;

д) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{16}}=\dfrac{6\cdot\sqrt[5]{16^4}}{\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{16^4}}=\dfrac{6\sqrt[5]{65536}}{16}=\dfrac{3}{8}\sqrt[5]{65536}$;

3. а) Используем свойство арифметического корня: $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2\cdot3]{5}=\sqrt[6]{5}$;

б) $\sqrt[4]{\sqrt{2}}=\sqrt[8]{2}$; в) $\sqrt[10]{6^5}=\sqrt{6}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{81}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3]{3}$;

д) Воспользуемся свойством арифметического корня, записав выражение c^3 в виде шестой степени числа $\sqrt{c}$, т.е. $c^3=\left(\sqrt{c}\right)^6$. Тогда получаем: $\sqrt[6]{c^3}=\sqrt[6]{\left(\sqrt{c}\right)^6}=\sqrt{c}$.

е) $\sqrt{a\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt{a^3}}=\sqrt[4]{a^3}$;

ж) Сначала упростим произведение $b\sqrt[4]{b}$, внеся b число под корень: $b\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{b^5}$. Тогда получаем: $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^5}}=\sqrt[3\cdot4]{b^5}=\sqrt[12]{b^5}$.

з) $\sqrt[9]{x^2\sqrt[4]{x}}=\sqrt[9]{\sqrt[4]{x^8\cdot x}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{x^9}}=\sqrt[4]{x}$;

4. а) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[6]{15}$, $\sqrt[6]{4^2}>\sqrt[6]{15}$, $\sqrt[6]{16}>\sqrt[6]{15}$; б) $\sqrt[4]{3}>\sqrt[12]{26}$, $\sqrt[12]{3^3}>\sqrt[12]{26}$, $\sqrt[12]{27}>\sqrt[12]{26}$;

в) Запишем числа $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[9]{8}$ в виде корней одинаковой степени: $\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[9]{8}=\sqrt[9]{2^3}=\sqrt[3]{2}$. Видно, что эти числа равны, т.е. $\sqrt[6]{4}=\sqrt[9]{8}$;

г) $\sqrt[4]{3}<\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$, $\sqrt[12]{3^3}<\sqrt[12]{\left(2\sqrt{7}\right)^2}$, $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{28}$.

5. Запишем данные числа в виде корней одинаковой степени: $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$. Очевидно, что $4<8<9$. Извлечем из всех частей этого неравенства корень шестой степени. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $\sqrt[6]{4}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$, т.е. $\sqrt[3]{4}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.

6. а) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$;

б) Запишем все величины в виде корней шестой степени и используем свойства арифметического корня. Получаем: $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{y^3}}{\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[6]{y^2}}=$

$$=\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-\left(\sqrt[6]{y}\right)^3}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y}+\left(\sqrt[6]{y}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)\left(\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y}+\left(\sqrt[6]{y}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y}+\left(\sqrt[6]{y}\right)^2}=\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}.$$

В числителе дроби была использована формула для разности кубов чисел.

в) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}+\frac{1}{\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}=\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$.

Ответ: а) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; б) $\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$.

7. а) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}=0$, $\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-5\right)=0$, $\sqrt[4]{x_1}=0, x_1=0$, $\sqrt[4]{x_2}-5=0$, $\sqrt[4]{x_2}=5, x_2=625$;

б) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=0$, $\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[6]{x}+2\right)=0$, $\sqrt[6]{x_1}=0$, $x_1=0$, $\sqrt[6]{x_2}=-2$ – нет корней;

в) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0$, $\sqrt[4]{x}=y$, $y^2-5y+6=0$; $D=1$, $y_1=\frac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$,
$\sqrt[4]{x}=3$, $x_1=81$, $\sqrt[4]{x}=2$, $x_2=16$;

г) $\sqrt[5]{x}+3\sqrt[10]{x}-10=0$, $\sqrt[10]{x}=y$, $y^2+3y-10=0$, $D=49$, $y_1=\frac{-3+7}{2}=2$,
$y_2=-5$, $\sqrt[10]{x_1}=2$, $x_1=2^{10}=1024$, $\sqrt[10]{x_2}=-5$ – нет корней.

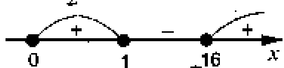
Ответ: а) $x_1=0, x_2=625$; б) $x=0$; в) $x_1=81, x_2=16$; г) $x=1024$.

8. а) $x-2\sqrt{x}>0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2-2y>0, y(y-2)>0$, $y<0$, $y>2$,
$\sqrt{x}<0$ – нет решений, $\sqrt{x}>2$, $x>4$.

Ответ: $(4; +\infty)$.

б) $x+3\sqrt{x}<0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2+3y<0$, $y(y+3)<0$, $-3<y<0$, $-3<\sqrt{x}<0$ – нет решений.
Ответ: нет решений.

в) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2\geq 0$, $\sqrt[4]{x}=y$, $y^2-3y+2\geq 0$, $D=1$, $y_1=\frac{3+1}{2}=2$, $y_2=1$,
$\sqrt[4]{x}\leq 1$, $0\leq x\leq 1$, $\sqrt[4]{x}\geq 2$, $x\geq 16$.



Ответ: $[0; 1]\cup[16; +\infty)$.

г) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)<0$, $\sqrt{x}<0$ – нет решений,
$2<\sqrt{x}<3$, $4<x<9$.

Ответ: $(4; 9)$.

С–29. Степень с целыми показателями

1. а) $7^{-3}=\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}$; б) $3^{-1}=\frac{1}{3}$; в) $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$; г) $2b^{-1}c=\frac{2c}{b}$; д) $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}$.

2. а) $\frac{1}{3^7}=3^{-7}$; б) $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$; в) $\frac{1}{2}=2^{-1}$; г) $\frac{1}{100}=10^{-2}$;

д) $0{,}000001=\frac{1}{1000000}=\frac{1}{10^6}=10^{-6}$;

2) а) $\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{12^3}=12^{-3}$; б) $\frac{1}{a^5b^5}=\frac{1}{(ab)^5}=(ab)^{-5}$;

в) $\dfrac{1}{(x-y)(x+y)}=\left((x-y)(x+y)\right)^{-1}$; г) $\dfrac{1}{(x+y)(x+y)}=\dfrac{1}{(x+y)^2}=(x+y)^{-2}$.

3. а) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-5}=\left(\dfrac{7}{4}\right)^{5}>1$; б) $0{,}127^0=1$; в) $10^{-10}=\dfrac{1}{10^{10}}<1$; г) $\left(2\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{11}{4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{4}{11}\right)^{2}<1$.

4. 1) а) $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$; б) $(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\dfrac{1}{16}$; в) $1^{-7}=\dfrac{1}{1^7}=1$;

г) $(-5{,}3)^0=1$; д) $-13{,}1^0=-1$.

2) а) $(-0{,}2)^{-3}=\dfrac{1}{(-0{,}2)^3}=-\dfrac{1}{0{,}008}$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16$;

в) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-1}=\dfrac{7}{4}$; г) $\left(3\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{10}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{10}\right)^{2}=0{,}3^2=0{,}09$;

3) а) $3^4\cdot3^{-13}\cdot3^{-5}\cdot3^{11}=3^{4-13-5+11}=3^{-3}=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$; б) $8^{-6}:8^{-7}=8^{-6+7}=8$;

в) $(0{,}1)^2:(0{,}1)^{-2}=0{,}1^{2+2}=0{,}0001$;

г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-7}:\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-7+5}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}=\dfrac{9}{4}$.

4) а) $2^{-1}+(-3)^{-3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{(-3)^3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{27}=\dfrac{25}{54}$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}-4^{-2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}-\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{27}{8}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{53}{16}$;

в) $(-0{,}1)^{-4}+(-0{,}2)^{-4}=\dfrac{1}{(-0{,}1)^4}+\dfrac{1}{(-0{,}2)^4}=\dfrac{1}{0{,}0001}+\dfrac{1}{0{,}0016}=10000+625=10625$;

г) $(-0{,}2)^{-2}+(-0{,}5)^{-2}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=5^2+2^2=25+4=29$.

5) а) Учтем определение степени с отрицательным показателем и что при делении степеней с одинаковым основанием показатели степени вычитаются. Тогда имеем: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}-4^{-3}:4^{-5}=1:\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}-4^{-3-(-5)}=1:\dfrac{1^2}{4^2}-4^2=4^2-4^2=0$.

б) $2^{-2}\cdot2^{-4}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=2^{-2+4}-2^4=2^2-2^4=4-16=-12$;

в) $2{,}7\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^4=2{,}7\cdot2\cdot10^{-4+4}=5{,}4\cdot10^0=5{,}4$.

Ответ: а) 0; б) –12; в) 5,4.

5. а) Учтем определение степени с отрицательным показателем, приведем дроби к общему знаменателю и используем формулу для квадрата суммы чисел.

Получаем: $\left(a^{-1}+a^{-2}\right)^2-\dfrac{2}{a^3}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}\right)^2-\dfrac{2}{a^3}=\dfrac{(a+1)^2}{\left(a^2\right)^2}-\dfrac{2}{a^3}=\dfrac{a^2+2a+1}{a^{22}}-\dfrac{2}{a^3}=$

$=\dfrac{a^2+2a+1-2a}{a^4}=\dfrac{a^2+1}{a^4}$.

б) $\left(x^{-2}-x^{-1}\right)^3=\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)^3=\left(\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\right)^3=\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{(1-x)^3}{x^3}=\dfrac{(1-x)^3}{x^6}$;

в) Используем определение степени с отрицательным показателем и приведем дроби к общему знаменателю. Имеем: $\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\left(a^{-2}+b^{-2}\right)=\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right):$

$:\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}:\dfrac{b^2+a^2}{a^2b^2}=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\dfrac{a^2b^2}{b^2+a^2}=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

Ответ: а) $\dfrac{a^2+1}{a^4}$; б) $\dfrac{(1-x)^3}{x^6}$; в) $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

С–30. Степень с целым показателем (продолжение)

1. а) $(x-y)^{-3}=\dfrac{1}{(x-y)^3}$; б) $2(bc)^{-1}=\dfrac{2}{bc}$;

в) Используем понятие степени с отрицательным показателем и приведем выражение к общему знаменателю: $a-a^{-1}=a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}$.

г) $a^{-2}-a^{-1}=\dfrac{1}{a^{-2}}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-a}{a^2}$; д) $a^{-3}-b^{-3}=\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}=\dfrac{b^3-a^3}{a^3b^3}$.

2. а) $\left(a^2\right)^{-2}=a^{2(-2)}=a^{-4}$;

б) Учтем, что при возведении степени числа в степень показатели степени умножаются. Получаем: $\left(cb^{-2}\right)^{-2}=c^{1(-2)}b^{-2(-2)}=c^{-2}b^4=\dfrac{b^4}{c^2}$;

в) $\left(2c^{-3}\right)^3=8c^{-9}$; г) $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^{-1}=\dfrac{b^2}{a^3}$; д) $\left(\dfrac{2x^{-4}}{y^3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{y^3}{2x^{-4}}\right)^2=\left(\dfrac{x^4y^3}{2}\right)^2=\dfrac{x^8y^6}{4}$.

3. а) $16^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-6}=\left(4^2\right)^{-2}\cdot4^6=4^{-4}\cdot4^6=4^2=16$;

б) $9^{-2}\cdot27^2=\left(3^2\right)^{-2}\cdot\left(3^3\right)^2=3^{-4}\cdot3^6=3^2=9$; в) $15^{-3}:5^{-4}=(3\cdot5)^{-3}:5^{-4}=$

$=3^{-3}\cdot5^{-3}:5^{-4}=3^{-3}\cdot5=\dfrac{5}{27}$; г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-7}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^7:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$;

д) $\dfrac{3^{-2}\cdot9^3}{27}=\dfrac{3^{-2}\left(3^2\right)^3}{3^3}=\dfrac{3^{-2}\cdot3^6}{3^3}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$.

4. а) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)a^2b^2=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)a^2b^2=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot a^2b^2=b^2-a^2$;

б) $(x+y)^2\cdot(x+y)^{-1}=x+y$;

в) Используем понятие степени с отрицательным показателем, приведем дроби к общему знаменателю. Имеем: $a^8\left(a^{-2}-a^{-4}\right)\left(a^4+a^5\right)^{-1}=a^8\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^4}\right)\cdot$

$\cdot\frac{1}{a^4+a^5}=a^8\cdot\frac{a^2-1}{a^4}\cdot\frac{1}{a^4(1+a)}=\frac{a^8(a-1)(a+1)}{a^{4+4}(1+a)}=\frac{a^8(a-1)}{a^8}=a-1$.

5. $\left(9x^{-3}-x^{-3}y^{-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}=x^{-3}\left(9-y^2\right)\cdot\frac{1}{x^{-3}}=9-y^2=9-5^2=9-25=-16$.

6. 1) а) $10000^3=\left(10^4\right)^3=10^{12}$; б) $0{,}002^2=\left(2\cdot10^{-3}\right)^2=4\cdot10^{-6}$;

в) $2000^{-2}=\left(2\cdot10^3\right)^{-2}=\frac{1}{4}\cdot10^{-6}=0{,}25\cdot10^{-6}=2{,}5\cdot10^{-1}\cdot10^{-6}=2{,}5\cdot10^{-7}$;

г) $0{,}001^{-3}=\left(10^{-3}\right)^{-3}=10^9$.

2) а) $0{,}000021=2{,}1\cdot10^{-5}$; б) $0{,}0000002081=2{,}081\cdot10^{-7}$;

в) $\frac{1}{64}=0{,}015625=1{,}5625\cdot10^{-2}$; г) $\frac{1}{256}=0{,}00390625=3{,}90625\cdot10^{-3}$;

7. а) $\left(3x^{-2}-2\right)\left(2+3x^{-2}\right)=\left(\frac{3}{x^2}-2\right)\left(\frac{3}{x^2}+2\right)=\left(\frac{3}{x^2}\right)^2-2^2=\frac{9}{x^4}-4$;

б) Учтем понятие степени с отрицательным показателем, приведем дроби к общему знаменателю, используем формулу для разности кубов чисел.

Получаем: $\left(a^{-1}-3\right)\left(a^{-2}+\left(\frac{1}{3}a\right)^{-1}+9\right)=\left(\frac{1}{a}-3\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}+9\right)=\frac{1-3a}{a}\cdot$

$\cdot\frac{1+3a+9a^2}{a^2}=\frac{(1-3a)\left(1+3a+(3a)^2\right)}{a\cdot a^2}=\frac{1^3-(3a)^3}{a^{1+2}}=\frac{1-27a^3}{a^3}$;

в) $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)\left(a^{-2}-(ab)^{-1}+b^{-2}\right)=\left(a^{-1}+b^{-1}\right)\left(\left(a^{-1}\right)^2-a^{-1}b^{-1}+\left(b^{-1}\right)^2\right)=$

$=\left(a^{-1}\right)^3+\left(b^{-1}\right)^3=a^{-3}+b^{-3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}$.

С–31. Определение степени с рациональным показателем

1. 1) а) $5^{1/2}=\sqrt{5}$; $3^{2/3}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$; $10^{-1/4}=\sqrt[4]{10^{-1}}=\sqrt[4]{0{,}1}$; $17^{-1/3}=\sqrt[3]{17^{-1}}$;

б) $x^{0,5}=x^{1/2}=\sqrt{x}$; $y^{1,5}=y^{3/2}=\sqrt{y^3}$; $b^{-0,5}=b^{-1/2}=\sqrt{b^{-1}}$;

2) а) $5x^{1/4}=5\sqrt[4]{x}$; $-3y^{2/3}=-3\sqrt[3]{y^2}$; $(2a)^{0,5}=(2a)^{1/2}=\sqrt{2a}$; $(3b)^{-1,5}=(3b)^{-3/2}=\sqrt{(3b)^{-3}}$;

б) $(a-b)^{3/5} = \sqrt[5]{(a-b)^3}$; $a^{3/4} - b^{3/4} = \sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}$; $ax^{1,5} + b^{1,5} = ax^{3/2} + b^{3/2} = a\sqrt{x^3} + \sqrt{b^3}$;

2. 1) а) $\sqrt{3} = 3^{1/2}$; $\sqrt[3]{5} = 5^{1/3}$; $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$; $\sqrt[5]{9^2} = 9^{2/5}$;

б) $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$; $\sqrt[10]{b^3} = b^{3/10} = b^{0,3}$; $\sqrt[8]{2x} = (2x)^{1/8}$; $\sqrt[6]{8x^3} = (8x^3)^{1/6} = \left((2x)^3\right)^{1/6} = (2x)^{1/2}$;

2) а) $\sqrt[4]{3^{-1}} = 3^{-1/4}$; $\sqrt[7]{27} = \sqrt[7]{3^3} = 3^{3/7}$; $\sqrt[15]{8^2} = 8^{2/15} = (2^3)^{2/15} = 2^{2/5}$;

$\sqrt[20]{25^3} = 25^{3/20} = (5^2)^{3/20} = 5^{0,3}$;

б) $\sqrt[4]{x^{-3}} = x^{-3/4}$; $\sqrt[3]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/3}$; $\sqrt[5]{a^2+b^2} = (a^2+b^2)^{1/5}$.

3. 1) а) $9^{1/2} = (3^2)^{1/2} = 3$; б) $36^{-1/2} = \frac{1}{36^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$; в) $2\cdot 125^{-1/3} = 2\cdot\frac{1}{125^{1/3}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$;

г) $-4\cdot 0,01^{-3/2} = -4\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{-3/2} = -4\cdot 100^{3/2} = -4\cdot(10^2)^{3/2} = -4\cdot 10^3 = -4000$.

Ответ: а) 3; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{2}{5}$; г) –4000.

2) а) $0,125^{-1/3} = (0,5^3)^{-1/3} = 0,5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; б) $0,00032^{0,4} = (0,2^5)^{0,4} = 0,2^2 = 0,04$;

в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-2/3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

г) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{64}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{27}{64}\right)^{1/6} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{1/6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: а) 2; б) 0,04; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. а) $0 \le x \le 0,00032$; $0 \le x^{0,4} \le (0,00032)^{0,4}$; $0 \le x^{0,4} \le 0,04$;

б) $1 \le x \le 243$; $1 \le x^{0,4} \le 243^{0,4}$; $243^{0,4} = (3^5)^{2/5} = 9$; $1 \le x^{0,4} \le 9$;

в) $0,00001 \le x \le 1$; $(0,00001)^{0,4} \le x^{0,4} \le 1$; $0,00001^{0,4} = (10^{-5})^{2/5} = 10^{-2} = 0,01$; $0,01 \le x^{0,4} \le 1$;

г) $243 \le x \le 1024$; $243^{0,4} \le x^{0,4} \le 1024^{0,4}$; $1024^{0,4} = (2^{10})^{2/5} = 2^4 = 16$; $9 \le x^{0,4} \le 16$;

Ответ: а) $0 \le x^{0,4} \le 0,04$; б) $1 \le x^{0,4} \le 9$; в) $0,01 \le x^{0,4} \le 1$; г) $9 \le x^{0,4} \le 16$.

5. а) $y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$; $D(y) = R$;

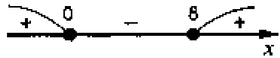
б) $y=x^{-0,6}=x^{-3/5}=\frac{1}{x^{3/5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;

в) $y=(x-8)^{-0,9}=\frac{1}{(x-8)^{0,9}}=\frac{1}{\sqrt[10]{(x-8)^9}}$; $(x-8)^9>0$; $x-8>0$; $x>8$;

значит, $D(y)=(8;\ +\infty)$;

г) $y=(x^2-8x)^{1/4}=\sqrt[4]{x^2-8x}$; $x^2-8x\ge 0$; $x(x-8)\ge 0$;

$D(y)=(-\infty;\ 0]\cup[8;\ +\infty)$.



6. а) $x^{1/2}=3$, $\sqrt{x}=3$, $x=9$; б) $x^{1/5}=2$, $\sqrt[5]{x}=2$, $x=32$; в) $(x-3)^{1/2}=5$, $\sqrt{x-3}=5$,

$x-3=25$, $x=28$; г) $(x+2)^{1/3}=0$, $x+2=0$, $x=-2$; д) $(x^2-9)^{0,5}=\sqrt{7}$,

$\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}$, $x^2-9=7$, $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm 4$; е) $(x^2-6x)^{1/3}=3$, $\sqrt[3]{x^2-6x}=3$,

$x^2-6x=27$, $x^2-6x-27=0$, $D=36+4\cdot 27=144$, $x_1=\frac{6+12}{2}=9$; $x_2=-3$;

С–32. Свойства степени с рациональным показателем

1. 1) а) $x^{1/2}\cdot x^{1/3}=x^{1/2+1/3}=x^{5/6}$; б) $\left(x^{1/2}\right)^{1/3}=x^{1/6}$; в) $x^{1/2}:x^{1/3}=x^{1/2-1/3}=x^{1/6}$;

г) $y:y^{2/3}=y^{1-2/3}=y^{1/3}$; д) $x^{1/2}x^{1/6}x^{-1/3}=x^{1/2+1/6-1/3}=x^{1/3}$.

Ответ: а) $x^{5/6}$; б) $x^{1/6}$; в) $x^{1/6}$; г) $y^{1/3}$; д) $x^{1/3}$.

2) а) $\left(y^{0,7}\right)^{0,5}\cdot y^{0,15}=y^{0,35}\cdot y^{0,15}=y^{0,5}$;

б) При повторном возведении числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются. Получаем: $\left(y^{\frac{5}{7}}\right)^{1,4}\cdot\left(y^{-\frac{3}{8}}\right)^{2,4}=y^{\frac{5\cdot 1,4}{7}}\cdot y^{\frac{-3\cdot 2,4}{8}}=y^{\frac{7}{7}}\cdot y^{\frac{-7,2}{8}}=$

$=y^1\cdot y^{-0,9}=y^{1-0,9}=y^{0,1}$.

в) $\frac{y^{5/6}\cdot y^{2/3}}{y^{-0,5}}=\frac{y^{3/2}}{y^{-1/2}}=y^2$;

г) При умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются, при делении степеней с одинаковым основанием показатели степеней вычитаются. Имеем: $\frac{y^{3,5}y^{-2,7}}{y^{2,9}y^{-3,1}}=\frac{y^{3,5-(2,7)}}{y^{2,9+(-3,1)}}=\frac{y^{0,8}}{y^{-0,2}}=y^{0,8-(-0,2)}=y$.

Ответ: а) $y^{0,5}$; б) $y^{0,1}$; в) y^2; г) y.

2. 1) а) $\left(2^{0.5}\right)^{-0.5}\cdot(0{,}5)^{-1.25}=2^{-0.25}\cdot\left(2^{-1}\right)^{-1.25}=2^{-0.25}\cdot 2^{1.25}=2;$

б) $\left(3^{-1/4}\right)^{1.8}\cdot 9^{0.1}=3^{-0.2}\cdot\left(3^{2}\right)^{0.1}=3^{-0.2}\cdot 3^{0.2}=1;$

2) а) $16^{0.125}\cdot 8^{-5/6}\cdot 4^{2.5}=\left(2^{4}\right)^{0.125}\cdot\left(2^{3}\right)^{-5/6}\cdot\left(2^{2}\right)^{2.5}=2^{0.5}\cdot 2^{-5/2}\cdot 2^{5}=2^{3}=8;$

б) $\dfrac{81^{0.4}\cdot 3^{0.5}}{9^{0.3}\cdot 27^{1/6}}=\dfrac{\left(3^{4}\right)^{0.4}\cdot 3^{0.5}}{\left(3^{2}\right)^{0.3}\cdot\left(3^{3}\right)^{1/6}}=\dfrac{3^{1.6}\cdot 3^{0.5}}{3^{0.6}\cdot 3^{0.5}}=3.$

Ответ: 1) а) 2; б) 1; 2) а) 8; б) 3.

3. $a^{4}=\left(a^{2}\right)^{2}$; $a^{-2}=\dfrac{1}{a^{2}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2}$; $a^{3}=\left(a^{3/2}\right)^{2}$; $a=\left(\sqrt{a}\right)^{2}$; $a^{1/2}=\left(a^{1/4}\right)^{2}$;

$a^{1/3}=\left(a^{1/6}\right)^{2}$; $a^{3/7}=\left(a^{3/14}\right)^{2}$.

4. $b^{6}=\left(b^{2}\right)^{3}$; $b^{-9}=\left(b^{-3}\right)^{3}$; $b^{1/2}=\left(b^{1/6}\right)^{3}$; $b^{1/3}=\left(b^{1/9}\right)^{3}$; $b^{2/5}=\left(b^{2/15}\right)^{3}$.

5. а) Раскроем скобки. Учтем, что при умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются. Получаем:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}-3\right)\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2x..$$

б) $\left(x^{0.5}-y^{0.5}\right)\left(x^{0.5}+y^{0.5}\right)=\left(x^{0.5}\right)^{2}-\left(y^{0.5}\right)^{2}=x-y;$

в) $\left(1-x^{0.5}\right)^{2}+2x^{0.5}=1-2x^{0.5}+x+2x^{0.5}=1+x;$

г) Используем формулу для разности кубов чисел. Учтем, что при возведении степени числа в степень показатели степеней перемножаются. Имеем:

$$\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+1\right)=\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{2}+y^{\frac{1}{3}}+1\right)=\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-1^{3}=y^{1}-1=y-1.$$

Ответ: а) $2x$; б) $x-y$; в) $1+x$; г) $y-1$.

6. а) $x=a^{0.25}$, $y=a^{-0.25}$; $x\cdot y=a^{0.25}\cdot a^{-0.25}=a^{0}=1$, т.е. $xy=1$;

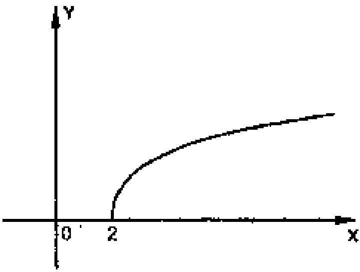
б) $x=a^{1/3}$, $y=a^{1/6}$; $x\cdot y^{-2}=a^{1/3}\cdot\left(a^{1/6}\right)^{-2}=a^{1/3}\cdot a^{-1/3}=1$, т.е. $xy^{-2}=1$, $x=y^{2}$;

в) $x=a^{1/4}$, $y=\sqrt{1-a^{0.5}}$; $x^{2}+y^{2}=\left(a^{1/4}\right)^{2}+\left(\sqrt{1-a^{0.5}}\right)^{2}=a^{0.5}+1-a^{0.5}=1$, т.е. $x^{2}+y^{2}=1$;

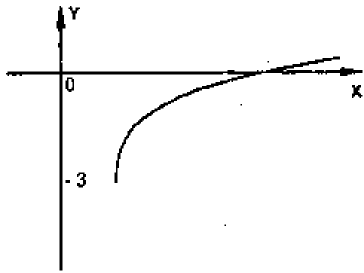
г) Чтобы найти зависимость между x и y возведем выражения $x=\sqrt{a}$ и $y=\sqrt{a-3}$ в квадрат. Получаем: $x^{2}=a$ и $y^{2}=a-3$. Вычтем из первого равенства второе: $x^2 - y^2 = a - (a-3)$ или $x^2 - y^2 = 3$. При этом $a - 3 \geq 0$, т.е. $a \geq 3$.

Ответ: **а)** $xy = 1$; **б)** $x = y^2$; **в)** $x^2 + y^2 = 1$; **г)** $x^2 - y^2 = 3$.

7. а)



б)



С–33. Преобразования выражений, содержащих степени с дробными показателями

1. 1) а) $x + 3x^{1/2} = x^{1/2}\left(x^{1/2} + 3\right)$; **б)** $y^{1/2} - 2y^{1/4} = y^{1/4}\left(y^{1/4} - 2\right)$;

в) $\left(a^{1/2}\right)^2 - 4 = \left(a^{1/2} - 2\right)\left(a^{1/2} + 2\right)$; **г)** $\left(b^{1/2}\right)^3 + 8 = \left(b^{1/2} + 2\right)\left(b - 2b^{1/2} + 4\right)$;

д) $x^{2/3} - y^{2/3} = \left(x^{1/3} - y^{1/3}\right)\left(x^{1/3} + y^{1/3}\right)$;

е) $a^{3/2} - b^{3/2} = \left(a^{1/2}\right)^3 - \left(b^{1/2}\right)^3 = \left(a^{1/2} - b^{1/2}\right)\left(a + a^{1/2}b^{1/2} + b\right)$;

2) а) $a^{1/2} - 2a^{1/4} = a^{1/4}\left(a^{1/4} - 2\right)$; **б)** $b^{3/4} + b^{1/2} = b^{1/2}\left(b^{1/4} + 1\right)$;

в) $ax^{1/6} - ax^{1/3} = ax^{1/6}\left(1 - x^{1/6}\right)$; **г)** $y^{2/7} + y^{1/7} = y^{1/7}\left(y^{1/7} + 1\right)$;

д) $a - 4 = \left(\sqrt{a} - 2\right)\left(\sqrt{a} + 2\right)$; **е)** $b + 27 = \left(b^{1/3}\right)^3 + 3^3 = \left(b^{1/3} + 3\right)\left(b^{2/3} - 3b^{1/3} + 9\right)$.

2. 1) а) $\dfrac{x + 7x^{1/2}}{x^{1/2} + 7} = \dfrac{x^{1/2}\left(x^{1/2} + 7\right)}{x^{1/2} + 7} = x^{1/2}$; **б)** $\dfrac{3y^{1/4}}{y^{1/4} - 5y^{1/4}} = \dfrac{3y^{1/4}}{y^{1/4}\left(y^{1/4} - 5\right)} = \dfrac{3}{y^{1/4} - 5}$;

в) $\dfrac{a - b}{a^{0.5} + b^{0.5}} = \dfrac{\left(a^{0.5} - b^{0.5}\right)\left(a^{0.5} + b^{0.5}\right)}{a^{0.5} + b^{0.5}} = a^{0.5} - b^{0.5}$;

г) Вынесем в числителе дроби за скобки ab, в знаменателе – $a^{0.5}b^{0.5}$ и сократим

дробь: $\dfrac{a^{1.5}b - ab^{1.5}}{ab^{0.5} - a^{0.5}b} = \dfrac{ab\left(a^{0.5} - b^{0.5}\right)}{a^{0.5}b^{0.5}\left(a^{0.5} - b^{0.5}\right)} = \dfrac{ab}{a^{0.5}b^{0.5}} = a^{0.5}b^{0.5} = (ab)^{0.5}$.

д) $\dfrac{x^{3/2}-c^{3/2}}{x+x^{1/2}\cdot c^{1/2}+c}=\dfrac{\left(x^{1/2}-c^{1/2}\right)\left(x+x^{1/2}\cdot c^{1/2}+c\right)}{x+x^{1/2}\cdot c^{1/2}+c}=x^{1/2}-c^{1/2};$

е) $\dfrac{m+n}{m^{1/3}+n^{1/3}}=\dfrac{\left(m^{1/3}+n^{1/3}\right)\left(m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3}\right)}{m^{1/3}+n^{1/3}}=m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3}.$

Ответ: а) $x^{1/2}$ б) $\dfrac{3}{y^{1/4}-5}$ в) $a^{0,5}-b^{0,5}$ г) $\dfrac{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}}$ д) $x^{1/2}-c^{1/2}$ е) $m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3}$

2) а) $\dfrac{a-2a^{1/2}}{a^{3/2}-2a}=\dfrac{a^{1/2}\left(a^{1/2}-2\right)}{a\left(a^{1/2}-2\right)}=a^{1/2};$ б) $\dfrac{b^{5/6}-b^{1/3}}{b^{5/6}+b^{1/3}}=\dfrac{b^{1/3}\left(b^{1/2}-1\right)}{b^{1/3}\left(b^{1/2}+1\right)}=\dfrac{b^{1/2}-1}{b^{1/2}+1};$

в) $\dfrac{4x-y}{2x+x^{0,5}y^{0,5}}=\dfrac{\left(2x^{0,5}-y^{0,5}\right)\left(2x^{0,5}+y^{0,5}\right)}{x^{0,5}\left(2x^{0,5}+y^{0,5}\right)}=\dfrac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}};$

г) $\dfrac{m^{2/3}-n^{2/3}}{m-m^{2/3}n^{1/3}}=\dfrac{\left(m^{1/3}-n^{1/3}\right)\left(m^{1/3}+n^{1/3}\right)}{m^{2/3}\left(m^{1/3}-n^{1/3}\right)}=\dfrac{\left(m^{1/3}+n^{1/3}\right)}{m^{2/3}};$

д) $\dfrac{x^{3/2}-y^{3/2}}{x^{3/2}y^{1/2}+xy+x^{1/2}y^{3/2}}=\dfrac{\left(x^{1/2}-y^{1/2}\right)\left(x+x^{1/2}y^{1/2}+y\right)}{x^{1/2}y^{1/2}\left(x+x^{1/2}y^{1/2}+y\right)}=\dfrac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}};$

е) $\dfrac{a^{0,3}+b^{0,3}}{a^{0,1}+b^{0,1}}=\dfrac{\left(a^{0,1}+b^{0,1}\right)\left(a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2}\right)}{a^{0,1}+b^{0,1}}=a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2}.$

Ответ: а) $a^{1/2}$; б) $\dfrac{b^{1/2}-1}{b^{1/2}+1}$; в) $\dfrac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}}$; г) $\dfrac{\left(m^{1/3}+n^{1/3}\right)}{m^{2/3}}$;) $\dfrac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}}$;

е) $a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2}$.

3. $\dfrac{x-9x^{1/2}}{x^{3/4}+3x^{1/2}}=\dfrac{x^{1/2}\left(x^{1/2}-9\right)}{x^{1/2}\left(x^{1/4}+3\right)}=\dfrac{x^{1/2}\left(x^{1/4}-3\right)\left(x^{1/4}+3\right)}{x^{1/2}\left(x^{1/4}+3\right)}=x^{1/4}-3=$

$=\left(20,25\right)^{1/4}-3=\sqrt{4,5}-3=3\sqrt{0,5}-3.$

Ответ: $3\sqrt{0,5}-3$.

4. а) $\dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5}-5}-\dfrac{5}{x^{0,5}+5}+\dfrac{x}{25-x}=\dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5}-5}-\dfrac{5}{x^{0,5}+5}-\dfrac{x}{\left(x^{0,5}-5\right)\left(x^{0,5}+5\right)}=$

$=\dfrac{x^{0,5}\left(x^{0,5}+5\right)-5\left(x^{0,5}-5\right)-x}{x-25}=\dfrac{x+5x^{0,5}-5x^{0,5}+25-x}{x-25}=\dfrac{25}{x-25};$

б) Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и учтем действия со

степенями: $\left(\frac{5a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-5b^{0,5}}+\frac{5a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+5b^{0,5}}\right)\cdot\frac{a-25b}{a+b}=$

$$=\frac{\left(5a^{0,5}+b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+5b^{0,5}\right)+\left(5a^{0,5}-b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}-5b^{0,5}\right)}{\left(a^{0,5}-5b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+5b^{0,5}\right)}\cdot\frac{a-25b}{a+b}=$$

$$=\frac{10a+10b}{a-25b}\cdot\frac{a-25b}{a+b}=\frac{10(a+b)}{a+b}=10.$$

Ответ: а) $\frac{25}{x-25}$; б) 10.

С–34. Радианная мера угла

1. а) $\frac{\pi}{4}=\frac{180°}{4}=45°$; б) $\frac{\pi}{10}=\frac{180°}{10}=18°$; в) $\frac{3}{4}\pi=3\cdot\frac{\pi}{4}=3\cdot45°=135°$;

г) $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\cdot180°=72°$; д) $3\pi=3\cdot180°=540°$.

Ответ: а) 45°; б) 18°; в) 135°; г) 72°; д) 540°.

2. а) $25°=25\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5}{36}\pi$; б) $40°=40\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$; в) $150°=150\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$;

г) $90°=90\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$; д) $18°=18\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10}$.

Ответ: а) $\frac{5}{36}\pi$; б) $\frac{2}{9}\pi$; в) $\frac{5}{6}\pi$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{10}$.

3.

Градусы	60°	45°	105°	120°	135°	36°	144°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

$105°=105\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{12}\pi$; $\frac{\pi}{5}=\frac{180°}{5}=36°$;

$70°=70\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{9}=\frac{7}{9}\cdot180°=140°$.

Градусы	70°	140°	540°
Радианы	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$	3π

4. а) $\pi\approx3,1$; б) $\frac{\pi}{2}\approx1,6$; в) $\frac{3}{4}\pi\approx2,4$; г) $\frac{3\pi}{2}\approx4,7$; д) $2\pi\approx6,3$.

5. а) $\frac{\pi}{2}>1,5,\ 1,6>1,5$; б) $\pi<3\frac{1}{3},\ 3,14<3,33$; в) $-\frac{\pi}{2}>-2,\ -1,6>-2$.

6. Длина окружности равна $2\pi R\approx 2\cdot 3,14\cdot 2,6\approx 16,33$ (см). За 20 мин конец стрелки пройдет одну треть окружности, т.е. $\frac{1}{3}\cdot 16,33\approx 5,44$ (см).

Ответ: 5,44 см.

7. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$ и $4x$ – углы треугольника. Их сумма равна π, т.е. $2x+3x+4x=\pi$, $9x=\pi$, $x=\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$ – I угол треугольника, $3\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}$ – II угол, $\frac{4\pi}{9}$ – III угол.

Ответ: $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$.

8. Пусть x см – радиус, тогда πx^2 см^2 – площадь круга, $\frac{\pi x^2}{2\pi}\cdot 2$ см^2 – площадь сектора или 7,29 см^2. Получаем уравнение: $\frac{\pi x^2\cdot 2}{2\pi}=7,29$; $x^2=7,29$ $x=2,7$; 2,7 см – радиус.

Ответ: 2,7.

9. $36^\circ=\frac{\pi}{5}$ – I угол; $\frac{\pi-\frac{\pi}{5}}{2}=\frac{4\pi}{2\cdot 5}=\frac{2\pi}{5}$ – II и III углы.

Ответ: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$.

10. Внутренний угол правильного n–угольника равен $\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$.

Получаем: $\frac{4\pi}{5}=\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi$; $\frac{4}{5}=1-\frac{2}{n}$; $\frac{2}{n}=\frac{1}{5}$; $n=10$.

Ответ: 10.

С–35 Поворот точки вокруг начала координат

1. 1) а) (0; 1); б) (–1; 0); в) (0; –1); г) (1; 0); д) (–1; 0).
2) а) (0; –1); б) (–1; 0); в) (0; 1); г) (1; 0); д) (0; 1).

2. а) II; б) I; в) III; г) I; д) III.

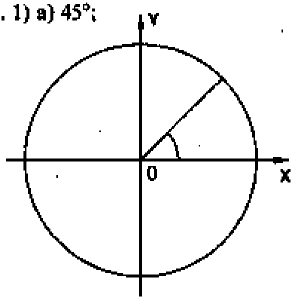
3. а) $\pi+2\pi n$; $n\in z$; б) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$; $n\in z$. в) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $n\in z$.

4. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (1; 0).

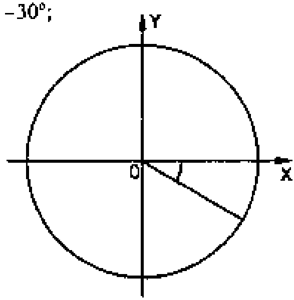
5. а) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$; $n\in z$; б) $\frac{5\pi}{3}+2\pi n$; $n\in z$.

С–36. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

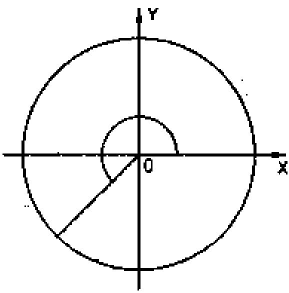
1. 1) а) 45°;



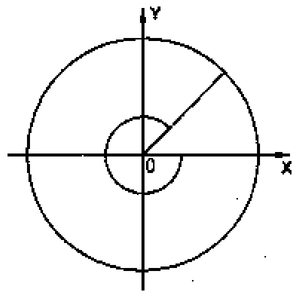
б) –30°;



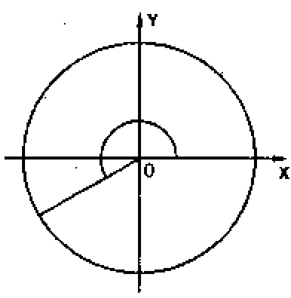
в) 225°;



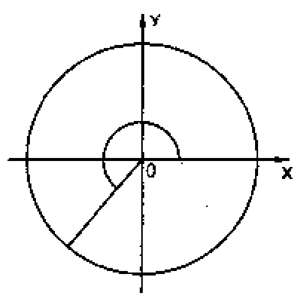
г) -315°.



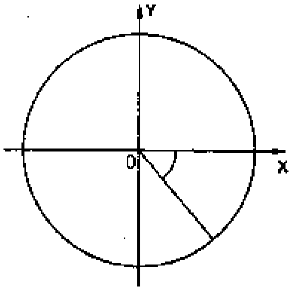
2) а) 210°;

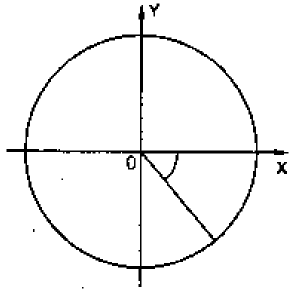


б) 590°;



в) $-50°$; г) $-410°$.





2. 1) а) I; б) III; в) III; г) II.
2) а) IV; б) I; в) I; г) IV.

3.

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$tg\alpha$	0	–	0	–	0
$ctg\alpha$	–	0	–	0	–

4. 1) а) $\beta = 360°$; б) $\beta = 450°$; в) $\beta = 630°$;

2) а) $\beta = 450°$; б) $\beta = 360°$; в) $\beta = 540°$;

5. а) $-1 \le \sin\alpha \le 1$; $3-1 \le 3+\sin\alpha \le 3+1$; $2 \le 3+\sin\alpha \le 4$;

б) $-1 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le -\sin\alpha \le 1$; $2 \le 3-\sin\alpha \le 4$;

в) $-1 \le \cos\alpha \le 1$; $5-1 \le 5+\cos\alpha \le 5+1$; $4 \le 5+\cos\alpha \le 6$;

г) $-1 \le \cos\alpha \le 1$; $-1 \le -\cos\alpha \le 1$; $4 \le 5-\cos\alpha \le 6$.

6. а) нет, т.к. $-1 \le \sin\alpha \le 1$; а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$; б) нет, т.к. $-1 \le \cos\alpha \le 1$; а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

в) да; г) да.

7. 1) а) $\cos 0° + 3\sin 90° = 1 + 3 = 4$; б) $\sin 270° - 2\cos 180° = -1 - 2\cdot(-1) = 1$;

в) $6tg180° + 3ctg90° = 6\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$; г) $1 + ctg270° - 5tg360° = 1 + 0 - 5\cdot 0 = 1$;

2) а) $\sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; б) $\sin 60° + \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

в) $\sin 45° + \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; г) $tg 30° + ctg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8. а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in z$; б) $\sin x = -1$, $x = \frac{3\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

в) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$; г) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

д) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$; е) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in z$;

9. а) $\sin^2 60° + \cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1{,}5$;

б) $tg^2 45° + ctg^2 45° = 1^2 + 1^2 = 2$; в) $\sin 45° \cdot \cos 60° \cdot ctg 90° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

10. $0° < \beta < 90°$, $\cos\beta > 0$, $\cos\beta < 2$, значит, $\cos^2\beta < 2\cos\beta$.

11. $\alpha = 90°$; а) $\sin 3\alpha = \sin 270° = -1$; б) $3\sin\alpha = 3\sin 90° = 3$;

в) $\cos 2\alpha = \cos 180° = -1$; $2\cos\alpha = 2\cos 90° = 0$.

С–37.Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

1. а) $\sin 36° > 0$, $\sin 117° > 0$, $\sin 197° < 0$, $\sin 311° < 0$;

б) $\cos 16° > 0$, $\cos 108° < 0$, $\cos 288° > 0$, $\cos 304° > 0$;

в) $tg 5° > 0$, $tg 91° < 0$, $tg 183° > 0$, $tg 303° < 0$;

г) $ctg 77° > 0$, $ctg 97° < 0$, $ctg 209° > 0$, $ctg 281° < 0$.

2. 1) а) $\sin 185° < 0$; б) $tg 116° < 0$; в) $\cos 210° < 0$; г) $ctg 310° < 0$;

2) а) $\sin 510° > 0$; б) $\cos 388° > 0$; в) $tg 456° < 0$; г) $ctg 373° > 0$;

3) а) $\sin(-16°) < 0$; б) $\cos(-88°) > 0$; в) $tg(-110°) > 0$; г) $ctg(-93°) > 0$.

3.

α	135°	216°	400°	460°	–16°	–126°
$\sin\alpha$	+	–	+	+	–	–
$\cos\alpha$	–	–	+	–	+	–
$tg\alpha$	–	+	+	–	–	+
$ctg\alpha$	–	+	+	–	–	+

4. а) $\sin 92° \cdot \cos 200° =$ «+»·«–» < 0; б) $\sin 143° \cdot \cos 311° =$ «+»·«+» > 0;

в) $\frac{sin167^\circ}{cos267^\circ}=\frac{«+»}{«-»}<0$; г) $\frac{cos131^\circ}{sin88^\circ}=\frac{«-»}{«+»}<0$;

д) $sin116^\circ\cdot cos116^\circ\cdot tg197^\circ=«+»\cdot«-»\cdot«+»<0$;

е) $cos225^\circ\cdot sin83^\circ\cdot tg100^\circ=«-»\cdot«+»\cdot«-»>0$.

5. а) $sin\alpha<0$ и $tg\alpha>0$, III или IV, I или III, значит, III четверть;

б) $cos\alpha>0$ и $tg\alpha>0$, I или IV, I или III, значит, I четверть.

6. 1) а) $sin(-60^\circ)=-sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $cos(-90^\circ)=cos90^\circ=0$;

в) $tg(-45^\circ)=-tg45^\circ=-1$; г) $ctg(-30^\circ)=-ctg30^\circ=-\sqrt{3}$;

2) а) $sin(-30^\circ)+tg45^\circ=-\frac{1}{2}+1=0,5$; б) $sin(-90^\circ)-cos0^\circ=-1-1=-2$;

в) $cos(-180^\circ)sin(-30^\circ)=-cos180^\circ sin30^\circ=-(-1)\cdot\frac{1}{2}=0,5$;

г) $sin(-60^\circ)tg(-30^\circ)=sin60^\circ tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0,5$.

7. а) $sin390^\circ=sin(360^\circ+30^\circ)=sin30^\circ=0,5$;

б) $cos405^\circ=cos(360^\circ+45^\circ)=cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $tg420^\circ=tg(360^\circ+60^\circ)=tg60^\circ=\sqrt{3}$;

г) $ctg750^\circ=ctg(720^\circ+30^\circ)=ctg30^\circ=\sqrt{3}$; д) $sin780^\circ=sin(720^\circ+60^\circ)=sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

е) $cos390^\circ=cos(360^\circ+30^\circ)=cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; а) $sin\alpha\cdot cos\alpha=«+»\cdot«-»<0$; б) $\frac{sin^2\alpha}{cos\alpha}=\frac{«+»}{«-»}<0$;

$\frac{tg^3\alpha}{sin\alpha}=\frac{«-»}{«+»}<0$; г) $sin\alpha-cos\alpha=«+»-«-»>0$.

9. $sin\alpha=a$; а) $1-sin\alpha=1-a$; б) $1-sin(-\alpha)=1+sin\alpha=1+a$;

в) $sin(\alpha+360^\circ)=sin\alpha=a$; г) $sin(\alpha-360^\circ)=-sin(360^\circ-\alpha)=sin\alpha=a$;

д) $sin(720^\circ+\alpha)=sin\alpha=a$; е) $sin(720^\circ-\alpha)=-sin\alpha=-a$.

10. $sin\alpha+cos\alpha=-1,01$; III четверти.

11. $\beta\in$ II четверти: а) $|cos\beta|+cos\beta=-cos\beta+cos\beta=0$; б) $|sin\beta|-sin\beta=sin\beta-sin\beta=0$;

в) $|tg\beta|+tg\beta=-tg\beta+tg\beta=0$; г) $|sin\beta|-|cos\beta|=sin\beta+cos\beta$.

С–38. Вычисление значений тригонометрических функций

1. 1) а) $2\sin 30° + 6\cos 60° - 3ctg 30° + 9tg 30° =$

$= 2\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} - 3\sqrt{3} + 9\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + 3 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4;$

б) $\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) - 4\cos(-60°) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -1 - 2 = -3;$

в) $4\sin(-30°) + tg(-45°)ctg(-45°) - 3\cos 90° = -4\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1 - 3\cdot 0 = -2 + 1 = -1;$

2) а) $3\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{4} + 4ctg\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} - 1 + 4\cdot 1 = 1{,}5 - 1 - 1 + 4 = 3{,}5;$

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin\pi = -1 - 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot 0 = -1 - 3\sqrt{2};$

в) $2tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot 1\cdot 1 - 3 + 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 1.$

2. а) $\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1;\quad \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1;\quad \sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1;$

$\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1;$

б) $\sin 0 + 2\cos 0 = 0 + 2\cdot 1 = 2;\quad \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$

$\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\frac{\pi}{2} = 0 + 2\cdot 0 = 0;\quad \sin 2\pi + 2\cos\pi = 0 + 2\cdot(-1) = -2;$

в) $2\sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1;\quad 2\sin\frac{\pi}{6} - \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} - 0 = 1;$

$2\sin\frac{\pi}{3} - \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = \sqrt{3} + 1;\quad 2\sin\pi - \cos 3\pi = 2\cdot 0 - (-1) = 1;$

г) $3\sin 0 - 2\cos 0 = 3\cdot 0 - 2\cdot 1 = -2;\quad 3\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 0 = 1{,}5;$

$3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot(-1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2;\ 3\sin\frac{\pi}{2} - 2\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot 1 - 2\cdot 0 = 3.$

3. 1) а) $\sin^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0;$

б) $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$;

в) $tg^2\frac{\pi}{6}\cdot ctg^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{9}$; г) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot tg^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=\frac{3}{4}$;

2) а) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1,5$;

б) $2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot ctg^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 1^2=1$; в) $tg^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+ctg^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=6$;

г) $tg^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot ctg^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=1$.

4. а) Используем таблицу значений тригонометрических функций, находим:

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Теперь находим:

$$\frac{0,3+\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{0,3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{0,3}{1}=0,3.$$

б) $$\frac{1,5-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1,5-\left(\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1,5-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

5. а) $$\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin(15^\circ+\alpha)-2\sin\alpha}=\frac{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ-2\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}:\frac{\sqrt{2}-2}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}-2}.$$

б) $$\frac{\sin(30^\circ+60^\circ)}{\sin(30^\circ-60^\circ)+\cos(30^\circ+60^\circ)}=\frac{1}{-0,5}=-2;$$

в) $$\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{4}}=\frac{1-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}=1;$$ г) $$\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(3-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{1-0}=1,5.$$

6. а) $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>1$; **б)** $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}+0<1$;

в) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1$;

г) Для проверки неравенства используем таблицу значений тригонометрических функций и найдем: $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда: $2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}<2$. Поэтому данное неравенство $2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}<2$ не верно.

Ответ: а) верно; б) не верно; в) верно; г) не верно.

7. $\cos\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{3}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}-1=\frac{3}{2}-1=0{,}5$; $ctg^2\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=$

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=0{,}5$, значит, $\cos\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{3}-1=ctg^2\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)$, ч.т.д.

С–39. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

1. а) $\sin\alpha=0{,}6$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-0{,}8$;

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{0{,}6}{0{,}8}=-\frac{3}{4}$; **б)** $\cos\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6$; $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}6}{0{,}8}=\frac{3}{4}$;

в) Известно, что $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ (т.е. α лежит в третьей четверти).

Для нахождения $\cos\alpha$ используем основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ или $\left(-\frac{7}{25}\right)^2+\cos^2\alpha=1$ или $\frac{49}{625}+\cos^2\alpha=1$, откуда

$\cos^2\alpha=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}$. Так как угол α лежит в третьей четверти, то $\cos\alpha$

величина отрицательная. Поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{576}{625}}=-\sqrt{\frac{(24)^2}{(25)^2}}=-\frac{24}{25}$. Теперь найдем $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{7}{25}\right) : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$, $ctg\alpha = \frac{1}{tg} = \frac{24}{7}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $tg\alpha = \frac{7}{24}$ и $ctg\alpha = \frac{24}{7}$.

г) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}$;

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{24\cdot 25}{25\cdot 7} = -\frac{24}{7}$; $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{7}{24}$; д) $tg\alpha = -\frac{7}{24}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{49}{576}}} = -\frac{24}{25}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$;

е) $ctg\alpha = 3\frac{3}{7} = \frac{24}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{576}{49}}} = -\frac{7}{25}$,

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}$.

2. а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) Известно, что $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Проверим, выполняется ли основное тригонометрическое тождество. Найдем значение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$. Так как основное тригонометрическое тождество не выполняется, то равенства $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ не могут выполняться одновременно.

3. а) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$; $\frac{8}{9} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}}$; $\frac{8}{9} = \frac{4}{5}$ – ложно, значит, данные равенства не могут выполнятся одновременно.

б) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$; $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha}$; $\frac{4}{9} = \frac{1}{1+2,5}$; $\frac{4}{9} = \frac{2}{7}$ – ложно, значит, данные равенства не могут выполнятся одновременно.

4. а) $\cos\beta=\frac{40}{41}$, $0<\beta<\pi$; т.к. $\cos\beta>0$; то $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1600}{1681}}=\frac{9}{41};\ tg\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{9\cdot41}{41\cdot40}=\frac{9}{40};\ ctg\beta=\frac{1}{tg\beta}=\frac{40}{9};$$

б) $\sin\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}$; т.к. $\sin\beta<0$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$; $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$;

$tg\beta=\frac{4\cdot5}{5\cdot3}=\frac{4}{3}$; $ctg\beta=\frac{3}{4}$; в) $tg\beta=2$, $0<\beta<\pi$; т.к. $tg\beta>0$, то $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt5};\ \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt5};\ ctg\beta=\frac{1}{2};$$

г) $ctg\beta=-1$, $\pi<\beta<2\pi$; т.к. $ctg\beta<0$, то $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$; $\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\beta}}=$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+1}}=-\frac{1}{\sqrt2};\ \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt2};\ tg\beta=-1.$$

5. $\cos\alpha$; $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

$$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha};\ tg\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha};\ ctg\alpha=\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

6. Известно, что $0°\le\alpha\le90°$, $\sin\alpha=1+b$. Т. к. по определению функции $\sin\alpha$ величина $-1\le\sin\alpha\le1$ и угол α лежит в 1ой четверти, то $-1\le\sin\alpha\le1$ или $0\le1+b\le1$. Вычтем из всех частей этого неравенства число 1 и получим: $-1\le b\le0$. Теперь найдем из основного тригоном. тождества $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(1+b)^2=1-1-2b-b^2=-2b-b^2=-b(2+b)$ и $\cos\alpha=\sqrt{-b(2+b)}$

Ответ: $\cos\alpha=\sqrt{-b(2+b)}$, $-1\le b\le0$.

7. Известно, что $\sin\varphi=\frac{a}{a+2}$ и $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{1+a}}{a+2}$ (где $a\ne-2$). Проверим, выполняется ли основное тригонометрическое тождество. Найдем $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=$

$$=\left(\frac{a}{a+2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{1+a}}{a+2}\right)^2=\frac{a^2}{(a+2)^2}+\frac{4(1+a)}{(a+2)^2}=\frac{a^2+4+4a}{(a+2)^2}=\frac{(a+2)^2}{(a+2)^2}=1.$$ Так

как тригонометрическое тождество выполняется, то такой угол φ может быть.

С– 40. Преобразование тригонометрических выражений

1. 1) а) Учтем, что $tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, и используем основное тригонометрическое тождество. Получаем: $sin^2\alpha+cos^2\alpha+tg^2\alpha=\left(sin^2\alpha+cos^2\alpha\right)+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=$

$=1+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha}$.

б) Учтем, что $ctg\alpha=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, и основное тригонометрическое тождество:

$cos^2\alpha\left(1+ctg^2\alpha\right)=cos^2\alpha\left(1+\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}\right)=cos^2\alpha\cdot\frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=cos^2\alpha\cdot\frac{1}{sin^2\alpha}=$

$=\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=ctg^2\alpha$.

в) $1-\frac{1}{cos^2\alpha}=\frac{cos^2\alpha-1}{cos^2\alpha}=-\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=-tg^2\alpha$; г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha+1=1+1=2$.

2) а) $sin^2\beta-sin^2\beta cos^2\beta=sin^2\beta\left(1-cos^2\beta\right)=sin^2\beta sin^2\beta=sin^4\beta$;

б) $cos^4\beta+cos^2\beta sin^2\beta=cos^2\beta\left(cos^2\beta+sin^2\beta\right)=cos^2\beta$;

в) $tg^2\beta ctg^2\beta-cos^2\beta=1-cos^2\beta=sin^2\beta$; г) $\frac{1-sin^2\beta}{cos^2\beta-1}=\frac{cos^2\beta}{-sin^2\beta}=-ctg^2\beta$.

2. 1) а) $sin\alpha ctg\alpha=sin\alpha\frac{cos\alpha}{sin\alpha}=cos\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{tg\alpha}{ctg\alpha}+1=\frac{sin\alpha sin\alpha}{cos\alpha cos\alpha}+1=\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}+1=tg^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha}$, ч.т.д.

2) а) $\frac{tg\alpha}{tg\alpha+ctg\alpha}=\frac{tg\alpha}{tg\alpha+\frac{1}{tg\alpha}}=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}\cdot cos^2\alpha=sin^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1+\frac{1}{tg\alpha}}=\frac{(1+tg\alpha)tg\alpha}{1+tg\alpha}=tg\alpha$, ч.т.д.

3. 1) а) Учтем, что функция синус нечетная, т.е. $sin(-\alpha)=-sin\alpha$. Также используем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$(1-sin(-\alpha))(1-sin\alpha)=(1-(-sin\alpha))(1-sin\alpha)=(1+sin\alpha)(1-sin\alpha)=$

$=1^2-sin^2\alpha=sin^2\alpha+cos^2\alpha-sin^2\alpha=cos^2\alpha$.

б) $tg(-\alpha)ctg\alpha+\sin^2(-\alpha)=-tg\alpha ctg\alpha+\sin^2\alpha=-1+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

в) $\cos(-\alpha)+\cos\alpha tg^2(-\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha tg^2\alpha=$

$$=\cos\alpha\left(1+tg^2\alpha\right)=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha};$$

2) а) $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-tg(-\beta)=\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}+tg\beta=\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{1}{\cos\beta}$;

б) $\dfrac{\cos^2(-\beta)-\cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta)}=\dfrac{\cos^2\beta-\cos^4\beta}{\sin^2\beta}=\dfrac{\cos^2\beta\left(1-\cos^2\beta\right)}{\sin^2\beta}=\dfrac{\cos^2\beta\cdot\sin^2\beta}{\sin^2\beta}=\cos^2\beta$;

в) $\dfrac{\cos(-\alpha)}{1+\sin(-\alpha)}+tg(-\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-tg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha\left(1-\sin\alpha\right)}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha\left(1-\sin\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

4. Учтем, что $tg\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ и $ctg\varphi=\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Преобразуем числитель и знаменатель данной дроби. Получаем: $\dfrac{1+tg\varphi+tg^2\varphi}{1+ctg\varphi+ctg^2\varphi}-tg^2\varphi=$

$$=\left(1+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right):\left(1+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right)-tg^2\varphi=$$

$$=\frac{\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}:\frac{\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}-tg^2\varphi=$$

$$=\frac{1+\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{1+\sin\varphi\cos\varphi}-tg^2\varphi=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}-tg^2\varphi=tg^2\varphi-tg^2\varphi=0.$$

В результате вычислений получили число 0, которое не зависит от φ.

5. а) $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{3\sin\alpha+3\sin^3\alpha}=\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1+\sin^2\alpha\right)}{3\sin\alpha\left(1+\sin^2\alpha\right)}=\dfrac{\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$;

б) Учтем, что $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и преобразуем данное выражение: $\sin^3\alpha ctg^3\alpha+7\cos^3\alpha=\sin^3\alpha\cdot\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}+7\cos^3\alpha=\cos^3\alpha+7\cos^3\alpha=8\cos^3\alpha$. Эта величина будет наибольшей, если значение $\cos\alpha$ будет наибольшим из возможных, т.е. при $\cos\alpha = 1$. Тогда получаем: $8\cos^3\alpha = 8\cdot 1^3 = 8$. Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно 8.

6. Учтем, что $tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ и $ctg\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ и основное тригонометрическое тождество. Преобразуем данное выражение: $\frac{tg\varphi + ctg\varphi}{tg\varphi - ctg\varphi} =$

$$= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) : \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi} : \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi - \left(1 - \sin^2\varphi\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\varphi - 1 + \sin^2\varphi} = \frac{1}{2\sin^2\varphi - 1}.$$ Теперь найдем значение этого выражения при $\sin\varphi = \frac{2}{3}$. Получаем: $\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2\cdot\frac{4}{9} - 1} = \frac{1}{\frac{8}{9} - 1} = 1 : \left(-\frac{1}{9}\right) = -9$.

С-41. Преобразование тригонометрических выражений (продолжение)

1. 1) а) $\frac{\sin\alpha + tg\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha\left(1 + \cos\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha\left(1 + \cos\alpha\right)}{\cos\alpha\left(1 + \cos\alpha\right)} = tg\alpha;$

б) $\left(1 - \sin^2\alpha\right)\left(1 + ctg^2\alpha\right) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha$;

в) Приведем дроби к общему знаменателю и используем основное тригонометрическое тождество. Получаем: $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1 + \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + (1 + \sin\alpha)^2}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + 1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + 1 + 2\sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1 + 1 + 2\sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{2(1 + \sin\alpha)}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

г) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=$

$=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=-2ctg\alpha;$

2)а) $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha;$

б) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin^2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha=$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha;$

в) $\frac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha+ctg^2\alpha}=\frac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha+\frac{1}{tg^2\alpha}}=\frac{(1+tg^4\alpha)tg^2\alpha}{1+tg^4\alpha}=tg^2\alpha;$

г) Учтем, что $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Используем основное тригонометрическое тождество. Имеем: $\frac{\sin^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=$

$=\sin^2\alpha:\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)+\cos^2\alpha:\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=\sin^2\alpha:\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+$

$+\cos^2\alpha:\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha:\frac{1}{\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha:\frac{1}{\sin^2\alpha}=$

$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

2. а) $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha\sin^2\alpha$, ч.т.д.

б) Преобразуем левую часть равенства. Разложим числитель дроби, используя формулу для суммы кубов чисел. Также используем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\sin\alpha+\cos\alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

3. Учтем, что $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и основное тригонометрическое тождество.

Преобразуем данное выражение: $ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha =$

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha} = \frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha} = \frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)^2}{\sin^2\alpha}.$$

Учтем, что $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и найдем значение этого выражения:

$$\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(1-\frac{9}{25}\right)^2 : \frac{9}{25} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 : \frac{9}{25} = \frac{256}{625} : \frac{9}{25} = \frac{256}{625}\cdot\frac{25}{9} = \frac{256}{25\cdot 9} = \frac{256}{225}.$$

4. а) $$\frac{\sin^2\alpha}{ctg^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)} = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} = tg^4\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

б) Учтем, что $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, и преобразуем левую часть данного выражения.

Получаем: $$\frac{3\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{1+\cos^2\alpha + \cos^4\alpha} = \frac{3\cos^2\alpha + \left(1-\cos^2\alpha\right)^2}{1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha} = \frac{3\cos^2\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha} =$$

$= \dfrac{1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}$. Видим, что левая часть равна правой, тождество доказано

5. По условию задачи известно значение $ctg\alpha = 0{,}125$. Так как $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то

разделим числитель и знаменатель данного выражения на $\sin^2\alpha$. Получаем:

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{1+ctg\alpha}{ctg^2\alpha + ctg\alpha} =$$

$= \dfrac{1+ctg\alpha}{ctg\alpha\left(ctg\alpha+1\right)} = \dfrac{1}{ctg\alpha}$. Теперь найдем значение этого выражения: $\dfrac{1}{0{,}125} = 8$.

6. Учтем, что $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$, и преобразуем данное выражение. Получаем:

$$\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{1-\sin^6\varphi-\cos^6\varphi} = \frac{\left(1-\cos^2\varphi\right)\cos^2\varphi}{1-\left(1-\cos^2\varphi\right)^3 - \cos^6\varphi} =$$

$$=\frac{\left(1-\cos^2\varphi\right)\cos^2\varphi}{1-\left(1-3\cos^2\varphi+3\cos^4\varphi-\cos^6\varphi\right)-\cos^6\varphi}=\frac{\cos^2\varphi-\cos^4\varphi}{3\cos^2\varphi-3\cos^4\varphi}=$$

$\frac{\cos^2\varphi-\cos^4\varphi}{3\left(\cos^2\varphi-\cos^4\varphi\right)}=\frac{1}{3}$. Видим, что полученная величина одинакова при всех допустимых значениях φ

7. Вновь используем основное тригонометрическое $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$. Тогда данная функция имеет вид: $y = 3\sin^2 x - 2\cos^2 x = 3(1-\cos^2 x) - 2\cos^2 x = 3 - 3\cos^2 x - 2\cos^2 x = 3 - 5\cos^2 x$. Теперь найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3 - 5\cos^2 x$. Напишем очевидное неравенство $0\le\cos^2 x\le 1$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-5). Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $0\cdot(-5)\ge(-5)\cos^2 x\ge 1\cdot(-5)$ или $0\ge -5\cos^2 x\ge -5$ или $-5\le -5\cos^2 x\le 0$. Ко всем частям этого двойного неравенства прибавим число 3. Имеем: $-5+3\le -5\cos^2 x+3\le 0+3$ или $-2\le 3-5\cos^2 x\le 3$, т.е. $-2\le y\le 3$. Следовательно, наименьшее значение функции (–2), наибольшее значение 3.

Ответ: наименьшее значение функции (–2), наибольшее значение 3.

8. $2\sin x=\sqrt{3}$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{2}$.

С–42. Формулы сложения

1. 1) а) $\cos 225^\circ=\cos\left(180^\circ+45^\circ\right)=\cos 180^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 180^\circ\cdot\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\pi\cdot\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) а) Используем формулу для косинуса разности двух углов. Получаем

$\cos 63^\circ\cos 18^\circ+\sin 63^\circ\sin 18^\circ=\cos\left(63^\circ-18^\circ\right)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}=\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{13\pi}{9}\right)=\cos 2\pi=1$;

в) $\cos 32^\circ30'\cos 27^\circ30'-\sin 32^\circ30'\sin 27^\circ30'=$

$=\cos\left(32^\circ30'+27^\circ30'\right)=\cos 60^\circ=0{,}5$;

3) а) Так как известно, что $\sin\alpha=-0{,}8$ и $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ (т.е. α лежит в четвертой четверти), то найдем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(-0{,}8)^2}=$

$=\sqrt{1-0{,}64}=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$. Используя формулу для косинуса суммы двух углов, получим: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}6-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-0{,}8)=$

$=1{,}4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}7\sqrt{2}$. Было учтено, $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}6^2}=0{,}8$;

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=0{,}6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0{,}8\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\sqrt{3}+8}{20}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$;

в) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-0{,}96$; $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-0{,}6$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0{,}96\cdot 0{,}8+0{,}28\cdot 0{,}6=0{,}936$;

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0{,}96\cdot 0{,}8-0{,}28\cdot 0{,}6=0{,}6$.

2. а) Учтем, нечетность функции синус, т.е. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ и воспользуемся формулой для косинуса суммы двух углов. Получаем:

$\cos\alpha\cos2\alpha+\sin(-\alpha)\sin2\alpha=\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos3\alpha$.

б) $\cos2\alpha\cos3\alpha+\sin2\alpha\sin3\alpha=\cos(2\alpha-3\alpha)=\cos\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}+\alpha+\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)=\cos\frac{5\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{2}=0$;

г) $\sin\left(\frac{9}{7}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{7}\pi+\alpha\right)-\cos\left(\frac{9}{7}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{2}{7}\pi+\alpha\right)=\cos\left(\frac{9}{7}\pi+\alpha-\frac{2}{7}\pi-\alpha\right)=\cos\pi=-1$;

д) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta$.

3. Используем формулу для косинуса суммы двух углов и косинуса разности двух углов. Преобразуем левую часть равенства:

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$

$=(\cos\alpha\cos\beta)^2-(\sin\alpha\sin\beta)^2=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$. Учтем: что $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$ и $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$. Получаем: $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta=$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$. Левая часть равна правой. Тождество доказано.

4.а) Преобразуем левую часть равенства. Используем формулу для косинуса разности двух углов и учтем, $\cos\frac{3}{2}\pi=0$ и $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$. Получаем: $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=$

$= cos\frac{3}{2}\pi cos\alpha + sin\frac{3}{2}\pi sin\alpha = 0\cdot cos\alpha + (-1)sin\alpha = 0 - sin\alpha = -sin\alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Тождество доказано.

б) $cos(\pi+\alpha) = cos\pi\cdot cos\alpha - sin\pi\cdot sin\alpha = -cos\alpha$, ч.т.д.

5. а) $cos\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)+cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=cos\frac{2}{3}\pi\cdot cos\alpha - sin\frac{2}{3}\pi\cdot sin\alpha + cos\alpha\cdot cos\frac{\pi}{3}+$
$+sin\alpha\cdot sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha + \frac{1}{2}cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha = 0;$

б) Используем формулы для косинуса разности двух углов и косинуса суммы двух углов. Имеем: $\frac{cos(\alpha-\beta)-cos\alpha cos\beta}{cos(\alpha+\beta)+sin\alpha sin\beta}=$

$$=\frac{cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta - cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta + sin\alpha sin\beta} = \frac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\cdot\frac{sin\beta}{cos\beta} = tg\alpha tg\beta.$$

С–43. Формулы сложения (продолжение)

1. 1) а) Представим угол 75° в виде: 75° = 45° + 30° и используем формулу для синуса суммы двух углов: $sin75° = sin(45°+30°) =$
$= sin45° cos30° + cos45° sin30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

б) $sin\frac{\pi}{12} = sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} - cos\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$;

2) а) $sin80°\cdot cos20° - cos80° sin20° = sin(80°-20°) = sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) Используем формулу для синуса суммы двух углов:
$sin\frac{3\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7}sin\frac{4\pi}{7} = sin\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right) = sin\pi = 0$.

в) $sin43°30'\cdot cos88°30' - cos43°30' sin88°30' = sin(43°30'-88°30') = -sin45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) а) $sin\alpha = -\sqrt{1-cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{25}{269}} = -\frac{12}{13}$;

$sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = sin\alpha\cdot cos\frac{\pi}{3} - cos\alpha\cdot sin\frac{\pi}{3} = -\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}-12}{26}$;

б) $cos\alpha = -\sqrt{1-sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0,6^2} = -0,8$;

$$sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=sin\frac{\pi}{4}\cdot cos\alpha+cos\frac{\pi}{4}sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(-0,8+0,6)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10};$$

в) $sin\alpha=-\sqrt{1-cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$; $sin\beta=\sqrt{1-cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$;

$$sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta=-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{-4\sqrt{7}-9}{20};$$

$$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta=-\frac{\sqrt{7}\cdot4}{20}-\frac{9}{20}=\frac{9-4\sqrt{7}}{20}.$$

2. а) $sin2\alpha cos\alpha-cos2\alpha sin\alpha=sin(2\alpha-\alpha)=sin\alpha$;

б) $sin\alpha\cdot cos2\alpha-cos(-\alpha)sin(-2\alpha)=sin\alpha cos2\alpha+cos\alpha sin2\alpha=sin(\alpha+2\alpha)=sin3\alpha$;

в) Воспользуемся формулой для синуса разности двух углов:

$$sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=sin\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)=$$

$$=sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right).$$

г) $sin(\alpha+\beta)-sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)sin(-\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta-sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sin\beta=$

$=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta-cos\alpha sin\beta=sin\alpha cos\beta$;

3. $\frac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha\cdot cos\beta}=\frac{sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta}{cos\alpha\cdot cos\beta}=tg\alpha+tg\beta$, ч.т.д.

4. Преобразуем левую часть равенства:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)}=\frac{sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на $cos\alpha cos\beta$. Получаем:

$$\frac{\frac{sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\frac{cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}=\frac{\frac{sin\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}-\frac{cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\frac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}+\frac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}=\frac{\frac{sin\alpha}{cos\alpha}-\frac{sin\beta}{cos\beta}}{1+\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\cdot\frac{sin\beta}{cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

5. $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1\cdot9}{7}=1\frac{2}{7}.$

6. а) $\frac{tg43^\circ+tg17^\circ}{1-tg43^\circ tg17^\circ}=tg(43^\circ+17^\circ)=tg60^\circ=\sqrt{3}$.

б) Используем результаты задачи 4: $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$. Тогда данное выражение имеет вид: $\frac{tg\frac{9\pi}{16}-tg\frac{5\pi}{16}}{1+tg\frac{9\pi}{16}tg\frac{5\pi}{16}}=tg\left(\frac{9\pi}{16}-\frac{5\pi}{16}\right)=tg\left(\frac{4\pi}{16}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1$.

7. а) $tg135^\circ=tg(180^\circ-45^\circ)=\frac{tg180^\circ-tg45^\circ}{1+tg180^\circ tg45^\circ}=\frac{-1}{1}=-1$;

б) $ctg120^\circ=ctg(90^\circ+30^\circ)=\frac{ctg90^\circ\cdot ctg30^\circ-1}{ctg90^\circ+ctg30^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $tg(-240^\circ)=-tg240^\circ=-tg(180^\circ+60^\circ)=-\frac{tg180^\circ+tg60^\circ}{1-tg180^\circ tg60^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$.

С–44. Синус и косинус двойного угла

1. 1) а) $2\sin75^\circ\cos75^\circ=\sin(2\cdot75^\circ)=\sin150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=0{,}5$;

б) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) Используем формулу для синуса двойного угла:

$$\sin15^\circ\cos15^\circ=\frac{1}{2}\cdot(2\sin15^\circ\cos15^\circ)=\frac{1}{2}\sin(2\cdot15^\circ)=\frac{1}{2}\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

г) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1+\sin\frac{\pi}{4}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\left(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right)^2=\sin^2\frac{\pi}{12}-2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\sin\frac{\pi}{6}=0{,}5$;

е) $\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ=\cos(2\cdot75^\circ)=\cos150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

з) $1-2\cos^2\frac{\pi}{12}=-\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}-1\right)=-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

1. 2) а) Так как $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ и известно значение $\sin\alpha=-0{,}6$, то найдем $\cos\alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество:

$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$ или $(-0,6)^2+cos^2\alpha=1$ или $0,36+cos^2\alpha=1$, откуда $cos^2\alpha=1-0,36=0,64$. Учтем, что $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ (т.е. угол α лежит в третьей четверти) и значение $cos\alpha$ отрицательно. Тогда $cos\alpha=-\sqrt{0,64}=-0,8$. Находим $sin2\alpha=2(-0,6)\cdot(-0,8)=0,96$.

б) $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\frac{8}{17}$; $sin2\alpha=2sin\alpha\cdot cos\alpha=-2\frac{8}{17}\cdot\frac{15}{17}=-\frac{240}{289}$;

в) $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+2,4^2}}=\frac{1}{2,6}$; $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{2,6^2}}=\frac{2,4}{2,6}$;

$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha=\frac{2\cdot2,4}{2,6\cdot2,6}=\frac{12}{13\cdot1,3}=\frac{120}{169}$.

3) а) $cos2\alpha=1-2sin^2\alpha=1-2\cdot\frac{25}{169}=\frac{119}{169}$;

б) Используем формулу косинуса двойного угла $cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$. Воспользуемся также основным тригонометрическим тождеством $sin^2\alpha=1-cos^2\alpha$. Тогда получаем: $cos2\alpha=cos^2\alpha-(1-cos^2\alpha)=2cos^2\alpha-1$.

Найдем это значение при $cos\alpha=\frac{1}{3}$. $cos2\alpha=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$.

в) $cos2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+2,25}}=\frac{1}{\sqrt{3,25}}$; $cos2\alpha=2cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{3,25}-1=-\frac{1,25}{3,25}=-\frac{5}{13}$

2. 1) а) $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot1,5}{1-2,25}=\frac{3}{-1,25}=-\frac{12}{5}$; б) $tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}=\frac{3}{\sqrt2}$;

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{3}{\sqrt2}}{1-\frac{9}{4}}=-\frac{6\cdot4}{\sqrt2\cdot5}=-\frac{24}{5\sqrt2}=-\frac{24\sqrt2}{5\cdot2}=-\frac{12\sqrt2}{5};$$

2) Используя основное тригонометрическое тождество, найдем

$cos^2\alpha=1-sin^2\alpha=1-\left(\frac{2}{5}\right)^2=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$. Учтем, что $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (т.е. угол α лежит во второй четверти) и величина $cos\alpha$ отрицательна. Тогда

$cos\alpha=-\sqrt{\frac{21}{25}}=-\frac{\sqrt{21}}{5}$. Теперь вычислим: $sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha=2\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$

$$=-\frac{4\sqrt{21}}{25}, \quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{21}{25}-\frac{4}{25}=\frac{17}{25} \text{ и}$$

$$tg 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\left(-\frac{4\sqrt{21}}{25}\right):\frac{17}{25}=-\frac{4\sqrt{21}}{17}.$$

Ответ: 1) а) $-\frac{12}{5}$; б) $-\frac{12\sqrt{2}}{5}$; 2) $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{21}}{25}$, $tg 2\alpha=-\frac{4\sqrt{21}}{17}$.

3. а) $\frac{2tg 75^\circ}{1-tg^2 75^\circ}=tg(2\cdot 75^\circ)=tg 150^\circ=tg(180^\circ-30^\circ)=-tg 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) Учтем формулы для синуса и косинуса двойного угла. Получаем:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}}=\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. а) Возведем обе части равенства $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ в квадрат:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ или } \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}$$

или $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$, откуда $\sin 2\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

б) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$; $\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$;

$1+\sin\alpha=\frac{1}{4}$, $\sin\alpha=-\frac{3}{4}$.

С-45. Синус и косинус двойного угла (продолжение)

1. а) $1-\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=2\sin^2\alpha$;

б) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$;

в) Используем формулу для косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество: $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-$ $-2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=2\cos 2\alpha$.

г) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=2$;

д) $(1-\cos 2\alpha)ctg\alpha = 2\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha;$

е) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1-\sin 2\alpha;$

ж) $\cos^2\alpha - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha;$

з) $\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \sin^2\alpha;$

и) $tg^2\alpha(1+\cos 2\alpha)^2 = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\left(2\cos^2\alpha\right)^2 = \dfrac{4\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = \sin^2 2\alpha;$

к) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha} =$

$= \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2} = \dfrac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$

2. а) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$, ч.т.д.

б) Используем основное тригонометрическое тождество и формулу для косинуса двойного угла. Преобразуем левую часть:

$\dfrac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} = \dfrac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \left(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha\right)}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$

$= \dfrac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha} = \dfrac{2\sin^2 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha} = tg^2 2\alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

3. а) Используем формулу для косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$. Получаем: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

б) $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1.$

Ответ: а) $2\cos^2\alpha - 1$; б) $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$.

4. а) $\dfrac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2};$

б) $\sin 20°\cdot\sin 70° = \sin 20°\cdot\sin(90°-20°) = \sin 20°\cdot\cos 20° = \frac{1}{2}\sin 40°$;

в) $\sin\alpha\sin(90°-\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

г) $\frac{\sin 160°}{\cos^4 10°-\sin^4 10°} = \frac{\sin(180°-20°)}{(\cos^2 10°+\sin^2 10°)(\cos^2 10°-\sin^2 10°)} = \frac{\sin 20°}{\cos 20°} = tg 20°$;

д) Учтем, что $tg 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$. Используем формулы для синуса и косинуса двойного угла. Имеем: $\frac{1-tg^2 15°}{2tg 15°} = \frac{1-\frac{\sin^2 15°}{\cos^2 15°}}{2\frac{\sin^2 15°}{\cos^2 15°}} = \frac{\cos^2 15°-\sin^2 15°}{\cos^2 15°} : \frac{2\sin 15°}{\cos 15°} =$

$= \frac{\cos 30°}{\cos^2 15°}\cdot\frac{\cos 15°}{2\sin 15°} = \frac{\cos 30°}{2\sin 15°\cos 15°} = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = ctg 30° = \sqrt{3}$.

Ответ: а) $2\cos\frac{\alpha}{2}$; б) $\frac{1}{2}\sin 40°$; в) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; г) $tg 20°$; д) $\sqrt{3}$.

5. а) Используем основное тригонометрическое тождество и формулы для косинуса и синуса двойного угла. Преобразуем левую часть:

$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha} =$

$= \frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

б) $\frac{tg^2(45°+\alpha)-1}{tg^2(45°+\alpha)+1} = \cos^2(45°+\alpha)\left(\frac{\sin^2(45°+\alpha)}{\cos^2(45°+\alpha)}\right) = \sin^2(45°+\alpha)-\cos^2(45°+\alpha) =$

$= -\cos(2(45°+\alpha)) = -\cos(90°+2\alpha) = \sin 2\alpha$, ч.т.д.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

6. а) $\sin 18°\cdot\cos 36° = \frac{2\sin 18°\cdot\cos 18°\cdot\cos 36°}{2\cos 18°} = \frac{2\sin 36°\cdot\cos 36°}{4\cos 18°} = \frac{\sin 72°}{4\cos 18°} =$

$= \frac{\sin(90°-18°)}{4\cos 18°} = \frac{\cos 18°}{4\cos 18°} = \frac{1}{4}$, ч.т.д.

б) Используем формулу для синуса двойного угла. Левую часть выражения умножим и разделим на $\sin\frac{\pi}{7}$. Тогда получим: $8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} =$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{\pi}{7}\cdot 8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\right)\cdot\left(4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot 4\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cdot 2\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$. Упростим величину

$$\sin\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi\cos\frac{\pi}{7}+\cos\pi\sin\frac{\pi}{7}=0\cdot\cos\frac{\pi}{7}+(-1)\cdot\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}.$$

Поэтому имеем: $\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=-1$. Видно, что левая часть равна правой.

Следовательно тождество доказано.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

С–46. Формулы приведения

1. Используем периодичность тригонометрических функций и их четность, а также формулы приведения.

а) $\sin 945^\circ=\sin(3\cdot 360^\circ-135^\circ)=\sin(135^\circ)=-\sin 135^\circ=\sin(90^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $tg 225^\circ=tg(180^\circ+45^\circ)=tg 45^\circ=1$; г) $ctg 210^\circ=ctg(270^\circ-60^\circ)=tg 60^\circ=\sqrt{3}$;

д) $\sin\frac{15\pi}{4}=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $tg\frac{5\pi}{3}=tg\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-tg\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$; з) $ctg\frac{2\pi}{3}=ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-tg\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

и) $\sin(-960^\circ)=-\sin 960^\circ=-\sin(720^\circ+240^\circ)=-\sin 240^\circ=-\sin(180^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-0{,}5$;

л) $tg\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-tg\frac{7\pi}{3}=-tg\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-tg\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

м) $ctg(-420°)=ctg(-2\cdot180°-60°)=ctg(-60°)=-ctg60°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. а) $sin(-570°)+\sqrt{3}cos150°+tg315°=-sin(360°+210°)+\sqrt{3}cos(180°-30°)+tg(360°-45°)=$

$=-sin(180°+30°)-\sqrt{3}cos30°-tg45°=sin30°-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-1=-2$;

б) Сначала упростим слагаемые данной суммы, учитывая их периодичность, четность, используя формулы приведения:

$sin210°=sin(180°+30°)=-sin30°=-\frac{1}{2}$;

$cos(-480°)=cos(360°-120°)=cos(-120°)=cos120°=cos(90°+30°)=-sin30°=-\frac{1}{2}$;

$ctg480°=ctg(2\cdot180°+120°)=ctg120°=ctg(90°+60°)=-tg30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Теперь найдем числовое значение данного выражения:

$sin210°+cos(-480°)-\sqrt{3}ctg480°=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-1+1=0$.

в) $tg\frac{7\pi}{4}+sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)-2cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=tg\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-2cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=-tg\frac{\pi}{4}+sin\frac{\pi}{6}-2cos\frac{\pi}{6}=-1+0,5-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-0,5-\sqrt{3}$.

Ответ: а) -2; б) 0; в) $-0,5-\sqrt{3}$.

3. а) Используем формулы приведения: $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sin\alpha$, $sin(\pi-\alpha)=sin\alpha$.

Тогда: $1-cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sin(\pi-\alpha)=1-sin\alpha\cdot sin\alpha=1-sin^2\alpha=cos^2\alpha$.

б) $cos(\pi-\alpha)cos(2\pi-\alpha)+cos^2\alpha=-cos\alpha cos\alpha+cos^2\alpha=0$;

в) $cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sin\alpha$; г) $sin(\alpha-\pi)=-sin(\pi-\alpha)=-sin\alpha$;

д) $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-ctg\alpha$;

е) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-2\alpha)}{2tg(\pi+\alpha)}=\dfrac{-\cos\alpha\sin 2\alpha}{2tg\alpha}=-\dfrac{2\sin\alpha\cos^2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}=-\cos^3\alpha;$

ж) Учтем периодичность и четность функции косинус:

$\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ и $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$. Получаем:

$\cos(2\pi-\alpha)\cos(2\pi+\alpha)-\sin^2\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$

з) $\cos^2(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos 2\alpha.$

4. а) Используем нечетность функции синус и формулы приведения. Преобразуем левую часть равенства. Сначала упростим отдельные составляющие этого выражения:

$\sin(x-\pi)=\sin(-(\pi-x))=-\sin(\pi-x)=-\sin x$;

$\sin(0{,}5\pi+x)=-\cos x$; $ctg(0{,}5\pi-x)=tgx$; $\cos(1{,}5\pi-x)=-\sin x$;

$\cos(0{,}5\pi+x)=-\sin x$. Тогда получаем:

$$\frac{\sin(x-\pi)\sin(0{,}5\pi+x)}{ctg(0{,}5\pi-x)\cos(1{,}5\pi-x)\cos(0{,}5\pi+x)}=\frac{-\sin x\cdot\cos x}{tgx(-\sin x)(-\sin x)}=\frac{-\sin x\cdot\cos x}{tgx\cdot\sin^2 x}=$$

$=-\dfrac{\cos x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\sin x}=-\dfrac{\cos x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\sin x}=-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=-ctg^2 x$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha-\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha)=0,$ ч.т.д.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

5. б) Используем формулы приведения и упростим составляющие данного выражения: $tg\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=tg\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=-tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-ctg\alpha$;

$ctg\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)=ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=ctg\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-tg\alpha;$

$\cos(\alpha-\pi)=\cos(-(\pi-\alpha))=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$

$\sin(\alpha-3\pi)=\sin(-(3\pi-\alpha))=-\sin(3\pi-\alpha)=-\sin(2\pi+(\pi-\alpha))=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha;$

Тогда данное выражение имеет вид: $\dfrac{tg^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)ctg^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{cos^2(\alpha-\pi)+sin^2(\alpha-3\pi)}=$

$$=\frac{(-ctg\alpha)^2(-tg\alpha)^2}{(-cos\,\alpha)^2+(-sin\,\alpha)^2}=\frac{ctg^2\alpha\cdot tg^2\alpha}{cos^2\alpha+sin^2\alpha}=\frac{(ctg\alpha\cdot tg\alpha)^2}{1}=\frac{1^2}{1}=1.$$

Ответ: 1.

6. $cos\,\alpha=-0{,}6;\quad cos\,\beta=cos(180^\circ-\alpha)=-cos\,\alpha=0{,}6.$

Ответ: 0,6.

7. Пусть один из острых углов прямоугольного треугольника равен α, тогда другой угол $(90^\circ-\alpha)$. Найдем: $tg\alpha\cdot tg(90^\circ-\alpha)=tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$.

Ответ: 1.

С–47. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

1. 1) а) $sin\,36^\circ+sin\,24^\circ=2\,sin\dfrac{36^\circ+24^\circ}{2}cos\dfrac{36^\circ-24^\circ}{2}=2\,sin\,30^\circ cos\,6^\circ=cos\,6^\circ;$

б) $sin\,18^\circ+sin\,11^\circ=2\,sin\dfrac{18^\circ+11^\circ}{2}cos\dfrac{18^\circ-11^\circ}{2}=2\,sin\,14{,}5^\circ cos\,3{,}5^\circ;$

в) $sin\,6^\circ+sin\,14^\circ=2\,sin\dfrac{6^\circ+14^\circ}{2}cos\dfrac{14^\circ-6^\circ}{2}=2\,sin\,10^\circ cos\,4^\circ;$

г) $sin\dfrac{5\pi}{6}+sin\dfrac{\pi}{6}=2\,sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2}cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}{2}=2\,sin\dfrac{\pi}{2}cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1;$

2) а) Используем формулу для суммы синусов двух углов:

$$sin\,72^\circ-sin\,52^\circ=2\,sin\frac{72^\circ-52^\circ}{2}cos\frac{72^\circ+52^\circ}{2}=2\,sin\,10^\circ cos\,62^\circ,$$

б) $sin\,16^\circ-sin\,7^\circ=2\,sin\dfrac{16^\circ-7^\circ}{2}cos\dfrac{16^\circ+7^\circ}{2}=2\,sin\,4{,}5^\circ cos\,11{,}5^\circ;$

в) $sin\,13^\circ-sin\,23^\circ=2\,sin\dfrac{13^\circ-23^\circ}{2}cos\dfrac{13^\circ+23^\circ}{2}=-2\,sin\,5^\circ cos\,18^\circ;$

г) Используем формулу для разности косинусов двух углов:

$$sin\frac{\pi}{6}-sin\frac{\pi}{12}=2\,sin\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2}cos\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}{2}=2\,sin\frac{\pi}{24}cos\frac{\pi}{8}.$$

3) а) $\cos 18° + \cos 8° = 2\cos\frac{18°+8°}{2}\cos\frac{18°-8°}{2} = 2\cos 13°\cos 5°$;

б) $\cos 7° + \cos 4° = 2\cos\frac{7°+4°}{2}\cos\frac{7°-4°}{2} = 2\cos 5{,}5°\cos 1{,}5°$;

в) $\cos 16° + \cos 66° = 2\cos\frac{16°+66°}{2}\cos\frac{16°-66°}{2} = 2\cos 41°\cos 25°$;

г) $\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}$;

4) а) $\cos 36° - \cos 26° = -2\sin\frac{36°+26°}{2}\sin\frac{36°-26°}{2} = -2\sin 31°\sin 5°$;

б) $\cos 17° - \cos 10° = -2\sin\frac{17°+10°}{2}\sin\frac{17°-10°}{2} = -2\sin 13{,}5°\sin 3{,}5°$;

в) $\cos 5° - \cos 15° = -2\sin\frac{5°+15°}{2}\sin\frac{5°-15°}{2} = 2\sin 10°\sin 5°$;

г) $\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} = -2\sin\frac{\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{5}}{2}\sin\frac{\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}}{2} = -2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$

2. 1) а) $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin 4\alpha\cos\alpha$; б) $\sin 8\alpha - \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 6\alpha$;

в) $\cos 27\alpha + \cos 17\alpha = 2\cos 22\alpha\cos 5\alpha$; г) $\cos 4\alpha - \cos\alpha = -\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}$;

2) а) $\sin(15°+\alpha) + \sin(15°-\alpha) = 2\sin\frac{15°+\alpha+15°-\alpha}{2}\cos\frac{15°+\alpha-15°+\alpha}{2} = 2\sin 15°\cos\alpha$;

б) Используем формулу для разности синусов двух углов:

$$\sin(60°-\beta) - \sin(60°+\beta) = 2\sin\frac{(60°-\beta)-(60°+\beta)}{2}\cos\frac{(60°-\beta)+(60°+\beta)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{60°-\beta-60°-\beta}{2}\cos\frac{60°-\beta+60°+\beta}{2} = 2\sin\frac{-2\beta}{2}\cos\frac{120°}{2} =$$

$$= 2\sin(-\beta)\cos 60° = 2(-\sin\beta)\cdot\frac{1}{2} = -\sin\beta.$$

в) Используем формулу для суммы косинусов двух углов:

$$\cos(17°+x) + \cos(17°-x) = 2\cos\frac{(17°+x)+(17°-x)}{2}\cos\frac{(17°+x)-(17°-x)}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{17°+x+17°-x}{2}\cos\frac{17°+x-17°+x}{2} = 2\cos\frac{2\cdot 17°}{2}\cos\frac{2x}{2} = 2\cos 17°\cos x.$$

г) $\cos(40^\circ-\alpha)-\cos(40^\circ+\alpha)=$

$$=-2\sin\frac{40^\circ-\alpha+40^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{40^\circ-\alpha-40^\circ-\alpha}{2}=2\sin 40^\circ\sin\alpha;$$

д) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=2\sin\alpha\cos\beta;$

е) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}=-2\sin\beta\cdot\sin\alpha.$

3. а) $\frac{\sin 7\alpha+\sin\alpha}{\cos 7\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\sin 4\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 3\alpha}=tg4\alpha;$

б) В числителе и знаменателе дроби используем формулу для суммы косинусов двух углов. После этого сократим дробь. Имеем: $\frac{\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}=$

$$=\frac{2\cos\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-6\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+9\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-9\alpha}{2}}=\frac{2\cos 5\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 5\alpha\cos(-4\alpha)}=\frac{\cos(-\alpha)}{\cos(-4\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}.$$

Была учтена четность функции косинус.

в) $\frac{\sin 11\alpha-\sin\alpha}{\cos 11\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\sin 5\alpha\cos 6\alpha}{-2\sin 5\alpha\sin 6\alpha}=-ctg6\alpha;$

г) $\frac{\cos 7\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{-2\sin 2\alpha\sin 5\alpha}{2\sin 5\alpha\cos 2\alpha}=-tg2\alpha.$

4. а) $\sin^2 43^\circ-\sin^2 13^\circ=(\sin 43^\circ-\sin 13^\circ)(\sin 43^\circ+\sin 13^\circ)=$

$$=2\sin 15^\circ\cos 28^\circ\cdot 2\sin 28^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ\cdot\sin 56^\circ=0{,}5\sin 56^\circ;$$

б) Используем формулу для разности квадратов чисел: $\cos^2 37^\circ-\cos^2 17^\circ=$ $=(\cos^2 37^\circ+\cos^2 17^\circ)(\cos^2 37^\circ-\cos^2 17^\circ)$. Теперь применим формулы для суммы косинусов и разности косинусов двух углов. Получаем:

$$2\cos\frac{37^\circ+17^\circ}{2}\cos\frac{37^\circ-17^\circ}{2}\cdot 2\sin\frac{37^\circ+17^\circ}{2}\sin\frac{17^\circ-37^\circ}{2}=$$

$$=2\cos\frac{54^\circ}{2}\cos\frac{20^\circ}{2}\cdot 2\sin\frac{54^\circ}{2}\sin\left(-\frac{20^\circ}{2}\right)=2\cos 27^\circ\cos 10^\circ\cdot 2\sin 27^\circ\sin(-10^\circ)=$$

$$=(2\sin 27^\circ\cos 27^\circ)(2\sin(-10^\circ)\cos 10^\circ)=\sin 54^\circ\cdot(-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ)=$$

$$=\sin 54^\circ\cdot(-\sin 20^\circ)=-\sin 20^\circ\sin 54^\circ.$$

Ответ: а) $0.5\sin 56^\circ$; б) $-\sin 20^\circ\ \sin 54^\circ$.

5. а) $\frac{\sin 56^\circ+\sin 14^\circ}{\cos 56^\circ+\cos 14^\circ}=\frac{2\sin 35^\circ\cos 21^\circ}{2\cos 35^\circ\cos 21^\circ}=tg35^\circ=tg(90^\circ-55^\circ)=ctg55^\circ$, т.е. равенство верно.

б) $\frac{\sin 72^\circ - \sin 62^\circ}{\cos 72^\circ + \cos 62^\circ} = \frac{2\sin 5^\circ \cos 67^\circ}{2\cos 67^\circ \cos 5^\circ} = tg 5^\circ = tg(90^\circ - 85^\circ) = ctg 85^\circ$, т.е. равенство верно.

6. а) Преобразуем обе части данного равенства. В левой части используем формулы для суммы синусов и суммы косинусов двух углов. Получаем:

$$\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha} = \frac{2\sin\frac{3\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-7\alpha}{2}}{2\cos\frac{3\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-7\alpha}{2}} = \frac{2\sin 5\alpha\cos(-2\alpha)}{2\cos 5\alpha\cos(-2\alpha)} = \frac{\sin 5\alpha}{\cos 5\alpha} = tg 5\alpha.$$

В правой части используем формулу приведения: $ctg\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) = tg 5\alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

б) Преобразуем левую часть равенства. В числителе и знаменателе дроби сгруппируем крайние и средние слагаемые. Используем формулы для суммы синусов и суммы косинусов двух углов. После этого сократим дробь. Получаем:

$$\frac{\sin\beta + \sin 3\beta + \sin 5\beta + \sin 7\beta}{\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta} = \frac{(\sin\beta + \sin 7\beta) + (\sin 3\beta + \sin 5\beta)}{(\cos\beta + \cos 7\beta) + (\cos 3\beta + \cos 5\beta)} =$$

$$= \frac{2\sin 4\beta\cos(-3\beta) + 2\sin 4\beta\cos(-\beta)}{2\cos 4\beta\cos(-3\beta) + 2\cos 4\beta\cos(-\beta)} = \frac{2\sin 4\beta(\cos 3\beta + \cos\beta)}{2\cos 4\beta(\cos 3\beta + \cos\beta)} = \frac{\sin 4\beta}{\cos 4\beta} = tg 4\beta.$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

в) $$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha} = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = ctg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right),$$ ч.т.д.

г) $$\frac{ctg\alpha + 1}{ctg\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha} = ctg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$ ч.т.д.

д) $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) =$

$= 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot 2\cos\alpha\cdot\cos\beta = \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$, ч.т.д.

С–48. Решение тригонометрических уравнений

1. а) $\alpha=30°$, $\alpha=45°$, $\alpha=60°$; б) $\alpha=60°$, $\alpha=45°$, $\alpha=30°$.

2. Известно, что один из корней уравнения $\sin x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ равен $\frac{\pi}{12}$.

Следовательно, при подстановке этого числа получаем верное равенство: $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Найдем второй положительный корень этого уравнения, не превосходящий 2π. Для этого используем формулу приведения: $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}$ или $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}$. Число $\frac{11\pi}{12}$ удовлетворяет данному уравнению, является положительным и не превосходит 2π. Поэтому $x=\frac{11\pi}{12}$ – требуемый корень.

3. Решим уравнение $\cos x=0$. Очевидно, что один из корней этого уравнения $x=\frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Все остальные корни отличаются от этого числа на целое число величины π, т.е. могут быть записаны в виде $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n=0; \pm1; \pm2; \ldots$

При $n=0; 1; 2; \ldots$ получаем арифметическую прогрессию: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$. При $n=-1; -2; -3; \ldots$ имеем арифметическую прогрессию: $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$.

Таким образом, каждый член этих прогрессий является корнем уравнения $\cos x=0$.

Ответ: доказано.

4. 1) а) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in z$; б) $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in z$;

в) $tg x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in z$;

2) а) $\sin x-1=0$, $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$; б) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in z$;

в) $2tg x=0$, $tg x=0$, $\frac{\sin x}{\cos x}=0$, $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in z$.

5. а) $\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5\pi}{6}$; б) $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$.

6. 1) а) Решим уравнение $sin\ 2x = 1$. Одно его решение $2x = \frac{\pi}{2}$ (т.к. $sin\frac{\pi}{2} = 1$), остальные отличаются на $2\pi n$ (где $n = 0; \pm 1; \pm 2; ...$). Получаем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

б) $cos\,3x = 0,\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in z;\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in z.$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; ...$ б) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{4},\ n \in z.$

2) а) Разложим левую часть уравнения $sin^2 x - sin\ x = 0$ на множители: $sin\,x(sin\,x - 1) = 0$. Получаем два простейших уравнения: $sin\,x = 0$ (его решения $x = \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; ...$) и $sin\,x = 1$ (корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; ...$).

б) $cos^2 x + cos\,x = 0,\ cos\,x\left(cos\,x + 1\right) = 0;\ cos\,x = 0,\ cos\,x = -1,$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in z,\ x_2 = \pi + 2\pi k,\ k \in z.$

3) а) Используем формулу для синуса разности двух углов и упростим левую часть уравнения: $sin\ 2x\ cos\ x - cos\ 2x\ sin\ x = 0$. Получаем: $sin(2x - x) = 0$ или $sin\,x = 0$. Корни этого уравнения $x = \pi n$ где $n = 0; \pm 1; \pm 2; ...$

б) $cos\,x\,cos\,2x + sin\,x\,sin\,2x = 0;\ cos\left(x - 2x\right) = 0,\ cos\,x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z.$

4) а) Используем формулу для косинуса двойного угла. Получаем: $cos^2 x = cos\,2x$ или $cos^2 x = cos^2 x - sin^2 x$ или $sin^2 x = 0$, откуда $sin\,x = 0$. Корни такого уравнения $x = \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; ...$

б) $2\,sin\,x = sin\,2x;\ 2\,sin\,x = 2\,sin\,x \cdot cos\,x;$

$sin\,x = 0,\ cos\,x = 1,\ x_1 = \pi n,\ n \in z,\ x_2 = 2\pi k,\ k \in z.$

Ответ: а) $x = \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; ...$; б) $x_1 = \pi n,\ n \in z, x_2 = 2\pi k,\ k \in z.$

7. а) В левой части уравнения $cos\,x\,cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$ применим формулу приведения и формулу для синуса двойного угла. Получаем: $cos\,x \cdot sin\,x = 1$ или $2cos\,x \cdot sin\,x = 2$ или $sin\,2x = 2$. Учтем ограниченность функции $sin\,2x$, т.е. $-1 \le sin\,2x \le 1$. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

б) $\frac{cos\,2x}{2\,cos^2 x - 1} = 0;\ \frac{2\,cos^2 x - 1}{2\,cos^2 x} = 0;\ 1 = 0$ – нет корней.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

Вариант 2

С–1. Функция. Область определения и область значений функции

1. 1) $f(x)=21x-7$; $f(3)=21\cdot3-7=56$; $f(0)=21\cdot0-7=-7$; $f(-2)=21\cdot(-2)-7=-49$;
2) $g(x)=x^2-10x$; $g(8)=8^2-10\cdot8=-16$; $g(-3)=(-3)^2-10\cdot(-3)=39$; $g(0)=0^2-10\cdot0=0$;
3) $\varphi(x)=\dfrac{x-6}{x+4}$; $\varphi(-3)=\dfrac{-3-6}{-3+4}=-9$; $\varphi(6)=\dfrac{6-6}{6+4}=0$; $\varphi(0)=\dfrac{0-6}{0+4}=-1{,}5$.

2. 1) $f(x)=12-5x$; **а)** $12-5x=2$, $5x=10$, $x=2$; **б)** $12-5x=24$, $5x=-12$, $x=-\dfrac{12}{5}$;

в) $12-5x=0$, $5x=12$, $x=\dfrac{12}{5}$;

2) $g(x)=\dfrac{1}{4}x+9$; **а)** $\dfrac{1}{4}x+9=10$, $\dfrac{1}{4}x=1$, $x=4$; **б)** $\dfrac{1}{4}x+9=1$, $\dfrac{1}{4}x=-8$, $x=-32$;

в) $\dfrac{1}{4}x+9=0$, $\dfrac{1}{4}x=-9$, $x=36$.

Ответ: 1) **а)** $x=2$; **б)** $x=-\dfrac{12}{5}$; **в)** $x=\dfrac{12}{5}$; 2) **а)** $x=4$; **б)** $x=-32$; **в)** $x=36$.

3. 1) **а)** $f(x)=37-3x$, $D(f)=R$; **б)** $g(x)=\dfrac{53}{x}$, $D(g)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

в) $\varphi(x)=x^2-7$, $D(\varphi)=R$; **г)** $y=\sqrt{x}$, $D(y)=[0+\infty)$;

Ответ: **а)** любое x; **б)** $x\neq0$; **в)** любое x; **г)** $x\geq0$.

2) **а)** $g(x)=10-x^2$, $D(g)=R$; **б)** $f(x)=-\dfrac{42}{x}$, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

в) $\varphi(x)=\sqrt{x-3}$, $x-3\geq0$, $x\geq3$, $D(\varphi)=[3;\ +\infty)$;

г) $y=\dfrac{12}{x+4}$, $x+4\neq0$, $x\neq-4$, $D(y)=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$.

Ответ: **а)** любое x; **б)** $x\neq0$; **в)** $x\geq3$; **г)** $x\neq-4$.

4. **а)** $y=-24x+5$, $E(y)=R$; **б)** $y=41$, $E(y)=41$;

в) $y=-\dfrac{22}{x}$, $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **г)** $y=\sqrt{x}$, $E(y)=[0;+\infty)$;

д) $y=|x|$, $E(y)=[0;+\infty)$.

Ответ: **а)** любое y, **б)** $y=41$, **в)** $y\neq0$, **г)** $y\geq0$, **д)** $y\geq0$.

5. **а)** $f(x)=\dfrac{x^2+5}{6x^2}$, $f(5)+f(-5)=2f(5)=2\cdot\dfrac{5^2+5}{6\cdot5^2}=0{,}4$;

б) $g(x)=\dfrac{4x^3-x}{9}$, $g(-2)+g(2)=-g(2)+g(2)=0$.

Ответ: а) 0,4; б) 0.

6. $g(x)=kx+b$, $\begin{cases}5=k+b\\-1=3k+b\end{cases}$, $\begin{cases}k=5-b\\-1=3(5-b)+b\end{cases}$; $-1=15-3b+b$;

$2b=16$; $b=8$; $k=5-8=-3$.

Ответ: $k=-3$, $b=8$.

7. а) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-4}$; б) $g(x)=\sqrt{x-6}$.

С–2. График функции

1. 1) а) $g(-1)=-3$; б) $g(0)=-1$; в) $g(1)=0$; г) $g(3)=1{,}5$;

2) а) $g(x)=3$; $x=-3$; б) $g(x)=0$; $x_1=-2{,}5$; $x_2=1$; $x_3=3{,}5$;

в) $g(x)=-2$; $x_1=-2$; $x_2=-0{,}5$; 3) $g_{max}=3$, $g_{min}=-3$;

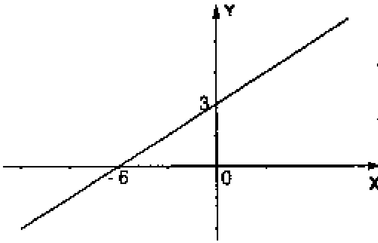
4) $E(g)=[-3;3]$.

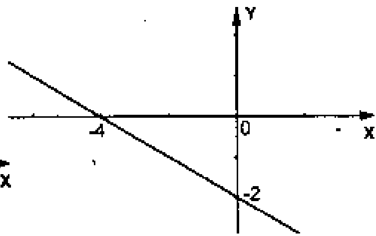
2. 1) а) $y=0{,}5x+3$;

x	0	−6
y	3	0

б) $y=-0{,}5x-2$;

x	0	−4
y	−2	0

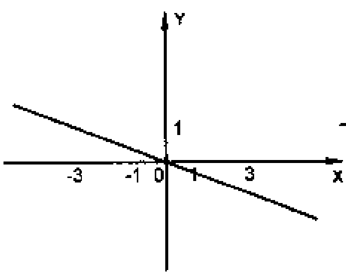


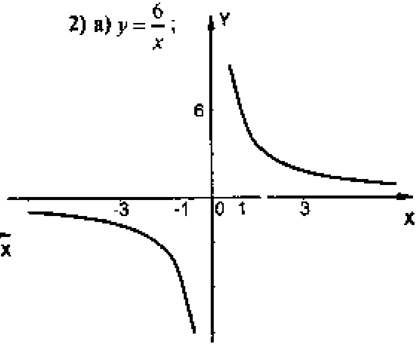


в) $y=-\dfrac{1}{3}x$;

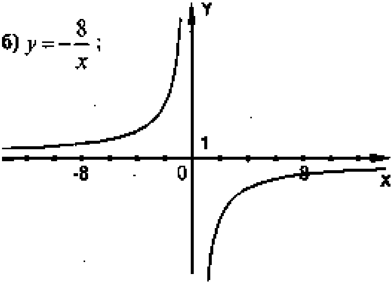
x	0	−3
y	0	1

2) а) $y=\dfrac{6}{x}$;

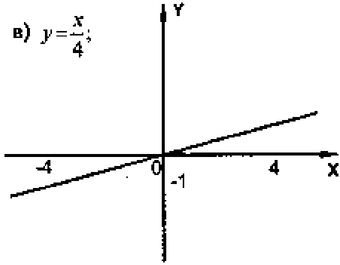




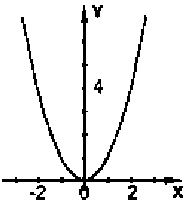
б) $y=-\dfrac{8}{x}$;



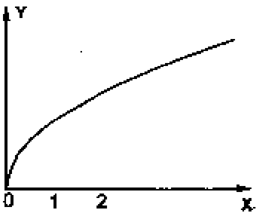
в) $y=\dfrac{x}{4}$;



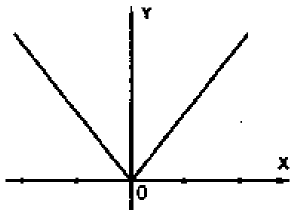
3) а) $y=x^2$;



б) $y=\sqrt{x}$; $x\geq 0$;

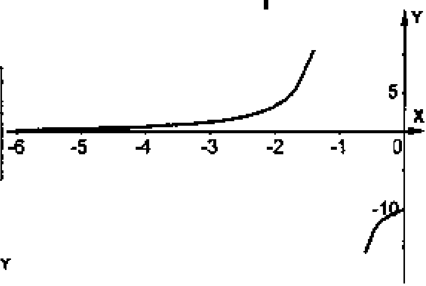


в) $y=|x|$.



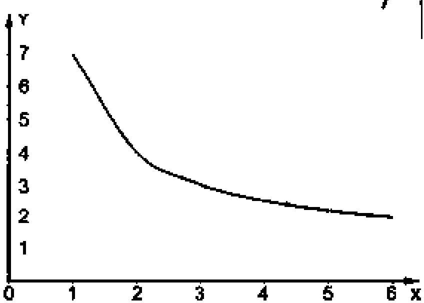
3. а) $y=\dfrac{10}{x^2-1}$; $-6\leq x\leq 0$;

x	- 6	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0
y	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{3}$	–	- 10

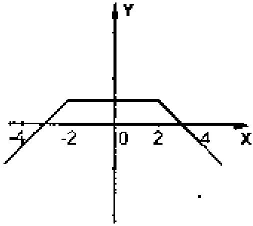


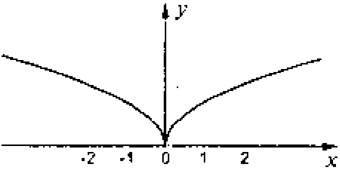
б) $y=\dfrac{x+6}{x}$; где $1\leq x\leq 6$.

x	1	2	3	4	5	6
y	7	4	3	2,5	$\frac{11}{5}$	2



4. а) $y = \begin{cases} x+3, & \text{если } x < -2; \\ 1, & \text{если } -2 \le x \le 2; \\ -x+3, & \text{если } x > 2; \end{cases}$ б) $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \ge 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$

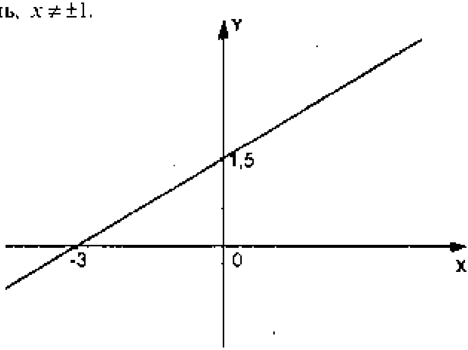




5. $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & -2 \le x \le -1 \\ 2, & -1 < x \le 2 \\ 2x-2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$.

6. $g(x) = \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{2(x^2-1)} = \dfrac{x^2(x+3)-(x+3)}{2(x^2-1)} = \dfrac{(x+3)(x^2-1)}{2(x^2-1)} = \dfrac{x}{2}+1,5;$

$x^2-1 \ne 0$, т.к. знаменатель, $x \ne \pm 1$.



7. 1) два привала – 30 мин и 1 ч; 2) 6 км; 6 км; 6 км;

3) 6 км/ч; $\dfrac{6}{2} = 3$ (км/ч); $\dfrac{6}{1,5} = 4$ (км/ч); 4) 6 ч; 5) 7,5 км; 10,5 км; 12км.

8. 1) велосипедист на 3 ч; 2) 6,5 ч; 2,5 ч; 3) $\dfrac{35}{6,5} = \dfrac{70}{13}$ (км/ч); $\dfrac{35}{2,5} = 14$ (км/ч);

4) велосипедист на 1 ч; 5) через 2 ч; 6) 10 (км).

С–3. Свойства функции

1. 1) а) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=3$; б) $f(x)>0$ при $x\in(-2;\ 1)\cup(3;\ 4]$; $f(x)<0$ при $x\in[-3;-2]\cup(1;\ 3)$; 2) $f(x)$ возрастает при $x\in[-3;\ -1]\cup[2;\ 4]$; $f(x)$ убывает при $x\in[-1;\ 2]$; 3) $x_{max}=-1,\ x_{min}=-3$; 4) $E\ (f)=[-2;\ 3]$.

2. 1) а) $y=25x-18$; $D(y)=E(y)=R$, $y>0$ при $x>\frac{18}{25}$, $y<0$ при $x<\frac{18}{25}$, $y=0$ при $x=\frac{18}{25}$, $y(x)$ возрастает на R ; б) $y=-0{,}83x+16{,}2$; $D(y)=R$, $E(y)=R$, $y>0$ при $<\frac{16{,}2}{0{,}83}=\frac{1620}{83}$, $y<0$ при $x>\frac{1620}{83}$, $y=0$ при $x=\frac{1620}{83}$, $y(x)$ убывает на R ; в) $y=-27$; $D(y)=R$, $E(y)=-27$, $y<0$ на R.

2) а) $y=\frac{36}{x}$; $D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0+\infty)$; $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$, $y(x)$ убывает на $D(y)$; б) $y=-\frac{63}{x}$; $D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$; $y>0$ при $x<0$, $y<0$ при $x>0$, $y(x)$ возрастает на R.

3. 1) а) $y=\frac{1}{5}x-8$, $\frac{1}{5}x=8$, $x=40$; б) $y=-0{,}4x+32$, $0{,}4x=32$, $x=80$;

в) $y=47$ нет нулей функции.

2) а) $y=9x(x-5)$, $x_1=0$, $x_2=5$;

б) $y=16\left(x^2+2\right)$ – нет нулей функции;

в) $y=x(x-1)(x+2)$, $x_1=0, x_2=1, x_3=-2$;

3) а) $y=\sqrt{x-3}$; $x=3$; б) $y=\sqrt{x^2-4}$; $x_1=2; x_2=-2$; в) $y=\sqrt{x^2+4}$, нет нулей функции.

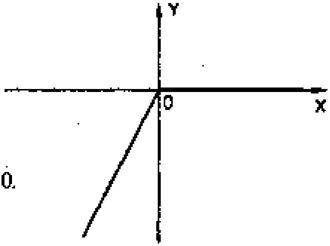
Ответ: а) 3; б) $x=2$, $x=-2$; в) нет.

4. $g(x)=x-|x|$; $g(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } x\le 0\\ 0, & \text{если } x>0\end{cases}$

Свойства: $D(g)=R$, $E(g)=(-\infty;\ 0]$.

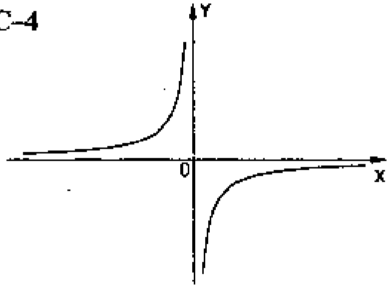
Нули функции: $x\ge 0$, $g(x)<0$ при $x<0$.

$g(x)$ возрастает при $x\le 0$, $g_{max}=g(0)=0$.



5. $D(f)=R, E(f)=[-4;\ 4]$; $f(x)>0$ при $x<0$; $f(x)<0$ при $x>0$; $f(x)=0$ при $x=0$; $f(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;\ -2]$ и $[2;+\infty)$; $f(x)$ убывает при $x\in[-2;\ 2]$.

С–4



1. $y=-\frac{3}{x}$; $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

а) $y(-2)=1{,}5$; $y(-1{,}5)=2$;;

$y(1{,}5)=-2$; $y(2)=-1{,}5$

б) $-4=-\frac{3}{x}$, $x=\frac{3}{4}$;

$-3=-\frac{3}{x}$, $x=1$; $x=-\frac{3}{4}$, $x=-1$;

в) $y>0$ при $x<0$, $y<0$ при $x>0$.

2. $y=\frac{144}{x}$; а) $20\frac{4}{7}=\frac{144}{-7}$ – ложно, значит, точка A не принадлежит графику;

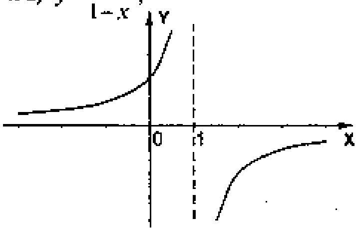
б) $24=\frac{144}{6}$ – верно, значит, точка B принадлежит графику;

в) $144=\frac{144}{0}$ – ложно, значит, точка C не принадлежит графику;

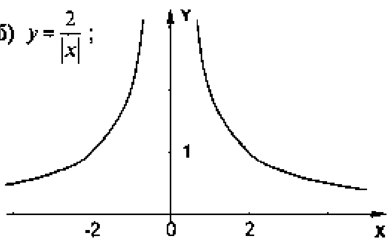
г) $-12=\frac{144}{12}$ – ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. $\frac{2}{x}=x+1$.

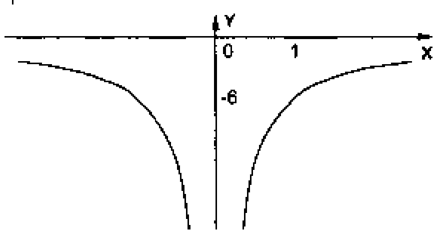
4. а) $y=\frac{4}{1-x}$;



б) $y=\frac{2}{|x|}$;



в) $y=-\frac{6}{|x|}$.



5. $y=\frac{k}{x}$, $0{,}25=\frac{k}{4}$, $k=1$, $y=\frac{1}{x}$.

С–5. Квадратный трехчлен и его корни

1. 1) а) $x^2-8x+15=0$; $D=64-60=4$; $x_1=\frac{8+2}{2}=5$; $x_2=3$;

б) $-y^2+3y-10=0$; $y^2-3y+10=0$; $D=9-4\cdot10<0$, значит, нет корней;

в) $4b^2-16b+12=0$; $b^2-4b+3=0$; $D=16-4\cdot3=4$; $b_1=\frac{4+2}{2}=3$; $b_2=1$;

г) $2a^2-a=0$; $a(2a-1)=0$; $a_1=0$, $a_2=0{,}5$.

2) а) $5y^2+14y-3=0$, $D=196+4\cdot5\cdot3=256$, $y_1=\frac{-14+16}{10}=0{,}2$, $y_2=-3$;

б) $10b^2-7b+1=0$, $D=49-4\cdot10=9$, $b_1=\frac{7+3}{20}=0{,}5$, $b_2=0{,}2$;

в) $-0{,}4c^2+0{,}8=0$, $0{,}4c^2=0{,}8$, $c^2=2$, $c_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; г) $7x^2-28=0$, $x^2=4$, $x_{1,2}=\pm2$;

3) а) $0{,}5x^2-x-1=0$; $x^2-2x-2=0$; $D=4+4\cdot2=4\cdot3$; $x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$;

б) $-100c^2+20c+3=0$; $100c^2-20c-3=0$; $D=400+4\cdot100\cdot3=1600$;

$c_1=\frac{20+40}{200}=0{,}3$; $c_2=-\frac{20}{200}=-0{,}1$;

в) $-25a^2+10a-1=0$; $25a^2-10a+1=0$; $D=100-4\cdot25=0$; $a=\frac{10}{50}=0{,}2$.

2. 1) а) $x^2+4x+1=x^2+4x+4-3=(x+2)^2-3$;

б) $3b^2-12b+11=3(b^2-4b+\frac{11}{3})=3(b^2-4b+4-\frac{1}{3})=3(b-2)^2-1$;

в) $y^2+2y=y^2+2y+1-1=(y+1)^2-1$.

2) а) $-b^2+6b-8=-(b^2-6b+8)=-(b^2-6b+9-1)=-(b-3)^2+1$;

б) $\frac{1}{4}y^2-y+2=\frac{1}{4}(y^2-4y+8)=\frac{1}{4}(y^2-4y+4+4)=\frac{1}{4}(y-2)^2+1$.

3. а) $x^2-10x+28=x^2-10x+25+3=(y-5)^2+3>0$;

б) $-x^2+4x-6=-(x^2-4x+6)=-(x^2-4x+4+2)=-(x-2)^2-2<0$.

4. а) b^2-4b+9; $b_0=\frac{4}{2}=2$; б) $-b^2+6b-14$; $b_0=\frac{-6}{-2}=3$.

5. $(12-b)$ см, $(8+b)$ см – новые стороны; $(12-b)(8+b)$ см^2 – площадь полученного прямоугольника; $(12-b)(8+b)=-b^2+4b+96$, $b_0=\frac{-4}{-2}=2$.

Ответ: b = 2 см.

С–6. Разложение квадратного трехчлена на множители

1.1)а) $x^2-7x+10=0$; $D=49-40=9$; $x_1=\frac{7+3}{2}=5$; $x_2=2$; $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$;

б) $3x^2+3x-6=0$; $x^2+x-2=0$; $D=1+4\cdot2=9$; $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$; $x_2=-2$;

$3x^2+3x-6=(x-1)(x+2)$; в) $7x^2-63=7\left(x^2-9\right)=7(x-3)(x+3)$;

г) $5x^2+19x-4=0$; $D=361+4\cdot5\cdot4=441$; $x_1=\frac{-19+21}{10}=\frac{1}{5}$, $x_2=-4$;

$5x^2+19x-4=5(x-\frac{1}{5})(x+4)=(5x-1)(x+4)$;

2) а) $x^2+x-72=0$; $D=1+4\cdot72=289$; $x_1=\frac{-1+17}{2}=8$, $x_2=-9$;

$x^2+x-72=(x-8)(x+9)$; б) $7x^2+20x-3=0$; $D=400+4\cdot7\cdot3=484$;

$x_1=\frac{-20+22}{14}=\frac{1}{7}$, $x_2=-3$; $7x^2+20x-3=7(x-\frac{1}{7})(x+3)=(7x-1)(x+3)$;

в) $12x^2-588=12\left(x^2-49\right)=12(x-7)(x+7)$; г) $3x^2-12x+3=3\left(x^2-4x+1\right)=$

$=3\left(x^2-4x+4-3\right)=3\left((x-2)^2-3\right)=3\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)$.

2. 1) $x^2-5x+7=0$, $D=25-4\cdot7<0$; б) $-3x^2+2x-1=0$, $3x^2-2x+1=0$; $D=4-4\cdot3<0$.

2) а) $x^2-12x+39=0$; $D=144-4\cdot39<0$; б) $-4x^2+4x-3=0$; $4x^2-4x+3=0$;

$D=16-4\cdot4\cdot3<0$; в) $x^2+3=0$; $D=-4\cdot3<0$.

3. 1) а) $\frac{4b+12}{b^2-9}=\frac{4(b+3)}{(b-3)(b+3)}=\frac{4}{b-3}$; б) $\frac{c^2+c-6}{7c+21}=\frac{(c-2)(c+3)}{7(c+3)}=\frac{c-2}{7}$;

$c^2+c-6=0$, $D=1+4\cdot6=25$; $c_1=\frac{-1+5}{2}=2$, $c_2=-3$; в) $\frac{16-2x}{8+7x-x^2}=\frac{2(8-x)}{-(x-8)(x+8)}=$

$=\frac{2}{x+1}$; $x^2-7x-8=0$, $D=49+4\cdot8=81$, $x_1=\frac{7+9}{2}=8$, $x_2=-1$;

2) а) $\frac{a^2-16a+63}{a^2-81}=\frac{(a-9)(a-7)}{(a-9)(a+9)}=\frac{a-7}{a+9}$, $a^2-16a+63=0$, $D=256-4\cdot63=4$;

$a_1=\frac{16+2}{2}=9$, $a_2=7$;

б) $\frac{y^3+7y^2-60y}{10y-50}=\frac{y\left(y^2+7y-60\right)}{10(y-5)}=\frac{y(y-5)(y+12)}{10(y-5)}=\frac{y(y+2)}{10}$,

$y^2+7y-60=0$, $D=49+4\cdot60=289$; $y_1=\frac{-7+17}{2}=5$, $a_2=-12$;

в) $\dfrac{3+14b-5b^2}{3b-b^2}=\dfrac{-(b-3)\left(b+\dfrac{1}{5}\right)\cdot 5b}{b(3-b)}=\dfrac{5b+1}{b}$,

$5b^2-14b-3=0$, $D=196+4\cdot5\cdot3=256$; $b_1=\dfrac{14+16}{10}=3$, $b_2=-\dfrac{1}{5}$;

4. 1) $\dfrac{x^2-8x-33}{10x+30}=\dfrac{(x-11)(x+3)}{10(x+3)}=\dfrac{x-11}{10}=f(x)$;

$x^2-8x-33=0$; $D=64+4\cdot33=196$; $x_1=\dfrac{8+14}{2}=11$; $x_2=-3$;

$f(-9)=\dfrac{-9-11}{10}=-2$; $f(12)=\dfrac{12-11}{10}=0{,}1$; $f(111)=\dfrac{111-11}{10}=10$.

2) $\dfrac{8y-56}{y^2-27y+140}=\dfrac{8(y-7)}{(y-20)(y-7)}=\dfrac{8}{y-20}=f(y)$;

$y^2-27y+140=0$, $D=729-4\cdot140=169$, $y_1=\dfrac{27+13}{2}=20$, $y_2=7$;

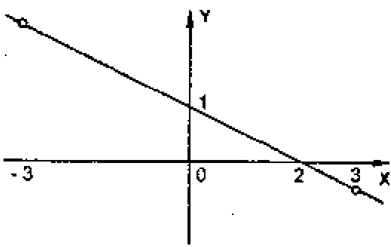
$f(-4)=\dfrac{8}{-4-20}=-\dfrac{1}{3}$; $f(22{,}5)=\dfrac{8}{22{,}5-20}=3{,}2$; $f(24)=\dfrac{8}{24-20}=2$.

5. $\dfrac{9b-4}{b+7}-\dfrac{44-16b}{b^2+5b-14}=\dfrac{9b-4}{b+7}-\dfrac{44-16b}{(b-2)(b+7)}=\dfrac{(9b-4)(b-2)-44+16b}{(b-2)(b+7)}=$

$=\dfrac{9b^2-4b-18b+8-44+16b}{(b-2)(b+7)}=\dfrac{9b^2-6b-36}{(b-2)(b+7)}$,

$b^2+5b-14=0$, $D=25+4\cdot14=81$, $b_1=\dfrac{-5+9}{2}=2$, $b_2=-7$.

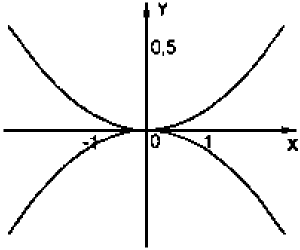
6. $y(x)=\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{18-2x^2}=\dfrac{x^2(x-2)-9(x-2)}{2(9-x^2)}=-\dfrac{(x-2)(x^2-9)}{2(x^2-9)}=\dfrac{2-x}{2}=-\dfrac{x}{2}+1$; $x\neq\pm3$.



С–7. Функция $y = x^2$, ее график и свойства

1. $g(x)=\frac{1}{10}x^2$;

x	0	±1	±2	±4	±6	±8
y	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{32}{5}$



$g(-3)=g(3)=0{,}9$;

$g(-5)=g(5)=2{,}5$;

$f(x)=-\frac{1}{10}x^2$;

$f(-3)=f(3)=-0{,}9$; $f(-5)=f(5)=-2{,}5$.

2. $y=-2x^2$; а) $y=-200, -200=-2x^2$, $x^2=100$, $x=\pm10$, $(10;\ -200), (-10;\ -200)$;

б) $y=-3200$, $-3200=-2x^2$; $x^2=1600$; $x=\pm40$; $(40;-3200)$, $(-40;-3200)$;

в) $y=40x$, $40x=-20x^2$, $x_1=0$, $x_2=-2$, $(0;\ 0), (-2;\ -80)$;

г) $y=-1400x$, $-1400x=-2x^2$; $x_1=0$; $x_2=700$; $(0;\ 0)$, $(700;\ -980000)$.

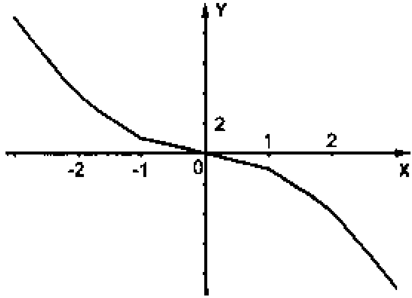
3. $y=40x^2$;

а) $A(-2;-160)$; $-160=40\cdot4$ – ложно, значит, не принадлежит;

б) $B(2;160)$; $160=40\cdot4$ – верно, значит, принадлежит;

в) $C(0{,}1;0{,}4)$; $0{,}4=40\cdot0{,}01$ – верно, значит, принадлежит.

4.

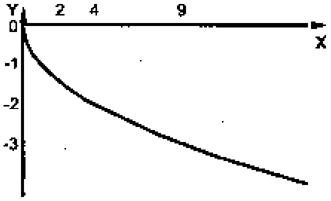


5. а) $y=\frac{1}{4}x^2$, $x\in[-4;8]$; $y_{мин}=y(0)=0$; $y_{max}=y(8)=16$;

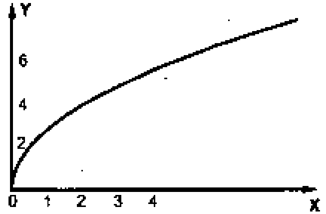
б) $y=-\frac{1}{3}x^2$, $x\in[-6;3]$; $y_{мин}=y(-6)=-\frac{1}{3}\cdot36=-12$; $y_{max}=y(0)=0$.

6. $S=\frac{gt^2}{2}$; $560=\frac{10\cdot t^2}{2}$; $t^2=112$; $t=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ (с).

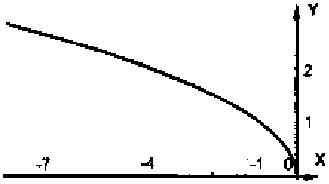
7. а)



б)

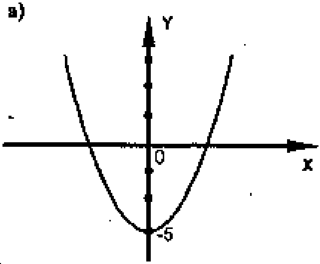


в)

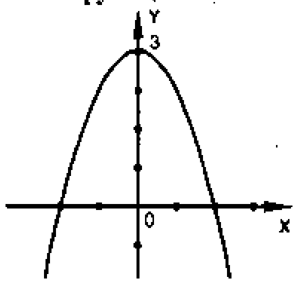


С–8. График квадратичной функции

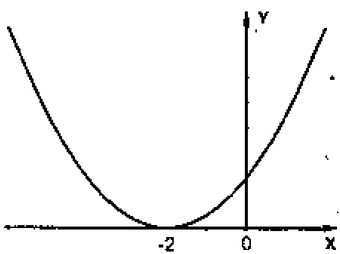
1. а)



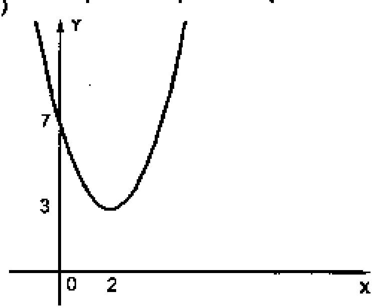
б)



в)



г)

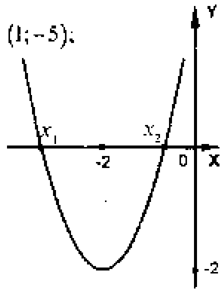


2. а) $g(x)=x^2+4x+2$, $m=-\dfrac{4}{2}=-2$, $n=f(-2)=4-8+2=-2$, $(-2;-2)$;

б) $g(x)=-x^2-6x+3$; $m=\dfrac{6}{-2}=-3$; $n=f(-3)=-9+18+3=12$; $(-3;\ 12)$

в) $g(x)=4x^2-8x-1$, $m=\dfrac{8}{8}=1$, $n=f(1)=4-8-1=-5$, $(1;-5)$;

3. $g(x)=x^2+4x+2$;



а) $x_1\approx-3{,}4$; $x_2\approx-0{,}6$;

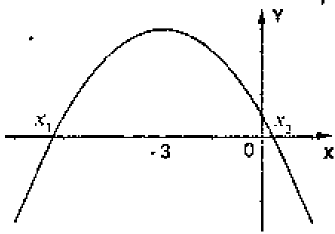
$g(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$;

$g(x)<0$ при $x\in(x_1;\ x_2)$;

б) $g(x)$ возрастает при $x\in[-2;\ +\infty)$;

убывает при $x\in(-\infty;\ -2]$; $g_{min}=-2$.

4. $g(x)=-x^2-6x+3$;



а) $x_1\approx-6{,}4$; $x_2\approx0{,}4$;

$g(x)>0$ при $x\in(x_1;\ x_2)$;

$g(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$;

б) $g(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;\ -3]$;

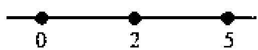
$g(x)$ убывает при $x\in[-3;\ +\infty)$;

$g_{max}=12$.

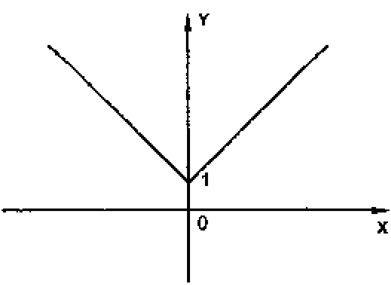
5. $y=-x^2+4x+3$, $x\in[0;\ 5]$; $m=\dfrac{-4}{-2}=2$; $n=y(2)=-4+8+3=7$;

$y(5)=-25+20+3=-2$;

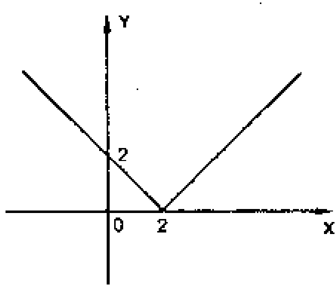
$E(y)=[-2;\ 7]$.



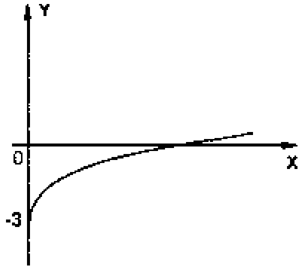
6. а)



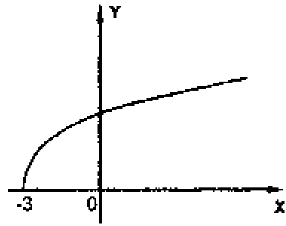
б)



в)



г)



7. $y=x^2+bx+c$, $K(7;2)$, $m=-\frac{b}{2}=7$, $b=-14$,

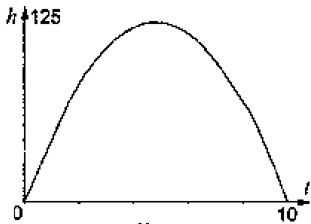
$2=n=f(7)=49-14\cdot7+c=c-49$, $c=51$.

8. $S(t)=50t-5t^2$;

1) 125 м; 2) стрела поднималась вверх при $t\in[0;5]$,

опускалась вниз при $t\in[5;10]$;

3) через 10 с.



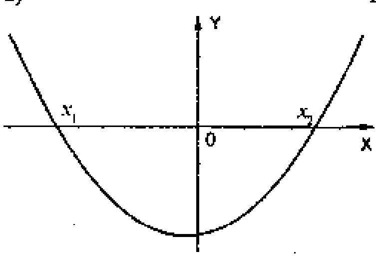
С–9. Решение неравенства второй степени

1. 1) $y=3x^2+x-17$; а) вверх;

б) $3x^2+x-17=0$; $D=1+4\cdot3\cdot17=205$;

$x_{1,2}=\frac{-1\pm2\sqrt{51}}{6}$;

в)



г) $y>0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$;

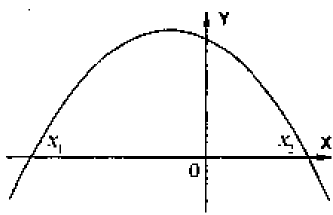
$y<0$ при $x\in(x_1;x_2)$.

2) $y=-2x^2-5x+12$; а) вниз;

б) $2x^2+5x-12=0$; $D=25+8\cdot12=121$;

$x_2=\frac{-5+11}{4}=1,5$; $x_1=-4$;

в)



г) $y>0$ при $x\in(x_1;x_2)$;

$y<0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

2. а) $x^2-10x+21>0$; $D=100-4\cdot 21=16$;

$x_1=\dfrac{10+4}{2}=7$; $x_2=3$;

Ответ: $(-\infty;\ 3)\cup(7;\ +\infty)$.

б) $4x^2+11x-3<0$, $D=121+16\cdot 3=169$;

$x_1=\dfrac{-11+3}{8}=\dfrac{1}{4}$; $x_2=-3$;

Ответ: $\left(-3;\ \dfrac{1}{4}\right)$.

в) $x^2-16>0$, $(x-4)(x+4)>0$.

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

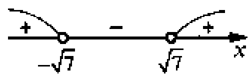
г) $5x-x^2>0$; $x^2-5x<0$; $x(x-5)<0$.

Ответ: $(0;\ 5)$.

3. а) $x^2\le 9$; $(x-3)(x+3)\le 0$.

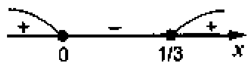
Ответ: $[-3;\ 3]$.

б) $x^2>7$; $x^2-7>0$; $\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)>0$.



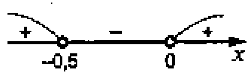
Ответ: $\left(-\infty;\ -\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7};\ +\infty\right)$.

в) $3x^2\ge x$; $x^2-\dfrac{x}{3}\ge 0$; $x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\ge 0$.



Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup\left[\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

г) $-4x<8x^2$; $8x^2+4x>0$, $x^2+\dfrac{x}{2}>0$; $x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)>0$.



Ответ: $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(0;\ +\infty)$.

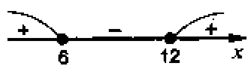
4. а) $7b^2-4b+1>0$, $D=16-4\cdot 7<0$, т.к. $a=7>0$, то любое b – решение, ч.т.д.

б) $8b<b^2+17$, $b^2-8b+17>0$, $D=64-4\cdot 17<0$, т.к. $a=1>0$,

то любое b – решение, ч.т.д.

5. а) $y=\sqrt{x^2-18x+72}$; $x^2-18x+72\ge 0$; $D=324-4\cdot 72=36$;

$x_1=\dfrac{18+6}{2}=12$; $x_2=6$;



Ответ: $(-\infty;\ 6]\cup[12;\ +\infty)$.

б) $y=\dfrac{7}{\sqrt{6x-3x^2}}$; $6x-3x^2>0$; $3x^2-6x<0$; $x^2-2x<0$; $x(x-2)<0$.

Ответ: $(0;\ 2)$.

6. $x^2-8x+c<0$

а) $D=64-4c$, чтобы (3; 5) был решением, нужно $x_1=3$, $x_2=5$,

т.е. $9-27+c=0$; $c=15$.

б) ни при каких c.

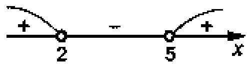
7. $\dfrac{x^2-14x+48}{(x-7)^2}<0$; $\dfrac{(x-6)(x-8)}{(x-7)^2}<0$; $x^2-14x+48=0$; $D=196-4\cdot 48=4$;

$x_1=\dfrac{14+2}{2}=8$; $x_2=6$.

Ответ: $(6;\,7)\cup(7;\,8)$.

С–10. Решение неравенств методом интервалов

1. 1) а) $(x-2)(x-5)>0$.

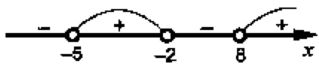


Ответ: $(-\infty;\,2)\cup(5;\,+\infty)$.

б) $(x+3)(x-7)<0$.

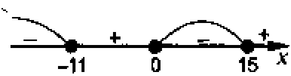
Ответ: $(-3;\,7)$.

в) $(x+5)(x+2)(x-8)>0$.



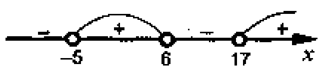
Ответ: $(-5;\,-2)\cup(8;\,+\infty)$.

г) $x(x+11)(x-15)\le 0$.



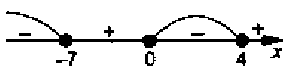
Ответ: $(-\infty;\,-11]\cup[0;\,15]$.

2) а) $(x+5)(x-6)(x-17)>0$.



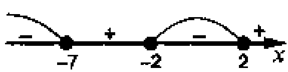
Ответ: $(-5;\,6)\cup(17;\,+\infty)$.

б) $x(x+7)(x-4)\le 0$.



Ответ: $(-\infty;\,-7]\cup[0;\,4]$.

в) $(x^2-4)(x+7)\le 0$, $(x-2)(x+2)(x+7)\le 0$.



Ответ: $(-\infty;-7]\cup[-2;\,2]$.

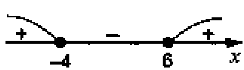
г) $(x^2+4)(x+4)(x-8)\le 0$, $(x+4)(x-8)\le 0$.

Ответ: $[-4;\,8]$.

2. 1) а) $(2x-3)(x+5)<0$; $(x-1{,}5)(x+5)<0$.

Ответ: $(-5;\,1{,}5)$.

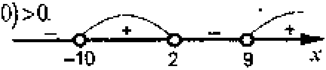
б) $(6-x)(3x+12)\le 0$; $(x-6)(x+4)\ge 0$.



Ответ: $(-\infty;\,-4]\cup[6;\,+\infty)$.

в) $-(x-2)(9-x)(x+10)>0$, $(x-2)(x-9)(x+10)>0$.

Ответ: $(-10;\ 2)\cup(9;\ +\infty)$.

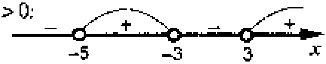


2) а) $(5x+7)(8-x)>0$; $(x+\frac{7}{5})(x-8)<0$

Ответ: $(-\frac{7}{5};\ 8)$.

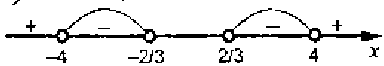
б) $(9-x^2)(6x+30)<0$; $(x-3)(x+3)(x+5)>0$;

Ответ: $(-5;\ -3)\cup(3,\ +\infty)$.



в) $(9x^2-4)(16-x^2)(2x^2+3)>0$; $(x^2-\frac{4}{9})(x^2-16)<0$,

$(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})(x-4)(x+4)<0$.



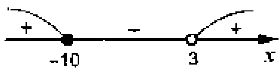
Ответ: $(-4;\ -\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3};\ 4)$.

3. 1) а) $\frac{x-4}{x+8}<0$.

Ответ: $(-8;\ 4)$.

б) $\frac{x+10}{x-3}\geq 0$.

Ответ: $(-\infty;\ -10]\cup[3;\ +\infty)$.

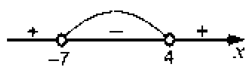


в) $\frac{9x}{5x-12}\leq 0$; $\frac{x}{x-2{,}4}\leq 0$.

Ответ: $[0;\ 2{,}4]$.

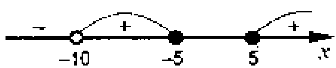
2) а) $\frac{3x-12}{x+7}<0$; $\frac{x-4}{x+7}<0$.

Ответ: $(-7;\ 4)$.



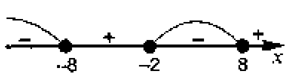
б) $\frac{x^2-25}{x+10}\geq 0$, $\frac{(x-5)(x+5)}{x+10}\geq 0$

Ответ: $(-10;\ -5]\cup[5;\ +\infty)$.



в) $\frac{(x+2)(x^2-64)}{x^2+15}\leq 0$; $(x+2)(x-8)(x+8)\leq 0$.

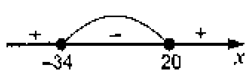
Ответ: $(-\infty;\ -8]\cup[-2;\ 8]$.



4. а) $y=\sqrt{(x+34)(20-x)}$; $(x+34)(20-x)\geq 0$;

$(x+34)(x-20)\leq 0$.

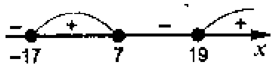
Ответ: $[-34;\ 20]$.



б) $y=\sqrt{(x-7)(x+17)(x-19)}$;

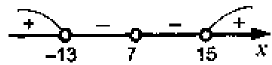
$(x-7)(x+17)(x-19)\ge 0$.

Ответ: $[-17;\ 7]\cup[19;\ +\infty)$.



5. а) $(x+13)(x-7)^2(x-15)>0$.

Ответ: $(-\infty;\ -13)\cup(15;\ +\infty)$.

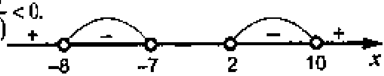


б) $\dfrac{x^2+15x+56}{x^2-12x+20}<0$; $x^2+15x+56=0$; $D=225-4\cdot56=1$; $x_1=\dfrac{-15+1}{2}=-7$; $x_2=-8$;

$x^2-12x+20=0$; $D=144-4\cdot20=64$;

$x_1=\dfrac{12+8}{2}=10$; $x_2=2$; $\dfrac{(x+7)(x+8)}{(x-2)(x-10)}<0$.

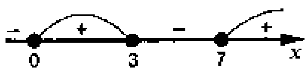
Ответ: $(-8;\ -7)\cup(2;\ 10)$.



в) $x^3-10x^2+21x\ge 0$; $x(x^2-10x+21)\ge 0$; $x^2-10x+21=0$; $D=100-4\cdot21=16$;

$x_1=\dfrac{10+4}{2}=7$; $x_2=3$; $x(x-7)(x-3)\ge 0$.

Ответ: $[0;\ 3]\cup[7;\ +\infty)$.

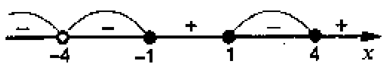


г) $\dfrac{x^4-17x^2+16}{5x+20}\le 0$, $x^4-17x^2+16=0$, $D=289-4\cdot16=225$, $x_1^2=\dfrac{17+15}{2}=16$, $x_2^2=1$;

$\dfrac{(x^2-16)(x^2-1)}{x+4}\le 0$,

$\dfrac{(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)}{x+4}\le 0$.

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -1]\cup[1;\ 4]$.



С–11. Целое уравнение и его корни

1. а) $x^4-x^3+2x^5-2=0$; $2x^5+x^4-x^3-2=0$ – пятая степень;

б) $(2x-1)(x+4)(x-8)=0$ – третья степень; **в)** $(x^2+6)(x-5)-x(x+1)(x-1)=0$;

$x^3+6x-5x^2-30-x^3+x=0$; $-5x^2+7x-30=0$ – вторая степень;

г) $(5x^4-1)(5x^2-2)-(5x^3+1)^2=0$; $25x^6-5x^2-10x^4+2-25x^6-10x^3-1=0$;

$-10x^4-10x^3-5x^2+1=0$ – четвертая степень.

2. а) $x^3-9x=0$; $x(x^2-9)=0$; $x(x-3)(x+3)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm3$.

б) $x^2(x-7)+7(x^2-x)=-6$; $x^3-7x^2+7x^2-7x+6=0$, $x^3-7x+6=0$;

$(x-1)(x^2+x-6)=0$, $(x-1)(x-2)(x+3)=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$;

в) $x^4-13x^2+36=0$; $D=169-4\cdot 36=25$; $x_1^2=\dfrac{13+5}{2}=9$; $x_2^2=4$; $x_{1,2}=\pm 3$; $x_{3,4}=\pm 2$.

Ответ: а) -3; 0; 3; б) -3; 1; 2; в) -3; -2; 2; 3.

3. 1) а) $(8x+1)(2x-3)-(4x-2)^2=1$; $16x^2+2x-24x-3-16x^2+16x-4-1=0$;

$-6x=8$; $x=-\dfrac{4}{3}$; б) $5x(5x-1)-(5x+3)(5x-3)=x-3$; $25x^2-5x-25x^2+9=x-3$;

$6x=12$; $x=2$; в) $\dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{x+1}{2}=1$; $4x-2-5x-5=10$; $x=-17$;

г) $\dfrac{x(2x-5)}{6}-\dfrac{x(x-2)}{3}=1$; $2x^2-5x-2x^2+4x-6=0$, $x=-6$.

2) а) $(2x-3)(x+1)=x^2+17$; $2x^2-3x+2x-3=x^2+17$; $x^2-x-20=0$; $D=1+4\cdot 20=81$;

$x_1=\dfrac{1+9}{2}=5$, $x_2=-4$; б) $(x-7)(x+7)+(x-2)^2=11x+30-(x+5)^2$;

$x^2-49+x^2-4x+4=11x+30-x^2-10x-25$, $3x^2-5x-50=0$; $D=25+4\cdot 3\cdot 50=625$;

$x_1=\dfrac{5+25}{6}=5$, $x_2=-\dfrac{10}{3}$; в) $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{x+9}{3}$; $\dfrac{x^2}{27}=3$; $x^2=81$; $x_{1,2}=\pm 9$;

г) $\dfrac{x^2-6x-4}{3}=\dfrac{11x}{10}+1$ $10x^2-60x-40=33x+30$; $10x^2-93x-70=0$;

$D=107^2$; $x_1=\dfrac{93+107}{10}=20$, $x_2=-1{,}4$.

Ответ: а) -4 и 5; б) $-\dfrac{10}{3}$ и 5; в) -9 и 9; г) 20 и $-1{,}4$.

4. а) $x+11=0$; б) $(x-2)(x+9)=0$; $x^2+7x-18=0$; в) $(x-4)(x-7)(x+7)=0$;

$(x-4)(x^2-49)=0$; $x^3-4x^2-49x+196=0$.

5. а) $\dfrac{x(2-x)}{2}+\dfrac{3(x-3)^2}{2}=2\dfrac{1}{2}-\dfrac{2(4-x)^2}{3}$, $3x(2-x)+9(x^2-6x+9)=$

$=15-4(16-8x+x^2)$, $6x-3x^2+9x^2-54x+81=15-64+32x-4x^2$,

$10x^2-80x+130=0$, $x^2-8x+13=0$, $D=64-4\cdot 13=4\cdot 3$, $x_{1,2}=\dfrac{8\pm 2\sqrt{3}}{2}=4\pm\sqrt{3}$;

б) $x=\dfrac{(3-x)^2}{9}-\dfrac{x(x-12)}{18}+\dfrac{(3-x)(x-2)}{36}$; $36x=4(9-6x+x^2)-2x(x-12)+$

$+(3x-x^2-6+2x)$, $36x=36-24x+4x^2-2x^2+24x-x^2-6+5x$,

$x^2-31x+30=0$, $D=961-4\cdot 30=841$, $x_1=\dfrac{31+29}{2}=30$, $x_2=1$.

Ответ: а) $4\pm\sqrt{3}$; б) 1 и 30.

6. а) $x^6+3x^4+x^2=-16$; $x^6+3x^4+x^2+16=0$; уравнение не имеет корней, т.к. $x^6+3x^4+x^2+16>0$ при всех x;

б) $25x(x+2)-(5x-1)(5x+1)=25(2x-1)+26$, $25x^2+50x-25x^2+1=$ $=50x-25+26$; $1=1$ – у этого уравнения корень – любое число;

в) $6x^5+8x^3+12x-41=0$; $6x^5+8x^3+12x=41$, верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля), а правая $41>0$;

г) $5x^5+25x^4-20x^3+10x^2-5x=17$, уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 5, а левая – нет.

С-12. Уравнения с параметрами

1. а) $5(x-2)-4(3+x)=2+ax$; $5(6-2)-4(3+6)=2+6a$, $20-36=2+6a$, $6a=-18$, $a=-3$; б) $9x^2+3(c+2)-(3-2)=0$; $9\cdot25+3(c+2)-(3-2c)=0$;

$3c+6-3+2c+225=0$, $5c=-228$, $c=-\dfrac{228}{5}=-45,6$; $x_1=5$, $x_2=-5$.

Ответ: а) -3; б) -5 и 5.

2. $kx+1=7$, $kx=6$, $x=\dfrac{6}{k}$, $k=\pm1$; ±2; ±3; ±6.

3. $4x-2b=5$; $x=\dfrac{2b+5}{4}$; а) $\dfrac{2b+5}{4}>0$; $2b>-5$; $b>-2,5$;

б) $\dfrac{2b+5}{4}<0$; $b<-2,5$; в) $\dfrac{2b+5}{4}>8$; $2b+5>32$; $2b>27$; $b>13,5$;

г) $\begin{cases}\dfrac{2b+5}{4}>1; & 2b+5>4; & b>-0,5\\ \dfrac{2b+5}{4}<3; & 2b+5<12; & b<3,5\end{cases}$ $\quad -0,5<b<3,5$.

Ответ: а) $b>-2,5$; б) $b<-2,5$; в) $b>13,5$; г) при $-0,5<b<3,5$.

4. а) $2x^2+4x+t=0$; $D=16-4\cdot2\cdot t>0$; $16-8t>0$; $8t<16$; $t<2$;

б) $6x^2+tx+6=0$; $D=t^2-4\cdot6\cdot6>0$; $t^2-144>0$; $(t-12)(t+12)>0$.

Ответ: а) $t<2$; б) $t\in(-\infty;\ -12)\cup(12;\ +\infty)$.

5. а) $4x^2-8x+c=0$, $D=64-4\cdot4\cdot c=0$, $64=16c$, $c=4$;

б) $x^2+cx+16=0$; $D=c^2-4\cdot16=0$; $c^2=64$; $c_{1,2}=\pm8$.

6. а) $6x^2+bx+4=0$; $D=b^2-4\cdot6\cdot4<0$;

$b^2-96<0$; $(b-4\sqrt{6})(b+4\sqrt{6})<0$.

Ответ: $b\in(-4\sqrt{6};\ 4\sqrt{6})$.

б) $x^2+8x+b=0$; $D=64-4b<0$; $4b>64$; $b>16$.

Ответ: $b\in(16;+\infty)$.

7. $b(2-x)=6$, $2-x=\dfrac{6}{b}$, $x=2-\dfrac{6}{b}$, $x=\dfrac{2b-6}{b}$, $\dfrac{2b-6}{b}<0$, $\dfrac{b-3}{b}<0$.

Ответ: при $b=1;2$.

8. $x^2+ax=0$; при $a=0$, $x=0$ – единственный корень;

$x^2+ax-1=0$; $D=a^2+4>0$ при любом a имеет два корня;

$x^2+ax+1=0$; $D=a^2-4>0$ не при любом a;

$x^2-a=0$ при $a=0$, $x=0$ – единственный корень;

Ответ: $x^2+ax-1=0$.

9. $2x^2+nx-(18-x)=0$, пусть a и $-a$ - корни уравнения, тогда

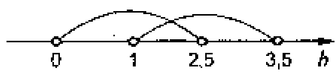
$$\begin{cases}2a^2+na-(18-a)=0\\2a^2-na-(18+a)=0\end{cases},\quad na-(18-a)+na+(18+a)=0,$$

$2na+2a=0$, $n+1=0$, $n=-1$.

Ответ: при $n=-1$.

10. $x^2-4bx+4b^2-1=0$, $D=16b^2-4(4b^2-1)=4$, $x_1=\dfrac{4b+2}{2}=2b+1$, $x_2=2b-1$,

$$\begin{cases}1<2b+1<6\\1<2b-1<6\end{cases}\quad\begin{cases}0<2b<5\\2<2b<7\end{cases}\quad\begin{cases}0<b<2{,}5\\1<b<3{,}5\end{cases}$$



Ответ: при $1<b<2{,}5$.

С–13. Решение уравнений с помощью разложения на множители и введения вспомогательной переменной

1. 1) а) $18y^4-36y^3=0$; $y^3(y-2)=0$; $y_1=0$; $y_2=2$;

б) $x^3-144x=0$; $x(x^2-144)=0$; $x(x-12)(x+12)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm12$

в) $x^2+0{,}9x=0$; $x(x+0{,}9)=0$; $x_1=0$, $x_2=-0{,}9$;

Ответ: а) $x_1=0$, $x_2=2$; б) $x_1=-12$, $x_2=0$, $x_3=12$; в) $x_1=0$, $x_2=-0{,}9$.

2) а) $16x^3-32x^2-x+2=0$, $16x^2(x-2)-(x-2)=0$, $(16x^2-1)(x-2)=0$,

$(4x-1)(4x+1)(x-2)=0$, $x_{1,2}=\pm0{,}25$, $x_3=2$; **б)** $x^6-x^4+5x^2-5=0$.

$x^4(x^2-1)+5(x^2-1)=0$, $(x^2-1)(x^4+5)=0$, $(x-1)(x+1)=0$, $x_{1,2}=\pm1$;

в) $y^6+4y^2=y^2+4$, $y^4(y^2+4)=y^2+4$, $y^2=1$, $y_{1,2}=\pm1$.

Ответ: а) $x=-0{,}25$, $x=0{,}25$ и $x=2$; б) $x=1$, $x=-1$; в) $y=1$ и $y=-1$.

2. а) $(x^2-10)^2-3(x^2-10)+4=0$; $x^2-10=y$; $y^2-3y+4=0$, $D=9-4\cdot4<0$, нет корней;

б) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)+6=0$; $x^2+x=y$; $y^2-5y+6=0$; $D=25-4\cdot6=1$;

$y_1=\frac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$; $x^2+x=3$, $x^2+x-3=0$, $D=1+4\cdot3=13$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$,

$x^2+x=2$, $x^2+x-2=0$, $D=1+4\cdot2=9$, $x_3=\frac{-1+3}{2}=1$, $x_4=-2$;

в) $(x^2+x+6)(x^2+x-4)=144$; $x^2+x+6=y$, $y(y-10)=144$, $y^2-10y-144=0$,

$D=100+4\cdot144=676$, $y_1=\frac{10+26}{2}=18$, $y_2=-8$, $x^2+x+6=18$,

$x^2+x-12=0$, $D=1+4\cdot12=49$, $x_1=\frac{-1+7}{2}=3$, $x_2=-4$, $x^2+x+6=-8$,

$x^2+x+14=0$, $D=1-4\cdot14<0$ – нет корней.

Ответ: а) нет корней; б) $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, $x=1$, $x=-2$; в) $x=3$, $x=-4$.

3.а) $x^4-10x^2+9=0$; $D=100-4\cdot9=64$; $x_1^2=\frac{10+8}{2}=9$; $x_2^2=1$; $x_{1,2}=\pm3$; $x_{3,4}=\pm1$;

б) $x^4-18x^2+32=0$; $D=324-4\cdot32=196$; $x_1^2=\frac{18+14}{2}=16$ и $x_2^2=2$; $x_{1,2}=\pm4$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$;

в) $x^4-x^2-12=0$; $D=1+4\cdot12=49$; $x_1^2=\frac{1+7}{2}=4$, $x_2^2<0$; $x_{1,2}=\pm2$;

г) $x^4+6x^2-27=0$; $D=36+4\cdot27=144$; $x_1^2=\frac{-6+12}{2}=3$ и $x_2^2<0$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$

д) $x^4+15x^2+54=0$; $D=225-4\cdot54=9$; $x_1^2=\frac{-15+3}{2}<0$; $x_2^2<0$ нет корней;

е) $x^4+25x^2=0$; $x^2(x^2+25)=0$, $x^2=0$; $x=0$.

4. $y=x^4-3x^2-4$, $x^4-3x^2-4=0$, $D=9+4\cdot4=25$, $x_1^2=\frac{3+5}{2}=4$, $x_2^2<0$, $x_{1,2}=\pm2$.

Ответ: $x_1=-2$ и $x_2=2$.

5. $x^5+x^4+3x^3+3x^2+4x+4=0$; $x^4(x+1)+3x^2(x+1)+4(x+1)=0$;

$(x+1)(x^4+3x^2+4)=0$; $x_1=-1$; $x^4+3x^2+4=0$; $D=9-4\cdot4<0$, нет корней;

Ответ: -1.

6. $\frac{x^2-3}{x}+\frac{x}{x^2-3}=2\frac{1}{2}$; $\frac{x^2-3}{x}=t$; $t+\frac{1}{t}-\frac{5}{2}=0$; $2t^2-5t+2=0$; $D=25-4\cdot2\cdot2=9$;

$t_1=\frac{5+3}{4}=2$; $t_2=\frac{1}{2}$; $\frac{x^2-3}{x}=2$; $x^2-2x-3=0$; $D=4+4\cdot3=16$; $x_1=\frac{2+4}{2}=3$;

$x_2=-1$; $\frac{x^2-3}{x}=\frac{1}{2}$; $2x^2-x-6=0$; $D=1+4\cdot2\cdot6=49$; $x_3=\frac{1+7}{4}=2$; $x_4=-1.5$.

7.а) $x^3-13x+12$; $x^3-x-12x+12=0$; $x(x^2-1)-12(x-1)=0$; $x(x-1)(x+1)-12(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+x-12)=0$; $x_1=1$; $x^2+x-12=0$; $D=49$; $x_2=\frac{-1+7}{2}=3$; $x_3=-4$;

а) $x^3-13x+12$; $x^3-x-12x+12=0$; $x(x^2-1)-12(x-1)=0$; $x(x-1)(x+1)-12(x-1)=0$;

$(x-1)(x^2+x-12)=0$; $x_1=1$; $x^2+x-12=0$; $D=49$; $x_1=\dfrac{-1+7}{2}=3$; $x_2=-4$;

б) $x^3-31x+30=0$, $x^3-x-30x+30=0$, $x(x^2-1)-30(x-1)=0$,

$x(x-1)(x+1)-30(x-1)=0$, $(x-1)(x^2+x-30)=0$, $x_1=1$,

$x^2+x-30=0$, $D=121$, $x_2=\dfrac{-1+11}{2}=5$, $x_3=-6$.

Ответ: а) 3; – 4; б) – 6; 1 и 5.

8. а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=840$, $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=840$, $x^2-5x+4=y$,

$y(y+2)=840$, $y^2+2y-840=0$, $D=4+4\cdot 840=4\cdot 841$, $y_1=\dfrac{-2+58}{2}=28$,

$y_2=-30$, $x^2-5x+4=28$, $x^2-5x-24=0$, $D=25+4\cdot 24=121$, $x_1=\dfrac{5+11}{2}=8$,

$x_2=-3$, $x^2-5x+4=-30$, $x^2-5x+34=0$, $D=25-4\cdot 34<0$ – нет корней.

б) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=945$; $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=945$; $x^2+8x+7=y$;

$y(y+8)=945$; $y^2+8y-945=0$; $D=64+4\cdot 945=62^2$, $y_1=\dfrac{-8+62}{2}=27$; $y_2=-35$;

$x^2+8x+7=27$; $x^2+8x-20=0$, $D=64+4\cdot 20=144$, $x_1=\dfrac{-8+12}{2}=2$; $x_2=-10$;

$x^2+8x+7=-35$, $x^2+8x+42=0$, $D=64-4\cdot 42<0$ – корней нет.

Ответ: а) $x=8$ и $x=-3$; б) $x=-10$ и $x=2$.

9. а) $x^4-8x^2+a=0$; $x^2=y$; $y^2-8y+a=0$; $f(y)=y^2-8y+a$;

$$D=64-4a<0 \text{ или } \begin{cases} f(0)>0 \\ m=\dfrac{8}{2}=4<0 \end{cases} \text{ – нет решений;}$$

$64<4a$; $a>16$.

б) $x^4+ax^2+25=0$; $x^2=y$; $y^2+ay+25=0$; $f(y)=y^2+ay+25$, $D=a^2-4\cdot 25<0$;

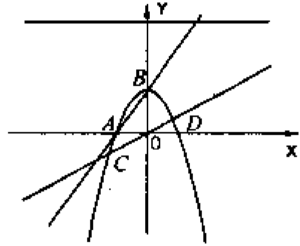
$$(a-10)(a+10)<0;\ -10<a<10 \text{ или } \begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}<0 \\ f(0)=25>0 \end{cases},\quad a>0.$$

Ответ: а) $a>16$; б) $a>-10$.

С–14. Графический способ решения систем уравнений

1. $\begin{cases} xy=6 \\ y=0{,}5x^2-8 \end{cases}$. Три решения: $(-3{,}6;\ -1{,}8)$, $(-0{,}8;\ -7{,}8)$, $(4{,}2;\ 1{,}3)$.

2. $y=-x^2+1$;



а) $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases}$,

две точки пересечения:

$A(-1;0)$, $B(0;1)$.

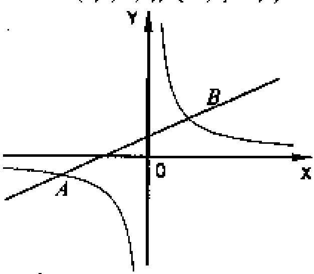
б) $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=0,5x \end{cases}$;

две точки пересечения: $C(-1,4;\ -0,8)$, $D(0,8;0,5)$.

в) $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=3 \end{cases}$; нет точек пересечения.

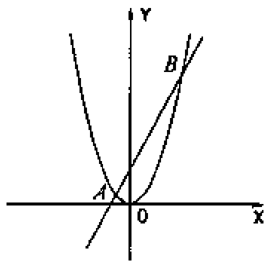
3. а) $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ y=x+1 \end{cases}$

Ответ: (1,6; 2,6), (-2,6; –1,6).



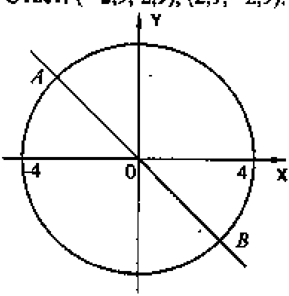
б) $\begin{cases} y=0,5x^3 \\ y=x+1 \end{cases}$.

Ответ: (– 0,8; 0,2), (2,5; 3,5).



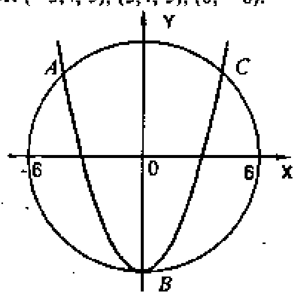
в) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y=-x \end{cases}$.

Ответ: (– 2,9; 2,9), (2,9; –2,9).



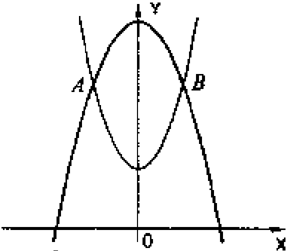
г) $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ y=x^2-6 \end{cases}$.

Ответ: (– 3,4; 5), (3,4; 5), (0; – 6).



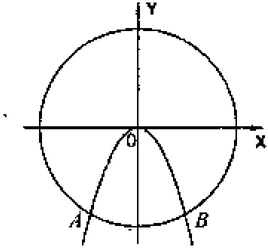
4. а) $\begin{cases} y = -x^2 + 8 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$.

Ответ: два решения.



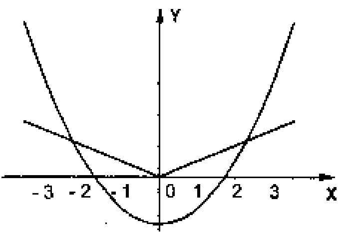
б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x^2 \end{cases}$.

Ответ: два решения.



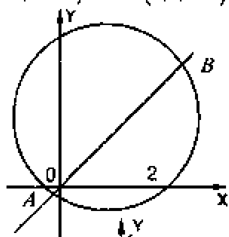
5. а) $\begin{cases} y = |x| \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$;

Две точки пересечения: $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$.



б) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \\ y = x \end{cases}$;

$A(-0{,}5; -0{,}5)$ и $B(5{,}2; 5{,}2)$.



6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = m, \; y = x - m \end{cases}$

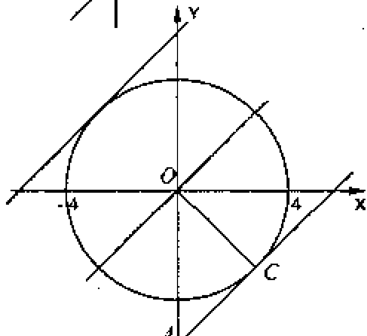
Изобразим графики функций.

Рассмотрим ΔAOC:

$\angle C = 90°$, $\angle A = \angle O = 45°$.

$OC = 3$ (радиус), $AC = 3$;

$OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.



Ясно, что при $m = \pm 3\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $m \in \left(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right)$ – две точки; при $|m| > 3\sqrt{2}$ – решений нет.

Ответ: а) $m = \pm 3\sqrt{2}$; б) $(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$; в) $(-\infty; -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}; +\infty)$.

С–15. Решение систем уравнений второй степени

1. $\begin{cases} xy+42=0 \\ x^2-2y-61=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 7\cdot(-6)+42=0 \\ 49-2\cdot(-6)-61=0 \end{cases}$ – верно, значит, является.

2. $\begin{cases} x^2-5y-24=0 \\ y=x-2 \end{cases}$, $x^2-5(x-2)-24=0,\ x^2-5x+10-24=0;$

$x^2-5x-14=0,\ D=25+4\cdot14=81,$

$x_1=\dfrac{5+9}{2}=7;\ \ y_1=7-2=5,\ (7;\ 5);\ x_2=-2;\ y_2=-2-2=-4,\ (-2;\ -4).$

Проверка: $(7;\ 5)$; $\begin{cases} 7^2-5\cdot5-24=0 \\ 5=7-2 \end{cases}$ – верно;

$(-2;\ -4)$; $\begin{cases} (-2)^2-5\cdot(-4)-24=0 \\ -4=-2-2 \end{cases}$ – верно.

Ответ: $(7;\ 5),\ (-2;\ -4)$.

3. 1) а) $\begin{cases} x^2-2y=54 \\ y=x-3 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x^2-2(x-3)=54 \\ x^2-2x-48=0 \end{matrix}$;

$D=4+4\cdot48=196;\ x_1=\dfrac{2+14}{2}=8;\ x_2=-6;\ y_1=8-3=5;\ y_2=-6-3=-9.$

б) $\begin{cases} x=y+3 \\ xy-y=7 \end{cases}$ $\Bigg|$ $y(y+3)-y=7;\ \ y^2+2y-7=0;\ \ D=4+4\cdot7=32;$

$y_{1,2}=\dfrac{-2\pm4\sqrt2}{2}=-1\pm2\sqrt2;\ \ x_{1,2}=-1\pm2\sqrt2+3=2\pm2\sqrt2.$

в) $\begin{cases} xy+x^2=4 \\ y=x+2 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x(x+2)+x^2=4 \\ 2x^2+2x-4=0 \end{matrix}$; $x^2+x-2=0;\ \ D=1+4\cdot2=9;$

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1;\ \ x_2=-2;\ \ y_1=3;\ \ y_2=0.$

Ответ: а) $(8;\ 5),\ (-6;\ -9)$; б) $\left(2\pm2\sqrt2;\ -1\pm2\sqrt2\right)$; в) $(1;\ 3);\ (-2;\ 0)$.

2) а) $\begin{cases} 4y+x=0 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x=-4y \\ 16y^2+y^2=17,\ \ 17y^2=17,\ \ y_{1,2}=\pm1,\ \ x_{1,2}=\pm4. \end{matrix}$

б) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y^2=-1 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} x=1-2y \\ 2-4y+y^2=-1 \end{matrix}$;

$y^2-4y+3=0;\ D=4;\ y_1=\dfrac{4+2}{2}=3;\ y_2=1;\ x_1=1-2\cdot3=-5;\ x_2=1-2\cdot1=-1.$

в) $\begin{cases} xy+y^2=24 \\ x-2y=7 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{matrix} y(7+2y)+y^2=24 \\ x=7+2y \end{matrix}$, $3y^2+7y-24=0,$

$D=49+4\cdot3\cdot24=337,\ \ y_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{337}}{6},\ \ x_{1,2}=7+\dfrac{-7\pm\sqrt{337}}{3}=\dfrac{14\pm\sqrt{337}}{3}.$

Ответ: а) $(\pm4;\ \pm1)$; б) $(-5;\ 3)$; $(-1;\ 1)$; в) $\left(\dfrac{14\pm\sqrt{337}}{3};\ \dfrac{-7\pm\sqrt{337}}{6}\right)$.

3) а) $\begin{cases}(x-2)(y+1)=36\\x-2y=6\end{cases}\ \Bigg|\ \begin{cases}(4+2y)(y+1)=36\\x=6+2y\end{cases};\ 2y^2+6y-32=0;$

$y^2+3y-16=0,\ D=9+4\cdot16=73;\ y_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2};\ x_{1,2}=6-3\pm\sqrt{73}=3\pm\sqrt{73}.$

б) $\begin{cases}x^2+xy-y^2=4\\3x+y=10\end{cases}\ \Bigg|\ \begin{cases}x^2+x(10-3x)-(10-3x)^2=4\\y=10-3x\end{cases};$

$x^2+10x-3x^2-100+60x-9x^2=4,\ 11x^2-70x+104=0;\ D=4900-4\cdot11\cdot104=324;$

$x_1=\dfrac{70+18}{22}=4;\ \ x_2=\dfrac{26}{11},\ y_1=10-3\cdot4=-2,\ y_2=10-3\cdot\dfrac{26}{11}=\dfrac{32}{11}.$

Ответ: а) $(3\pm\sqrt{73};\ \dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2})$; б) $(4;\ -2)$; $\left(\dfrac{26}{11};\ \dfrac{32}{11}\right)$.

4. $\begin{cases}5x+3y=14\\2x-5y=18\\x^2+y^2+2xy-x=0\end{cases}\ \Bigg|\ \begin{cases}x=\dfrac{14-3y}{5}\\\dfrac{28-6y}{5}-5y=18\end{cases},\ 28-6y-25y=90,\ 31y=-62;$

$y=-2,\ x=4,\ 4^2+(-2)^2+2\cdot4\cdot(-2)-4=0$ – верно.

Ответ: одно решение: $(4;-2)$.

5. а) $\begin{cases}x^2+y^2=18\\xy=8\end{cases}\ \Bigg|\ \begin{cases}x^2+\dfrac{64}{x^2}=18\\y=\dfrac{8}{x}\end{cases};\ x^4-18x^2+64=0;\ D=324-4\cdot64=68;$

$x_{1,2}^2=\dfrac{18\pm2\sqrt{17}}{2}=9\pm\sqrt{17};\ \ x_{1,2}=\pm\sqrt{9+\sqrt{17}};\ \ x_{3,4}=\pm\sqrt{9-\sqrt{17}};$

$y_{1,2}=\pm\dfrac{8}{\sqrt{9+\sqrt{17}}},\ \ y_{3,4}=\pm\dfrac{8}{\sqrt{9-\sqrt{17}}}.$

б) $\begin{cases}2x^2-y^2=41\\2x^2+y^2=59\end{cases}\ \Bigg|\ 4x^2=100;\ x^2=25;\ x_{1,2}=\pm5;\ y^2=50-41=9;\ y_{1,2}=\pm3.$

в) $\begin{cases}x^2-3x-2y=4\\x^2+x-3y=18\end{cases}\ \Bigg|\ \begin{cases}y=\dfrac{x^2-3x-4}{2}\\x^2+x-\dfrac{3x^2-9x-12}{2}=18\end{cases},\ 2x^2+2x-3x^2+9x+12=36;$

$x^2-11x+24=0;\ D=121-4\cdot 24=25,\quad x_1=\dfrac{11+5}{2}=8;\quad x_2=3.$

$y_1=\dfrac{64-24-4}{2}=18,\ y_2=\dfrac{9-9-4}{2}=-2.$

Ответ: а) $\left(\pm\sqrt{9+\sqrt{17}};\ \pm\dfrac{8}{\sqrt{9+\sqrt{17}}}\right),\left(\pm\sqrt{9-\sqrt{17}};\ \pm\dfrac{8}{\sqrt{9-\sqrt{17}}}\right)$

б) $(\pm5;\ 3);\ (\pm5;\ -3)$; **в)** $(8;\ 18)$ и $(3;\ -2)$.

6. $x^2+\left(x^2-10-1\right)^2=13;\ x^2+\left(x^2-11\right)^2=13;\ x^2+x^4-22x^2+121=13;\ x^4-21x^2+108=0;$

$D=9;\ x_1^2=\dfrac{21+3}{2}=12;\ x_2^2=9;\quad x_{1,2}=\pm2\sqrt{3},\ x_{3,4}=\pm3;\quad y_{1,2}=12-10=2,\quad y_{3,4}=9-10=-1.$

Ответ: $\left(\pm2\sqrt{3};\ 2\right),\ (\pm3;\ -1).$

7. а) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}\\ 2x-y=2\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x-2}=\dfrac{1}{12}\\ y=2x-2\end{cases};\ 12(2x-2)-12x-x(2x-2)=0;$

$6(2x-2)-6x-x(x-1)=0,\quad 12x-12-6x-x^2+x=0,\quad x^2-7x+12=0,$

$D=1,\quad x_1=\dfrac{7+1}{2}=4;\quad x_2=3;\quad y_1=6;\quad y_2=4.$

б) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}\\ x-y=6\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{6+y}{y}+\dfrac{y}{6+y}-\dfrac{10}{3}=0\\ x=6+y\end{cases},$

$3(6+y)^2+3y^2-10y(6+y)=0,\quad 3\left(36+12y+y^2\right)+3y^2-60y-10y^2=0,$

$108+36y+3y^2+3y^2-60y-10y^2=0,\ 4y^2+24y-108=0,\ y^2+6y-27=0,$

$D=36+4\cdot27=144,\quad y_1=\dfrac{-6+12}{2}=3,\quad y_2=-9,\quad x_1=9,\quad x_2=-3.$

Ответ: а) $(4;\ 6),\ (3;\ 4)$; **б)** $(9;\ 3),\ (-3;\ -9)$.

С–16. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

1. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда $\begin{cases}x+y=25\\ xy=144\end{cases}\quad\begin{cases}y=25-x\\ x(25-x)=144\end{cases};$

$x^2-25x+144=0;\ D=49;\ x_1=\dfrac{25+7}{2}=16;\ x_2=9;\ y_1=9;\quad y_2=16.$

Ответ: 16 и 9.

2. Пусть x см – один катет, тогда $(x+4)$ см – другой катет. Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2+(x+4)^2=400.$

$2x^2+8x+16-400=0,\ x^2+4x-192=0,\ D=28^2,\ x_1=\dfrac{-4+28}{2}=12,\ x_2<0.$

12 см – первый катет, 12 + 4 = 16 см – второй катет.

Ответ: 16 см и 12 см.

3. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м^2 – площадь или 3250 м^2;

$2(x+y)$ м – периметр или 230 м. Получаем систему:

$$\begin{cases} xy=3250 \\ 2(x+y)=230 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(115-y)=3250 \\ x=115-y \end{array} \right.;\quad y^2-115y+3250=0;$$

$$D=225;\ y_1=\frac{115+15}{2}=65;\ y_2=50;\ x_1=115-65=50;\ x_2=115-50=65.$$

Ответ: 50 и 65 м.

4. Пусть x см – длина, y см – ширина, тогда $2(x+y)$ см – периметр или 24см; (x^2+y^2) см^2 – сумма площадей квадратов или 148 см^2. Получаем систему:

$$\begin{cases} 2(x+y)=24 \\ x^2+y^2=148 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=12-y \\ (12-y)^2+y^2=148 \end{array} \right.,$$

$$144-24y+2y^2=148,\ 2y^2-24y-4=0,\ y^2-12y-2=0,\ D=144+4\cdot 2=152,$$

$$y_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{152}}{2}=6\pm\sqrt{38},\quad y=6+\sqrt{38},\quad x=6-\sqrt{38}.$$

Ответ: $6+\sqrt{38}$ см и $6-\sqrt{38}$ см.

5. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда xy – их произведение, $(x+y)$ – их сумма, $3y$ – утроенное второе число. Получаем систему:

$$\begin{cases} xy=x+y+13 \\ x-3y=9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(3y+9)=3y+9+y+13 \\ x=3y+9 \end{array} \right.,$$

$$3y^2+9y=4y+22,\ 3y^2+5y-22=0,\ D=25+4\cdot 3\cdot 22=289,$$

$$y_1=\frac{-5+17}{6}=2,\ y_2=-\frac{11}{3},\ x_1=3\cdot 2+9=15,\ x_2=-11+9=-2.$$

Ответ: $x=15, y=2$ и $x=-2, y=-\dfrac{11}{3}$.

6. Пусть x км/ч – скорость I автомобиля, y км/ч – скорость II автомобиля, $3x$, $3y$ км – прошли за 3 ч соответственно I и II автомобили. $\dfrac{360}{x}$ ч, $\dfrac{360}{y}$ ч – потратили на весь путь I и II автомобили соответственно. Получаем систему:

$$\begin{cases} 3x-3y=30 \\ \dfrac{360}{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{360}{y} \end{cases} \left| \begin{array}{l} x-y=10;\ x=10+y \\ \dfrac{360}{10+y}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{360}{y}=0 \end{array} \right.,$$

$$720y+y^2+10y-7200-720y=0,\ y^2+10y-7200=0,$$

$D=100+4\cdot7200=170^2$, $y_1=\dfrac{-10+170}{2}=80$, $y_2<0$, $x_1=10+80=90$.

90 км/ч и 80 км/ч - скорости I и II автомобилей соответственно

Ответ: 90 км/ч и 80 км/ч.

7. Пусть 1 – вся работа, x ч – выполняет всю работу I тракторист, тогда $(x+4)$ч – выполняет всю работу II тракторист; $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+4}$ часть работы – производительность I и II. Известно, что за 2 ч 40 мин оба тракториста, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+4}\right)=1$; $\dfrac{8}{3x}+\dfrac{8}{3(x+4)}-1=0$;

$8x+32+8x-3x^2-12x=0$; $3x^2-4x-32=0$; $D=16+12\cdot32=400$; $x_1=\dfrac{4+20}{6}=4$,

$x_2<0$; 4 ч и 8ч потребуется I и II трактористам, чтобы выполнить всю работу.

Ответ: 4 и 8 ч.

С–17. Последовательности

1. **а)** 14, 13, 12, 11, 10; **б)** 1, 8, 27, 64, 125; **в)** 7, 12, 17, 22, 27.

2. $x_n=6n-1$, **а)** $x_1=6\cdot1-1=5$, **б)** $x_4=6\cdot4-1=23$, **в)** $x_{20}=6\cdot20-1=119$, **г)** $x_{100}=6\cdot100-1=599$, **д)** $x_k=6k-1$, **е)** $x_{k+2}=6(k+2)-1=6k+11$.

3. **а)** $a_n=n-2$; $a_3=3-2=1$; $a_6=6-2=4$; $a_{20}=20-2=18$;

б) $a_n=\dfrac{3n-1}{2}$; $a_3=\dfrac{9-1}{2}=4$; $a_6=\dfrac{18-1}{2}=8{,}5$; $a_{20}=\dfrac{60-1}{2}=29{,}5$;

в) $a_n=n^2$; $a_3=3^2=9$; $a_6=6^2=36$; $a_{20}=20^2=400$;

г) $a_n=n(n+1)$; $x_3=3(3+1)=12$; $a_6=6(6+1)=42$; $a_{20}=20(20+1)=420$;

д) $a_n=-n^2+6$; $a_3=-9+6=-3$; $a_6=-36+6=-30$; $a_{20}=-400+6=-394$;

е) $a_n=(-1)^n$; $a_3=(-1)^3=-1$; $a_6=(-1)^6=1$; $a_{20}=(-1)^{20}=1$.

4. $25=46-3n$, $3n=21$, $n=7$.

5. **а)** $C_1=8$, $C_{n+1}=C_n-1$; $C_2=C_1-1=7$, $C_3=C_2-1=6$, $C_4=C_3-1=5$, $C_5=C_4-1=4$.
б) $C_1=32$, $C_{n+1}=0{,}5C_n$; $C_2=0{,}5C_1=16$, $C_3=0{,}5C_2=8$, $C_4=0{,}5C_3=4$, $C_5=0{,}5C_4=2$.

6. 0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; 0,22222.

7. $b_n=n^2-4n+9$, **а)** $9=n^2-4n+9$, $n^2-4n=0$, $n_1=2$, $n_2=4$, значит, $9=b_4$;

б) $59=n^2-4n+9$, $n^2-4n-50=0$, $D=16+4\cdot50=216$, $n_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{216}}{2}\notin N$,

значит, 59 – не член $\{b_n\}$; **в)** $409=n^2-4n+9$, $n^2-4n-400=0$,

$D=16+4\cdot400=1616$, $n_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{1616}}{2}\notin N$, значит, 409 – не член $\{b_n\}$.

Ответ: **а)** да; **б)** нет; **в)** нет.

8. **а)** $x_1=6$, $x_{n+1}=x_n+6$, $x_n=6n$; **б)** $x_1=1$, $x_{n+1}=3x_n$, $x_n=3^{n-1}$;

С–18. Арифметическая прогрессия. Формула n–го члена

1. $a_1=2{,}8;\ a_2=-0{,}4;\ d=a_2-a_1=-0{,}4-2{,}8=-3{,}2;$

$a_3=a_2+d=-0{,}4-3{,}2=-3{,}6;\quad a_4=a_3+d=-3{,}6-3{,}2=-6{,}8;$

$a_5=a_4+d=-6{,}8-3{,}2=-10;\quad a_6=a_5+d=-10-3{,}2=-13{,}2.$

2. $a_1=-1{,}2,\ d=3;$ **а)** $a_4=a_1+3d=-1{,}2+9=7{,}8;$ **б)** $a_8=a_1+7d=-1{,}2+21=19{,}8;$

в) $a_{21}=a_1+20d=-1{,}2+60=58{,}8;$ **г)** $a_{k+2}=a_1+(k-1)d=-1{,}2+3k-3=-4{,}2+3k;$

3. **а)** $a_1=5,\ a_8=19;\ a_8=a_1+7d,\quad d=\dfrac{a_8-a_1}{7}=\dfrac{19-5}{7}=2.$

б) $a_1=2,\ a_{11}=-5;\ a_{11}=a_1+10d,\quad d=\dfrac{a_{11}-a_1}{10}=\dfrac{-5-2}{10}=-0{,}7.$

в) $a_1=-0{,}3,\ a_7=1{,}9;\ a_7=a_1+6d,\quad d=\dfrac{a_7-a_1}{6}=\dfrac{1{,}9+0{,}3}{6}=\dfrac{1{,}1}{3}=\dfrac{11}{30}.$

4. $a_1=80;\ d=17;\quad a_8=a_1+7d=80+7\cdot17=199;\quad a_{12}=a_1+11d=80+11\cdot17=267.$

5. $b_1=12,\ d=3;$ **а)** $b_n=-6=b_1+d(n-1)=12+3(n-1)=3n+9,\ 3n=-15,\ n=-5\notin N,$

значит, -6 – не член $\{b_n\}$; **б)** $0=3n+9,\quad n=-3\notin N,$ значит, 0 – не член $\{b_n\}$;

в) $9=3n+9,\quad n=0\notin N,$ значит, 9 – не член $\{b_n\}$;

6. $a_1=6{,}5,\ d=8-6{,}5=1{,}5;$ **а)** $13=a_1+d(n-1)=6{,}5+1{,}5(n-1)=1{,}5n+5;$

$8n=1{,}5n,\quad n=\dfrac{8}{1{,}5}\notin N,$ значит, 13 не встретится;

б) $22{,}5=1{,}5n+5;\ 1{,}5n=17{,}5,\ n=\dfrac{17{,}5}{1{,}5}\notin N,$ значит, 22,5 не встретится.

в) $36=1{,}5n+5;\ 1{,}5n=31,\ n=\dfrac{31}{1{,}5}\notin N,$ значит, 36 не встретится.

7. $64,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 46,\quad a_1=64,\ a_7=46,\quad a_7=a_1+6d,\ d=\dfrac{a_7-a_1}{6}=-3,$ поэтому,

$a_2=a_1+d=61,\ a_3=a_2+d=58,\ a_4=a_3+d=55,\ a_5=a_4+d=52,\ a_6=a_5+d=49.$

Ответ: 61, 58, 55, 52, 49.

8. $x_4=x_1+3d,\ x_6=x_1+5d,$

$x_4+x_{n-4}=x_1+3d+x_1+(n-4-1)d=2x_1+3d+nd-5d=2x_1+nd-2d,$

$x_6+x_{n-6}=x_1+5d+x_1+d(n-6-1)=2x_1+5d+nd-7d=2x_1+nd-2d=x_4+x_{n-4}.$

9. $a_1=47.$ Пусть $a_2=x^2,\ a_3=(x+1)^2,$ где $x\in N.$ Тогда $a_2-a_1=a_3-a_2.$

Получаем: $x^2-47=(x+1)^2-x^2;\ x^2-47=2x+1;\quad x^2-2x-48=0.$

$D=4+4\cdot48=4\cdot49,\ x_1=\dfrac{2+2\cdot7}{2}=8,\ x_2<0.$ Значит, $a_2=8^2=64,\ a_3=81.$

Ответ: $a_2=64$ и $a_3=81.$

10. По свойству арифметической прогресии $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$.

Нужно доказать, что $b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$.

Докажем это: $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=0$, $\frac{2}{a+c}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}=0$,

$2(a+b)(b+c)-(a+b)(a+c)-(a+c)(b+c)=0$,

$2ab+2b^2+2ac+2bc-a^2-ab-ac-bc-ab-bc-ac-c^2=0$, $b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$, ч.т.д.

С–19. Формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии

1. $a_1=4;\ a_2=-6;\ d=a_2-a_1=-10;$

а) $S_8=\frac{2a_1+d(8-1)}{2}\cdot 8=\frac{8-10\cdot 7}{2}\cdot 8=-62\cdot 4=-248;$

б) $S_{18}=\frac{2a_1+d(18-1)}{2}\cdot 18=(8-10\cdot 17)\cdot 9=-1458;$

в) $S_{35}=\frac{2a_1+d(35-1)}{2}\cdot 35=\frac{8-10\cdot 34}{2}\cdot 35=-5810;$

г) $S_k=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}\cdot k=\frac{8-10\cdot(k-1)}{2}\cdot k=k(4-5k+5)=k(9-5k).$

2. а) $S_{10}=\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=\frac{10+3\cdot 9}{2}\cdot 10=185;$

б) $S_{10}=\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=(-16+4\cdot 9)\cdot 5=100;$

в) $S_{10}=\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10=(37-2{,}5\cdot 9)\cdot 5=72{,}5;$

г) $S_{10}=(2a_1+9d)\cdot 5=\left(4-2\sqrt{2}+9\sqrt{2}\right)\cdot 5=20+35\sqrt{2}.$

3. $x_n=4n+5$, $x_1=4+5=9$, $x_6=4\cdot 6+5=29$, $x_{20}=80+5=85$, $x_k=4k+5$,

$S_6=\frac{x_1+x_6}{2}\cdot 6=38\cdot 3=114$, $S_{20}=\frac{x_1+x_{20}}{2}\cdot 20=940$, $S_k=\frac{9+4k+5}{2}\cdot k=k(7+2k)$.

Ответ: $S_6=114;\ S_{20}=940;\ S_k=k(7+2k)$.

4. а) $a_1=1,\ d=1,\ a_{50}=50,\ S_{50}=\frac{1+50}{2}\cdot 50=51\cdot 25=1275;$ **б)** $a_1=4,\ d=4,\ a_{25}=100,$

$S_{25}=\frac{4+100}{2}\cdot 25=1300;$ **в)** $a_1=1,\ d=2,\ a_{50}=99,\ S_{50}=\frac{1+99}{2}\cdot 50=2500.$

5. а) $a_1=6,\ a_{11}=46;\ d=\dfrac{a_{11}-a_1}{10}=\dfrac{40}{10}=4;\ S_{12}=\dfrac{2\cdot6+4\cdot11}{2}\cdot12=28\cdot12=336;$

б) $a_6=12,\ a_{16}=100,\ \begin{cases}12=a_1+5d\\100=a_1+15d\end{cases}\left|\begin{matrix}a_1=12-5d\\a_1=100-15d\end{matrix}\right.,\ 12-5d=100-15d,$

$10d=88,\ d=8{,}8,\ a_1=12-5\cdot8{,}8=-32;\ S_{12}=\dfrac{-64+8{,}8\cdot11}{2}\cdot12=196{,}8.$

6. $a_1=12,\ d=3;\ S_{1800}=\dfrac{24+3\cdot1799}{2}\cdot1800=4878900$ (м).

7. $S_3=60,\ S_7=56,\ \begin{cases}60=\dfrac{2a_1+2d}{2}\cdot3\\56=\dfrac{2a_1+6d}{2}\cdot7\end{cases}\ \left|\begin{matrix}20=a_1+d\\8=a_1+3d\end{matrix}\right.,\ 20-d=8-3d,$

$2d=-12,\ d=-6,\ a_1=8+3\cdot6=26.$

Ответ: $a_1=26$ и $d=-6$.

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 60 + 45 = 105 км, а за каждый последующий час – на 5 км больше. Значит, $a_1=105,\ d=5;\ S_n=450;\ n-?;$

$450=\dfrac{210+5\cdot(n-1)}{2}\cdot n;\quad 900=(205+5n)\cdot n,\quad 5n^2+205n-900=0,$

$n^2+41n-180=0;\ D=49^2;\ n_1=\dfrac{-41+49}{2}=4;\ n_2<0.$

Итак, через 4ч автомобили встретятся.

9. а) $2+6+10+\ldots+x=450,\ d=4,\ a_1=2,\ S_n=450,\ 450=\dfrac{4+4(n-1)}{2}\cdot n,$

$450=(2+2(n-1))\cdot n,\ 2n^2=450,\ n^2=225,\ n=15,\ a_{15}=a_1+14d=2+4\cdot14=58;$

б) $30+27+24+\ldots+x=162,\ d=-3,\ a_1=30,\ S_n=162,\ 162=\dfrac{60-3(n-1)}{2}\cdot n,$

$324=(63-3n)\cdot n,\ 3n^2-63n+324=0,\ n^2-21n+108=0,\ D=441-4\cdot108=9,$

$n_1=\dfrac{21+3}{2}=12,\ n_2=9,\ a_9=a_1+8d=30-24=6;\ a_{12}=a_1+11d=30-33=-3.$

Ответ: а) $n=15,\ a_{15}=58;$ б) $n_1=12,\ a_{12}=-3$ и $n_2=9,\ a_9=6.$

10. а) $S_n=n^2+n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n,\ n+1=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}=a_1+\dfrac{dn}{2}-\dfrac{d}{2},$

$\begin{cases}1=\dfrac{d}{2}, & d=2\\1=a_1-\dfrac{d}{2}, & a_1=2\end{cases}$, значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

б) $S_n = n(n+4) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, $n + 4 = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$, $\begin{cases} \frac{d}{2} = 1, & d = 2 \\ 4 = a_1 - \frac{d}{2}, & a_1 = 5 \end{cases}$.

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

в) $S_n = 4n^2 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, $4n = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$, $\begin{cases} \frac{d}{2} = 4, & d = 8 \\ a_1 - \frac{d}{2} = 0, & a_1 = 4 \end{cases}$.

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

С–20. Геометрическая прогрессия. Формула n–го члена

1. $b_1 = 1,6$; $b_2 = 0,8$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 0,5$; $b_3 = b_2 \cdot q = 0,4$; $b_4 = b_3 \cdot q = 0,2$;

$b_5 = b_4 \cdot q = 0,1$; $b_6 = b_5 \cdot q = 0,05$.

2. $a_1 = 3,2$; $q = \frac{1}{2}$; а) $a_2 = a_1 q = 1,6$; б) $a_4 = a_1 q^3 = 3,2 \cdot \frac{1}{8} = 0,4$;

в) $a_7 = a_1 q^6 = 3,2 \cdot \frac{1}{64} = 0,05$; г) $a_{k+1} = a_1 q^k = \frac{3,2}{2^k}$.

3. а) $b_1 = 2$; $q = 3$; $b_6 = b_1 q^5 = 2 \cdot 3^5 = 486$; б) $b_1 = 16$; $q = -\frac{1}{2}$; $b_9 = b_1 q^8 = 16 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{1}{16}$;

в) $b_1 = 128$; $q = \frac{1}{4}$; $b_4 = b_1 q^3 = 128 \cdot \frac{1}{64} = 2$; г) $b_1 = 4$; $q = \sqrt{3}$; $b_7 = b_1 q^6 = 4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^6 = 108$.

4. а) $a_5 = \frac{1}{64}$, $q = \frac{1}{2}$; $a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{2^4}{64} = \frac{1}{4}$; б) $a_6 = 243$, $q = -3$; $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -\frac{243}{243} = -1$.

5. а) $b_5 = 11$; $b_7 = 99$; $b_7 = b_5 q^2$; $q = \pm\sqrt{\frac{b_7}{b_5}} = \pm 3$;

б) $b_6 = 100$; $b_8 = 9$; $b_8 = b_6 q^2$; $q = \pm\sqrt{\frac{b_8}{b_6}} = \pm 0,3$.

6. $\frac{1}{16}$, b_2, b_3, b_4, 16; $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $q = \pm\sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm 4$;

$b_2 = b_1 \cdot q = \pm\frac{1}{4}$; $b_3 = b_2 \cdot q = 1$; $b_4 = b_3 \cdot q = \pm 4$;

Ответ: $\pm\frac{1}{4}$, 1, ± 4.

7. а) $a_1 - 1$, $a_2 - 1$, $a_3 - 1$ – не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n = 2^n$. Тогда $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_1 - 1 = 1$, $a_2 - 1 = 3$,

$a_3-1=7$, $\frac{3}{1}\ne\frac{7}{3}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.

б) $4a_1$, $4a_2$, $4a_3$ – очевидно, геометр. прогрессия с тем же самым знаменателем.

в) $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ – геометрическая прогрессия.

8. $\begin{cases}b_5-b_3=72\\b_4-b_2=36\end{cases}\left|\begin{matrix}b_1q^4-b_1q^2=72\\b_1q^3-b_1q=36\end{matrix}\right.$, $\frac{q^3-q}{q^2-1}=2$; $\frac{q(q^2-1)}{q^2-1}=2$, $q=\pm1$ или $q=2$,

$q=1$ – не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1=b_2=b_3=b_4=b_5$, $b_5-b_3=0\ne72$, $q=-1$ – не подходит по тем же причинам.

Если $q=2$, то $b_1=\frac{36}{q^3-q}=\frac{36}{6}=6$.

Ответ: $b_1=6$ и $q=2$.

9. $\begin{cases}b_1+b_4=13\\b_2+b_3=4\end{cases}\left|\begin{matrix}b_1+b_1q^3=13\\b_1q+b_1q^2=4\end{matrix}\right.$, $\frac{1+q^3}{q+q^2}=\frac{13}{4}$, $\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)}=\frac{13}{4}$,

$q_1=-1$, $4q^2-4q+4=13q$, $4q^2-17q+4=0$, $D=289-4\cdot4\cdot4=225$, $q_2=\frac{17+15}{8}=4$,

$q_3=\frac{1}{4}$, $q=-1$ – не подходит, т.к. тогда бы $b_2=-b_3$; $b_2+b_3=0\ne4$.

Если $q=4$, то $b_1=\frac{13}{1+q^3}=\frac{13}{65}=\frac{1}{5}$, $b_2=\frac{4}{5}$, $b_3=\frac{16}{5}$, $b_4=\frac{64}{5}$.

Если $q=\frac{1}{4}$, то $b_1=\frac{13}{1+\frac{1}{64}}=\frac{64}{5}$, $b_2=\frac{16}{5}$, $b_3=\frac{4}{5}$, $b_4=\frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{64}{5}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$.

10. a, b, c, d – геометрическая прогрессия, т.е. $b^2=ac$, $c^2=bd$. Надо доказать, что $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$, т.е., что $a^2-2ad+d^2=$ $=a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2$, $2b^2+2c^2=2ac+2bc+2bd-2ad$, Т.к. a, b, c, d – геометрическая прогрессия, то $bc=ad$; $2b^2+2c^2=2(ac+bd)$, $2bc-2ad=0$, т.е. $2b^2+2c^2=2(ac+bd)+2bc-2ad$. Видим, что левая часть равна правой. Следовательно, данное равенство является тождеством.

С–21. Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

1. а) $b_1=27$, $q=\frac{1}{3}$; $S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{27\left(\frac{1}{729}-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{27\cdot728\cdot3}{729\cdot2}=\frac{364}{9}$;

б) $b_1=-9,\quad q=2;\quad S_6=\dfrac{-9\left(2^6-1\right)}{2-1}=-567;$

в) $b_1=16,\quad q=-\dfrac{1}{2};\quad S_6=\dfrac{16\cdot\left(\dfrac{1}{64}-1\right)}{-\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{16\cdot63\cdot2}{64\cdot3}=\dfrac{21}{2};$

г) $b_1=3\sqrt{2},\quad q=\sqrt{2};\quad S_6=\dfrac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1}=21\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$

2. а) $b_1=8,\quad q=\dfrac{1}{2};\quad S_5=\dfrac{b_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=\dfrac{8\left(\dfrac{1}{32}-1\right)}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{8\cdot31\cdot2}{32}=15{,}5;$

б) $b_1=1{,}5,\ q=-2;\ S_5=\dfrac{1{,}5(-32-1)}{-2-1}=16{,}5;$ в) $b_1=3,\ q=3;\ S_5=\dfrac{3\left(3^5-1\right)}{3-1}=363;$

г) $b_1=\sqrt{2},\quad q=\sqrt{2};\quad S_5=\dfrac{\sqrt{2}\left(4\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}\left(4\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=$

$=\sqrt{2}\left(8-\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{2}\left(7+3\sqrt{2}\right).$

3. а) $a_1=81,\quad q=\dfrac{1}{3}=;\quad S_6=\dfrac{81\cdot\left(\dfrac{1}{729}-1\right)}{\dfrac{1}{3}-1}=\dfrac{364}{3};$ б) $a_1=18,\ q=-\dfrac{1}{2};$

$S_5=\dfrac{18\left(-\dfrac{1}{32}-1\right)}{-\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{18\cdot33\cdot2}{32\cdot3}=12{,}375;$ в) $a_1=4,\ q=-3;\ S_4=\dfrac{4(81-1)}{-4}=-80;$

г) $a_1=\sqrt{3},\quad q=\sqrt{3};\quad S_8=\dfrac{\sqrt{3}(81-1)}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{80\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=40\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right).$

4. а) $b_4=\dfrac{1}{16};\ b_5=\dfrac{1}{64};\ q=\dfrac{1}{4};\ b_1=\dfrac{b_4}{q^3}=4;\ S_5=\dfrac{4\left(\dfrac{1}{1024}-1\right)}{\dfrac{1}{4}-1}=\dfrac{4\cdot1023\cdot4}{1024\cdot3}=\dfrac{341}{64};$

б) $b_2=4;\ \ b_4=36;\ \ q=\sqrt{\dfrac{b_4}{b_2}}=3;\ \ b_1=\dfrac{4}{3};\ \ S_5=\dfrac{4(243-1)}{3\cdot2}=\dfrac{484}{3}.$

5. а) $q=\dfrac{2}{3};\quad S_4=65{,}65=\dfrac{b_1\left(\dfrac{16}{81}-1\right)}{\dfrac{2}{3}-1}=\dfrac{b_1\cdot65\cdot3}{81},\ b_1=27.$

б) $q=2$; $S_8=765{,}765=\dfrac{b_1(256-1)}{2-1}=255b_1$, $b_1=3$.

6. а) $b_n=4^n$; $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{4^{n+1}}{4^n}=4$, $\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=4$, т.е. $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$ для любого n, значит,

$\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия; $b_1=4$; $q=4$, $S_4=\dfrac{4(256-1)}{3}=\dfrac{1020}{3}=340$;

б) $b_n=2\cdot 5^n$; $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=5$, значит, $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия;

$b_1=10$; $q=5$, $S_4=\dfrac{10(625-1)}{4}=1560$;

в) $x_n=2^n-1$; $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\neq\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$, значит, $\{x_n\}$ – не геометрическая прогрессия;

Ответ: **а)** да, S_4 = 340; **б)** да, S_4 = 1560; **в)** нет.

7. $\begin{cases}b_5-b_3=144\\ b_4-b_2=48\end{cases}$ $\begin{cases}b_1q^4-b_1q^2=144\\ b_1q^3-b_1q=48\end{cases}$, $\dfrac{q^4-q^2}{q^3-q}=3$; $\dfrac{q^2(q^2-1)}{q(q^2-1)}=3$, $q_1=3$,

$q_{2,3}=\pm1$, $q=\pm1$ – не подходит, т.к. тогда бы $b_5-b_3\neq144$, в этом случае

$b_1=\dfrac{48}{27-3}=2$, $S_6=\dfrac{2(729-1)}{2}=728$.

8. $\begin{cases}b_1+b_2+b_3=14\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=84\end{cases}$, $b_2=\sqrt{b_1b_3}$, $\begin{cases}b_1+\sqrt{b_1b_3}+b_3=14\\ b_1^2+b_1b_3+b_3^2=84\end{cases}$.

С–22. Бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q|<1$

1. а) $b_1=49$, $b_2=7$, $q=\dfrac{1}{7}$, $|q|<1$, $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{49\cdot7}{6}=\dfrac{343}{6}$; б) $b_1=1$, $q=\dfrac{1}{3}$,

$|q|<1$, $S=\dfrac{1\cdot3}{2}=1{,}5$; в) $b_1=0{,}4$, $q=-\dfrac{0{,}04}{0{,}4}=-0{,}1$, $|q|<1$, $S=\dfrac{0{,}4}{1+0{,}1}=\dfrac{4}{11}$;

г) $b_1=\sqrt5$, $q=\dfrac{1}{\sqrt5}$, $|q|<1$, $S=\dfrac{\sqrt5}{1-\dfrac{1}{\sqrt5}}=\dfrac{5}{\sqrt5-1}=\dfrac{5(\sqrt5+1)}{4}$; д) $b_1=4\sqrt2$, $q=\dfrac{1}{\sqrt2}$,

$|q|<1$, $S=\dfrac{4\sqrt2}{1-\dfrac{1}{\sqrt2}}=\dfrac{8}{\sqrt2-1}=8(\sqrt2+1)$; е) $b_1=\dfrac{1}{2+\sqrt2}$, $q=\dfrac{2+\sqrt2}{2}>0$.

2. а) $S=16$, $q=\dfrac{1}{4}$, $16=\dfrac{4b_1}{3}$, $b_1=12$; б) $S_1=81$, $q=-\dfrac{1}{9}$, $81=\dfrac{9b_1}{10}$, $b_1=90$;

в) $S=4\sqrt{2}+4,\ q=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 4\sqrt{2}+4=\dfrac{b_1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}b_1}{\sqrt{2}-1},\ 4=\sqrt{2}b_1,\ b_1=2\sqrt{2};$

г) $S=3\left(\sqrt{3}-1\right),\ \ q=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ 3\left(\sqrt{3}-1\right)=\dfrac{b_1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}b_1}{\sqrt{3}-1},$

$3\left(3+1-2\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}b_1;\ \ b_1=\sqrt{3}\left(4-2\sqrt{3}\right).$

3. а) $0,(7)=0,777...=0,7+0,07+0,007...=\dfrac{0,7}{1-0,1}=\dfrac{7}{9};$

б) $0,(28)=0,2828...=0,28+0,0028+...=\dfrac{0,28}{1-0,01}=\dfrac{28}{99};$

в) $3,(1)=3,111...=3+0,1+0,01+...=3+\dfrac{0,1}{1-0,1}=3+\dfrac{1}{9}=\dfrac{28}{9};$

г) $2,(13)=2,1313...=2+0,13+0,0013+...=2+\dfrac{0,13}{1-0,01}=2+\dfrac{13}{99}=\dfrac{211}{99};$

д) $0,6(3)=0,633...=0,6+0,03+0,003+...=0,6+\dfrac{0,03}{1-0,1}=0,6+\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{19}{30};$

е) $0,5(14)=0,51414...=0,5+0,014+0,00014+...=0,5+\dfrac{0,014}{1-0,01}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{14}{990}=\dfrac{509}{990}.$

4. $q=\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \ S=\dfrac{16\left(4+\sqrt{2}\right)}{7};\ \ \dfrac{16\left(4+\sqrt{2}\right)}{7}=\dfrac{b_1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{4b_1}{4-\sqrt{2}};$

$b_1=\dfrac{4\cdot 14}{7}=8;\ \ \ b_3=b_1q^2=8\cdot\dfrac{2}{16}=1.$

5. Сторона I треугольника – 16 см, второго – 8см, третьего – 4 см и т.д. Периметр I треугольника – 48 см, II-го – 24 см, III-го – 12 см и т.д. Т.е. периметры образуют геометрическую прогрессию. $b_1=48,\ q=\dfrac{1}{2},\ S=\dfrac{48}{\dfrac{1}{2}}=96.$

6. $b_2=36,\ \ S=144,\ \ |q|<1,\ S=b_1+\dfrac{b_2}{1-q}=\dfrac{b_2}{q}+\dfrac{b_2}{1-q}=b_2\cdot\dfrac{1}{q(1-q)},$

$144=36\cdot\dfrac{1}{q(1-q)};\ 4q(1-q)=1;\ 4q^2-4q+1=0;\ (2q-1)^2=0;\ q=\dfrac{1}{2};\ b_1=\dfrac{b_2}{q}=72.$

С–23. Иррациональные уравнения

1. 1) а) $\sqrt{x}=4,\ x=16;$ **б)** $\sqrt{x}=\dfrac{1}{3},\ x=\dfrac{1}{9};$ **в)** $\sqrt{x}=0,\ x=0;$

2) а) $\sqrt{x+1}=3,\ x+1=9,\ x=8;$ **б)** $\sqrt{3x-1}=1,2;\ 3x-1=1,44;\ x=\dfrac{2,44}{3}=\dfrac{244}{300}=\dfrac{61}{75};$

в) $\sqrt{2+x}=0$; $2+x=0$, $x=-2$;

3) а) $\sqrt{6-x}=x$, $x\geq 0$; $6-x=x^2$, $x^2+x-6=0$, $D=1+4\cdot 6=25$, $x_1=\dfrac{-1+5}{2}=2$, $x_2<0$;

б) $\sqrt{x^2+27}=2x$, $x\geq 0$; $x^2+27=4x^2$, $3x^2=27$, $x_{1,2}=\pm 3$.

в) $\sqrt{2x+3}=x$, $x\geq 0$; $2x+3=x^2$; $x^2-2x-3=0$; $D=4+4\cdot 3=16$; $x_1=\dfrac{2+4}{2}=3$, $x_2<0$;

Ответ: 1) а) 16; б) $\dfrac{1}{9}$; в) 0; 2) а) 8; б) $\dfrac{61}{75}$; в) -2; 3) а) 2; б) 3; в) 3.

2. а) $\sqrt{x}+1=0$, $\sqrt{x}=-1$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$;

б) $\sqrt{-3x}=0$, $x=0$ – корень;

в) $\sqrt{2x+3}=-\sqrt{3}$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$;

г) $\sqrt{-4x^2-16}=2$ – нет корней, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$;

д) $\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{5}=-\dfrac{1}{2}$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$;

е) $\sqrt{x+1}=5$ – есть корни.

3. 1) а) $\sqrt{6x^2+3x-2}=\sqrt{3x^2-8x+2}$, $6x^2+3x-2=3x^2-8x+2$, $3x^2+11x-4=0$;

$D=121+4\cdot 3\cdot 4=169$, $x_1=\dfrac{-11+13}{6}=\dfrac{1}{3}$, $x_2=-4$. Проверка: $x=\dfrac{1}{3}$,

$\sqrt{\dfrac{6}{9}+1-2}=\sqrt{\dfrac{3}{9}-\dfrac{8}{3}+2}$ – ложно; $x=-4$, $\sqrt{96-12-2}=\sqrt{48+32+2}$ – верно.

б) $x+1=\sqrt{8-4x}$, $x^2+2x+1=8-4x$, $x^2+6x-7=0$; $D=36+4\cdot 7=64$,

$x_1=\dfrac{-6+8}{2}=1$, $x_2=-7$. Проверка: $x=1$, $1+1=\sqrt{8-4}$ – верно;

$x=-7$, $-6=\sqrt{8+4\cdot 7}$ – ложно.

2) а) $\sqrt{4x^2-9x+2}=x-2$, $4x^2-9x+2=x^2-4x+4$, $3x^2-5x-2=0$,

$D=25+4\cdot 3\cdot 2=49$, $x_1=\dfrac{5+7}{6}=2$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$.

Проверка: $x_1=2$, $\sqrt{4\cdot 4-9\cdot 2+2}=2-2$ – верно;

$x_2=-\dfrac{1}{3}$; $\sqrt{\dfrac{4}{9}+3+2}=-\dfrac{1}{3}-2$ – ложно;

б) $\sqrt{7x^2+3x}=2x-2$, $7x^2+3x=4x^2+4-8x$, $3x^2+11x-4=0$, $D=121+4\cdot 4\cdot 3=169$,

$x_1=\dfrac{-11+13}{6}=\dfrac{1}{3}$, $x_2=-4$. Проверка: $x_1=\dfrac{1}{3}$, $\sqrt{\dfrac{7}{9}+1}=\dfrac{2}{3}-2$ – ложно;

$x=-4$, $\sqrt{7\cdot 16-12}=-8-2$ – ложно.

Ответ: 1) а) $x=-4$; б) $x=1$; 2) а) $x=2$; б) нет корней.

4. а) $\sqrt{x-3}=2{,}4$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$;

б) $\sqrt{2x}+\sqrt{x-3}=-1$ – нет корней, т.к. $E\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$;

в) $\sqrt{-3-x^2}=9$ – нет корней, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$;

г) $\sqrt{-x^2+3x-4}=6$, $-x^2+3x-4\ge 0$, т.к. $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;\ +\infty)$; $x^2-3x+4\le 0$, $D=9-4\cdot 4<0$, значит, у неравенства нет решений, следовательно, нет корней и у уравнения.

5. 1) а) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$, $\sqrt{x+17}=2+\sqrt{x+1}$, $x+17=4+4\sqrt{x+1}+x+1$, $4\sqrt{x+1}=12$, $\sqrt{x+1}=3$, $x+1=9$, $x=8$.

Проверка: $x=8$, $\sqrt{8+17}-\sqrt{8+1}=2$ – верно;

б) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$, $1-2x+13+x-2\sqrt{(1-2x)(13+x)}=x+4$, $2\sqrt{(1-2x)(13+x)}=10-2x$, $\sqrt{(1-2x)(13+x)}=5-x$, $(1-2x)(13+x)=25+x^2-10x$, $13-25x-2x^2=25+x^2-10x$, $3x^2+15x+12=0$, $x^2+5x+4=0$, $D=25-16=9$, $x_1=\dfrac{-5+3}{2}=-1$, $x_2=-4$. Проверка: $x_1=-1$, $\sqrt{1+2}-\sqrt{13-1}=\sqrt{4-1}$ – ложно; $x_2=-4$, $\sqrt{1+8}-\sqrt{13-4}=0$ – верно.

Ответ: а) $x=8$; б) $x=-4$.

2) а) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$; $(3-x)(x+4)=6$; $-x^2-x+12=6$, $x^2+x-6=0$, $D=25$, $x_1=\dfrac{-1+5}{2}=2$, $x_2=-3$. Проверка: $x_1=2$, $\sqrt{3-2}\cdot\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$ – верно, $x_2=-3$, $\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}=\sqrt{6}$ – верно.

б) $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{4+x}=x$, $16-x^2=x^2$, $2x^2=16$, $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$,

Проверка: $x_1=2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ – верно,

$x_2=-2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$ – ложно.

Ответ: а) -3; 2; б) $2\sqrt{2}$.

3) а) $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$; $5+\sqrt{x-1}=9$, $\sqrt{x-1}=4$, $x-1=16$, $x=17$.

Проверка: $\sqrt{5+4}=3$ – верно.

б) $\sqrt{\sqrt{x+13}}=\sqrt{17-3\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+13}=17-3\sqrt{x}$, $x+13=289+9x-102\sqrt{x}$, $8x-102\sqrt{x}+276=0$, $4x-51\sqrt{x}+138=0$, $\sqrt{x}=y$, $y\ge 0$, $4y^2-51y+138=0$,

$y=\dfrac{51\pm\sqrt{393}}{8}$, значит, $\sqrt{x}=\dfrac{51\pm\sqrt{393}}{8}$, $x=\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{64}$,

Проверка: $x=\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{64}$; $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\left(51\pm\sqrt{393}\right)^2}{64}}+13}=\sqrt{17-3\left(\dfrac{51\pm\sqrt{393}}{8}\right)}$ – верно.

С–24. Четные и нечетные функции

1. 1) а) $g(-x)=(-x)^8=x^8=g(x)$, значит, $g(x)$ – четная;

б) $g(-x)=(-x)^4-5(-x)^2=x^4-5x^2=g(x)$, значит, $g(x)$ – четная;

в) $f(-x)=2|-x|=2|x|=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная.

2) а) $f(-x)=(-x)^6-3(-x)^4=x^6-3x^4=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная;

б) $f(-x)=(-x-5)(-x+7)+2x=(x+5)(x-7)+2x=x^2-35$,

$f(x)=(x-5)(x+7)-2x=x^2-35=f(-x)$, значит, $f(x)$ – четная;

в) $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^4-(-x)^2+3}=\dfrac{1}{x^4-x^2+3}=f(x)$, значит, $f(x)$ – четная.

2. 1) а) $g(-x)=(-x)^9=-x^9=-g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная;

б) $g(-x)=-\dfrac{23}{-x}=\dfrac{23}{x}=-g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная;

в) $g(-x)=(-x)^5+x=-x^5+x=-g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

2) а) $f(-x)=(-x)^7-\dfrac{1}{(-x)^3}=-x^7+\dfrac{1}{x^3}=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

б) $f(-x)=(-x-3)^2-(-x+3)^2=(x+3)^2-(x-3)^2=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная;

в) $f(-x)=\dfrac{1}{-x+(-x)^5}=-\dfrac{1}{x+x^5}=-f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

3. $g(-5)=27$, а) $g(5)=g(-5)=27$, б) $g(5)=-g(-5)=-27$.

4. 1) а) $y(-x)=\dfrac{6}{(-x)^6}=\dfrac{6}{x^6}=y(x)$, значит, y – четная.

б) $y(-x)=-\dfrac{8}{(-x)^7}=\dfrac{8}{x^7}=-y(x)$, значит, y – нечетная.

в) $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^3+1}=\dfrac{1}{-x^3+1}\neq\pm y(x)$, значит, y – ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x)=\dfrac{1}{(-x)^8+1}=\dfrac{1}{x^8+1}=y(x)$, значит, y – четная;

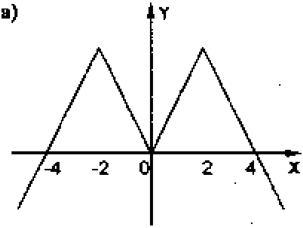
2) а) $y=\dfrac{x^5}{2x}=\dfrac{x^4}{2}$, $y(-x)=\dfrac{(-x)^4}{2}=\dfrac{x^4}{2}=y(x)$, значит, y – четная;

б) $y=\dfrac{3x}{x^4}=\dfrac{3}{x^3}$, $y(-x)=\dfrac{3}{(-x)^3}=-\dfrac{3}{x^3}=-y(x)$, значит, y – нечетная;

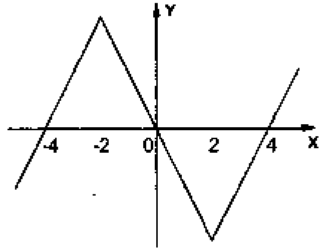
в) $y=\dfrac{3x^2-x^3}{6-2x}=\dfrac{x^2(3-x)}{2(3-x)}=\dfrac{x^2}{2}$, $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}=y(x)$, значит, y – четная;

г) $y=\dfrac{2x+8}{x^2+4x}=\dfrac{2(x+4)}{x(x+4)}=\dfrac{2}{x}$, $y(-x)=\dfrac{2}{-x}=-y(x)$, значит, y — нечетная .

5. а)

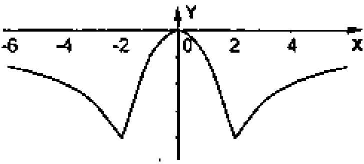


б)

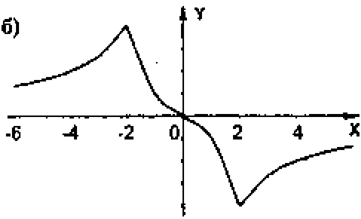


6. $f(x)=\begin{cases}-0{,}5x^2, & 0\le x\le 2\\ -\dfrac{4}{x}, & x>2\end{cases}$.

а)



б)



7. а) $g(-x)=|-x+8|-|-x-8|=|x-8|-|x+8|=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

б) $g(-x)=|-x+8|+|-x-8|=|x-8|+|x+8|=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

в) $g(-x)=\dfrac{7(-x)^2}{(-x)^2-16}=\dfrac{7x^2}{x^2-16}=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

г) $g(-x)=\dfrac{9(-x)^3}{(-x)^2-25}=\dfrac{-9x^3}{x^2-25}=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

д) $g(-x)=\dfrac{5(-x)^3}{(-x-3)^2}=-\dfrac{5x^3}{(x+3)}\ne\pm g(x)$, значит, $g(x)$ — ни четная, ни нечетная;

е) $g(x)=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=x$, $g(-x)=-x=-g(x)$, значит, нечетная.

С–25. Функция $y = x^n$

1. 1) $g(x)=x^{10}$ а) $g(1{,}423)>g(1{,}327)$, т.к. $|1{,}423|>|1{,}327|$;

б) $g(-80{,}3)>g(-78{,}2)$, т.к. $|-80{,}3|>|-78{,}2|$; в) $g(-23{,}1)>g(18{,}7)$, т.к. $|-23{,}1|>|18{,}7|$;

г) $g(-42,8)=g(42,8)$, т.к. $|-42,8|=|42,8|$;

2) а) $g\left(\frac{5}{8}\right)<g\left(\frac{2}{3}\right)$, т.к. $\left|\frac{5}{8}\right|<\left|\frac{2}{3}\right|$; б) $g\left(-\frac{4}{9}\right)<g\left(-\frac{1}{2}\right)$, т.к. $\left|-\frac{4}{9}\right|<\left|-\frac{1}{2}\right|$;

в) $g\left(-\frac{17}{20}\right)=g(0,85)$, т.к. $\left|-\frac{17}{20}\right|=|0,85|$; г) $g(-0,72)>g\left(-\frac{5}{7}\right)$, т.к. $|-0,72|>\left|-\frac{5}{7}\right|$

2. $f(x)=x^{95}$; 1) а) $f(23,4)>f(21,8)$; т.к. $23,4>21,8$;

б) $f(-3,9)<f(-3,7)$; т.к. $-3,9<-3,7$; в) $f(-52,3)<f(52,3)$; т.к. $-52,3<52,3$;

г) $f(-47,2)<f(45,8)$; т.к. $-47,2<45,8$;

2) а) $f\left(\frac{3}{7}\right)<f\left(\frac{4}{9}\right)$, т.к. $\frac{3}{7}<\frac{4}{9}$; б) $f(-0,4)<f\left(\frac{6}{13}\right)$, т.к. $-0,4<\frac{6}{13}$;

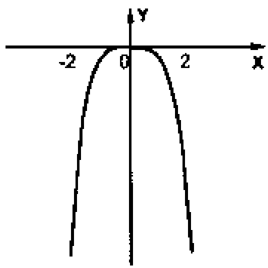
в) $f\left(-\frac{3}{8}\right)=-f(0,375)$; т.к. $-\frac{3}{8}=-0,375$; г) $f(-27,4)<f(27,4)$; т.к. $-27,4<27,4$;

3. $x_н=450$; а) 2 корня; б) 1 корень.

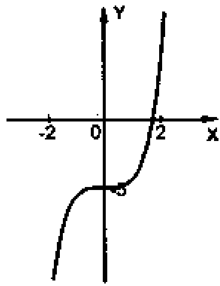
4. а) $x^4=441$, $x=\pm\sqrt[4]{441}$; б) $x^4=-36$, нет корней, т.к. $E(x^4)=[0;+\infty)$;

в) $x^3=-64$, $x=-4$; г) $x^3=\frac{27}{125}$, $x=\frac{3}{5}$.

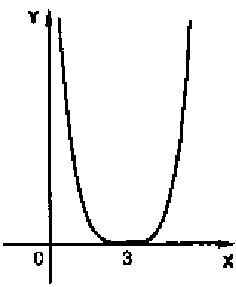
5. а)



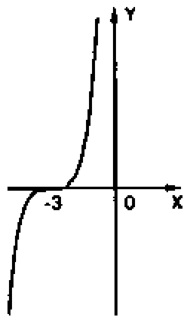
б)



в)



г)



б) а) $x^3 = 23x + 7$ – три корня; б) $x^3 = 0,25x - 4$ – один корень;
в) $x^4 = 23x + 7$ – два корня; г) $x^4 = 0,25x - 4$ – нет корней.

7. а) $y=x^7$; $549,827=(-3,7)^7$ – ложно, значит, точка M не принадлежит графику; $-12,749=(-0,89)^7$ – ложно, значит, точка K не принадлежит графику;

б) $y=x^6$; $1,0487=1,3^6$ – ложно, значит, точка P не принадлежит графику; $1,8724=(-0,8)^6$ – ложно, значит, точка Q не принадлежит графику.

С–26. Определение корня n–й степени

1. 1) а) $\sqrt{0,25}=0,5$; б) $\sqrt[3]{343}=7$; в) $\sqrt[4]{0,0016}=0,2$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}=-\frac{1}{3}$.

2) а) $5\sqrt[3]{0,216}=5\cdot0,6=3$; б) $0,3\sqrt[3]{64}=0,3\cdot4=1,2$;

в) $6\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=6\cdot\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=6\left(-\frac{3}{2}\right)=-9$; г) $12\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}=12\cdot\sqrt[4]{\frac{625}{81}}=12\cdot\frac{5}{3}=20$.

2. 1) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$; б) $\sqrt[5]{0,00001}-\sqrt[3]{-0,064}=0,1+0,4=0,5$;

в) $2,5\sqrt[5]{\frac{1}{32}}-\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}=2,5\cdot0,5-\frac{5}{2}=2,5\cdot0,5-2,5=-1,25$.

2) а) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}-\sqrt[4]{\frac{16}{625}}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$; б) $\sqrt[3]{0,343}-\sqrt[5]{-0,00243}=0,7+0,3=1$;

в) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\sqrt[3]{0,125}=\frac{5}{3}-0,5=\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.

3. а) $3=\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}=4$; б) $3=\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{57}<\sqrt[3]{64}=4$;
в) $0<\sqrt[4]{0,6}<1$; г) $2=\sqrt[5]{32}<\sqrt[5]{48}<\sqrt[5]{243}=3$.
Ответ: а) 3 и 4; б) 3 и 4; в) 0 и 1; г) 2 и 3.

4. 1) а) $\left(\sqrt{15}\right)^2=15$; б) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^3=9$; в) $\left(-\sqrt[4]{17}\right)^4=17$; г) $-\sqrt[4]{17^4}=-17$; д) $\left(-\sqrt[7]{3}\right)^7=-3$.

2) а) $\left(3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3=27\cdot2=54$; б) $\left(-2\sqrt[4]{7}\right)^4=16\cdot7=112$; в) $\left(-\sqrt[5]{26}\right)^5=-26$;

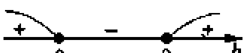
г) $-3\cdot\sqrt[5]{6^5}=-3\cdot6=-18$; д) $\left(-\sqrt[8]{3}\right)^8=3$.

5. а) $x^4=7$, $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{7}$; б) $x^5=30$, $x=\sqrt[5]{30}$; в) $\frac{1}{32}x^6-2=0$, $x^6=64$, $x_{1,2}=\pm2$;

г) $\frac{1}{4}x^5+7=0$, $x^5=-28$, $x=-\sqrt[5]{28}$.

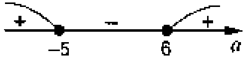
6. а) $\sqrt[8]{x+8}$, $x+8\ge0$, $y\ge-8$; б) $\sqrt[7]{y-2}$, y – любое;

в) $\sqrt[4]{b(b-3)}$, $b(b-3)\ge0$,
$b\in(-\infty;\,0]\cup[3;\,+\infty)$;



г) $\sqrt[6]{a^2-a-30}$, $a^2-a-30\geq 0$, $D=1+4\cdot 30=121$, $a_1=\dfrac{1+11}{2}=6$, $a_2=-5$;

$a\in(-\infty;\ -5]\cup[6;\ +\infty)$.



Ответ: а) $y\geq -8$; б) при всех x; в) $b\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$; г) при $a\leq -5$ и $a\geq 6$.

7. а) $x^8-15x^4-16=0$, $x^4=y\geq 0$, тогда $y^2-15y-16=0$, $D=289$,

$y_1=\dfrac{15+17}{2}=16$, $y_2<0$, $x^4=16$, $x_{1,2}=\pm 2$;

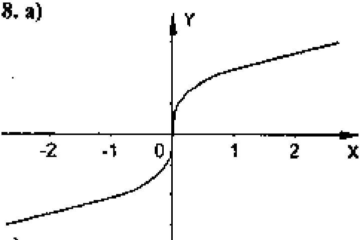
б) $x^4-10x^2+27=0$, $x^2=y\geq 0$, тогда $y^2-10y+27=0$, $D<0$, нет корней;

в) $x^6-7x^3-8=0$, $x^3=y$, тогда $y^2-7y-8=0$, $D=81$.

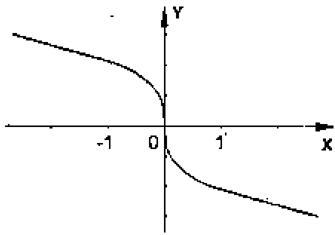
$y_1=\dfrac{7+9}{2}=8$, $y_2=-1$, $x^3=8$, $x=2$, $x^3=-1$, $x=-1$.

Ответ: а) ± 2; б) нет; в) -1 и 2.

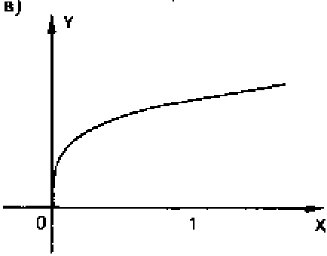
8. а)



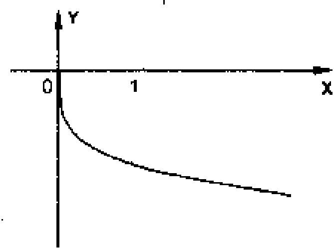
б)



в)



г)



С–27. Свойства арифметического корня

1. а) $\sqrt[3]{27\cdot 64}=3\cdot 4=12$; б) $\sqrt[4]{3^8\cdot 2^4}=3^2\cdot 2=18$; в) $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot 6^8}=0{,}3\cdot 6^2=10{,}8$;

г) $\sqrt[7]{\dfrac{5^7}{2^{14}}}=\dfrac{5}{2^2}=\dfrac{5}{4}$; д) $\sqrt[3]{\dfrac{3^9}{0{,}125}}=\dfrac{3^3}{0{,}5}=54$; е) $\sqrt[8]{\dfrac{2^8\cdot 3^{24}}{5^{16}}}=\dfrac{2\cdot 3^3}{5^2}=\dfrac{54}{25}$.

2. а) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\cdot 2}=2$; б) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=5$; в) $\sqrt[4]{135}\cdot\sqrt[4]{375}=\sqrt[4]{135\cdot 375}=15$;

г) $\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}}=\frac{2}{3}$; д) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^4}\cdot\sqrt[7]{5^3}=3\cdot\sqrt[7]{5^7}=3\cdot 5=15$;

е) $\sqrt[6]{2^{11}}\cdot\sqrt[6]{3^{12}\cdot 2^7}=\sqrt[6]{2^{18}\cdot 3^{12}}=2^3\cdot 3^2=72$.

3. а) $\sqrt{49a^2}=7a$; б) $\sqrt[3]{8b^6}=2b^2$; в) $\sqrt[4]{625a^8b^4}=5a^2b$; г) $\sqrt[5]{\frac{243a^{10}b^{15}}{32}}=\frac{3}{2}a^2b^3$.

4. а) $\sqrt{25x}=5\sqrt{x}$; б) $\sqrt{72y^3}=\sqrt{36\cdot 2y^2\cdot y}=6y\sqrt{2y}$;

в) $\sqrt[3]{54\cdot x^8}=\sqrt[3]{27\cdot 2\cdot x^6\cdot x^2}=3x^2\cdot\sqrt[3]{2x^2}$; г) $\sqrt[4]{162y^9}=\sqrt[4]{81\cdot 2y^8\cdot y}=3y^2\cdot\sqrt[4]{2y}$.

5. а) $5\sqrt{2a}=\sqrt{50a}$; б) $3\sqrt[3]{2b}=\sqrt[3]{54b}$; в) $x\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{5x^4}$; г) $y\sqrt[5]{8y^4}=\sqrt[5]{8y^9}$.

6. а) $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{11}\right)\left(6+\sqrt{11}\right)}=\sqrt{36-11}=5$;

б) $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}=\sqrt[3]{\left(5+\sqrt{17}\right)\left(5-\sqrt{17}\right)}=\sqrt[3]{25-17}=2$;

в) $\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}=\sqrt[4]{\left(10+\sqrt{19}\right)\left(10-\sqrt{19}\right)}=\sqrt[4]{100-19}=3$;

7. а) $\sqrt[4]{x^4y}=x\sqrt[4]{y}$; $x,y\ge 0$; б) $\sqrt[4]{x^4y}=-x\sqrt[4]{y}$; $x\le 0$, $y\ge 0$;

в) $\sqrt[4]{x^5y^5}=xy\sqrt[4]{xy}$; $xy\ge 0$, т.е. $x,y\ge 0$ или $x,y\le 0$.

8. а) $\sqrt[4]{625a^4b}=-5a\cdot\sqrt[4]{b}$; б) $\sqrt{-98c^7}=\sqrt{-49\cdot 2\cdot c^6\cdot c}=-7c^3\sqrt{-2c}$; в) $\sqrt[4]{x^5y^5}=xy\sqrt[4]{xy}$.

9. а) $x\cdot\sqrt[5]{\frac{3}{y^4}}=\sqrt[5]{\frac{3x^5}{y^4}}$; б) $bc\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{b^3c^3}}=\sqrt[4]{\frac{3b^4c^4}{b^3c^3}}=\sqrt[4]{3bc}$; в) $ax\cdot\sqrt[6]{\frac{5}{a^4x^5}}=\sqrt[6]{\frac{5a^6x^6}{a^4x^5}}=\sqrt[6]{5a^2x}$.

10. $5a\cdot\sqrt[4]{2a^{-5}}-\sqrt[4]{162a}-a^2\cdot\sqrt[4]{2a^{-7}}=5a\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{a^5}}-3\cdot\sqrt[4]{2a}-a^2\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{a^7}}=$

$$=5\cdot\sqrt[4]{\frac{2a^4}{a^5}}-3\cdot\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{\frac{2a^8}{a^7}}=5\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}}-3\cdot\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{2a}=5\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}}-4\cdot\sqrt[4]{2a}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{2}-4\cdot\sqrt[4]{2a^2}}{\sqrt[4]{a}}.$$

С–28. Свойства арифметического корня (продолжение)

1. а) $\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$; в) $\sqrt[4]{\frac{1}{b^4}}=\frac{1}{b}$; г) $\sqrt[5]{\frac{10}{a^{15}}}=\frac{\sqrt[5]{10}}{a^3}$.

2. а) $\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{7}{14}\sqrt{14}$; б) $\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{9}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{9^2}}{9}=\frac{5}{9}\cdot\sqrt[3]{81}$;

г) $\frac{9}{\sqrt[4]{8}}=\frac{9\cdot\sqrt[4]{8^3}}{8}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt[4]{512}$; д) $\frac{12}{\sqrt[5]{81}}=\frac{12\cdot\sqrt[5]{81^4}}{81}=\frac{4}{27}\cdot\sqrt[5]{43046721}$.

3. а) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{5}}=\sqrt[8]{5}$; в) $\sqrt[8]{3^4}=\sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[4]{3}$;

д) $\sqrt[10]{x^5}=\sqrt{x}$; е) $\sqrt{b\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{b^3}}=\sqrt[4]{b^3}$; ж) $\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[9]{a^4}$;

з) $\sqrt[8]{y^2\cdot\sqrt[3]{y^2}}=\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^8}}=\sqrt[3]{y}$.

4. а) $\sqrt[3]{5}>\sqrt[6]{24}$, $\sqrt[6]{25}>\sqrt[6]{24}$; б) $\sqrt[6]{2}<\sqrt[18]{10}$, $\sqrt[18]{8}<\sqrt[18]{10}$; в) $\sqrt[4]{4}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[12]{64}=\sqrt[12]{64}$;

г) $\sqrt[12]{6}<\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[12]{6}<\sqrt[6]{\sqrt[3]{2^4}}$, $\sqrt[12]{6}<\sqrt[18]{16}$, $\sqrt[36]{216}<\sqrt[36]{256}$.

5. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{125}$, значит, $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$.

6. а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{xy}-\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{y}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}=\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[6]{a}\right)^3+\left(\sqrt[6]{b}\right)^3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt[8]{y}\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)}=\dfrac{\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}}{\sqrt[8]{xy}\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{xy}}$.

7. а) $\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}=0$, $\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-8\right)=0$, $\sqrt[4]{x_1}=0$, $x_1=0$, $\sqrt[4]{x_2}-8=0$, $\sqrt[4]{x_2}=8$, $x_2=4096$;

б) $\sqrt[4]{x}+3\sqrt[8]{x}=0$, $\sqrt[8]{x}\left(\sqrt[8]{x}+3\right)=0$, $\sqrt[8]{x_1}=0$, $x_1=0$, $\sqrt[8]{x_2}=-3$ – нет корней;

в) $\sqrt[5]{x}-3\sqrt[10]{x}+2=0$, $\sqrt[10]{x}=y\ge0$, $y^2-3y+2=0$; $D=1$, $y_1=\dfrac{3+1}{2}=2$, $y_2=1$,

$\sqrt[10]{x_1}=2$, $x_1=2^{10}$, $x_1=1024$, $\sqrt[10]{x}=1$, $x_2=1$;

г) $\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-4=0$, $\sqrt[4]{x}=y\ge0$, $y^2+3y-4=0$, $D=9+4\cdot4=25$,

$y_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$, $y_2<0$, $\sqrt[4]{x}=1$, $x=1$.

Ответ: а) $x_1=0$, $x_2=4096$; б) $x=0$; в) $x_1=1024$, $x_2=1$; г) $x=1$.

8. а) $x-5\sqrt{x}<0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2-5y<0$,

$y(y-5)<0$, $0<y<5$, $0<\sqrt{x}<5$, $0<x<25$.

Ответ: $(0;\ 25)$.

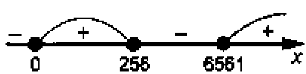
б) $x+4\sqrt{x}>0$, $\sqrt{x}=y$, $y^2+4y>0$, $y(y+4)>0$, $y<-4$, $\sqrt{x}<-4$ – нет решений,

$y>0$, $\sqrt{x}>0$, $x>0$.

Ответ: $(0;\ +\infty)$.

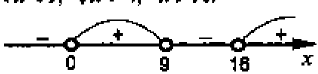
в) $\sqrt[4]{x}-5\sqrt[8]{x}+6\ge0$, $\sqrt[8]{x}=y$, $y^2-5y+6\ge0$, $D=1$, $y_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$, $y\le2$, $\sqrt[8]{x}\le2$,

$0\le x\le256$, $y\ge3$, $\sqrt[8]{x}\ge3$, $x\ge6561$.



Ответ: $[0;\ 256]\cup[6561;\ +\infty)$.

г) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-4\right)>0$, $0<\sqrt{x}<3$, $0<x<9$, $\sqrt{x}>4$, $x>16$.



Ответ: $(0;\ 9)\cup(16;\ +\infty)$.

С–29. Степень с целыми показателями

1. а) $2^{-6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$; б) $12^{-1}=\frac{1}{12}$; в) $c^{-7}=\frac{1}{c^7}$; г) $2ab^{-3}=\frac{2a}{b^3}$; д) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$.

2. а) $\frac{1}{6^5}=6^{-5}$; б) $\frac{1}{a^3}=a^3$; в) $\frac{1}{7}=7^{-1}$; г) $\frac{1}{1000}=10^{-3}$; д) $0{,}00001=10^{-5}$;

2) а) $\left(\frac{1}{18}\right)^3=18^{-3}$; б) $\frac{1}{x^2y^2}=(xy)^{-2}$;

в) $\frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{1}{a^3-b^3}=(a^3-b^3)^{-1}$; г) $\frac{1}{(x-y)(x-y)}=\frac{1}{(x-y)^2}=(x-y)^{-2}$.

3. а) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{7}\right)^2<1$; б) $12{,}3^0=1$; в) $10^{-5}=\frac{1}{10^5}<1$;

г) $\left(-3\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{11}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{11}\right)^2=\left(\frac{3}{11}\right)^2<1$.

4. 1) а) $(1{,}1)^{-2}=\frac{1}{1{,}1^2}=\frac{1}{1{,}21}$; б) $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$; в) $(-12{,}7)^0=1$;

г) $1^{-13}=1$; д) $-12{,}7^0=-1$;

2) а) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=(-3)^2=9$;

в) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{7}$; г) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$.

3) а) $7^{-5}\cdot7^{13}\cdot7^{-5}=7^{-5+13-5}=7^3=343$; б) $2^{-5}:2^{-9}=2^{-5-(-9)}=2^4=16$;

в) $(0{,}2)^3:(0{,}2)^{-3}=0{,}2^{3-(-3)}=2^6=0{,}000064$;

г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}:\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-6-(-3)}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$.

4) а) $(-2)^{-2}+3^{-1}=\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$;

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}-2^{-4}=\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{2^4}=\frac{25}{16}-\frac{1}{16}=1{,}5$;

в) $(-0{,}1)^{-3}+(-0{,}2)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}1)^3}+\frac{1}{(-0{,}2)^3}=\frac{1}{-0{,}001}+\frac{1}{-0{,}008}=-1000-125=-1125$;

г) $(0{,}2)^{-3}+(0{,}5)^{-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=125+8=133$.

5) а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}-7^{-2}:7^{-4}=49-7^2=0$; б) $5^{-3}:5^{-5}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=5^2-5^4=-600$;

в) $10^{-5}\cdot 3{,}1\cdot 10^{5}\cdot 3=9{,}3.$

5. а) $\left(b^{-3}-b^{-2}\right)^2+\frac{2}{b^5}=\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{2}{b^5}=\left(\frac{1-b}{b^3}\right)^2+\frac{2}{b^5}=\frac{1-2b+b^2+2b}{b^6}=\frac{1+b^2}{b^6};$

б) $\left(a+a^{-1}\right)^3=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3=\frac{\left(a^2+1\right)^3}{a^3};$

в) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\left(a^{-1}+b^{-1}\right)=\frac{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)}{a^{-1}+b^{-1}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}.$

С–30. Степень с целым показателем (продолжение)

1. а) $(a-1)^{-2}=\frac{1}{(a-1)^2};$ **б)** $(3bc)^{-3}=\frac{1}{27b^3c^3};$ **в)** $a^{-1}+1=\frac{1}{a}+1=\frac{1+a}{a};$

г) $x^{-3}-x^{-1}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}=\frac{1-x^2}{x^3};$ **д)** $a^{-2}-b^{-2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}.$

2. а) $\left(a^3\right)^{-2}=a^{-6}=\frac{1}{a^6};$ **б)** $\left(xy^{-1}\right)^{-3}=x^{-3}y^3=\frac{y^3}{x^3};$ **в)** $\left(-5c^{-4}\right)^2=25c^{-8}=\frac{25}{c^8};$

г) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-1}=\frac{b^3}{a^2};$ **д)** $\left(\frac{x^{-3}}{3y^2}\right)^{-2}=\frac{9x^6}{y^{-4}}=9x^6y^4.$

3. а) $8^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(2^3\right)^{-3}\cdot 2^{-3}=2^{-9-3}=\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{4096};$

б) $25^{-3}\cdot 15^4=\frac{(5\cdot 3)^4}{25^3}=\frac{5^4\cdot 3^4}{5^6}=\frac{3^4}{5^2}=\frac{81}{25};$ **в)** $6^{-4}:3^{-6}=\frac{3^6}{6^4}=\frac{3^6}{2^4\cdot 3^4}=\frac{3^2}{2^4}=\frac{9}{16};$

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}:\left(-\frac{4}{3}\right)^{8}=\frac{4^5}{3^5}\cdot\frac{3^8}{4^8}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64};$ **д)** $\frac{2^{-5}\cdot 16^2}{8^4}=\frac{2^{-5}\cdot 2^8}{2^{12}}=\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}.$

4. а) $a^3b^3\left(a^{-3}+b^{-3}\right)=a^3b^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)=b^3+a^3;$

б) $(x-y)^{-2}\cdot\frac{1}{(y-x)^{-1}}=\frac{1}{(x-y)^2}\cdot(y-x)=\frac{y-x}{(y-x)^2}=\frac{1}{y-x};$

в) $a^9\left(a^{-3}-a^{-5}\right)\left(a^4+a^5\right)^{-1}=\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^5}\right)\cdot\frac{1}{a^4+a^5}\cdot a^9=$

$=\frac{a^2-1}{a^5}\cdot\frac{1}{a^4(1+a)}\cdot a^9=\frac{(a-1)(a+1)}{1+a}=a-1.$

5. $\left(\left(ab^{-1}\right)^{-2}-a^0b^2\right):\frac{a^2-b^4}{b}=\left(\frac{a^2}{b^2}-b^2\right)\cdot\frac{b}{a^2-b^4}=\frac{\left(a^2-b^4\right)\cdot b}{b^2\left(a^2-b^4\right)}=\frac{1}{b}=\frac{1}{17}.$

6. 1) а) $100^3=\left(10^2\right)^3=10^6;$ **б)** $0{,}0003^2=\left(3\cdot 10^{-4}\right)^2=9\cdot 10^{-8};$

в) $1000^{-2}=\left(10^3\right)^{-2}=10^{-6}$; г) $(0{,}0001)^{-4}=\left(10^{-4}\right)^{-4}=10^{16}$.

2) а) $0{,}0000016=1{,}6\cdot10^{-6}$; б) $0{,}00007142=7{,}142\cdot10^{-5}$;

в) $\dfrac{1}{16}=0{,}0625=6{,}25\cdot10^{-2}$; г) $\dfrac{1}{32}=0{,}03125=3{,}125\cdot10^{-2}$.

7. а) $\left(2x^{-2}-y\right)\left(y+2x^{-2}\right)=\left(2x^{-2}\right)^2-y^2=4x^{-4}-y^2=\dfrac{4}{x^4}-y^2=\dfrac{4-x^4y^2}{x^4}$;

б) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\left(a^{-4}+(ab)^{-2}+b^{-4}\right)=\left(a^{-2}\right)^3-\left(b^{-2}\right)^3=a^{-6}-b^{-6}=\dfrac{1}{a^6}-\dfrac{1}{b^6}=\dfrac{b^6-a^6}{a^6b^6}$;

в) $\left(a^{-1}+4\right)\left(a^{-2}-(0{,}25a)^{-1}+16\right)=\left(a^{-1}\right)^3+4^3=\dfrac{1}{a^3}+64=\dfrac{1+64a^3}{a^3}$.

С–31. Определение степени с рациональным показателем

1. 1) а) $6^{1/2}=\sqrt{6}$; $5^{3/4}=\sqrt[4]{5^3}$; $12^{-1/3}=\sqrt[3]{12^{-1}}$; $23^{-4/5}=\sqrt[5]{23^{-4}}$;

б) $a^{0,5}=\sqrt{a}$; $b^{2,5}=b^{5/2}=\sqrt{b^5}$; $x^{-0,5}=\sqrt{x^{-1}}$; $y^{-1,5}=\sqrt{y^{-3}}$;

2) а) $3a^{1/3}=3\sqrt[3]{a}$; $-5b^{3/4}=-5\sqrt[4]{b^3}$; $(3x)^{0,5}=\sqrt{3x}$; $(4y)^{-1,5}=\sqrt{(4y)^{-3}}$;

б) $(x-a)^{2/3}=\sqrt[3]{(x-a)^2}$; $y^{3/5}-b^{3/5}=\sqrt[5]{y^3}-\sqrt[5]{b^3}$; $ab^{0,5}+xy^{0,5}=a\sqrt{b}+x\sqrt{y}$.

2. 1) а) $\sqrt{5}=5^{1/2}$; $\sqrt[3]{7}=7^{1/3}$; $\sqrt[9]{3}=3^{1/9}$; $\sqrt[7]{4^2}=4^{2/7}$;

б) $\sqrt[5]{x^3}=x^{3/5}$; $\sqrt[7]{y^4}=y^{4/7}$; $\sqrt[10]{4a}=(4a)^{1/10}$; $\sqrt[8]{16b^4}=\left(16b^4\right)^{1/8}$;

2) а) $\sqrt[3]{5^{-1}}=5^{-1/3}$; $\sqrt[4]{8}=8^{1/4}$; $\sqrt[10]{25^3}=25^{0,3}$;

б) $\sqrt[6]{a^{-2}}=a^{-1/3}$; $\sqrt[7]{(x+y)^3}=(x+y)^{3/7}$; $\sqrt[3]{x^2+y^2}=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$.

3. 1) а) $16^{1/2}=4$; б) $25^{-1/2}=\dfrac{1}{25^{1/2}}=\dfrac{1}{5}$; в) $7\cdot81^{-1/4}=7\cdot3=21$;

г) $-5\cdot0{,}001^{-2/3}=-5\cdot\left(10^{-3}\right)^{-2/3}=-5\cdot10^2=-500$.

2) а) $0{,}0625^{-1/4}=\dfrac{1}{0{,}0625^{1/4}}=\dfrac{1}{0{,}5}=2$; б) $0{,}0049^{0,5}=0{,}07$;

в) $\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-4/3}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-4/3}=\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right)^{-4/3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$;

г) $\left(4\dfrac{17}{27}\right)^{-1/6}=\left(\dfrac{27}{125}\right)^{1/6}=\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\right)^{1/6}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

4. а) $0\le y\le0{,}00032$; $0\le y^{0,6}\le\left(0{,}2^5\right)^{3/5}$; $0\le y^{0,6}\le0{,}008$;

б) $1\le y\le243$; $1\le y^{0,6}\le\left(3^5\right)^{3/5}$; $1\le y^{0,6}\le27$;

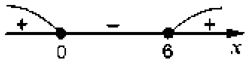
в) $0{,}00001\le y\le1$; $(10^{-5})^{3/5}\le y\le1$; $0{,}001\le y\le1$;

г) $32 \le y \le 1024$; $\left(2^5\right)^{3/5} \le y^{0,6} \le \left(2^{10}\right)^{3/5}$; $8 \le y^{0,6} \le 64$;

5. а) $y = x^{4/9} = \sqrt[9]{x^4}$; $D(y) = R$; **б)** $y = x^{-0,7} = \dfrac{1}{x^{7/10}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{x^7}}$; $D(y) = (0;\ +\infty)$;

в) $y = (x+5)^{-0,1} = \dfrac{1}{(x+5)^{0,1}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{x+5}}$; $x+5>0$; $x>-5$; $D(y) = (-5;\ +\infty)$;

г) $y = \left(x^2-6x\right)^{3/4} = \sqrt[4]{\left(x^2-6x\right)^3}$; $x^2-6x \ge 0$; $x(x-6) \ge 0$;



$D(y) = (-\infty;\ 0] \cup [6;\ +\infty)$.

6. а) $x^{1/2} = 5$, $x = 25$; **б)** $x^{1/3} = 3$, $x = 27$; **в)** $(x-2)^{0,5} = 7$, $x-2 = 49$, $x = 51$;

г) $(x+3)^{1/4} = 0$, $x+3 = 0$, $x = -3$; **д)** $\left(x^2-16\right)^{0,5} = 3$, $x^2-16 = 9$, $x^2 = 25$, $x_{1,2} = \pm 5$;

е) $\left(x^2+7x\right)^{1/3} = 2$; $x^2+7x = 8$; $x^2+7x-8 = 0$; $D = 49+4\cdot 8 = 81$; $x_1 = \dfrac{-7+9}{2} = 1$; $x_2 = -8$;

С–32. Свойства степени с рациональным показателем

1. 1) а) $a^{1/2}\cdot a^{1/5} = a^{1/2+1/5} = a^{0,7}$; **б)** $\left(a^{1/2}\right)^{1/5} = a^{1/10}$; **в)** $a^{1/2} : a^{1/5} = a^{1/2-1/5} = a^{0,3}$;

г) $a : a^{3/5} = a^{1-3/5} = a^{2/5}$; д) $a^{2/3}a^{1/6}a^{-1/2} = a^{4/6+1/6-3/6} = a^{1/3}$.

2) а) $\left(b^{0,6}\right)^{0,3}\cdot b^{0,32} = b^{0,18}\cdot b^{0,32} = b^{0,5}$; **б)** $\left(b^{3/8}\right)^{1,6}\cdot\left(b^{-2/7}\right)^{1,4} = b^{0,6}\cdot b^{-0,4} = b^{0,2}$;

в) $\dfrac{b^{5/8}\cdot b^{1/4}}{b^{-0,125}} = b^{3/8+1/8} = b^{0,5}$; **г)** $\dfrac{b^{4,7}b^{-3,9}}{b^{-2,1}b^{1,9}} = b$.

2. 1) а) $\left(5^{0,6}\right)^{-0,6}\cdot(0,2)^{-2,36} = 5^{-0,36}\cdot\left(5^{-1}\right)^{-2,36} = 5^{-0,36}\cdot 5^{2,36} = 5^2 = 25$;

б) $\left(2^{-1/7}\right)^{1,4}\cdot 4^{0,1} = 2^{-0,2}\cdot\left(2^2\right)^{0,1} = 2^{-0,2}\cdot 2^{0,2} = 2$;

2) а) $81^{0,25}\cdot 27^{-1/6}\cdot 9^{0,75} = \left(3^4\right)^{0,25}\cdot\left(3^3\right)^{-1/6}\cdot\left(3^2\right)^{0,75} = 3^1\cdot 3^{-0,5}\cdot 3^{1,5} = 3^2 = 9$;

б) $\dfrac{32^{0,42}\cdot 4^{0,6}}{16^{0,3}\cdot 2^{0,1}} = \dfrac{\left(2^5\right)^{0,42}\cdot 2^{1,2}}{\left(2^4\right)^{0,3}\cdot 2^{0,1}} = \dfrac{2^{2,1}\cdot 2^{1,2}}{2^{1,2}\cdot 2^{0,1}} = \dfrac{2^{3,3}}{2^{1,3}} = 2^2 = 4$.

3. $x^8 = \left(x^4\right)^2$; $x^{-4} = \left(x^{-2}\right)^2$; $x^5 = \left(x^{5/2}\right)^2$; $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $x^{1/4} = \left(x^{1/8}\right)^2$; $x^{1/5} = \left(x^{1/10}\right)^2$; $x^{4/9} = \left(x^{4/18}\right)^2$.

4. $y^9 = \left(y^3\right)^3$; $y^{-6} = \left(y^{-2}\right)^3$; $y^2 = \left(y^{2/3}\right)^3$; $y = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3$; $y^{1/3} = \left(y^{1/9}\right)^3$; $y^{1/5} = \left(y^{1/15}\right)^3$.

5. а) $\left(a^{1/2}-2\right)\cdot 3a^{1/2} + 6a^{1/2} = 3a - 6a^{1/2} + 6a^{1/2} = 3a$; **б)** $\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right) = a-b$;

в) $\left(1+a^{0,5}\right)^2 + 2a^{0,5} = 1 + 2a^{0,5} + a + 2a^{0,5} = 1 + 4a^{0,5} + a$;

г) $\left(b^{1/3}+1\right)\left(b^{2/3}-b^{1/3}+1\right) = \left(b^{1/3}\right)^3 + 1^3 = b+1$.

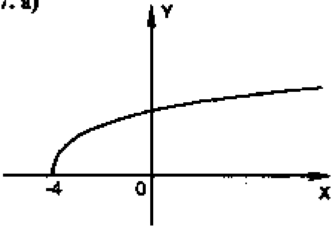
6. а) $x = a^{0,49}$, $y = a^{-0,49}$; $x\cdot y = a^{0,49}\cdot a^{-0,49} = a^0 = 1$, т.е. $xy = 1$;

б) $x = a^{1/2}$, $y = a^{1/4}$; $x\cdot y^{-2} = a^{1/2}\cdot a^{-1/2} = 1$, т.е. $xy^{-2} = 1$, $x = y^2$;

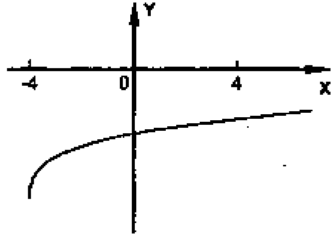
в) $x = a^{1/6}$, $y = \sqrt{1-a^{1/3}}$; $x^2+y^2 = \left(a^{1/6}\right)^2 + \left(\sqrt{1-a^{1/3}}\right)^2 = a^{1/3} + 1 - a^{1/3} = 1$, т.е. $x^2+y^2 = 1$;

г) $x=\sqrt[4]{a},\ y=\sqrt[4]{a-5};\ x^4-y^4=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4-\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^4=a-(a-5)=5$, т.е. $x^4-y^4=5$.

7. а)



б)



С–33. Преобразования выражений, содержащих степени с дробными показателями

1. 1) а) $a-4a^{1/2}=a^{1/2}\left(a^{1/2}-4\right)=a^{1/2}\left(a^{1/4}-2\right)\left(a^{1/4}+2\right)$; б) $b^{1/2}+3b^{1/4}=b^{1/4}\left(b^{1/4}+3\right)$;

в) $\left(x^{1/2}\right)^2-9=\left(x^{1/2}-3\right)\left(x^{1/2}+3\right)$; г) $\left(y^{1/3}\right)^3-27=\left(y^{1/3}-3\right)\left(y^{2/3}+3y^{1/3}+9\right)$;

д) $a^{2/3}-b^{2/3}=\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)$; е) $x^{3/2}+y^{3/2}=\left(x^{1/2}+y^{1/2}\right)\left(x-x^{1/2}y^{1/2}+y\right)$;

2) а) $x^{1/2}+10x^{1/4}=x^{1/4}\left(x^{1/4}+10\right)$; б) $y^{3/4}-2y^{1/2}=y^{1/2}\left(y^{1/4}-2\right)$;

в) $cd^{1/10}+cd^{1/5}=cd^{1/10}\left(1+d^{1/10}\right)$; г) $p^{2/9}-p^{1/9}=p^{1/9}\left(p^{1/9}-1\right)$;

д) $b-25=\left(\sqrt{b}-5\right)\left(\sqrt{b}+5\right)$; е) $a-125=\left(a^{1/3}-5\right)\left(a^{2/3}+5a^{1/3}+25\right)$.

2. 1) а) $\dfrac{a+6a^{1/2}}{a^{1/2}+6}=\dfrac{a^{1/2}\left(a^{1/2}+6\right)}{a^{1/2}+6}=a^{1/2}$; б) $\dfrac{5b^{1/2}}{b^{1/2}+3b^{1/4}}=\dfrac{5b^{1/2}}{b^{1/4}\left(b^{1/4}+3\right)}=\dfrac{5b^{1/4}}{b^{1/4}+3}$;

в) $\dfrac{x-y}{x^{0.5}+y^{0.5}}=\dfrac{\left(x^{0.5}+y^{0.5}\right)\left(x^{0.5}-y^{0.5}\right)}{x^{0.5}+y^{0.5}}=x^{0.5}-y^{0.5}$;

г) $\dfrac{x^{1.5}y+xy^{1.5}}{xy^{0.5}+x^{0.5}y}=\dfrac{xy\left(x^{0.5}+y^{0.5}\right)}{x^{0.5}y^{0.5}\left(x^{0.5}+y^{0.5}\right)}=x^{0.5}y^{0.5}$;

д) $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}=\dfrac{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)\left(a-a^{1/2}b^{1/2}+b\right)}{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}=a^{1/2}+b^{1/2}$;

е) $\dfrac{p-q}{p^{1/3}-q^{1/3}}=\dfrac{\left(p^{1/3}-q^{1/3}\right)\left(p^{2/3}+p^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3}\right)}{p^{1/3}-q^{1/3}}=p^{2/3}+p^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3}$;

2) а) $\dfrac{x-3x^{1/2}}{x^{3/2}-3x}=\dfrac{x^{1/2}\left(x^{1/2}-3\right)}{x\left(x^{1/2}-3\right)}=\dfrac{1}{x^{1/2}}$; б) $\dfrac{y^{1/3}+y^{5/6}}{y^{1/3}-y^{5/6}}=\dfrac{y^{1/3}\left(1+y^{1/2}\right)}{y^{1/3}\left(1-y^{1/2}\right)}=\dfrac{1+y^{1/2}}{1-y^{1/2}}$;

в) $\dfrac{9a-b}{3a-a^{0.5}b^{0.5}}=\dfrac{\left(3a^{0.5}-b^{0.5}\right)\left(3a^{0.5}+b^{0.5}\right)}{a^{0.5}\left(3a^{0.5}-b^{0.5}\right)}=\dfrac{3a^{0.5}+b^{0.5}}{a^{0.5}}$;

г) $\frac{p^{2/5}-q^{2/5}}{p+p^{4/5}q^{1/5}}=\frac{\left(p^{1/5}-q^{1/5}\right)\left(p^{1/5}+q^{1/5}\right)}{p^{4/5}\left(p^{1/5}+q^{1/5}\right)}=\frac{p^{1/5}-q^{1/5}}{p^{4/5}}$;

д) $\frac{a^{1/2}b^{1/2}-ab+a^{1/2}b^{3/2}}{a+b}=\frac{a^{1/2}b^{1/2}-ab+a^{1/2}b^{3/2}}{a+b}$;

е) $\frac{x^{0,3}-y^{0,3}}{x^{0,1}-y^{0,1}}=\frac{\left(x^{0,1}-y^{0,1}\right)\left(x^{0,2}+x^{0,1}y^{0,1}+y^{0,2}\right)}{x^{0,1}-y^{0,1}}=x^{0,2}+x^{0,1}y^{0,1}+y^{0,2}$;

3. $\frac{y-49y^{0,5}}{y^{0,75}-7y^{0,5}}=\frac{y^{0,5}\left(y^{0,5}-49\right)}{y^{0,5}\left(y^{0,25}-7\right)}=\frac{\left(y^{0,25}-7\right)\left(y^{0,25}+7\right)}{y^{0,25}-7}=y^{0,25}+7=$

$=\left(2,25\right)^{0,25}+7=\sqrt{1,5}+7.$

4. а) $\frac{b}{81-b}-\frac{9}{b^{0,5}+9}+\frac{b^{0,5}}{b^{0,5}-9}=\frac{b}{\left(9-b^{0,5}\right)\left(9+b^{0,5}\right)}-\frac{9}{9+b^{0,5}}-\frac{b^{0,5}}{9-b^{0,5}}=$

$=\frac{b-9\left(9-b^{0,5}\right)-b^{0,5}\left(9+b^{0,5}\right)}{\left(9-b^{0,5}\right)\left(9+b^{0,5}\right)}=-\frac{81}{81-b}=\frac{81}{b-81}$;

б) $\left(\frac{6x^{0,5}+1}{x^{0,5}-3}+\frac{6x^{0,5}-1}{x^{0,5}+3}\right)\cdot\frac{x-9}{2x+1}=\frac{\left(6x^{0,5}+1\right)\left(x^{0,5}+3\right)+\left(6x^{0,5}-1\right)\left(x^{0,5}-3\right)}{x-9}\cdot\frac{x-9}{2x+1}=$

$=\frac{6x+19x^{0,5}+3+6x-19x^{0,5}+3}{2x+1}=\frac{12x+6}{2x+1}=6.$

С–34. Радианная мера угла

1. а) $\frac{\pi}{2}=\frac{180°}{2}=90°$; б) $\frac{3\pi}{2}=3\frac{\pi}{2}=3\cdot90°=270°$; в) $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\cdot180°=120°$;

г) $\frac{4}{5}\pi=\frac{4}{5}\cdot180°=144°$; д) $2\pi=2\cdot180°=360°$.

2. а) $75°=75\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}$; б) $50°=50\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{18}$; в) $720°=720\cdot\frac{\pi}{180}=4\pi$;

г) $15°=15\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$; д) $10°=10\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{18}$.

3. $\frac{5\pi}{9}=\frac{5}{9}\cdot180°=100°$.

Градусы	60°	30°	120°	150°	100°	72°	108°	135°	20°	450°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{9}$	$2,5\pi$

4. а) $\frac{\pi}{4}\approx 0,79$; б) $\frac{\pi}{6}\approx 0,52$; в) $\frac{\pi}{3}\approx 1,05$; г) $\pi\approx 3,14$; д) $\frac{3\pi}{2}\approx 4,71$.

5. а) $\frac{\pi}{4}>0,(7)$; б) $-\frac{\pi}{6}<-\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}\pi<4,8$.

6. Длина окружности равна $2\pi R\approx 21,35$ (см). За 10 мин конец стрелки пройдет одну шестую длины, т.е. 3,56 см.

7. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$ и $5x$ – углы треугольника. Их сумма равна π, т.е. $2x+3x+5x=\pi$, $10x=\pi$, $x=\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$ – углы треугольника.

8. Пусть x – угол, $\pi\cdot 4,5^2$ см^2 – площадь круга, $\frac{\pi\cdot 4,5^2}{2\pi}\cdot x=\frac{4,5^2\cdot x}{2}$ см^2 – площадь сектора или 20,25 см^2. Получаем: $\frac{4,5^2\cdot x}{2}=20,25$; $x=2$.

9. $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ – угол при вершине; $\frac{\pi-\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{3\pi}{8}$ – II и III углы.

10. Внутренний угол правильного n–угольника равен $\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$.

Внешний равен: $\pi-\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)=\pi\left(1-1+\frac{2}{n}\right)=\frac{2\pi}{n}$. Получаем: $\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{6}$; $n=12$.

С–35 Поворот точки вокруг начала координат

1. 1) а) $(-1;0)$; б) $(0;1)$; в) $(0;-1)$; г) $(-1;0)$; д) $(1;0)$.

2) а) $(1;0)$; б) $(0;-1)$; в) $(-1;0)$; г) $(1;0)$; д) $(0;-1)$.

2. а) III; б) III; в) I; г) IV; д) III.

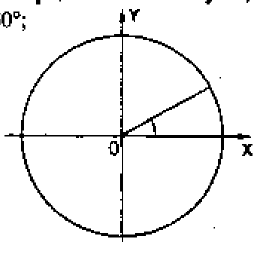
3. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $k\in z$; б) $2\pi k$; $k\in z$. в) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $k\in z$.

4. а) $(0;-1)$; б) $(0;-1)$; в) $(-1;0)$.

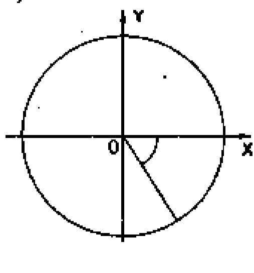
5. а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $n\in z$; б) $\frac{4\pi}{3}+2\pi l$; $l\in z$.

С–36. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

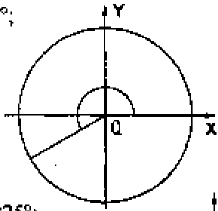
1. 1) а) 30°;



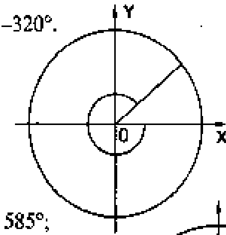
б) -60°;



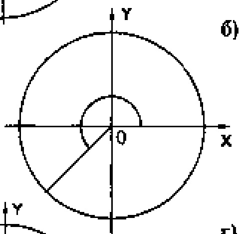
в) 210°;



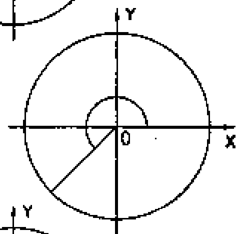
г) –320°.



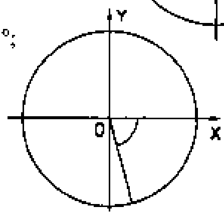
2) а) 225°;



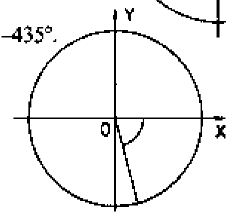
б) 585°;



в) –75°;



г) –435°.



2. 1) а) III; б) II; в) II; г) III.
2) а) III; б) II; в) I; г) IV.

3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$sin\,\alpha$	0	1	0	–1	0
$cos\,\alpha$	1	0	–1	0	1
$tg\,\alpha$	0	–	0	–	0
$ctg\,\alpha$	–	0	–	0	–

4. 1) а) $\varphi=180°$; б) $\varphi=450°$; в) $\varphi=270°$;
2) а) $\varphi=270°$; б) $\varphi=360°$; в) $\varphi=180°$.

5. а) $-1\le sin\,\alpha\le1$; $4-1\le4+sin\,\alpha\le4+1$; $3\le4+sin\,\alpha\le5$;
б) $-1\le sin\,\alpha\le1$; $-1\le-sin\,\alpha\le1$; $3\le4-sin\,\alpha\le5$;
в) $-1\le cos\,\alpha\le1$; $6-1\le6+cos\,\alpha\le6+1$; $5\le6+cos\,\alpha\le7$;
г) $-1\le cos\,\alpha\le1$; $-1\le-cos\,\alpha\le1$; $5\le6-cos\,\alpha\le7$.

6. а) нет, т.к. $-1\le sin\,\alpha\le1$; а $\frac{\sqrt{10}}{3}>1$; б) нет, т.к. $-1\le cos\,\alpha\le1$; а $\frac{\sqrt{10}}{3}>1$;
в) да; г) да.

7. 1) а) $\cos 180° + 5\sin 90° = -1 + 5 = 4$; б) $\sin 180° - 3\cos 0° = 0 - 3 = -3$;

в) $5ctg 90° - 7tg 180° = 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 0$; г) $tg 360° - 2ctg 270° + 3 = 0 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$;

2) а) $\sin 60° + \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; б) $\sin 30° - \cos 60° = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$;

в) $\sin 45° - \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; г) $tg 45° + ctg 30° = 1 + \sqrt{3}$.

8. а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in z$; б) $\sin x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

в) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$; г) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

д) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$; е) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in z$;

9. а) $\sin^2 30° + \cos^2 60° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;

б) $tg^2 45° + \cos^2 45° = 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1{,}5$; в) $\sin 45° \cdot \cos 30° \cdot tg 180° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 = 0$.

10. $0° < \alpha < 90°$, $\sin\alpha > 0$, $\sin\alpha < 2$, значит, $\sin^2\alpha < 2\sin\alpha$.

11. $\alpha = 30°$; а) $\sin 2\alpha = \sin(2 \cdot 30°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\sin\alpha = 2\sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;

в) $\cos 3\alpha = \cos(3 \cdot 30°) = \cos 90° = 0$; $3\cos\alpha = 3\cos 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

С–37. Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

1. а) $\sin 13° > 0$, $\sin 103° > 0$, $\sin 218° < 0$, $\sin 302° < 0$;

б) $\cos 41° > 0$, $\cos 179° < 0$, $\cos 273° > 0$, $\cos 354° > 0$;

в) $tg 14° > 0$, $tg 86° > 0$, $tg 191° > 0$, $tg 311° < 0$;

г) $ctg 67° > 0$, $ctg 98° < 0$, $ctg 195° > 0$, $ctg 279° < 0$.

2. 1) а) $\sin 169° > 0$; б) $\cos 110° < 0$; в) $tg 203° > 0$; г) $ctg 288° < 0$;

2) а) $\sin 409° > 0$; б) $\cos 372° > 0$; в) $tg 540° = 0$; г) $ctg 364° > 0$;

3) а) $\sin(-88°) < 0$; б) $\cos(-12°) > 0$; в) $tg(-72°) < 0$; г) $ctg(-110°) > 0$.

3.

α	116°	208°	367°	−43°	−105°
$\sin\alpha$	+	−	+	−	−
$\cos\alpha$	−	−	+	+	−
$tg\alpha$	−	+	+	−	+
$ctg\alpha$	−	+	+	−	+

4. а) $sin16° \cdot cos206° = «+» \cdot «-» < 0$; б) $sin108° \cdot cos300° = «+» \cdot «+» > 0$;

в) $\frac{sin267°}{cos167°} = \frac{«-»}{«+»} < 0$; г) $\frac{cos140°}{cos14°} = \frac{«-»}{«+»} < 0$;

д) $sin160° \cdot cos205° \cdot tg97° = «+» \cdot «-» \cdot «-» > 0$;

е) $cos155° \cdot sin88° \cdot tg105° = «-» \cdot «+» \cdot «-» > 0$.

5. а) $sin\alpha > 0$ и $tg\alpha < 0$, I или II, II или IV, значит, II четверть;

б) $cos\alpha < 0$ и $tg\alpha > 0$, II или III, I или III, значит, III четверть.

6. 1) а) $sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $cos(-60°) = \frac{1}{2}$; в) $tg(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $ctg(-45°) = -1$;

2) а) $sin(-60°) + sin0° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $sin(-30°) + cos(-60°) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$;

в) $sin(-90°) + cos(-90°) = -1 + 0 = -1$; г) $cos(-60°) \cdot tg(-45°) = -\frac{1}{2}$.

7. а) $sin420° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $cos390° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tg405° = 1$;

г) $ctg390° = \sqrt{3}$; д) $sin750° = \frac{1}{2}$; е) $cos720° = 1$.

8. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; а) $sin\alpha \cdot tg\alpha = «-» \cdot «+» < 0$; б) $\frac{cos^2\alpha}{cos\alpha} = \frac{«+»}{«-»} < 0$;

в) $\frac{sin^3\alpha}{cos\alpha} = \frac{«-»}{«-»} > 0$; г) $sin\alpha + cos\alpha = «-» + «-» < 0$.

9. $cos\alpha = a$; а) $1 + cos\alpha = 1 + a$; б) $1 - cos(-\alpha) = 1 - a$;

в) $cos(\alpha + 720°) = a$; г) $cos(\alpha - 720°) = cos(720° - \alpha) = a$;

д) $cos(360° + \alpha) = a$; е) $cos(360° - \alpha) = a$.

10. $sin\alpha + cos\alpha = -1{,}03$. III четверти.

11. $\varphi \in$ III четверти;

а) $|sin\varphi| + sin\varphi = -sin\varphi + sin\varphi = 0$; б) $cos\varphi - |cos\varphi| = cos\varphi + cos\varphi = 2cos\varphi$;

в) $tg\varphi + |tg\varphi| = tg\varphi + tg\varphi = 2tg\varphi$; г) $|sin\varphi| - |tg\varphi| = -sin\varphi - tg\varphi$.

С–38. Вычисление значений тригонометрических функций

1. 1) а) $3cos60° - 2sin30° + 6ctg60° - 2ctg30° = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 6\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$;

б) $sin(-30°) + cos(-60°) - 2tg(-30°) \cdot ctg(-60°) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$;

в) $5sin(-45°) + 5cos(-45°) - \sqrt{3}tg(-30°) + sin(-30°) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

2) а) $3\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{6}+3tg\frac{\pi}{4}-ctg\frac{\pi}{4}=3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+3-1=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$;

б) $\sin(-\pi)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-3\sin\frac{\pi}{4}+3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0+2\cdot 0-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$;

в) $6tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos(-\pi)=6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1+5=22.$

2. а) $\sin 0-\cos 0=-1+0=-1$; $\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=1-0=1$; $\sin\pi-\cos\pi=0-(-1)=1$;

$\sin 2\pi-\cos 2\pi=0-1=-1$;

б) $2\sin 0+\cos(2\cdot 0)=0+1=1$; $2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;

$2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 1-1=1$; $2\sin\pi+\cos(2\pi)=2\cdot 0+1=1$;

в) $3\sin 0-\cos(3\cdot 0)=3\cdot 0-1=-1$; $3\sin\frac{\pi}{6}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=3\cdot\frac{1}{2}-0=\frac{3}{2}$;

$3\sin\frac{\pi}{3}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-(-1)=\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$; $3\sin\frac{\pi}{2}-\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 1-0=3$;

г) $\sin(3\cdot 0)+\cos 0=0+1=1$; $\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$;

$\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\sin(3\cdot\pi)+\cos\pi=0-1=-1.$

3. 1) а) $\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$;

б) $2\sin^2\frac{\pi}{4}+3\cos^2\frac{\pi}{4}=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$;

в) $tg^2\frac{\pi}{3}\cdot ctg^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{9}$; г) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot tg^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{6}$;

2) а) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$;

б) $3\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot ctg^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3}{4}$;

в) $tg^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+ctg^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$; г) $tg^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot ctg^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1\cdot 1=1.$

4. а) $\dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{6}\cdot ctg^2\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot 3}{\frac{1}{2}}=-3{,}5$;

б) $\dfrac{3{,}5-\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{3{,}5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{-2}=\dfrac{5}{4}.$

5. а) $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-15^\circ)+2tg\alpha}=\dfrac{\sin 90^\circ-\cos 90^\circ}{\sin 30^\circ+2tg 45^\circ}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+2}=\dfrac{2}{5};$

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin 90^\circ+\sin 30^\circ}{2\sin 90^\circ}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4};$

в) $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos\alpha\cdot tg\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)+ctg\alpha}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};$

г) $\dfrac{3\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-3\cos\alpha}=\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}-3\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=-3.$

6. а) $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>1;$ б) $tg\frac{\pi}{6}+tg\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}>1;$

в) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2;$ г) $2\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}=\sqrt{3}+0<2.$

Ответ: а) верно; б) верно; в) не верно; г) не верно.

7. $\sin\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2};$ $ctg^2\frac{\pi}{6}\cdot\left(1-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},$

значит, $\sin\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{3}=ctg^2\frac{\pi}{6}\cdot\left(1-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)$, что и требовалось доказать.

С–39. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

1. а) $\sin\alpha=-0{,}8;$ $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi;$ $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6;$ $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3};$

б) $\cos\alpha=\frac{-24}{25};$ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2};$ $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}}=-\frac{7}{25};$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{7\cdot 25}{25\cdot 24}=\frac{7}{24};$ в) $\sin\alpha=\frac{24}{25};$ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$

$cos\,\alpha = -\sqrt{1-sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}} = -\frac{7}{25}$; $tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = -\frac{24}{7}$; $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{7}{24}$;

г) $cos\,\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $sin\,\alpha = -\sqrt{1-cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}} = -\frac{5}{13}$;

$tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{5}{12}$; $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{12}{5}$; д) $tg\alpha = 2{,}4$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

$cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+2{,}4^2}} = -\frac{1}{2{,}6} = -\frac{5}{13}$; $sin\alpha = -\sqrt{1-cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{5^2}{13^3}} = -\frac{12}{13}$;

е) $ctg\alpha = \frac{5}{12}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{5^2}{12^2}}} = \frac{12}{13}$; $cos\alpha = \sqrt{1-sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}$.

2. а) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1^2 + (-1)^2 \neq 1$. значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

3.а) $cos^2\alpha = \frac{1}{4}$; $tg\alpha = \sqrt{3}$; $sin^2\alpha = 1-cos^2\alpha = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$; $sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$;

$\frac{15}{16} \neq \frac{3}{4}$, значит, данные равенства не могут выполнятся одновременно.

б) $sin\,\alpha = 0{,}7$; $ctg\alpha = 2\sqrt{2}$; $cos^2\alpha = 1-sin^2\alpha = 1-0{,}7^2 = 0{,}51$;

$cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{8}{9}$; $0{,}51 \neq \frac{8}{9}$,

ложно, значит, данные равенства не могут выполнятся одновременно.

4. а) $sin\,\beta = -\frac{40}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$; т.к. $sin\,\beta < 0$; то $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

$cos\,\beta = -\sqrt{1-sin^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{40^2}{41^2}} = -\frac{9}{41}$; $tg\beta = \frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{40}{9}$; $ctg\beta = \frac{9}{40}$;

б) $cos\,\beta = \frac{4}{5}$, $0 < \beta < \pi$; т.к. $cos\beta > 0$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $sin\,\beta = \sqrt{1-cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}} = \frac{3}{5}$;

$tg\beta = \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{3}{4}$; $ctg\beta = \frac{4}{3}$; в) $tg\beta = -1$, $\pi < \beta < 2\pi$; т.к. $tg\beta < 0$, то $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

$cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $sin\,\beta = -\sqrt{1-cos^2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $ctg\beta = -1$;

г) $ctg\beta=2,\ 0<\beta<\pi$; т.к. $ctg\beta>0$; то $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$cos\beta=\sqrt{1-sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $tg\beta=\frac{1}{2}$.

5. $sin\alpha$; $cos\alpha=\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$; $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$; $1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}$;

$ctg^2\alpha=\frac{1-sin^2\alpha}{sin^2\alpha}$; $ctg\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin^2\alpha}$; $tg\alpha=\pm\frac{sin\alpha}{\sqrt{1-sin^2\alpha}}$.

6. $0°\le\alpha\le90°$, $cos\alpha=1+a$; $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-(1+a)^2}=\sqrt{-a^2-2a}$;

$0\le cos\alpha\le1$ при $0°\le\alpha\le90°$; $0\le1+a\le1$; $-1\le a\le0$.

Ответ: $sin\alpha=\sqrt{-a-2a}$; $-1\le a\le0$.

7. $sin^2\alpha+cos^2\alpha=\left(\frac{a}{1-a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}\right)^2=\frac{a^2+1-2a}{(1-a)^2}=\frac{(1-a)^2}{(1-a)^2}=1$, значит, могут.

С– 40. Преобразование тригонометрических выражений

1. 1) а) $sin^2\alpha+cos^2\alpha+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}$; б) $sin^2\alpha(1+tg^2\alpha)=sin^2\alpha\cdot\frac{1}{cos^2\alpha}=tg^2\alpha$;

в) $1-\frac{1}{sin^2\alpha}=\frac{sin^2\alpha-1}{sin^2\alpha}=-\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=-ctg^2\alpha$; г) $4-tg\alpha\cdot ctg\alpha=4-1=3$.

2) а) $cos^2\beta-cos^2\beta sin^2\beta=cos^2\beta(1-sin^2\beta)=cos^2\beta cos^2\beta=cos^4\beta$;

б) $sin^4\beta+sin^2\beta cos^2\beta=sin^2\beta(sin^2\beta+cos^2\beta)=sin^2\beta$;

в) $tg^2\beta ctg^2\beta-sin^2\beta=1-sin^2\beta=cos^2\beta$; г) $\frac{1-cos^2\beta}{sin^2\beta-1}=-\frac{sin^2\beta}{cos^2\beta}=-tg^2\beta$.

2. 1) а) $cos\alpha tg\alpha=cos\alpha\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=sin\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha}+1=\frac{cos\alpha cos\alpha}{sin\alpha sin\alpha}+1=ctg^2\alpha+1=\frac{1}{sin^2\alpha}$, ч.т.д.

2) а) $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha+ctg\alpha}=\frac{cos\alpha}{sin\alpha+\left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\right)}=\frac{cos^2\alpha sin\alpha}{sin\alpha(sin^2\alpha+cos^2\alpha)}=cos^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{1+ctg\alpha}{1+tg\alpha}=\frac{1+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}}{1+\frac{sin\alpha}{cos\alpha}}=\frac{(sin\alpha+cos\alpha)cos\alpha}{sin\alpha(sin\alpha+cos\alpha)}=ctg\alpha$, ч.т.д.

3. 1) $(1-cos(-\alpha))(1+cos(-\alpha))=(1-cos\alpha)(1+cos\alpha)=1-cos^2\alpha=sin^2\alpha$;

б) $tg\alpha ctg(-\alpha)+cos^2(-\alpha)=-1+cos^2\alpha=-sin^2\alpha$;

в) $sin(-\alpha)-sin\alpha ctg^2(-\alpha)=-sin\alpha-sin\alpha ctg^2\alpha=$

$=-sin\alpha(1+ctg^2\alpha)=-sin\alpha\cdot\frac{1}{sin^2\alpha}=-\frac{1}{sin\alpha}$;

2) а) $\frac{1+cos(-\beta)}{sin(-\beta)}-ctg(-\beta)=-\frac{1+cos\beta}{sin\beta}+ctg\beta=\frac{-1-cos\beta+cos\beta}{sin\beta}=-\frac{1}{sin\beta}$;

б) $\frac{sin^2(-\beta)-sin^4(-\beta)}{cos^2(-\beta)}=\frac{sin^2\beta-sin^4\beta}{cos^2\beta}=\frac{sin^2\beta(1-sin^2\beta)}{1-sin^2\beta}=sin^2\beta$;

в) $\frac{sin(-\alpha)}{1-cos(-\alpha)}-ctg(-\alpha)=ctg\alpha-\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}-\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}=$

$=\frac{cos\alpha-cos^2\alpha-sin^2\alpha}{sin\alpha(1-cos\alpha)}=\frac{cos\alpha-1}{sin\alpha(cos\alpha-1)}=\frac{1}{sin\alpha}$.

4. $\frac{1+ctg\varphi+ctg^2\varphi}{1+tg\varphi+tg^2\varphi}-ctg^2\varphi=\frac{1+ctg\varphi+ctg^2\varphi}{1+\frac{1}{ctg\varphi}+\frac{1}{ctg^2\varphi}}-ctg^2\varphi=\frac{(1+ctg\varphi+ctg^2\varphi)ctg^2\varphi}{ctg^2\varphi+ctg\varphi+1}-ctg^2\varphi=0$.

Т.е. значение выражения не зависит от φ.

5. а) $\frac{1-cos^4\beta}{4cos\beta+4cos^3\beta}=\frac{(1-cos^2\beta)(1+cos^2\beta)}{4cos\beta(1+cos^2\beta)}=\frac{sin^2\beta}{4cos\beta}$;

б) $cos^3\beta tg^3\beta+9sin^3\beta=cos^3\beta\cdot\frac{sin^3\beta}{cos^3\beta}+9sin^3\beta=10sin^3\beta$.

$-1\le sin\beta\le 1$; $-1\le sin^3\beta\le 1$; $-10\le 10sin^3\beta\le 10$;

т.е. наименьшее значение равно -10.

6. $\frac{tg\varphi-ctg\varphi}{tg\varphi+ctg\varphi}=\frac{\frac{sin\varphi}{cos\varphi}-\frac{cos\varphi}{sin\varphi}}{\frac{sin\varphi}{cos\varphi}+\frac{cos\varphi}{sin\varphi}}=\frac{sin^2\varphi-cos^2\varphi}{cos^2\varphi+sin^2\varphi}=sin^2\varphi-cos^2\varphi=$

$=1-cos^2\varphi-cos^2\varphi=1-2cos^2\varphi=1-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-2\cdot\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$.

С–41. Преобразование тригонометрических выражений (продолжение)

1. 1) а) $\frac{cos\alpha+ctg\alpha}{1+sin\alpha}=\frac{cos\alpha+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}}{1+sin\alpha}=\frac{sin\alpha cos\alpha+cos\alpha}{sin\alpha(1+sin\alpha)}=\frac{cos\alpha(sin\alpha+1)}{sin\alpha(sin\alpha+1)}=ctg\alpha$;

б) $(1-cos^2\alpha)(1+tg^2\alpha)=\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=tg^2\alpha$;

в) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$;

г) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=$

$=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2tg\alpha$;

2)а) $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$;

б) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=$

$=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$;

в) $\frac{1+ctg^4\alpha}{ctg^2\alpha+tg^2\alpha}=\frac{1+ctg^4\alpha}{ctg^2\alpha+\frac{1}{ctg^2\alpha}}=\frac{1+ctg^4\alpha}{ctg^4\alpha+1}\cdot ctg^2\alpha=ctg^2\alpha$;

г) $\frac{\cos^2\alpha}{1+tg^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

2. а) $ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

$=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha\cos^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$, ч.т.д.

3. $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=$

$=\frac{(1-\cos^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha}=\frac{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2}{\frac{4}{9}}=\frac{25\cdot 9}{81\cdot 4}=\frac{25}{36}$.

4. а) $\frac{\cos^2\alpha}{tg^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$

$=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha}=ctg^4\alpha$, ч.т.д.

б) $\dfrac{3\sin^2\alpha+\cos^4\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\dfrac{3\sin^2\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)^2}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=$

$=\dfrac{3\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\dfrac{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=1$, ч.т.д.

5. $\dfrac{\cos^2\beta-\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta-\sin\beta\cos\beta}=\dfrac{\cos\beta(\cos\beta-\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\beta-\cos\beta)}=-\dfrac{1}{tg\beta}=\dfrac{1}{0,25}=4$

6. $\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{1-\sin^4\varphi-\cos^4\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(1-\sin^2\varphi\right)\left(1+\sin^2\varphi\right)-\cos^4\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\left(1+\sin^2\varphi\right)-\cos^4\varphi}=$

$=\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi-\cos^4\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)+\cos^2\varphi\sin^2\varphi}=\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\dfrac{1}{2}$.

7. $y=4\cos^2x-3\sin^2x=4\left(1-\sin^2x\right)-3\sin^2x=4-7\sin^2x$,

т.к. $0\le\sin^2x\le1$, то $y_{max}=4$, $y_{min}=-3$.

Ответ: наименьшее значение функции (–3), наибольшее значение 4.

8. $2\cos x=\sqrt{3}$, $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{13\pi}{6}$.

С–42. Формулы сложения

1. 1) а) $\cos75°=\cos(30°+45°)=\cos30°\cdot\cos45°-\sin30°\cdot\sin45°=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$;

б) $\cos\dfrac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\pi\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\pi\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) а) $\cos72°\cos18°-\sin72°\sin18°=\cos(72°+18°)=\cos90°=0$;

б) $\cos\dfrac{8\pi}{3}\cos\dfrac{7\pi}{3}+\sin\dfrac{8\pi}{3}\sin\dfrac{7\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{7\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$;

в) $\cos15°30'\cos29°30'-\sin15°30'\sin29°30'=\cos(15°30'+29°30')=\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) а) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0,8^2}=-0,6$;

$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-0,6+0,8)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$;

б) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{15^2}{17^2}}=-\dfrac{8}{17}$;

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{15}{17}\cdot\frac{1}{2}+\frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15+8\sqrt{3}}{34};$$

в) $\sin\alpha=-\frac{8}{17};\ \cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{5}{13};$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{15}{17}\cdot\frac{5}{13}+\frac{8}{17}\cdot\frac{12}{13}=\frac{21}{221};\ \cos(\alpha-\beta)=-\frac{171}{221}$$

2. а) $\cos2\alpha\cos3\alpha-\sin2\alpha\sin3\alpha=\cos(2\alpha+3\alpha)=\cos5\alpha;$

б) $\cos\alpha\cos2\alpha-\sin(-\alpha)\sin2\alpha=\cos\alpha\cos2\alpha+\sin\alpha\sin2\alpha=\cos(\alpha-2\alpha)=\cos2\alpha;$

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\pi=-1;$

г) $\sin\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{4}{7}\pi+\alpha\right)-\cos\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha\right)\cos\left(\frac{4}{7}\pi+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha+\frac{4}{7}\pi+\alpha\right)=-\cos\pi=1;$

д) $\cos(\alpha+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\sin\alpha\sin\beta.$

3. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=ctg\alpha ctg\beta-1;$ ч.т.д.

4. а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha,$ ч.т.д.

б) $\cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cdot\cos\alpha+\sin\pi\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha,$ ч.т.д.

5. а) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\alpha+\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3}=$

$$=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha;$$

б) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=-tg\alpha tg\beta.$

С–43. Формулы сложения (продолжение)

1. 1) а) $\sin150°=\sin(180°-30°)=\sin180°\cos30°-\cos180°\sin30°=0,5;$

б) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\pi\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$

2) а) $\sin33°\cdot\cos63°-\cos33°\sin63°=\sin(33°-63°)=-\sin30°=-0,5;$

б) $\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\left(\frac{5\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}\right)=0;$

в) $\sin27°20'\cdot\cos32°40'+\cos27°20'\sin32°40'=\sin(27°20'+32°40')=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$

3) а) $sin\,\alpha=-\sqrt{1-cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{4}{25}}=-\frac{\sqrt{21}}{5}$;

$sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=sin\frac{\pi}{3}\cdot cos\,\alpha+cos\frac{\pi}{3}\cdot sin\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{10}$;

б) $cos\,\alpha=-\sqrt{1-sin^2\alpha}=-0{,}8$;

$sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=sin\,\alpha\cdot cos\frac{\pi}{6}-cos\,\alpha\,sin\frac{\pi}{6}=0{,}6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0{,}8\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$;

в) $cos\,\alpha=-\sqrt{1-sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{3^2}{4^2}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$; $cos\,\beta=\sqrt{1-sin^2\beta}=0{,}6=\frac{3}{5}$;

$sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4\sqrt{7}-6}{20}$; $sin(\alpha+\beta)=\frac{-6-4\sqrt{7}}{20}$.

2. а) $sin\alpha cos2\alpha-cos\alpha sin2\alpha=sin(\alpha-2\alpha)=-sin\alpha$;

б) $sin2\alpha\cdot cos3\alpha+cos2\alpha\,sin3\alpha=sin(2\alpha+3\alpha)=sin5\alpha$;

в) $sin\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)=sin\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha+\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)=sin\,\pi=0$;

г) $sin(\alpha-\beta)+sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sin\,\beta=sin\,\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha\,sin\,\beta+cos\,\alpha\,sin\,\beta=sin\,\alpha\,cos\,\beta$;

3. $sin(\alpha-\beta)sin(\alpha+\beta)=(sin\,\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha\,sin\,\beta)(sin\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sin\,\beta)=$
$=sin^2\alpha cos^2\beta-cos^2\alpha sin^2\beta=cos^2\beta(1-cos^2\alpha)-cos^2\alpha(1-cos^2\beta)=cos^2\beta-cos^2\alpha$, ч.т.д.

4. $tg(\alpha+\beta)=\frac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\frac{(sin\,\alpha\cdot cos\,\beta+cos\,\alpha\cdot sin\,\beta)\cdot cos\,\alpha\,cos\,\beta}{(cos\,\alpha\cdot cos\,\beta-sin\,\alpha\cdot sin\,\beta)\cdot cos\,\alpha\,cos\,\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$, ч.т.д.

5. $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{3\cdot 3}{29\cdot 3}=\frac{3}{29}$.

6. а) $\frac{tg73^\circ-tg13^\circ}{1+tg73^\circ tg13^\circ}=tg(73^\circ-13^\circ)=tg60^\circ=\sqrt{3}$.

б) $\frac{tg\frac{\pi}{18}+tg\frac{\pi}{9}}{1-tg\frac{\pi}{18}tg\frac{\pi}{9}}=tg\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{9}\right)=tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. а) $ctg150^\circ=ctg(90^\circ+60^\circ)=\frac{ctg30^\circ\cdot ctg60^\circ-1}{ctg90^\circ+ctg60^\circ}=-\frac{1\cdot\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$;

б) $tg120^\circ=tg(180^\circ-60^\circ)=\frac{tg180^\circ-tg60^\circ}{1+tg180^\circ tg60^\circ}=-\sqrt{3}$;

в) $ctg(-240^\circ)=-ctg(270^\circ-30^\circ)=\frac{ctg270^\circ\cdot ctg30^\circ+1}{ctg270^\circ-ctg30^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

С–44. Синус и косинус двойного угла

1. 1) а) $2\sin 22°30'\cos 22°30' = \sin(2\cdot 22°30') = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}5$; **в)** $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

г) $(\sin 15° - \cos 15°)^2 = \sin^2 15° - 2\sin 15°\cos 15° + \cos^2 15° = 1 - \sin 30° = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$;

д) $(\cos 75° + \sin 75°)^2 = \cos^2 75° + 2\cos 75°\sin 75° + \sin^2 75° = 1 + \sin 150° = 1{,}5$;

е) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30' = \cos(2\cdot 22°30') = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

з) $1{,}5 - (\cos 15° - \sin 15°)^2 = 1{,}5 - \cos^2 15° + 2\sin 15°\cos 15° - \sin^2 15° =$
$= 1{,}5 - 1 + \sin 30° = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$;

2) а) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$;

б) $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{3}{5}$; $\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$;

3) а) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$; **б)** $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$;

4) т.к. $tg\alpha < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = -\frac{1}{2{,}6}$;

$\sin\alpha = -\frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{2{,}4}{2{,}6}$; $\cos 2\alpha = \frac{1}{2{,}6^2} - \frac{2{,}4^2}{2{,}6^2} = -\frac{4{,}76}{6{,}76} = -\frac{119}{169}$;

$\sin 2\alpha = -2\frac{2{,}4}{2{,}6^2} = -\frac{2{,}4}{2{,}6\cdot 1{,}3} = -\frac{24}{26\cdot 1{,}3} = -\frac{12}{13\cdot 1{,}3} = -\frac{120}{169}$.

2. 1) а) $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\cdot 1{,}1}{1 - 1{,}1^2} = -\frac{2{,}2}{0{,}21} = -\frac{220}{21}$;

б) $tg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $tg 2\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{3\left(1 - \frac{5}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{5}\cdot 9}{3\cdot 4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{12}{13}$; $tg\alpha = \frac{12}{5}$; $\cos 2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$;

$tg 2\alpha = \frac{24}{5\left(1 - \frac{144}{25}\right)} = -\frac{24\cdot 25}{5\cdot 119} = -\frac{100}{119}$.

3. а) $\dfrac{4tg\dfrac{\pi}{12}}{1-tg^2\dfrac{\pi}{12}}=2tg\left(2\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{\cos^2 67{,}5^\circ-\sin^2 67{,}5^\circ}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 135^\circ}=-\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 1}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. а) $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$; $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{9}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin 2\alpha=\dfrac{1}{9}$; $\sin 2\alpha=-\dfrac{8}{9}$;

б) $\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{3}$; $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{1}{9}$; $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin\alpha=\dfrac{1}{9}$; $\sin\alpha=\dfrac{8}{9}$.

С–45. Синус и косинус двойного угла (продолжение)

1. а) $2\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$;

б) $1+\cos 2\alpha=1+2\cos^2\alpha-1=2\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{1+2\cos^2\alpha-1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=ctg\alpha$;

г) $\dfrac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{2tg\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\cos^3\alpha$;

д) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+1=1$; е) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg\alpha$;

ж) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=1$;

з) $\cos 2\alpha+2\sin^2(-\alpha)=1-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha=1$;

и) $ctg^2\alpha(1-\cos 2\alpha)^2=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}(1-1+2\sin^2\alpha)^2=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot 4\sin^4\alpha=4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^2 2\alpha$;

к) $\dfrac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-1-2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$

$=-\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$.

2. а) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}{\cos\alpha(2\cos\alpha-1)}=tg\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\frac{1+2\cos^2\alpha-1}{1-1+2\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha;$

3. а) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;$ б) $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$

4. а) $\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2\sin\frac{\alpha}{2};$

б) $\cos 20^\circ\cdot\cos 70^\circ=\cos 20^\circ\cdot\cos(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ\sin 20^\circ=\frac{1}{2}\cos 40^\circ;$

в) $\cos\alpha\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha;$

г) $\frac{\cos 160^\circ}{\cos^4 10^\circ-\sin^4 10^\circ}=\frac{\cos(180^\circ-20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ)}=-\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=-1;$

д) $\frac{1-ctg^2 15^\circ}{2tg 15^\circ}=-ctg 30^\circ=-\sqrt{3};$

5. а) $\frac{1-\cos\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$ в задаче допущена опечатка, данный пример следует читать как:

$$\frac{1-\cos\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\cos\alpha-1)}{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}=ctg\alpha;$$

б) $$\frac{ctg^2(45^\circ+\alpha)-1}{ctg^2(45^\circ+\alpha)+1}=\frac{\dfrac{\cos^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(45^\circ+\alpha)}{\sin^2(45^\circ+\alpha)}}{\dfrac{1}{\sin^2(45^\circ+\alpha)}}=$$

$=\cos(2(45^\circ+\alpha))=\cos(90^\circ+2\alpha)=-\sin 2\alpha,$.т.д.

6. а) $\sin 36^\circ\cdot\cos 72^\circ=$ Опечатка.

б) $$8\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}\cdot 8\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{4\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=1;$$ ч.т.д.

С–46. Формулы приведения

1. а) $\sin 570° = \sin(540° + 30°) = -\sin 30° = -0{,}5$;

б) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $tg135° = tg(180° - 45°) = -tg45° = -1$; **г)** $ctg315° = ctg(270° + 45°) = -tg45° = -1$;

д) $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$; **е)** $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $tg\frac{7\pi}{6} = tg\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; **з)** $ctg\frac{5\pi}{3} = ctg\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

и) $\sin(-630°) = -\sin 630° = -\sin(720° - 90°) = 1$;

к) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$;

л) $tg\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -tg\frac{11\pi}{6} = -tg\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

м) $ctg(-945°) = -ctg945° = -ctg(1080° - 135°) = ctg135° = ctg(90° + 45°) = -1$.

2. а) $\cos(-225°) + \sin 945° - tg1125° = \cos(180° + 45°) + \sin(1080° - 135°) - tg(1080° + 45°) =$

$= -\cos 45° - \sin 135° - tg45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1 - \sqrt{2}$;

б) $ctg570° + \sqrt{3}(\sin 300° - \cos 3630°) =$

$= ctg(360° + 210°) + \sqrt{3}(\sin(360° - 60°) - \cos(3600° + 30°)) =$

$= ctg(180° + 30°) + \sqrt{3}(-\sin 60° - \cos 30°) =$

$= ctg30° + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3} - 3$;

в) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 0{,}5\sin\frac{11\pi}{6} - tg\frac{21\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}5\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - tg\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\cos\frac{\pi}{3} + 0{,}5\sin\frac{\pi}{6} - tg\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$.

3. а) $1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\pi - \alpha) = 1 + \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$;

б) $\sin(2\pi + \alpha)\sin(\pi - \alpha) + \sin^2\alpha = \sin\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$;

в) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$; **г)** $\cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

д) $tg(\alpha - \pi) = -tg(\pi - \alpha) = tg\alpha$;

е) $\dfrac{2tg(\pi-\alpha)}{cos(\pi-\alpha)sin(-2\alpha)}=\dfrac{-2tg\alpha}{cos\alpha\cdot sin2\alpha}=-2\cdot\dfrac{sin\alpha}{cos^2\alpha\cdot 2sin\alpha}=-\dfrac{1}{cos^3\alpha}$;

ж) $cos(\pi-\alpha)sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-sin^2(-\alpha)=-cos\alpha\cdot cos\alpha-sin^2\alpha=-1$;

з) $sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-sin^2(\pi-\alpha)=cos^2\alpha-sin^2\alpha=cos2\alpha$.

4. а) $\dfrac{cos(2\pi-x)cos^2(1{,}5\pi+x)}{tg(x-\pi)sin(0{,}5\pi+x)}=\dfrac{cos x\cdot sin^2x}{tgx\cdot cos x}=\dfrac{sin^2x\cdot cos x}{sin x}=0{,}5sin2x$, ч.т.д.

б) $sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)-cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$, ч.т.д.

в) $\dfrac{tg(2\pi-\alpha)cos(\pi-\alpha)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=-\dfrac{tg\alpha\cdot cos\alpha}{ctg\alpha\cdot sin\alpha}=-tg\alpha$; ч.т.д.

5. $\dfrac{tg(\alpha-\pi)cos(\alpha+\pi)}{tg\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)tg\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{tg\alpha\cdot tg\alpha}{ctg\alpha\cdot ctg\alpha}=tg^4\alpha$;

б) $\dfrac{sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{ctg^2(\alpha-\pi)\cdot tg^2(\alpha-3\pi)}=\dfrac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{ctg^2\alpha\cdot tg^2\alpha}=1$.

6. $A+B+C=180°$; $C=180°-(A+B)$; $sinC=sin(180°-(A+B))=sin(A+B)$, ч.т.д.

7. Пусть β – смежный угол, тогда $\beta=180°-\alpha$; $sin\beta=sin(180°-\alpha)=sin\alpha=0{,}6$;

$cos\beta=cos(180°-\alpha)=-cos\alpha=\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}=\pm0{,}8$.

С–47. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

1. 1) а) $sin48°+sin36°=2sin\dfrac{48°+36°}{2}cos\dfrac{48°-36°}{2}=2sin42°cos6°$;

б) $sin12°+sin7°=2sin\dfrac{12°+7°}{2}cos\dfrac{12°-7°}{2}=2sin9{,}5°cos2{,}5°$;

в) $sin10°+sin88°=2sin\dfrac{10°+88°}{2}cos\dfrac{10°-88°}{2}=2sin49°cos39°$;

г) $\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2}=2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$;

2) а) $\sin 66°-\sin 56°=2\sin\frac{66°-56°}{2}\cos\frac{66°+56°}{2}=2\sin 5°\cos 61°$;

б) $\sin 18°-\sin 9°=2\sin\frac{18°-9°}{2}\cos\frac{18°+9°}{2}=2\sin 4{,}5°\cos 13{,}5°$;

в) $\sin 14°-\sin 36°=2\sin\frac{14°-36°}{2}\cos\frac{14°+36°}{2}=-2\sin 11°\cos 25°$;

г) $\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{2\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}}{2}\cos\frac{2\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}}{2}=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$;

3) $\cos 38°+\cos 18°=2\cos\frac{38°+18°}{2}\cos\frac{38°-18°}{2}=2\cos 28°\cos 10°$;

б) $\cos 16°+\cos 9°=2\cos\frac{16°+9°}{2}\cos\frac{16°-9°}{2}=2\cos 12{,}5°\cos 3{,}5°$;

в) $\cos 34°+\cos 74°=2\cos\frac{34°+74°}{2}\cos\frac{34°-74°}{2}=2\cos 54°\cos 20°$;

г) $\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}{2}=2\cos\frac{7\pi}{16}\cos\frac{5\pi}{16}$;

4) а) $\cos 44°-\cos 38°=-2\sin\frac{44°+38°}{2}\sin\frac{44°-38°}{2}=-2\sin 41°\sin 3°$;

б) $\cos 4°-\cos 16°=-2\sin\frac{4°+16°}{2}\sin\frac{4°-16°}{2}=2\sin 10°\sin 6°$;

в) $\cos 15°-\cos 8°=-2\sin\frac{15°+8°}{2}\sin\frac{15°-8°}{2}=-2\sin 11{,}5°\sin 3{,}5°$;

г) $\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}=-2\sin\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$.

2. 1) а) $\sin 9\alpha+\sin\alpha=2\sin 5\alpha\cos 4\alpha$; б) $\sin 6\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\cos 4\alpha$;

в) $\cos 5\alpha+\cos 9\alpha=2\cos 7\alpha\cos 2\alpha$; г) $\cos 6\alpha-\cos\alpha=-\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2}$;

2) а) $\sin(\alpha+12°)+\sin(\alpha-12°)=2\sin\frac{2\alpha}{2}\cos\frac{24°}{2}=2\sin\alpha\cos 12°$;

б) $\sin(20°-\alpha)-\sin(20°+\alpha)=2\sin\frac{20°-\alpha-20°-\alpha}{2}\cos\frac{20°-\alpha+20°+\alpha}{2}=-2\sin\alpha\cos 20°$;

в) $\cos(23^\circ+\beta)+\cos(23^\circ-\beta)=2\cos\frac{23^\circ+\beta+23^\circ-\beta}{2}\cos\frac{23^\circ+\beta-23^\circ+\beta}{2}=2\cos 23^\circ\cos\beta;$

г) $\cos(23^\circ+\beta)-\cos(23^\circ-\beta)=-2\sin\frac{23^\circ+\beta-23^\circ+\beta}{2}\sin\frac{23^\circ+\beta+23^\circ-\beta}{2}=-2\sin\beta\cdot\sin 23^\circ;$

д) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}=2\sin\beta\cos\alpha;$

е) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$

3. а) $\frac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 5\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 5\alpha\cos 3\alpha}=tg5\alpha;$

б) $\frac{\cos\alpha+\cos 7\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{2\cos 4\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha};$

в) $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 3\alpha}{-2\sin 2\alpha\sin 3\alpha}=-ctg3\alpha;$

г) $\frac{\cos 9\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 9\alpha+\sin 5\alpha}=\frac{-2\sin 2\alpha\sin 7\alpha}{2\sin 7\alpha\cos 2\alpha}=-tg2\alpha.$

4. а) $\sin^2 42^\circ-\sin^2 12^\circ=(\sin 42^\circ-\sin 12^\circ)(\sin 42^\circ+\sin 12^\circ)=$

$=2\sin 15^\circ\cos 27^\circ\cdot 2\sin 27^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ\cdot\sin 54^\circ;$

б) $\cos^2 53^\circ-\cos^2 33^\circ=(\cos 53^\circ-\cos 33^\circ)(\cos 53^\circ+\cos 33^\circ)=$

$=-2\sin 10^\circ\sin 43^\circ\cdot 2\cos 10^\circ\cos 43^\circ=-\sin 20^\circ\cdot\sin 86^\circ;$

5. а) $\frac{\sin 44^\circ+\sin 26^\circ}{\cos 44^\circ+\cos 26^\circ}=\frac{2\sin 35^\circ\cos 9^\circ}{2\cos 35^\circ\cos 9^\circ}=tg35^\circ=ctg55^\circ$, т.е. равенство верно;

б) $\frac{\sin 84^\circ-\sin 54^\circ}{\cos 84^\circ+\cos 54^\circ}=\frac{2\sin 15^\circ\cos\frac{84^\circ+54^\circ}{2}}{2\cos 15^\circ\cos\frac{84^\circ+54^\circ}{2}}=tg15^\circ=ctg75^\circ$, т.е. равенство верно.

6. а) $\frac{\cos 5\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 5\alpha+\sin 9\alpha}=\frac{2\cos 7\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 7\alpha\cos 2\alpha}=ctg7\alpha=tg\left(\frac{\pi}{2}-7\alpha\right)$, ч.т.д.

б) $\frac{\cos\alpha+\cos 5\alpha+\cos 9\alpha+\cos 13\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha+\sin 9\alpha+\sin 13\alpha}=\frac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cos 11\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+2\sin 11\alpha\cos 2\alpha}=$

$=\frac{\cos 3\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 11\alpha}=\frac{2\cos 4\alpha\cos 7\alpha}{2\sin 7\alpha\cos 4\alpha}=ctg7\alpha$, ч.т.д.

в) $ctg(45^\circ+\alpha)=\frac{ctg45^\circ ctg\alpha-1}{ctg45^\circ+ctg\alpha}=\frac{ctg\alpha-1}{ctg\alpha+1}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, ч.т.д.

д) $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))=$

$=2\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$, ч.т.д.

С–48. Решение тригонометрических уравнений

1. а) $\alpha = 45°$; $\alpha = 60°$, $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$.

2. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$.

3. $a_n = \pi(n-1)$, $b_n = -\pi n$; $\sin a_n = \sin(\pi n - \pi) = -\sin(\pi - \pi n) = -\sin\pi n = 0$, $\sin b_n = \sin(-\pi n) = -\sin\pi n = 0$, значит, любое число, являющееся членом (a_n) или (b_n) – корень данного уравнения, ч.т.д.

4. 1) а) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$; б) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$;

в) $tg x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in z$; 2) а) $\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in z$;

б) $\sin x + 1 = 0$, $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$; в) $3tg x = 0$, $tg x = 0$, $x = \pi n$, $n \in z$.

5. Так как φ – угол треугольника, то $0 < \varphi < \pi$;

а) $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$.

6. 1) а) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n$, $n \in z$; $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in z$;

б) $\cos 3x = 1$, $3x = 2\pi n$, $n \in z$; $x = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in z$.

2) а) $\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(\cos x - 1) = 0$; $\cos x = 0$, $\cos x = 1$,

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$, $x_2 = 2\pi k$, $k \in z$. б) $\sin^2 x + \sin x = 0$, $\sin x(\sin x + 1) = 0$;

$\sin x = 0$, $\sin x = -1$, $x_1 = \pi n$, $n \in z$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$.

3) а) $\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x = 0$; $\cos(x + 2x) = 0$, $\cos 3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in z$; б) $\sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 0$; $\sin(2x + x) = 0$,

$\sin 3x = 0$, $3x = \pi n$, $n \in z$; $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in z$;

4) а) $\sin^2 x = -\cos 2x$, $\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1$, $\sin^2 x = 1$, $\sin x = \pm 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

б) $\sin 2x = 2\cos x$; $2\sin x \cdot \cos x = 2\cos x$; $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$.

7. а) $\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; $2\sin x \cdot \cos x = 2$; $\sin 2x = 2$ – нет корней,

т.к. $-1 \le \sin\alpha \le 1$ для любого α;

б) $\frac{\cos 2x}{1 - 2\sin^2 x} = 0$; $\frac{1 - 2\sin^2 x}{1 - 2\sin^2 x} = 0$, $1 = 0$ – нет корней.

Итоговое повторение по темам (к учебнику под редакцией Теляковского)

Квадратная функция

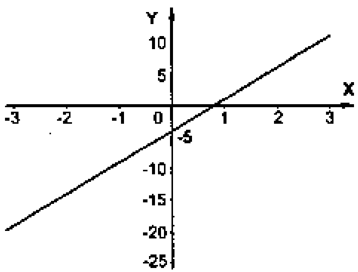
1. Функция – такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

а) $f(x)=\frac{3x}{x+1}$; $f(0)=\frac{3\cdot 0}{0+1}=0$; $f(5)=\frac{3\cdot 5}{5+1}=\frac{15}{6}=2{,}5$; $f(-1{,}5)=\frac{-3\cdot 1{,}5}{-1{,}5+1}=\frac{4{,}5}{0{,}5}=9$;

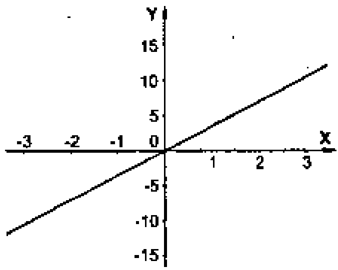
б) $f(x)=2x^2+x-3$; $f(0)=-3$; $f(5)=2\cdot 25+5-3=52$; $f(-1{,}5)=2\cdot 2{,}25-1{,}5-3=0$.

2. Область определения функции — все значения независимой переменной. Область значения функции — все значения, которые принимает зависимая переменная. График функции — множество всех точек координатной плоскости абсциссы, которые равны значениям аргумента, ординаты равны соответствующим значениям функции.

а) $y=5x-4$; $D(y)=E(y)=R$;

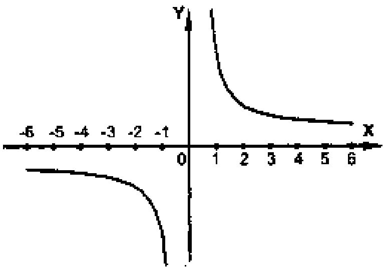


б) $y=3{,}5x$; $D(y)=E(y)=R$;



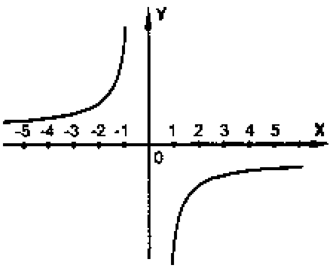
в) $y=\frac{6}{x}$;

$D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;



г) $y=-\frac{8}{x}$;

$D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.



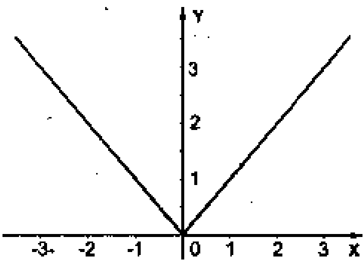
3. а) $y = 1{,}7x - 0{,}03$; $D(y) = R$; б) $y = \frac{1{,}6 + x}{0{,}8 - 2x}$; $0{,}8 - 2x \neq 0$, т.к. знаменатель $x \neq 0{,}4$; $D(y) = (-\infty; 0{,}4) \cup (0{,}4; +\infty)$; в) $y = \frac{4}{12 + x^2}$; $D(y) = R$;

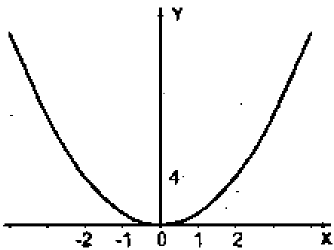
г) $y = \frac{|x|}{4}$; $D(y) = R$; д) $y = \sqrt{3x - 7}$; $3x - 7 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0 + \infty]$; $x \geq 7/3$; $D(y) = [7/3; +\infty]$; е) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; $x^2 - 4 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty]$; $(x-2)(x+2) \geq 0$; $D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

4. Возрастающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. Убывающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

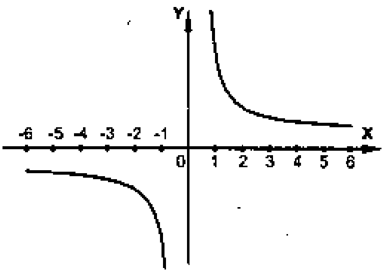
а) $y = |x|$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;

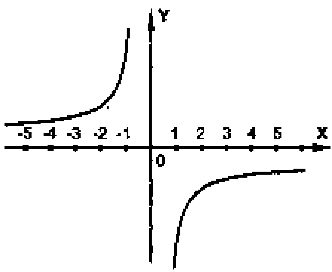
б) $y = x^2$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;





в) $y = \frac{12}{x}$, y убывающая при $x \neq 0$; г) $y = -\frac{4}{x}$, y возрастающая при $x \neq 0$.





5. $y = x - 4{,}3$ — возрастающая,
$y = 1{,}6 - x$; $y = -4{,}2x + 8{,}1$; $y = 5{,}2 - x$ — убывающая.

6. Теорема: Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; **а)** $4x^2 + 11x - 3 = 0$; $D = 121 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169$;

$$x_1 = \frac{-11+13}{8} = \frac{1}{4};\ x_2 = -3;\ 4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x+3) = (4x-1)(x+3);$$

б) $-2x^2 - 9x + 18 = 0$; $2x^2 + 9x - 18 = 0$; $D = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 18 = 225$; $x_1 = \frac{-9+15}{4} = \frac{3}{2}$;

$$x_2 = -6;\ -\left(2x^2 + 9x - 18\right) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+6) = -(2x-3)(x+6) = (3-2x)(x+6);$$

в) $5x^2 - 30x + 45 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$; $x_{1,2} = 3$; $5x^2 - 30x + 45 = 5(x-3)^2$.

7. а) $$\frac{2x^2 + 13x - 24}{4x^2 - 9} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+8)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{x+8}{2x+3};\ 2x^2 + 13x - 24 = 0;$$

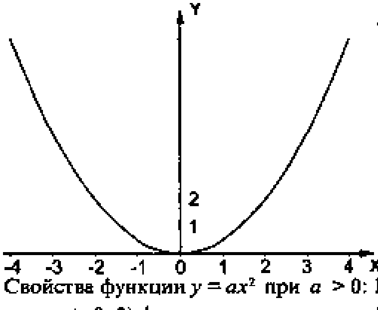
$$D = 169 + 4 \cdot 2 \cdot 24 = 361;\ x_1 = \frac{-13+19}{4} = \frac{3}{2};\ x_2 = -8;$$

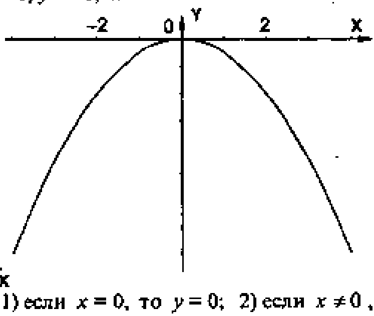
б) $$\frac{5x^2 + 34x - 7}{25x^2 - 10x + 1} = \frac{5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x+7)}{(5x-1)^2} = \frac{x+7}{5x-1};\ 5x^2 + 34x - 7 = 0;$$

$$D = 1156 + 20 \cdot 7 = 36^2,\ x_1 = \frac{-34+36}{10} = \frac{1}{5},\ x_2 = -7.$$

8. Квадратичная функция – функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$. График квадратичной функции – парабола.

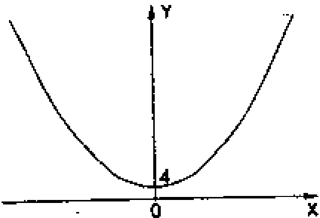
9. а) $y = 0{,}5x^2$; б) $y = -0{,}4x^2$



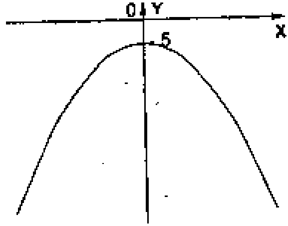


Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$: 1) если $x = 0$, то $y = 0$; 2) если $x \neq 0$, то $y > 0$, 3) функция является четной, 4) функция убывает в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; +\infty)$, 5) $y_{min} = y(0) = 0$, $E(y) = [0; +\infty)$.

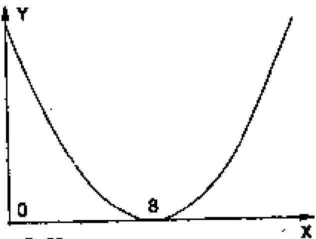
10. а) I, II – четверти;



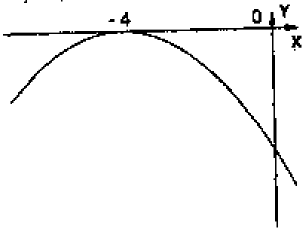
б) III, IV – четверти;



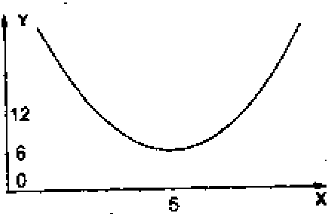
в) I, II – четверти;



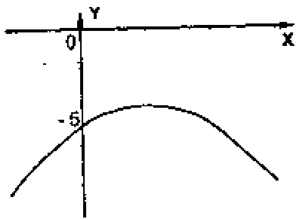
г) III, IV – четверти;



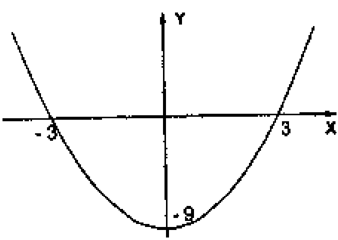
д) I, II – четверти;



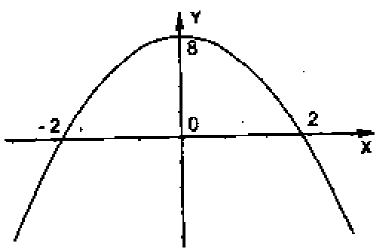
е) III, IV – четверти;



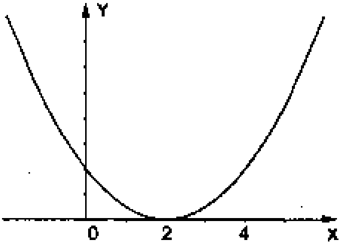
11. а) $y = x^2 - 9$;



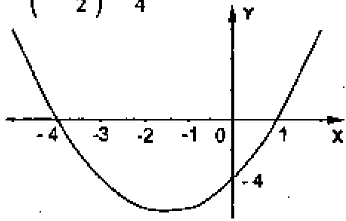
б) $y = -x^2 + 8$;



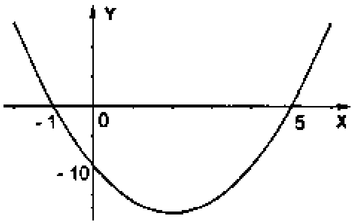
в) $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$;



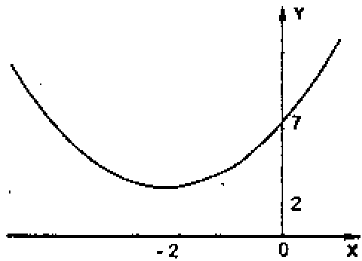
г) $y=x^2+3x-4=x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{25}{4}=$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$;



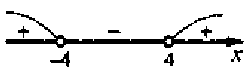
д) $y=2x^2-8x-10$; $m=\frac{8}{4}=2$;
$n=8-16-10=-18$;



е) $y=x^2+4x+7$; $m=-2$; $n=3$.



12. а) $x^2-16>0$; $(x-4)(x+4)>0$.



Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

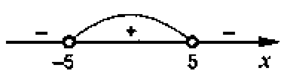
б) $-x^2-12<0$; $x^2+12>0$.

Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

в) $x^2>3x$; $x^2-3x>0$; $x(x-3)>0$.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$.

г) $x^2<25$; $(x-5)(x+5)<0$.



Ответ: $(-5;\ 5)$.

д) $x^2-22x+121>0$; $(x-11)^2>0$; $x\neq 11$.

Ответ: $x\neq 11$.

е) $x^2-12x+36<0$; $(x-6)^2<0$.

Ответ: нет решения.

ж) $2x^2-14x+12>0$; $x^2-7x+6>0$; $D=49-4\cdot6=25$;

$x_1=\dfrac{7+5}{2}=6$; $x_2=1$; $(x-6)(x-1)>0$.

Ответ: $(-\infty;\ 1)(6;\ +\infty)$.

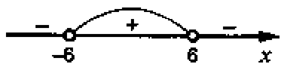
13. а) $y=\sqrt{6x-30x^2}$; $6x-30x^2\ge0$; $30x^2-6x\le0$;

$x^2-\dfrac{x}{5}\le0$; $x\left(x-\dfrac{1}{5}\right)\le0$.

Ответ: $[0;\ 0{,}2]$

б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{36-x^2}}$; $36-x^2>0$; $x^2-36<0$;

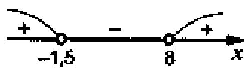
$(x-6)(x+6)<0$.



Ответ: $(-6;\ 6)$.

в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-13x-24}}$; $2x^2-13x-24>0$; $D=169+8\cdot24=361$;

$x_1=\dfrac{13+19}{4}=8$; $x_2=-1{,}5$.



Ответ: $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(8;\ +\infty)$.

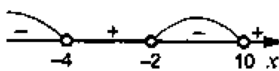
14. а) $(x+6)(x-11)>0$.

Ответ: $(-\infty;\ -6)\cup(11;\ +\infty)$.

б) $(x-0{,}1)(x+0{,}8)<0$.

Ответ: $(-0{,}8;\ 0{,}1)$.

в) $(x+4)(x+2)(x-10)<0$.

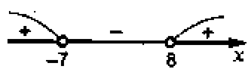


Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(-2;\ 10)$.

г) $x(x+2)(x+1)(x-1)>0$.

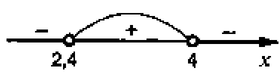
Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.

15. а) $(x+7)(x-8)>0$



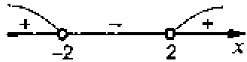
Ответ: $(-\infty;\ -7)\cup(8;\ +\infty)$.

б) $(x-4)(5x-12)<0$; $(x-4)\left(x-\dfrac{12}{5}\right)<0$



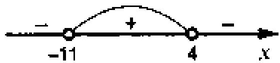
Ответ: $(2{,}4;\ 4)$.

в) $\frac{x-2}{3x+6}>0;\ \frac{x-2}{x+2}>0$



Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

г) $\frac{2x-8}{x+11}<0;\ \frac{x-4}{x+11}<0$



Ответ: $(-11;\ 4)$.

Уравнения и системы уравнений

1. Целое уравнение – уравнение, в котором обе части являются целыми выражениями. Например: $x^4-10x^2+3=0$.
2. Степень целого выражения – степень многочлена $P(x)$, когда уравнение записано в виде $P(x)=0$; $(x^2-8)(3x^2-4x)=3x^5$; $3x^5-24x^3-4x^3+32x=3x^5$; $-28x^3+32x=0$, – значит, степень уравнения равна трем. **Ответ:** 3.

3.а) $(2x+4)(3x-1)-(6x-12)(x+3)=100;\ (x+2)(3x-1)-(3x-6)(x+3)=50;$
$3x^2+5x-2-3x^2-3x+18-50=0;\ 2x=2-18+50;\ x=1-9+25;\ x=17;$

б) $6x(x+1)-(x^2-x-2)=68;\ 6x^2+6x-x^2+x+2-68=0;$

$5x^2+7x-66=0;\ D=37^2;\ x_1=\frac{-7+37}{10}=3;\ x_2=-4,4.$

Ответ: а) 17; б) 3 и –4,4.

4. При $D>0$ - 2 корня, при $D=0$ - 1 корень, при $D<0$ - нет корней.

а) $3x^2+kx+12=0;\ D=k^2-144>0;\ (k-12)(k+12)>0$.

Ответ: $(-\infty;\ -12]\cup[12;\ +\infty)$.

б) $3x^2+6x+k=0;\ D=36-4\cdot3\cdot k=0;\ 36k=12k,\ k=3$.

в) $15x^2+kx+60=0;\ D=k^2-4\cdot15\cdot60<0;\ (k-60)(k+60)<0$.

6. а) $(x^2+2x)^2-10(x^2+2x)+21=0;\ x^2+2x=y;\ y^2-10y+21=0;$

$D=100-84=16,\ y_1=\frac{10+4}{2}=7;\ y_2=3;\ x^2+2x-7=0,$

$D=4+4\cdot7=32;\ x_{1,2}=\frac{-2\pm4\sqrt{2}}{2}=-1\pm2\sqrt{2};\ x^2+2x=3;$

$x^2+2x-3=0;\ D=4+4\cdot3=16;\ x_3=\frac{-2+4}{2}=1;\ x_4=-3.$

Ответ: $-1\pm\sqrt{2}$; 1; –3.

б) $(x^2+x+1)(x^2+x+4)=50;\ x^2+x+1=y;\ y(y+3)=50;\ D=9+4\cdot50=209.$

7. Биквадратное уравнение – уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq0$. Оно может иметь от одного до четырех корней или не иметь корней.

а) $x^4-11x^2-80=0;\ x^2=y\geq0,\ y^2-11y-80=0;\ D=121+4\cdot80=21^2;$

$y_1=\frac{11+21}{2}=16;\ y_2<0;\ x^2=16;\ x_{1,2}=\pm4$.

б) $9x^4+17x^2-2=0;\ x^2=y\ge 0,\ 9y^2+17y-2=0;$

$$D=289+4\cdot 9\cdot 2=19^2,\ y_1=\frac{-17+19}{18}=\frac{1}{9}, y_2<0, x^2=\frac{1}{9};\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}.$$

в) $12x^4+19x^2+5=0; x^2=y\ge 0,\ 12y^2+19y+5=0;$

$$D=361-48\cdot 5=121,\ y_1=\frac{-19+21}{24}=\frac{1}{12}, y_2<0; x^2=\frac{1}{12};\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

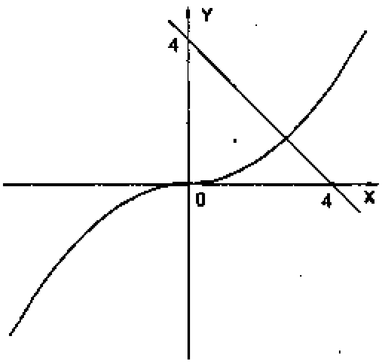
г) $(2x^2-1)(2x^2+1)-12x(x^2+7)=131;\ x^2=y\ge 0;$

$$(2y-1)(2y+1)-12(y+7)-131=0;\ 4y^2-1-12y-84-131=0;$$

$$4y^2-12y-216=0;\ y^2-3y-54=0;\ D=15^2;\ y_1=\frac{3+15}{2}=9, y_2<0; x^2=9;\ x_{1,2}=\pm 3.$$

Ответ: а) $x_{1,2}=\pm 4$; б) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$; в) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$; г) $x_{1,2}=\pm 3$.

8. $x^3=4-x;\ x\approx 1{,}4$ уточненное значение $x\approx 1{,}38$

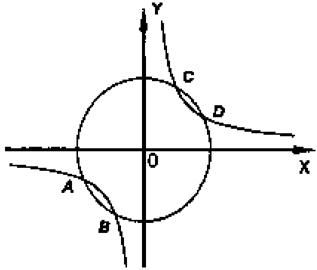


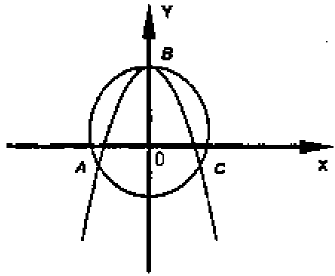
9. Решение системы с двумя неизвестными x и y – пара чисел (x_0, y_0), при подставлении которой в систему получаются верные равенства.

а) $\begin{cases}x^2-y^2=9\\ x^2+3y=37\end{cases}$; $\begin{cases}(-5)^2-4^2=9\\ (-5)^2+3\cdot 4=37\end{cases}$ — верно, значит $(-5; 4)$ – решение.

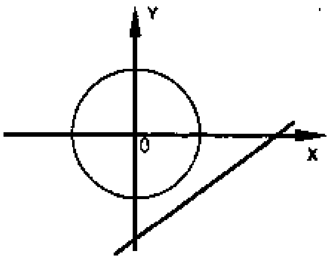
б) $\begin{cases}x^2+3xy=5\\ xy=-20\end{cases}$; $\begin{cases}(-5)^2+3(-5)\cdot 4=5\\ -5\cdot 4=-20\end{cases}$ —ложно, значит, $(-5; 4)$ – не является решением.

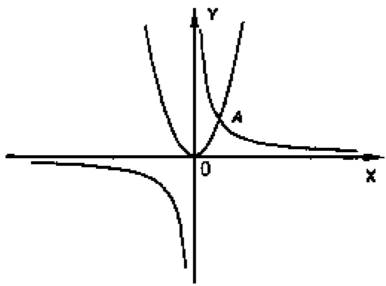
10. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 4 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.



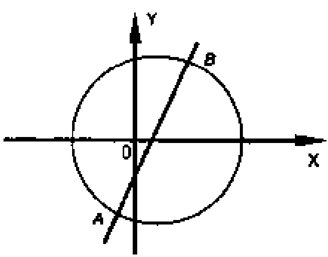


Ответ: $(\pm 2{,}6;\ \pm 1{,}6)$, $(\pm 1{,}6;\ \pm 2{,}6)$. **Ответ:** $(0;\ 2)$, $(1{,}7;\ -1)$, $(-1{,}7;\ -1)$.





11. а) Ответ: нет. **б) Ответ:** да.



в) Ответ: да.

11. а) $\begin{cases}2x-y=13\\x^2-y^2=23\end{cases}$; $y=2x-13$; $x^2-(2x-13)^2=23$;

$x^2-4x^2+52x-169=23$; $3x^2-52x+192=0$;

$D=400$, $x_1=\frac{52+20}{6}=12$, $x_2=\frac{16}{3}$; $y_1=9$, $y_2=-\frac{7}{3}$.

б) $\begin{cases}x+3y=5\\x^2-xy+y^2=73\end{cases}$; $x=5-3y$; $25-30y+9y^2-5y+3y^2+y^2-73=0$

$13y^2-35y-48=0$; $D=61^2$, $y_1=\frac{35+61}{26}=\frac{48}{13}$, $y_2=-1$; $x_1=\frac{-79}{13}$, $x_2=8$.

в) $\begin{cases}2x^2-y^2=23\\2x^2+y^2=41\end{cases}$; $4x^2=64$; $x^2=16$; $x_{1,2}=\pm4$; $32-y^2=23$; $y^2=9$; $y_{1,2}=\pm3$.

г) $\begin{cases}2x+y=7\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\end{cases}$; $y=7-2x$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{7-2x}-\frac{5}{6}=0$;

$6(7-2x)+6x-5x(7-2x)=0$; $42-12x+6x-35x+10x^2=0$;

$10^2-41x+42=0$; $D=1$, $x_1=\frac{41+1}{20}=\frac{21}{10}=2{,}1$; $x_2=2$; $y_1=2{,}8$, $y_2=3$.

Ответ: а) $(12;9)$, $\left(\frac{16}{3};-\frac{7}{3}\right)$ б) $(8;-1)$, $\left(-\frac{79}{13};\frac{48}{13}\right)$ в) $(4;\pm3)$,$(-4;\pm3)$;

г) $(2{,}1;2{,}8)$,$(2;3)$.

12. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м^2 – площадь или 4800 м^2, $2(x+y)$ м – периметр или 280 м. Получаем систему:

$\begin{cases}xy=4800\\2(x+y)=280\end{cases}$; $\begin{cases}xy=4800\\x=140-y\end{cases}$; $y(140-y)=4800$;

$y^2-140y+4800=0$; $D=20^2$; $y_1=\frac{140+20}{2}=80$, $y_2=60$; $x_1=60$, $x_2=80$.

Ответ: 60 м и 80 м – стороны прямоугольника.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. а) 6; 12; 18; 24; 30; 36; **б)** 1; 4; 9; 16; 25; 36.

2. а) $a_n=n^2-1$, $a_1=0$, $a_2=4-1=3$, $a_3=8$, $a_4=15$, $a_5=24$;

б) $a_n=\frac{n}{n+2}$, $a_1=0$, $a_2=1/2$, $a_3=3/5$, $a_4=2/3$, $a_5=5/7$;

в) $a_n=0{,}5^n=2^{n-1}$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=16$;

3. а) $a_1=20$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$, $a_2=\frac{a_1}{2}=10$, $a_3=\frac{a_2}{2}=5$, $a_4=\frac{a_3}{2}=2{,}5$, $a_5=\frac{a_4}{2}=1{,}25$;

б) $a_1=-3$; $a_{n+1}=(-1)^n a_n$; $a_2=-a_1=3$, $a_3=a_2=3$, $a_4=-a_3=-3$, $a_5=a_4=-3$.

4. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. $a_1 = 37$, $d = 4$. $a_2 = a_1 + d = 41$; $a_3 = a_2 + d = 45$; $a_4 = a_3 + d = 49$; $a_5 = a_4 + d = 53$.

5. $a_n = a_1 + d(n-1)$; **а)** $a_{11} = a_1 + 10d = -3 + 10 \cdot 11 = 107$;

б) $a_{31} = a_1 + 30d = 0{,}8 - 30 \cdot 0{,}2 = -5{,}2$.

6. 12; 17...; $a_1 = 12$; $d = -5$; $a_n = a_1 + d(n-1) = 12 - 5(n-1) = 17 - 5n$;
$-58 = 17 - 5n$; $5n = 75$; $n = 15$, значит $-58 = a_{15}$;
$-76 = 17 - 5n$; $5n = 93$; $n = \frac{93}{5} \notin N$, значит -76 - не член (a_n).

7. $a_n = kn + b$; $a_{n-1} = k(n-1) + b$; $a_{n+1} = k(n+1) + b$; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;
$k_{n+b} = \frac{k(n-1) + b + k(n+1) + b}{2}$ – верно для любого $n \in N$,
значит ,(a_n) – арифметическая прогрессия, ч.т.д.

а) $a_n = 3n - 1$ – арифметическая прогрессия с $k = 3$, $b = -1$;

б) $a_n = -n + 16$ – арифметическая прогрессия с $k = -1$, $b = 16$;

в) $a_n = 0{,}4n$ – арифметическая прогрессия с $k = 0{,}4$, $b = 0$;

г) $a_n = 14n^2$; $a_1 = 14$; $a_2 = 56$; $a_3 = 126$;
$56 - 14 \neq 126 - 56$, значит,(a_n) – не арифметическая прогрессия;

д) $a_n = \frac{n}{4}$ – арифметическая прогрессия с $k = \frac{1}{4}$, $b = 0$;

8. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; 1,5; 4,5; 7,5;....; $a_1 = 1{,}5$, $d = 3$; $S_6 = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 54$.

9. **а)** $a_1 = -8$, $d = 5$; $S_{10} = \frac{-16 + 5 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 145$;

б) $a_1 = 0{,}4$, $d = -0{,}2$; $S_{10} = \frac{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 9}{2} \cdot 10 = -5$.

10. 50; 51; 52;......; 70; $n = 21$; $a_1 = 50$, $d = 1$; $S_{21} = \frac{100 + 20}{2} \cdot 21 = 1260$.

11. Геометрическая прогрессия – такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. $b_1 = 72$, $q = 0{,}5$;
$b_2 = 72 \cdot 0{,}5 = 36$; $b_3 = 36 \cdot 0{,}5 = 18$; $b_4 = 18 \cdot 0{,}5 = 9$; $b_5 = 9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$.

12. $b_n = b_1 q^{n-1}$; **а)** $b_1 = 2$, $q = -1$, $b_5 = 2 \cdot q^4 = 2 \cdot (-1)^4 = 2$;

б) $b_1 = 8$, $q = 1/2$, $b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{4}$;

в) $b_1 = 2$, $q = \sqrt{2}$, $b_7 = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^6 = 2 \cdot 2^3 = 16$.

13. $S_n=\dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$, при $q\neq 1$; $12;\ -6;\ 3;\ldots$ $b_1=12$; $q=-\dfrac{6}{12}=-\dfrac{1}{2}$;

$$S_6=\frac{12\left(\frac{1}{67}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{12\cdot 63\cdot 2}{64\cdot 3}=\frac{21\cdot 3}{8}=\frac{63}{8}.$$

14. а) $b_1=12$; $q=-2$; $S_6=\dfrac{12(64-1)}{-3}=\dfrac{-12\cdot 63}{3}=-252$;

б) $b_1=3$; $q=\sqrt{3}$; $S_6=\dfrac{3(27-1)}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{78}{\sqrt{3}-1}$.

15. $S=\dfrac{b_1}{1-q}$; $b_1=6$; $q=-0{,}1$.

16. а) $12;\ -4;\ 1;\ \ldots\ldots$; $q=\dfrac{-4}{12}=-\dfrac{1}{3}$; $|q|<1$; $b_1=12$; $S=\dfrac{12\cdot 3}{4}=9$;

б) $2;\ \sqrt{2};\ 1;\ \ldots\ldots$; $q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $|q|<1$; $b_1=2$; $S=\dfrac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

17. а) $0,(5)=0{,}555\ldots\ldots=0{,}5+0{,}05+\ldots\ldots=\dfrac{0{,}5}{1-0{,}1}=\dfrac{5}{9}$;

б) $0,(26)=0{,}2626\ldots\ldots=0{,}26+0{,}0026+\ldots\ldots=\dfrac{0{,}26}{1-0{,}01}=\dfrac{26}{99}$;

в) $0{,}3(2)=0{,}3222\ldots\ldots=0{,}3+0{,}02+0{,}002+\ldots\ldots=0{,}3+\dfrac{0{,}02}{1-0{,}1}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{2}{90}=\dfrac{29}{90}$.

Степень с рациональным показателем

1. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x)=f(x)$. Функция называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x)=-f(x)$. $f(x)=x^2$ – четная, $q(x)=x$ – нечетная.

2. а) $y=15x^2$; $y(-x)=15\cdot(-x)^2=15x^2=y(x)$, значит $y(x)$ – четная;

б) $y=-46x^3$; $y(-x)=-46\cdot(-x)^3=46x^3=-y(x)$, значит $y(x)$ – нечетная;

в) $y=|x|$; $y(-x)=|-x|=|x|=y(x)$, значит $y(x)$ – четная;

г) $y=2x|x|$; $y(-x)=2(-x)|x|=-2x|x|=-y(x)$, значит $y(x)$ – нечетная;

д) $y=x^4+x^2+1$; $y(-x)=(-x)^4+(-x)^2+1=x^4+x^2+1=y(x)$,

значит $y(x)$ – четная; е) $y=x^3+x-2$; $y(-x)=(-x)^3+(-x)-2=$
$=-x^3-x-2\neq\pm y(x)$, значит $y(x)$ – ни четная и ни нечетная;

ж) $y=(x-8)^2$; $y(-x)=(-x-8)^2\neq\pm y(x)$, значит $y(x)$ – ни четная и ни нечетная;

з) $y=\dfrac{10}{x}$; $y(-x)=\dfrac{10}{-x}=-y(x)$, значит $y(x)$ – нечетная;

и) $y=\frac{4}{x^2}$; $y(-x)=\frac{4}{(-x)^2}=\frac{4}{x^2}=y(x)$, значит $y(x)$ – четная;

к) $y=\frac{13}{x+2}$; $y(-x)=\frac{13}{-x+2}\neq\pm y(x)$, значит $y(x)$ – ни четная и ни нечетная;

3. $y=x^a$, где $a\in N$. Например: $y=x^2$; $y=x^3$.

4. 1) Если $x=0$, то $y=0$. 2) Если $x\neq 0$, то $y>0$. 3) Функция является четной. 4) Функция возрастает в промежутке $[0;+\infty)$ и убывает в $(-\infty;0]$. 5) Область значения функции есть множество неотрицательных чисел.

5. $f(x)=x^{12}$; а) $f(-4)>0$; $f(0)=0$; $f(4)>0$;

б) $f(5{,}6)<f(7{,}6)$ т.к. $|5{,}6|<|7{,}6|$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)>f\left(-\frac{1}{3}\right)>0$; т.к. $\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|-\frac{1}{3}\right|$.

6. 1) Если $x=0$, то $y=0$. 2) Если $x>0$, то $y>0$ и если $x<0$, то $y<0$. 3) Функция является нечетной. 4) Функция возрастает на всей области определения. 5) Область значения функции есть множество всех действительных чисел.

7. $f(x)=x^{13}$; а) $f(-2{,}5)<0$; $f(0)=0$; $f(1{,}5)>0$;

б) $f(1{,}4)<f(1{,}6)$ т.к. $1{,}4<1{,}6$; $f(-3)>f(-5)$ т.к. $-3>-5$.

8. Арифметический корень n-ой степени из числа a – неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

а) $\frac{1}{3}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ т.к. $\frac{1}{3}\geq 0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$; б) $-\frac{1}{5}\neq\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$ т.к. $\frac{-1}{5}<0$.

9. а) $\sqrt[3]{216}=6$; б) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=-0{,}5$; в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=1{,}5$; г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=-1{,}5$;

д) $-0{,}5\sqrt[4]{81}=-0{,}5\cdot 3=-1{,}5$; е) $0{,}1\sqrt[6]{64}+0{,}2\sqrt[3]{-27}=0{,}1\cdot 2-0{,}2\cdot 3=-0{,}4$.

10. а) $x^3=8$; $x=2$; б) $x^3+27=0$; $x^3=-27$; $x=-3$; в) $x^6=5$; $x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{5}$;

г) $x^8=-9$; нет корней; д) $81x^4-1=0$; $x^4=\frac{1}{81}$; $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$;

е) $16x^4+4=0$; $16x^4=-4$; нет корней; ж) $\frac{1}{16}x^5+2=0$; $x^5=-32$; $x_{1,2}=-2$.

11. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a,b\geq 0$. Докажем, что $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$ и $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$, т.к. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}\geq 0$.

По свойству степени произведения $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$, ч.т.д.

а) $\sqrt[4]{0{,}0016\cdot 81}=0{,}2\cdot 3=0{,}6$; б) $\sqrt[5]{2^4\cdot 3^2}\cdot\sqrt[5]{2\cdot 3^3}=\sqrt[5]{2^4\cdot 3^2\cdot 2\cdot 3^3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3^5}=6$.

12. Если $a\geq 0$, $b>0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Докажем, что $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq 0$ и $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ge 0$, т.к. $\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b} \ge 0$. По свойству степени частного $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$ ч.т.д.

а) $\sqrt[6]{\frac{2^{12}}{3^6}} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

13. а) $\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{25}} = \frac{6\sqrt[3]{25^2}}{25} = \frac{6}{25}\sqrt[3]{625}$; в) $\frac{8}{\sqrt[4]{4}} = \frac{8\sqrt[4]{4^3}}{4} = 2\sqrt[4]{64}$.

14. а) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$; б) $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt{\sqrt[5]{32}} = \sqrt{2}$;

в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt[3]{4-3} = 1$.

15. Если $a > 0$ и x — произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

а) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; б) $81^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \frac{1}{3}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = 1{,}5$.

16. Для любых $a, b > 0$ и любых рациональных p и q:

1) $a^p a^q = a^{p+q}$; 2) $a^p : a^q = a^{p-q}$; 3) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$; 4) $(ab)^p = a^p b^p$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}}$; б) $a^{\frac{4}{5}} : a^{0,1} = a^{0,8-0,1} = a^{0,7}$; в) $\left(a^{0,2}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$.

17. а) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{0,5}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = a$; б) $\frac{a^{0,3} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a^{-1,3}} = \frac{a^{0,3} \cdot a^{0,4}}{a^{-1,3}} = a^{0,3+0,4+1,3} = a^2$.

18. а) $\frac{27^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 6$; б) $\frac{\sqrt[3]{16} \cdot 25^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-0,6}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{-3}{5}}} = 2 \cdot 5 = 10$.

Тригонометрические выражения и их преобразования

1. **Синус угла** α — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол α. **Косинус угла** α — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол α. **Тангенс угла** α — число, равное отношению синуса угла α такого, что $\alpha \ne \pi/2 + \pi k$, $k \in z$, к косинусу этого угла. **Котангенс угла** α — число, равное отношению косинуса угла α такого, что $\alpha \ne \pi k$, $k \in z$, к синусу этого угла.

а) $2\sin 30^\circ - \cos 60^\circ + 3tg 45^\circ = 2 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 + 3 = 3{,}5$;

б) $4ctg 45^\circ - \sin 60^\circ + \cos 30^\circ = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

2. а) $\sin 143° > 0$; б) $\cos 108° < 0$; в) $tg 61° > 0$; г) $ctg 280° < 0$;

д) $\sin 125° \cdot \cos 200° = «+» \cdot «-» < 0$; е) $tg 160° ctg 200° = «-» \cdot «+» < 0$

четверть	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

3. $\sin 763° = \sin(720° + 43°) = \sin 43°$;

При этом использовалось следующее свойство: $\sin(2\pi \cdot k + \alpha) = \sin\alpha,\ k \in z$.

Косинус, тангенс и котангенс обладают аналогичным свойством.

4. $y = \sin x$, $y = tg x$, $y = ctg x$ – нечетные, $y = \cos x$ – четная;

а) $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0{,}5$; б) $tg(-45°) = -tg 45° = -1$;

в) $\cos(-60°) = \cos 60° = 0{,}5$; г) $ctg(-30°) = -ctg 30° = -\sqrt{3}$.

5. Угол в 1 рад – центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

а) $2{,}5 = \left(2{,}5 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$;

в) $-\frac{\pi}{2} = -\frac{180°}{2} = -90°$; г) $10\pi = 10 \cdot 180° = 1800°$.

а) $120° = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3\pi}$; б) $270° = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$;

в) $-180° = -180 \cdot \frac{\pi}{180} = -\pi$; г) $-150° = -150 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{6}$.

6. а) $3\sin\pi - \cos\frac{3\pi}{2} - 3tg\frac{\pi}{4} = 0 - 0 - 3 = -3$; б) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos(-\pi) + tg 2\pi + tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\pi + tg 2\pi - tg\frac{\pi}{4} = -2 \cdot 0{,}5 - 1 + 0 - 1 = -3$.

7. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;

а) $1 - \sin\alpha\cos\alpha tg\alpha = 1 - \sin\alpha\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

б) $2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2 - 1 = 1$;

в) $\frac{tg\alpha ctg\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - tg\alpha ctg\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1} = -\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -tg^2\alpha$.

8. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; а) $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -0{,}8$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$;

б) $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = \frac{8}{17}$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{8}{15}$;

в) $tg\alpha=-\sqrt{3}$; $cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{1+3}}=-\frac{1}{2}$; $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

9. а) $sin(180°+\alpha)=-sin\alpha$; б) $cos(270°-\alpha)=-sin\alpha$; в) $tg(90°+\alpha)=-ctg\alpha$;

г) $sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=cos\alpha$; д) $cos(\pi-\alpha)=-cos\alpha$; е) $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$.

10. $sin(\alpha\pm\beta)=sin\alpha cos\beta\pm cos\alpha sin\beta$; $cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha cos\beta\pm sin\alpha sin\beta$;

а) $\frac{sin(\alpha-\beta)+cos\alpha sin\beta}{sin(\alpha+\beta)-cos\alpha sin\beta}=\frac{sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta+cos\alpha sin\beta}{sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta-cos\alpha sin\beta}=1$;

б) $\frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)}=\frac{sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta+sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta-cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta}=$

$=\frac{2\,sin\alpha cos\beta}{-2\,sin\alpha sin\beta}=-ctg\beta.$

11. а) $sin75°=sin(45°+30°)=sin45°cos30°+cos45°sin30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; б) $cos15°=cos(90°-75°)=sin75°=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$;

в) $sin105°=sin(90°+15°)=cos15°=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$;

г) $cos105°=cos(90°+15°)=-sin15°=-sin(45°-30°)=$

$=-sin45°cos30°+cos45°sin30°=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$.

12. $sin2\alpha=2\,sin\alpha cos\alpha$; $cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2\,cos^2\alpha-1=1-2\,sin^2\alpha$;

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; а) $\frac{sin2\alpha}{2\,cos\alpha}=\frac{2\,sin\alpha cos\alpha}{2\,cos\alpha}=sin\alpha$;

б) $cos^4\alpha-sin^4\alpha=(cos^2\alpha+sin^2\alpha)(cos^2\alpha-sin^2\alpha)=cos2\alpha$;

в) $sin2\alpha-(sin\alpha+cos\alpha)^2=sin2\alpha-(sin^2\alpha+cos^2\alpha+2\,sin\alpha cos\alpha)=$

$=sin2\alpha-1-sin2\alpha=-1$;

г) $\frac{2\sqrt{3}tg15°}{1-tg^2 15°}=\sqrt{3}tg30°=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1$;

13. а) $2\,sin75°cos75°=sin150°=sin(180°-30°)=sin30°=0{,}5$;

б) $cos^2 165°-sin^2 165°=cos330°=cos(360°-30°)=cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{2tg105°}{1-tg^2 105°}=tg210°=tg(180°+30°)=tg30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

14. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

а) $\sin3\alpha+\sin5\alpha=2\sin4\alpha\cos\alpha$; б) $\sin3\beta-\sin\beta=2\sin\beta\cos2\beta$;

в) $\cos4\alpha+\cos2\alpha=2\cos3\alpha\cos\alpha$;

г) $\cos\alpha-\cos5\alpha=-2\sin3\alpha\sin(-2\alpha)=2\sin3\alpha\sin2\alpha$.

15. а) $\frac{\sin5\alpha+\sin\alpha}{\cos5\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\sin3\alpha\cos2\alpha}{2\cos3\alpha\cos2\alpha}=tg3\alpha$;

б) $\frac{\cos4\alpha-\cos6\alpha}{\cos4\alpha+\cos6\alpha}=\frac{2\sin5\alpha\sin\alpha}{2\cos5\alpha\cos\alpha}=tg5\alpha\cdot tg\alpha$.

16. а) $\frac{\cos58^\circ-\cos32^\circ}{\sin58^\circ-\sin32^\circ}=\frac{-2\sin45^\circ\sin13^\circ}{2\sin13^\circ\cos45^\circ}=-1$;

б) $\frac{\sin130^\circ+\sin50^\circ}{\cos130^\circ-\cos50^\circ}=\frac{2\sin90^\circ\sin40^\circ}{2\sin90^\circ\cos40^\circ}$; данное выражение не имеет смысла, т.к. $\cos90^\circ=0$.

Итоговое повторение по темам.
(к учебнику под научным руководством Тихонова)
Степень с рац-показателем

1. Пусть a–действительное число, $a\neq0$, n–натур. число. Тогда $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $a^0=1$.

1) а) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$; б) $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$; в) $1^{-10}=\frac{1}{1^{10}}=1$; г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$;

д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$; е) $(-2)^0=1$; ж) $1{,}075^0=1$; з) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2^2}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$;

2) а) $\frac{1}{2^3}=2^{-3}$; б) $\frac{1}{3^2}=3^{-2}$; в) $\frac{1}{a^6}=a^{-6}$; г) $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$.

2. $a,b\neq0$, $m,n\in Z$; 1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; 2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n=a^{mn}$;

4) $(ab)^n=a^n\cdot b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

1) а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$; б) $\left(\frac{-1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{-1}{7}\right)^{-3}=\left(\frac{-1}{7}\right)^{2-3}=\left(\frac{-1}{7}\right)^{-1}=-7$;

в) $2^3\div2^5=2^{3-5}=2^{-2}=\frac{1}{4}$; г) $(0{,}1)^2\div(0{,}1)^{-2}=(0{,}1)^{2+2}=(0{,}1)^4=0{,}0001$; д) $\left(a^2\right)^{-3}=a^{-6}$;

е) $(b^{-3})^2 = b^{-6}$; ж) $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$; з) $(a^2b)^{-1} = a^{-2}b^{-1}$; и) $(2a^2)^{-2} = 2^{-2}a^{-4} = \frac{a^{-4}}{4}$;

к) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{b^3}{a^3}$; л) $\left(\frac{-2xy^{-2}}{z^{-3}}\right)^2 = \frac{(-2)^2\cdot x^2\cdot y^{-4}}{z^{-6}} = \frac{4x^2z^6}{y^4}$;

2) а) $300000^2 = (3\cdot10^5)^2 = 9\cdot10^{10}$; б) $0{,}001^3 = (10^{-3})^3 = 10^{-9}$;

в) $\frac{1}{625} = 0{,}0016 = 1{,}6\cdot10^{-3}$.

3. Арифметический корень n-ой степени из числа a – неотрицательное число, n-ая степень которого равна a. $\sqrt[3]{27}=3$, т.к. $3\ge0$ и $3^3=27$.

4. Извлечение корня n-ой степени. Оно является обратным к возведению в степень n

5. а) $\sqrt{25}=5$; б) $\sqrt[3]{27}=3$; в) $\sqrt{\frac{1}{625}}=\frac{1}{25}$; г) $\sqrt[4]{\left(\frac13\right)^8}=\left(\frac13\right)^2=\frac19$;

д) $\sqrt[3]{10^{12}}=10^{\frac{12}{3}}=10^4=10000$.

6. Уравнение $x^{2k+1}=a$ имеет единственный корень, равный $\sqrt[2k+1]{a}$; $(a<0)$.

1) а) $\sqrt[3]{-8}=-2$; б) $\sqrt[7]{-1}=-1$; в) $\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}$; г) $\sqrt[5]{-3^5}=-3$;

2) а) $x^3=-27$; $x\sqrt[3]{-27}$; $x=-3$; б) $x^4=625$; $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{625}$; $x_{1,2}=\pm5$.

7. а) $\sqrt[3]{-64}-\frac12\sqrt[6]{64}=-4-\frac12\cdot2=-5$; б) $\sqrt[4]{10000}-2\sqrt[3]{0{,}001}=10+2\cdot0{,}1=10{,}2$;

в) $\sqrt{3-\sqrt2}\cdot\sqrt{3+\sqrt2}=\sqrt{(3-\sqrt2)(3+\sqrt2)}=\sqrt{9-2}=\sqrt7$.

8. 1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\frac ab}=\frac{\sqrt[n]a}{\sqrt[n]b}$; 3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; 4) $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

9. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]a\cdot\sqrt[n]b$; $a,b\ge0$ - левая и правая части неотрицательны. Возведем правую часть равенства в степень n и убедимся, что она равна b. По свойству степеней с натуральным показателем получаем

$(\sqrt[n]a\cdot\sqrt[n]b)^n=(\sqrt[n]a)^n\cdot(\sqrt[n]b)^n=a\cdot b$, ч.т.д.

10. а) $\sqrt[3]{216\cdot0{,}027}=\sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{0{,}027}=6\cdot0{,}3=1{,}8$; б) $\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{108\cdot2}=\sqrt[3]{216}=6$;

в) $\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}}=\frac49$; г) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt5}=\sqrt{\frac{20}{5}}=\sqrt4=2$; д) $(\sqrt{200}-\sqrt{32})+\sqrt2=(\sqrt{100\cdot2}-\sqrt{16\cdot2})+\sqrt2=$

$=(10\sqrt2-4\sqrt2)+\sqrt2=6\sqrt2+\sqrt2=6$; е) $(\sqrt[5]{2})^5=\sqrt[5]{2^5}=2$; ж) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=2$.

11. а) $\sqrt[3]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[3]{9a}=\sqrt[3]{3\cdot9\cdot a^3b^3}=3ab$; б) $\sqrt[4]{\frac{a^2b}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2b^3}{c^3}}=\sqrt[4]{\frac{a^2b\cdot a^2b^3}{c\cdot c^3}}=\frac{ab}{c}$.

12. Если $a>0$, x — произвольное рациональное число, представленное дробью m/n, где m – целое, n – натуральное, то число $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

1) а) $15^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{15^3}$; б) $27^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}$;

2) а) $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{2^5}=2^{\frac{5}{2}}$; в) $\sqrt[5]{5^{-3}}=5^{\frac{-3}{5}}$.

13. Если a и b положительные действит. числа, а x и y – рациональные числа, то

1) $a^x a^y=a^{x+y}$; 2) $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$; 3) $(ab)^x=a^x b^x$; 4) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

14. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$. Доказательство: Рассмотрим два рациональных числа, представленные в виде дробей $\dfrac{p_1}{q_1}$ и $\dfrac{p_2}{q_2}$. Их всегда можно представить в виде $\dfrac{p_1q_2}{q_1q_2}$ и $\dfrac{p_2q_1}{q_1q_2}$, где знаменатели дробей равны. Поэтому будем считать, что рациональные числа x и y уже представлены в виде двух дробей с одинаковыми знаменателями $\dfrac{m_1}{n}$ и $\dfrac{m_2}{n}$. По свойству арифметических корней n-ой степени

получаем: $a^x a^y=a^{\frac{m_1}{n}}\cdot a^{\frac{m_2}{n}}=\sqrt[n]{a^{m_1}}\cdot\sqrt[n]{a^{m_2}}=\sqrt[n]{a^{m_1+m_2}}=a^{\frac{m_1+m_2}{n}}=a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}}=a^{x+y}$. ч.т.д

15. а) $9^{\frac{1}{5}}\cdot 27^{\frac{1}{5}}=\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{2}{5}}\cdot 3^{\frac{3}{5}}=3$; б) $\left(\dfrac{25}{64}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{25^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}}=\dfrac{5}{8}$.

16. $a^{\frac{1}{4}}\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{11}{12}}$.

17. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$

18. 1) а) если $a>b>0$, $r>0$, то $a^r>b^r$; б) если $a>b>0$, $r<0$, то $a^r<b^r$;

2) а) $3>2$; $2>0$, то $3^2>2^2$, т.к. $9>4$; б) $3>2$; $-1<0$, то $3^{-1}<2^{-1}$, т.к. $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$.

19. а) $\left(\dfrac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\dfrac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$ т.к. $\dfrac{14}{13}>\dfrac{13}{14}$; $-\dfrac{1}{2}<0$, то $\left(\dfrac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}}>\left(\dfrac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ и $(0.755)^{\sqrt{3}}$, т.к. $\dfrac{3}{4}<0{,}755$; $\sqrt{3}>0$, то $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}<(0{,}755)^{\sqrt{3}}$.

Степенная функция

1. Область определения функции – все значения независимой переменной.

2. Найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

3. а) $y=2x+4$; $D(y)=R$; б) $y=4x^2+3x+5$; $D(y)=R$;

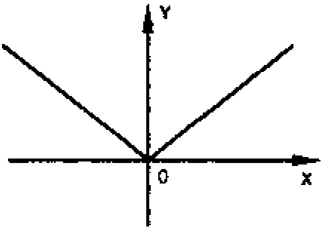
в) $y=\frac{1}{x}$; $x\neq 0$; $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$; г) $y=\sqrt{x}$; $x\geq 0$; $D(y)=[0;\,+\infty)$;.

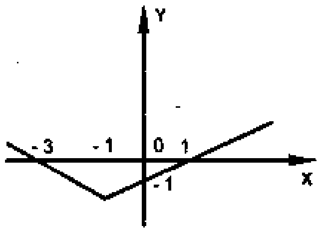
д) $y=\sqrt{x+1}$; $x+1\geq 0$; $x\geq -1$; $D(y)=[-1;\,+\infty)$;

е) $y=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$; $x-2>0$; $x>2$; $D(y)=(2;\,+\infty)$.

4. График функции – множество точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

5. а) $y=|x|$; б) $y=|x+1|-2$.





6. Функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

а) $y=x^2$ на $[1;\,3)$; б) $y=-x$ на $[-1;\,0)$.

7. От значения показателя степени r.

8. 1) а) степенная функция $y=x^r$ возрастает на промежутке $x\geq 0$, если $r>0$;

б) степенная функция $y=x^r$ убывает на промежутке $x>0$, если $r<0$;

2) $y=x$ возрастает на $x\geq 0$; $y=\frac{1}{x}$ убывает на $x>0$.

9. $x^{\frac{1}{2}}=4$, $\sqrt{x}=4$, $x=16$.

10. а) $y=x^{\frac{-2}{3}}$ – убывает, т.к. $r=-\frac{2}{3}<0$; б) $y=x^{\frac{2}{3}}$ – возрастает, т.к. $r=\frac{2}{3}>0$;

в) $y=x^{\frac{3}{2}}$ – возрастает, т.к. $r=\frac{3}{2}>0$; г) $y=x^{-\frac{3}{2}}$ – убывает, т.к. $r=-\frac{3}{2}<0$.

11. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x)=f(x)$,

$y=\frac{1}{x^2}$; $y(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=y(x)$, значит, $y(x)$ – четная, ч.т.д.

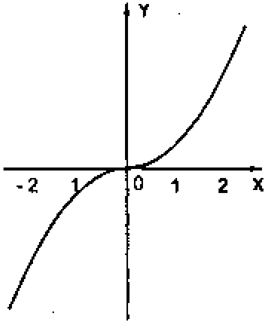
12. $y = x^3$; $D(y) = E(y) = R$;

$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$,

$y = 0$ при $x = 0$;

y возрастает на R;

нечетная.



13. Функция $f(x)$ называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$,

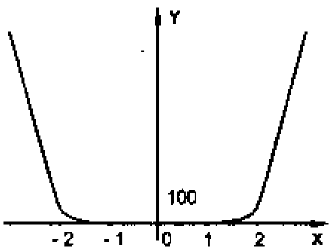
$y = x^3$; $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$, значит, $y(x)$ – нечетная, ч.т.д.

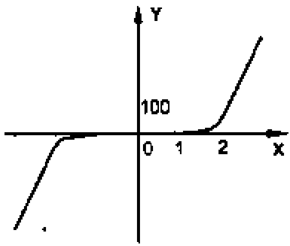
14. Область определения симметрична относительно нуля.

15. а) симметричен относительно оси ординат;

б) симметричен относительно начала координат.

16. а) $y = x^4$; б) $y = x^5$.





17. $y = \sqrt[3]{x}$;

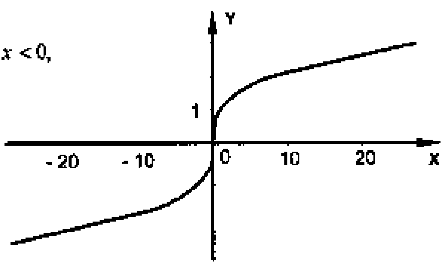
$D(y) = E(y) = R$;

$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$,

$y = 0$ при $x = 0$;

y возрастает на R;

нечетная.



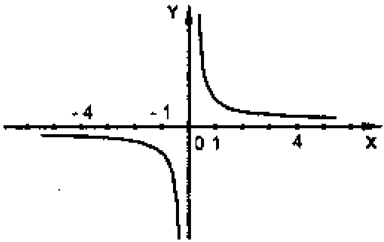
18. $y=\dfrac{1}{x}$;

$D(y)=E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;

$y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$,

убывает на $D(y)$;

нечетная.



19. Гипербола.

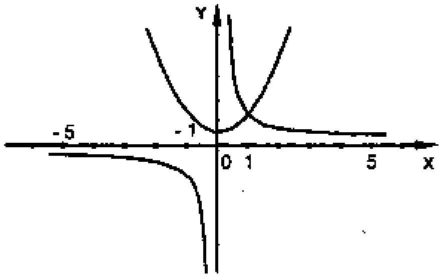
20. **а)** Растяжение в 2 раза вдоль оси OY. **б)** График первой функции расположен в 1 и 3 четвертях, график второй – в 2 и 4 четвертях.

21. Обратная пропорциональность.

22. **а)** $x^3>27$; $x>\sqrt[3]{27}$; $x>3$; **б)** $x^4\le 625$; $-\sqrt[4]{625}\le x\le\sqrt[4]{625}$; $-5\le x\le 5$.

23. $\dfrac{2}{x}=x^2+1$.

Ответ: 1.



24. **а)** $\sqrt{2+x}=3$; $2+x=9$; $x=7$;

Ответ: 7.

б) $\sqrt{2x^2-3x+2}=4-x$; $2x^2-3x+2=16+x^2-8x$; $x^2+5x-14=0$;

$D=25+56=81$; $x_1=\dfrac{-5+9}{2}=2$; $x_2=-7$. Проверка: $x=2$;

$\sqrt{2\cdot 4+6+2}=4-2$ – верно; $x=-7$; $\sqrt{2\cdot 49+21+2}=4+7$ – верно.

Ответ: -7; 2.

Элементы тригонометрии

1. Угол в 1 рад – центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

2. $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$; **а)** $\pi=180^\circ$; **б)** $\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{180^\circ}{4}=45^\circ$; **в)** $\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\cdot180^\circ=120^\circ$; **г)** $\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\cdot180^\circ=135^\circ$.

3. $\frac{\pi}{180}$ рад. а) $180° = \pi$; б) $90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$;

в) $20° = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$; г) $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

4. а) $\pi \approx 3{,}14$; б) $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$; в) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; г) $2\pi \approx 6{,}28$.

5. а) $-\frac{\pi}{2} > -2$; б) $\pi < 3{,}2$; в) $2\pi < 6{,}72$.

6. Единичная окружность – окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

7. а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.

8. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (–1; 0); г) (1; 0); д) (1; 0); е) (–1; 0).

9. Каждой точке сопоставим угол α, а углу α – его тангенс, т.е. действительное число.

10. а) $A(-1; 0)$; $\alpha = \pi + 2\pi n$; $n \in Z$; б) $B(0; 1)$; $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in Z$;

в) $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\gamma = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$; $l \in Z$.

11. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (0; –1).

12. **Синус угла** a — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол a. **Косинус угла** a — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол a. **Тангенс угла** a — число, равное отношению синуса угла a такого, что $\alpha \ne \pi/2 + \pi k$, $k \in z$, к косинусу этого угла. **Котангенс угла** a — число, равное отношению косинуса угла a такого, что $\alpha \ne \pi k$, $k \in z$, к синусу этого угла.

13. а) $\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in Z$; б) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

в) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; г) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

14.

α	$0°(0)$	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

15. а) $4\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=1+\frac{3}{2}=2,5;$

б) $2\sin\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+1.$

16.

четверть	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+		–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$tg\alpha$	+	–	+	–
$ctg\alpha$	+	–	+	–

а) $\sin 275^\circ<0$; б) $\cos 130^\circ<0$; в) $tg 50^\circ>0$; г) $ctg 105^\circ<0$;

д) $\sin\frac{2\pi}{3}>0$; е) $\cos\frac{\pi}{4}>0$; ж) $tg\frac{3\pi}{4}<0$; з) $ctg\frac{3\pi}{3}<0.$

17. а) $\sin 1>0$; б) $\cos 3<0$; в) $tg(-3,4)<0$; г) $ctg 2<0$;

д) $\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}=$ «+» · «–» <0;

е) $\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=$ «–» · «+» <0; ж) $tg\frac{5\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}=$ «+» · «–» $<0.$

18. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$

19. а) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\frac{24}{25}$;

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{24}{7}$; $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{7}{24}$;

б) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha=0,28$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0,28^2}=0,96$;

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0,28}{0,96}=\frac{7}{24}$; $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{24}{7}.$

20. а) $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$; б) $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$

21. а) $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{5,2}=\frac{5}{26}$; б) $tg\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-0,6^2}}{0,6}=\frac{4}{3}$;

в) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; г) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$;

д) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{15^2}{8^2}}}=\frac{8}{17}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}.$

22. а) $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

б) $(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$;

г) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha$; д) $\sin\alpha\cos\alpha\, tg\alpha-1=\sin\alpha-\cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1=-\cos^2\alpha$;

е) $\dfrac{tg\alpha\, ctg\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-tg\alpha\, ctg\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-1}=-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-ctg^2\alpha$.

23. а) $(1-\cos^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)=\sin^2\alpha\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1$, ч.т.д.

б) $\cos^2\alpha(1+tg^2\alpha)-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, ч.т.д.

24. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $tg(-\alpha)=-tg\alpha$;

а) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt3}{2}$; б) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt3}{2}$; в) $tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-tg\dfrac{\pi}{4}=-1$;

г) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+ctg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}-ctg\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{5}{4}$.

25. а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos(-\alpha)}-\dfrac{1+\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{1+tg^2(-\alpha)}+\dfrac{1}{1+ctg^2(-\alpha)}=\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}+\dfrac{1}{1+ctg^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

26. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta$;

1) а) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}=-ctg\alpha\, ctg\beta$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$

$=\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta}=ctg\alpha$.

2) а) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$

$=\dfrac{\sqrt2}{2}\dfrac{\sqrt3}{2}-\dfrac{\sqrt2}{2}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}$; б) $\sin 15^\circ=\sin(90^\circ-75^\circ)=\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt2(\sqrt3-1)}{4}$;

в) $\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$; г) $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) =$
$= \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$;

д) $\sin 74^\circ \cos 16^\circ + \cos 74^\circ \sin 16^\circ = \sin(74^\circ + 16^\circ) = \sin 90^\circ = 1$;

е) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}};$$

ж) $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{2}{9}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{6}.$$

27. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

1) а) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1-1+2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = tg\alpha$;

б) $(1-\cos 2\alpha)ctg\alpha = (1-1+2\sin^2\alpha)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$;

в) $\cos 2\alpha + 2\sin^2(-\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$;

г) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha$;

2) а) $1-\left(\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\right) = 1-\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}-2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right) =$
$= 1-\left(1-\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = -0{,}96$;

г) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}64 - 0{,}36 = 0{,}28$;

д) $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot 2}{1-4} = -\frac{4}{3}$.

28. 1) а) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; в) $tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$;

г) $tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$; д) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$;

2) а) $\cos 17\pi = \cos(16\pi + \pi) = \cos\pi = -1$; б) $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $sin420° = sin(360° + 60°) = sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $tg135° = tg(90° + 45°) = -ctg45° = -1$;

д) $cos120° = cos(90° + 30°) = -sin30° = -\frac{1}{2}$;

е) $cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = cos\frac{2\pi}{3} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

ж) $tg\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -tg\frac{11\pi}{6} = -tg\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

з) $sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -sin\frac{7\pi}{3} = -sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Элементы тригонометрии

1. 1) 1; 4; 9; 16; 25.

2) а) $a_n = \frac{1}{n}$, $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_4 = \frac{1}{4}$; $a_5 = \frac{1}{5}$;

б) $a_n = n(n+2)$, $a_1 = 1(1+2) = 3$; $a_2 = 2(2+2) = 8$; $a_3 = 3(3+2) = 15$;

$a_4 = 4(4+2) = 24$; $a_5 = 5(5+2) = 35$;

в) $a_n = \frac{n}{n-1}$, $a_2 = \frac{2}{2-1} = 2$; $a_3 = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$; $a_4 = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$;

$a_5 = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}$; $a_6 = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5}$;

г) $a_n = -n^2$, $a_1 = -1$; $a_2 = -4$; $a_3 = -9$; $a_4 = -16$; $a_5 = -25$;

3) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$;

$b_2 = 2b_1 + 1 = 5$; $b_3 = 2b_2 + 1 = 11$; $b_4 = 2b_3 + 1 = 23$; $b_5 = 2b_4 + 1 = 47$.

2. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. 2; 4; 6; 8;.....

3. $a_n = 4 - 2n$; $a_{n-1} = 4 - 2(n-1)$; $a_{n+1} = 4 - 2(n+1)$;

$a_n = \frac{a_n - 1 + a_{n+1}}{2}$; $4 - 2n = \frac{4 - 2(n-1) + 4 - 2(n+1)}{2}$ – верно для любого $n \in N$,

значит, (a_n) – арифмет. прогрессия, ч.т.д.

4. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_1 = -2$, $d = 4$; $a_n = -2 + 4 \cdot 99 = 394$.

5. а) 2; 5; 8; 11;.....; $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$;

б) 1; -1; -3; -5;.....; $a_n = 1 - 2(n-1) = 3 - 2n$;

6. 3; 5;.....; $a_n = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n$; $101 = 1 + 2n$; $2n = 100$; $n = 50$.

7. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $a_1 = 10$, $d = 2$; $n = 91$; $S = S_{91} = \frac{20 + 90}{2} \cdot 91 = 5005$.

8. 1; 3; 5;....101; $a_1=1$, $d=2$; $n=51$; $S=S_{51}=\frac{2+2\cdot 50}{2}\cdot 51=2601$.

9. Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. 2; 4; 8; 16;......

10. $b_n=3^{2n}$, $b_{n-1}=3^{2(n-1)}$, $b_{n+1}=3^{2(n+1)}$; $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $\left(3^{2n}\right)^2=3^{2(n-1)}\cdot 3^{2(n+1)}$ – верно для любого $n\in N$, значит, (b_n) – геометрическая прогрессия.

11. 2; 1; $\frac{1}{2}$; $b_1=2$, $q=\frac{1}{2}$; $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{4}{2^n}$.

12. $b_1=-\frac{1}{12}$, $q=-12$; $b_2=-\frac{1}{12}\cdot(-12)=1$; $b_3=1\cdot(-12)=-12$;

$b_4=-12\cdot(-12)=144$; $b_5=144\cdot(-12)=-1728$; $b_6=-1728\cdot(-12)=20736$.

13. $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$; $b_1=80$; $q=\frac{1}{2}$; $b_7=80\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{80}{64}=1{,}25$.

14. 2; 8; 32; $b_1=2$; $q=4$; $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 4^{n-1}=2\cdot 2^{2n-2}=2^{2n-1}$;

$512=2^{2n-1}$; $2^9=2^{2n-1}$; $2n-1=9$; $2n=10$; $n=5$, значит, $512=b_5$.

15. $S_n=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$, $q\neq 1$; $b_1=11$; $q=2$; $S_5=\frac{11\left(2^5-1\right)}{2-1}=341$.

16. $q=2$; $S_7=635$; $635=\frac{b_1\left(2^7-1\right)}{2-1}=126b_1$; $b_1=5$; $b_7=b_1q^6=5\cdot 2^6=320$.

17. Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше единицы. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$;....

18. $q=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2}=\frac{1}{3}$; $\left|\frac{1}{3}\right|<1$, значит, (b_n) – бесконечно убывающая, ч.т.д.

19. $S=\frac{b_1}{1-q}$; 30; 3; 0,3....; $b_1=30$; $q=\frac{3}{30}=0{,}1$; $S=\frac{30}{1-0{,}1}=\frac{300}{9}=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$.

20. $b_3=1$; $q=-\frac{1}{7}$; $b_3=b_1\cdot q^2$; $b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=49$; $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{49}{1+\frac{1}{7}}=\frac{49\cdot 7}{8}=\frac{343}{8}$.

21. а) $0,(3)=0{,}333....=0{,}3+0{,}03+0{,}003+....=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{1}{3}$

б) $0,(15)=0{,}1515....=0{,}15+0{,}0015+....=\frac{0{,}15}{1-0{,}01}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$

в) $0{,}1(2)=0{,}122....=0{,}1+0{,}02+0{,}002+....=0{,}1+\frac{0{,}02}{1-0{,}1}=\frac{1}{10}+\frac{2}{90}=\frac{11}{90}$.

ПОВТОРЕНИЕ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VII–IX КЛАССОВ

Вариант I

П-1

1. а) $4\cdot(1,22\div 0,4-3,7)+\frac{2}{3}=4(3,05-3,7)+\frac{2}{3}=-2,6+\frac{2}{3}=-\frac{13}{2}+\frac{2}{3}=$

$=-\frac{13}{5}+\frac{2}{3}=\frac{-39+10}{15}=-\frac{29}{15}=-1\frac{14}{15}.$

б) $1\frac{1}{2}+(0,4\cdot 3,25-3,15)\div 0,2=1,5-1,85\div 0,2=1,5-9,25=-7,75;$

в) $\dfrac{-30,4+15,2\cdot 2,5}{1\frac{5}{9}\cdot 3-4\frac{5}{9}}=\dfrac{7,6}{\frac{14}{9}\cdot 3-\frac{41}{9}}=7,6\cdot 9=68,4$

2. 1) $\dfrac{a+b^2}{ab}$; **а)** $a=\frac{1}{3},\quad b=\frac{1}{6};\quad \dfrac{a+b^2}{ab}=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{36}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\dfrac{13\cdot 6\cdot 3}{36}=\dfrac{13}{2}=6,5;$

б) $a=0,4,\quad b=-0,3;\quad \dfrac{a+b^2}{ab}=-\dfrac{0,4+0,09}{0,4\cdot 0,3}=-\dfrac{0,49}{0,12}=-\dfrac{49}{12}=-4\dfrac{1}{12};$

2) $\dfrac{a-b^2}{ab}$; **а)** $a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{1}{2};\quad \dfrac{a-b^2}{ab}=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{5\cdot 3}{3\cdot 4}=1,25;$

б) $a=0,3,\quad b=-0,4;\quad \dfrac{a-b^2}{ab}=-\dfrac{0,3-0,16}{0,12}=-\dfrac{14}{12}=-\dfrac{7}{6}=-1\dfrac{1}{6};$

3) $\dfrac{x-y}{xy^2}$; **а)** $x=\frac{5}{6},\quad y=\frac{2}{3};\quad \dfrac{x-y}{xy^2}=\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{9}}=\dfrac{6\cdot 9}{6\cdot 5\cdot 4}=\dfrac{9}{20};$

б) $x=0,5,\quad y=0,6;\quad \dfrac{x-y}{xy^2}=\dfrac{0,5-0,6}{0,5\cdot 0,36}=-\dfrac{0,1}{0,18}=-\dfrac{10}{18}=-\dfrac{5}{9}.$

3. а) $2\cdot 4^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{5}\right)^{0}=2\cdot\frac{1}{16}+\frac{27}{8}-1=\frac{20}{8}=2,5;$

б) $\frac{3}{4}\cdot 25^{\frac{1}{2}}+64^{-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\cdot 5+\frac{1}{4}=\frac{16}{4}=4;$ **в)** $12\cdot 3^{-3}+\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{12}{27}+\frac{25}{9}-1=$

$=\frac{4}{9}+\frac{25}{9}-\frac{9}{9}=2\frac{2}{9};$ **г)** $\frac{2}{5}\cdot 8^{\frac{2}{3}}-25^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}=\frac{8}{5}-\frac{1}{5}=1,4;$

д) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-6}-3^{-11}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-9}=\left(\frac{5}{3}\right)^{8}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-6}-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-9}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=$

$=\frac{25-1}{9}=\frac{24}{9}=2\frac{2}{3}$; е) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+32^{-0,2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$

4. а) $\sqrt{4\cdot25\cdot4^3}=\sqrt{4^4\cdot25}=4^2\cdot5=80$; б) $\left(\sqrt5-\sqrt2\right)\cdot\left(\sqrt5+\sqrt2\right)=\left(\sqrt5\right)^2-\left(\sqrt2\right)^2=3$;

в) $7^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{4}{3}}\cdot7^{\frac{2}{3}}=7^2=49$; г) $\sqrt[3]{5^6\cdot64\cdot5^3}=\sqrt[3]{5^9\cdot4^3}=5^3\cdot4=500$;

д) $\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)\left(2\sqrt3+\sqrt2\right)=\left(2\sqrt3\right)^2-\left(\sqrt2\right)^2=10$; е) $3^{1\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{5}{4}}\cdot3^{\frac{3}{4}}=3^2=9$;

ж) $\frac{3-\sqrt5}{3+\sqrt5}+\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}=\frac{9+5-6\sqrt5+9+5+6\sqrt5}{3^2-\left(\sqrt5\right)^2}=\frac{28}{4}=7$;

з) $\sqrt{12\sqrt2}\cdot\sqrt{3\sqrt8}=\sqrt{12\cdot\sqrt2\cdot3\sqrt8}=\sqrt{36\cdot4}=6\cdot2=12.$

П-2

1. а) $2y(y+5)-3y(y-3)=2y^2+10y-3y^2+9y=19y-y^2$;

б) $(2a-b)^2-(2a+b)^2=4a^2-4ab+b^2-4a^2-4ab-b^2=-8ab$;

в) $5x\left(x^2+3\right)-3x\left(x^2-5\right)=5x^3+15x-3x^3+15x=2x^3+30x$;

г) $(a-3b)^2-(a+b)^2=a^2-6ab+9b^2-a^2-2ab-b^2=8b^2-8ab$;

д) $5x\left(x^2-3\right)-(5x+2)\left(x^2-3x-1\right)=5x^3-15x-\left(5x^3+2x^2-6x-5x-2\right)=$

$=5x^3-15x-5x^3-2x^2+15x^2+6x+5x+2=13x^3-4x+2$;

е) $3b(2a-b)^2-(a+3b)\left(b^2-3a^2\right)=3b\left(4a^2-4ab+b^2\right)-\left(ab^2+3b^3-3a^3-9a^2b\right)=$

$=12a^2b-12ab^2+3b^3-ab^2-3b^3+3a^3+9a^2b=3a^3+21a^2b-13ab^2.$

2. 1) а) $2ab-2b^2=2b(a-b)$; б) $x^4+3x^6=x^4\left(1+3x^2\right)$;

в) $6mn-3m^2n+3mn^2=3mn(2-m+n)$; г) $0,25-m^2=(0,5-m)\cdot(0,5+m)$;

д) $y^3-4y=y\cdot\left(y^2-4\right)=y\cdot(y-2)(y+2)$; е) $a^4-9x^2=\left(a^2-3x\right)\left(a^2+3x\right)$;

2) а) $-15ax^2-15ay^2-30axy=-15a\left(x^2+y^2+2xy\right)=-15a(x+y)^2$;

б) $4a^2-6a-b^2+3b=\left(4a^2-b^2\right)-(6a-3b)=$

$=(2a-b)(2a+b)-3(2a-b)=(2a-b)(2a+b-3)$;

в) $81-(x+7)^2=(9-x-7)(9+x+7)=(2-x)(16+x).$

3. а) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}=\frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; б) $\frac{4}{a-2}+\frac{8}{2a-a^2}=\frac{4}{a-2}-\frac{8}{a(a-2)}=$

$$=\frac{4a-8}{a(a-2)}=\frac{4(a-2)}{a(a-2)}=\frac{4}{a};\quad \text{в)}\ \frac{m^2}{m^2-25}\left(m^2+5m\right)=\frac{m^2\cdot m(m+5)}{(m+5)(m-5)}=\frac{m^3}{m-5};$$

$$\text{г)}\ \frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{a^2-ab}=\frac{a(a-b)}{a(a+b)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

4. $$\frac{x+y}{2xy-y^2}\cdot\left(x+y-\frac{x^2}{x+y}\right)=\frac{x+y}{y(2x-y)}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2-x^2}{x+y}=\frac{y(2x+y)}{y(2x-y)}=\frac{2x+y}{2x-y}.$$

5. $$\text{а)}\ \frac{2}{a-b}-\frac{2}{a+b}-\frac{4a}{b^2-a^2}=\frac{2}{a-b}-\frac{2}{a+b}+\frac{4a}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a+2b-2a+2b+4a}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{4(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{4}{a-b};\quad \text{б)}\ \frac{x^2-5x}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2+5xy}=\frac{x(x-5)}{y}\cdot\frac{y^2}{x(x+5y)}=\frac{y(x-5)}{x+5y};$$

$$\text{в)}\ \frac{m^2-n^2}{m^2}+\left(m^2+mn\right)=\frac{(m-n)(m+n)}{m^2}\cdot\frac{1}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m^3}.$$

6. $$\text{а)}\ \frac{2x^2-2y^2}{x}\cdot\frac{4x}{x-y}-\frac{16xy}{x+y}=\frac{2(x-y)(x+y)\cdot 4}{x-y}-\frac{16xy}{x+y}=8(x+y)-\frac{16xy}{x+y}=$$

$$=\frac{8x^2+8y^2+16xy-16xy}{x+y}=\frac{8\left(x^2+y^2\right)}{x+y}.$$

$$\text{б)}\left(\frac{a}{b^2}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}-\frac{2}{a-b}=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab^2}\cdot\frac{ab}{(b-a)(b+a)}+\frac{2}{b-a}=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{b(b-a)(b+a)}+\frac{2}{b-a}=\frac{a^2-2ab+b^2+2b^2+2ab}{b\left(b^2-a^2\right)}=\frac{a^2+3b^2}{b\left(b^2-a^2\right)};$$

$$\text{в)}\ \frac{x-3}{x^2+3x}-\frac{x}{9+3x}+\left(\frac{9}{x^3-9x}+\frac{1}{x+3}\right)=$$

$$=\frac{x-3}{x(x+3)}-\frac{x}{3(x+3)}\div\left(\frac{9}{x(x-3)(x+3)}+\frac{1}{x+3}\right)=$$

$$=\frac{x-3}{x(x+3)}-\frac{x}{3(x+3)}\cdot\frac{x(x-3)(x+3)}{9+x^2-3x}=\frac{3(x-3)\left(9+x^2-3x\right)-x^3\left(x^2-9\right)}{3x(x+3)\left(9+x^2-3x\right)}=$$

$$=\frac{3\left(9x-27+x^3-3x^2-3x^2+9x\right)-x^5+9x^3}{3x(x+3)\left(9+x^2-3x\right)}=\frac{-x^5+12x^3-18x^2+54x-81}{3x(x+3)\left(9+x^2-3x\right)}.$$

7. $$\text{а)}\ \left(10^3\right)^2\cdot 10^{-8}=10^6\cdot 10^{-8}=10^{-2}=0{,}01;\quad \text{б)}\ \frac{25^{-3}\cdot 5^4}{5^{-2}}=\frac{5^{-6}\cdot 5^4}{5^{-2}}=\frac{5^{-2}}{5^{-2}}=1;$$

$$\text{в)}\ \frac{81^{-2}\cdot 3^5}{9^{-2}}=\frac{3^{-8}\cdot 3^5}{3^{-4}}=\frac{3^{-3}}{3^{-4}}=3;\quad \text{г)}\ \frac{0{,}125^2\cdot 32^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot 2^{10}\cdot 2^{-8}=\frac{2^2}{2^6}=\frac{1}{16}.$$

8. а) $\left(\sqrt{18}-5\sqrt{2}+\sqrt{48}\right)\sqrt{3}=\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}=12-2\sqrt{6};$

б) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2=3+4-4\sqrt{3}=7-4\sqrt{3};$ в) $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-2\right)}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2};$

г) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{18}+\sqrt{45}\right)\div\sqrt{5}=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)\div\sqrt{5}=\dfrac{5\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{25-3\sqrt{10}}{5};$

д) $\left(\sqrt{2}-3\right)^2=2+9-6\sqrt{2}=11-6\sqrt{2};$ е) $\dfrac{\sqrt{14}-2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-2\right)}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}.$

9. а) $\sin 300-\cos\left(-240^\circ\right)=\sin\left(360^\circ-60^\circ\right)-\cos\left(180^\circ+60^\circ\right)=$

$=-\sin 60^\circ+\cos 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};$

б) $tg\dfrac{5\pi}{4}\cdot ctg\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-tg\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot ctg\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=tg\dfrac{\pi}{4}\cdot ctg\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}};$

в) $\cos 330^\circ-\sin\left(-135^\circ\right)=\cos\left(360^\circ-30^\circ\right)+\sin\left(90^\circ+45^\circ\right)=\cos 30^\circ+\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2};$

г) $tg\dfrac{3\pi}{4}\cdot ctg\dfrac{7\pi}{6}=tg\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)ctg\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-tg\dfrac{\pi}{4}\cdot ctg\dfrac{\pi}{6}=-\sqrt{3};$

д) $\sin\dfrac{5\pi}{2}-\cos\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)=1-\cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2};$

е) $tg\left(-540^\circ\right)ctg 420^\circ=-tg 180^\circ\cdot ctg 420^\circ=0.$

10. а) $\dfrac{\sin\left(\pi-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(-\alpha\right)}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=2tg\alpha;$

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha;$

в) $\dfrac{\cos\left(\pi-\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(-\alpha\right)}=\dfrac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=2ctg\alpha;$

г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha;$

д) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(2\pi-\alpha\right)+\sin\left(-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos 2\alpha.$

11. а) $\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha=1;$

б) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\left(2\cos^2\alpha-1\right)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$

П-3

1. а) $3(x-1{,}5)+2x=5(2{,}5+2x)$; $3x-4{,}5+2x=12{,}5+10x$; $5x=-17$; $x=-3{,}4$;

б) $3x^2-21=0$; $x^2-7=0$; $x^2=7$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$;

в) $8x^2+6x-2=0$; $4x^2+3x-1=0$; $D=9+4\cdot4=25$; $x_1=\dfrac{-3+5}{8}=\dfrac{1}{4}$, $x_2=-1$;

г) $2-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{7}{x+2}$; $2-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{7}{x+2}=0$; $\dfrac{2(x^2-4)-3(x+2)-7(x-2)}{x^2-4}=0$;

$2x^2-8-3x-6-7x+14=0$; $2x^2-10x=0$; $x(x-5)=0$; $x_1=0$, $x_2=5$.

2. а) $x^3-25x=0$; $x(x^2-25)=0$; $x(x-5)(x+5)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm5$.

б) $3(x+4)^2-9(x+4)$; $(x+4)(3(x+4)-9)=0$; $x+4=0$; $x+4=3$;

$x_1=-4$, $x_2=-1$.

Ответ: а) -5; 0 и 5; б) -4 и -1.

3. а) $5(x-2{,}5)-4x=3(2{,}5+3x)$; $5x-12{,}5-4x=7{,}5+9x$; $8x=-20$; $x=-2{,}5$;

б) $75-3x^2=0$; $3x^2=75$; $x^2=25$; $x_{1,2}=\pm5$; **в)** $-4x^2+10x+6=0$; $4x^2-10x+6=0$;

$2x^2-5x-3=0$; $D=25+4\cdot3\cdot2=49$; $x_1=\dfrac{5+7}{4}=3$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$;

г) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{30}{x+1}=5$; $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{6}{x+1}-1=0$; $\dfrac{x+1+6x-6-x^2+1}{x^2-1}=0$;

$-x^2+7x-4=0$; $x^2-7x+4=0$; $D=49-16=33$; $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: а) $-2{,}5$; б) -5 и 5; в) $-\dfrac{1}{2}$ и 3; г) $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{2}$.

4. а) $x^3-9x=0$; $x(x^2-9)=0$; $x(x-3)(x+3)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm3$;

б) $(x+5)^2-4(x+5)=2(x+5)$; $x+5=0$; $x+5-4=2$; $x_1=-5$, $x_2=1$.

5. а) $\dfrac{x+1{,}5}{8}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3x-1}{24}$; $3x+4{,}5-18=3x-1$; $4{,}5-18=-1$ – нет корней;

б) $\dfrac{1}{2}x^2-x-1=0$; $x^2-2x-2=0$; $D=4+4\cdot2=13$; $x_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$;

в) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-4}$; $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{8}{(x+2)(x-2)}=0$;

$\dfrac{x^2-2x+x^2+4x+4-8}{x^2-4}=0$; $2x^2+2x-4=0$; $x^2+x-2=0$;

$D=1+4\cdot2=9$; $x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $x_2=-2$.

Ответ: а) нет корней; б) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$; в) $x_1=1$, $x_2=-2$.

6. а) $2x^4-2x=0$; $x^4-x=0$; $x\left(x^3-1\right)=0$; $x=0$; $x^3-1=0$; $x_1=0$, $x_2=1$.

б) $x^4-10x^2+9=0$; $x^2=y$; $y\ge 0$; $y^2-10y+9=0$; $D=100-36=64$;

$y_1=\dfrac{10+8}{2}=9$, $y_2=1$; $x^2=9$; $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 1$;

в) $2\left(x^2-1\right)^2+6\left(x^2-1\right)=0$; $x^2-1=0$; $2\left(x^2-1\right)+6=0$; $x_{1,2}=\pm 1$; $x^2-1=-3$;

$x^2=-2$ – нет корней.

Ответ: **а)** $x_1=0$, $x_2=1$; **б)** $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 1$; **в)** $x_{1,2}=\pm 1$.

7. а) $\begin{cases}3x+2y=7\\9x-8y=35\end{cases}$; $\begin{matrix}2y=7-3x;\\9x-4\cdot(7-3x)=35;\end{matrix}$

$9x-28+12x=35$; $21x=63$; $x=3$; $y=\dfrac{7-3\cdot 3}{2}=-1$;

б) $\begin{cases}xy=-6\\x-3y=11\end{cases}$; $\begin{matrix}x=11-3y;\\y(11+3y)+6=0;\ 3y^2+11y+6=0;\ D=121-12\cdot 6=49\end{matrix}$

$y_1=\dfrac{-11+7}{6}$; $y_2=-3$; $x_1=11-3\cdot\dfrac{2}{3}=9$; $x_2=11-3\cdot 3=2$;

в) $\begin{cases}x^2+y=26\\x+y=6\end{cases}$; $y=6-x$; $x^2+6-x-26=0$; $x^2-x-20=0$;

$D=1+4\cdot 20=81$; $x_1=\dfrac{1+9}{2}=5$; $x_2=-4$; $y_1=6-5=1$; $y_2=6+4=10$.

Ответ: **а)** $(3;\ -1)$; **б)** $\left(9;\ -\dfrac{2}{3}\right)$, $(2;\ -3)$; **в)** $(5;1)$, $(-4;10)$.

8. а) $\begin{cases}4x-2y=2\\6x+4y=17\end{cases}$; $2x-y=1$; $y=2x-1$; $6x+4(2x-1)=17$; $6x+8x-4=17$;

$14x=21$; $x=\dfrac{21}{14}=1{,}5$; $y=2\cdot 1{,}5-1=2$;

б) $\begin{cases}2x+y=4\\2xy=3\end{cases}$; $y=4-2x$; $2x(4-2x)-3=0$; $8x-4x^2-3=0$; $4x^2-8x+3=0$;

$D=64-4\cdot 4\cdot 3=16$; $x_1=\dfrac{8+4}{8}=1{,}5$; $x_2=0{,}5$; $y_1=4-2\cdot 1{,}5=1$; $y_2=4-2\cdot 0{,}5=3$.

в) $\begin{cases}x^2+y^2=9\\x+y=3\end{cases}$; $y=3-x$; $x^2+(3-x)^2=9$; $x^2+9-6x+x^2=9$;

$2x^2-6x=0$; $x^2-3x=0$; $x_1=0$; $x_2=3$; $y_1=3$; $y_2=0$.

Ответ: **а)** $(1{,}5;\ 2)$; **б)** $(1{,}5;\ 1)$, $(0{,}5;\ 3)$; **в)** $(0;3)$, $(3;0)$.

9. а) $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{2}+3=\dfrac{2x+y}{5} \\ \dfrac{2x+4y}{4}+2=3y \end{cases}$; $\begin{matrix} 5x-15y+30=4x+2y; \quad x=17y-30; \\ 2x+4y+8=12y; \;\; 2x=8y-8; \;\; x=4y-4; \end{matrix}$

$17y-30=4y-4;\;\; 13y=26;\quad y=2;\quad x=4\cdot 2-4=4;$

б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x-2y=-5 \end{cases}$; $\begin{matrix} x=2y-5; \quad 4y^2+25-20y+2y^2-5y+y^2-13=0; \\ 7y^2-25y+12=0; \end{matrix}$

$D=289;\;\; y_1=\dfrac{25+17}{14}=3;\;\; y_2=\dfrac{4}{7};\;\; x_1=2\cdot 3-5=1;\quad x_2=2\cdot\dfrac{4}{7}-5=-\dfrac{27}{7}.$

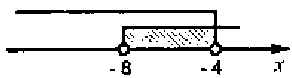
Ответ: а) $(4;\,2)$; б) $\left(-\dfrac{27}{7};\,\dfrac{4}{7}\right)$.

10. $y=9x^2-4x+5;\;\; y=2x+4;\;\; 9x^2-4x+5=2x+4;\;\; 9x^2-6x+1=0;$

$(3x-1)^2=0;\;\; 3x=1;\quad x=\dfrac{1}{3};\quad y=2\cdot\dfrac{1}{3}+4=\dfrac{14}{3}.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\,\dfrac{14}{3}\right)$.

11. а) $\begin{cases} 4x-15>8x+1; & 4x<-16, \;\; x<-4 \\ 3x-2>x-18; & 2x>-16, \;\; x>-8 \end{cases}$;

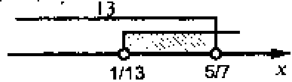


Ответ: $(-8;\,-4)$.

б) $\begin{cases} 3x+8<7x+10; & 4x>-2, \;\; x>-0{,}5 \\ 2x-3(x-5)>10-3x; & 2x-3x+15>10-3x, \;\; 2x>-5;\; x>-2{,}5 \end{cases}$;

Ответ: $(-0{,}5;\,+\infty)$.

в) $\begin{cases} \dfrac{y+5}{4}-2y>0; & y+5-8y>0, \;\; 7y<5;\;\; y<\dfrac{5}{7} \\ y-\dfrac{2y-4}{5}>1-2y; & 5y-2y+4>5-10y, \;\; 13y>1, \;\; y>\dfrac{1}{13} \end{cases}$;

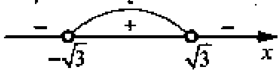


Ответ: $\left(\dfrac{1}{13};\,\dfrac{5}{7}\right)$.

12. $\begin{cases} \dfrac{y+3}{2}<\dfrac{y-5}{3}; & 3y+9<2y-10, \quad y<-19 \\ \dfrac{y+1}{4}>\dfrac{y-4}{5}; & 5y+5>4y-16, \quad y>-21 \end{cases}$;

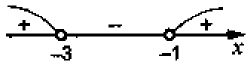
Ответ: 20 .

13. а) $x^2-3<0$; $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})<0$;
$x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$.



Ответ: $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

б) $x^2+4x+6>3$; $x^2+4x+3>0$;
$D=16-12=4$; $x=-1$, $x=-3$

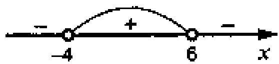


Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

в) $2x^2-3x+5>0$; $D=9-4\cdot2\cdot5<0$;
т.к. $a=2>0$, то любое x – решение.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

г) $(x-6)(x+4)<0$; $x_1=-4$, $x_2=6$.



Ответ: $(-4;6)$.

П-4

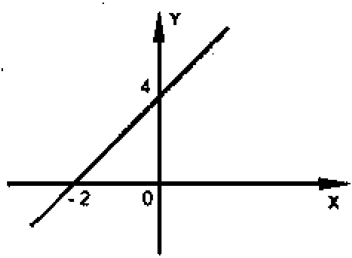
1. а) $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$; $x+4\neq0$, т.к. знаменатель, $x\neq-4$;

б) $y=\sqrt{3-2x}$; $3-2x\geq0$; т.к. $D=(\sqrt{x})=[0;+\infty)$; $2x\leq3$; $x\leq1{,}5$;

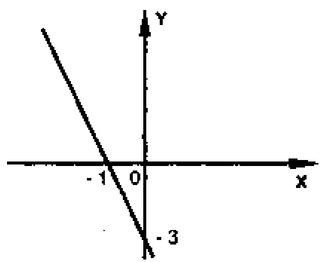
в) $y=\dfrac{2x+3}{x-4}$; $x-4\neq0$, т.к. знаменатель, $x\neq4$;

г) $y=\sqrt{2x-4}$; $2x-4\geq0$; $2x\geq4$; $x\geq2$.

2. а) $y=2x+4$;
1) $y=0$ при $x=-2$; $y>0$ при $x>-2$;
$y<0$ при $x<-2$;
2) y – возрастающая;



б) $y=-3x-3$;
1) $y=0$ при $x=-1$; $y>0$ при $x<-1$;
$y<0$ при $x>-1$;
2) y – убывающая.



3. а) $y = -2x + 4$;

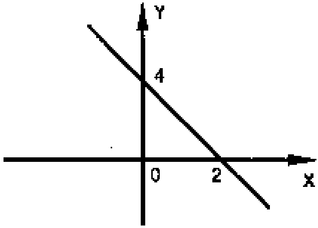
1) $y = 0$ при $x = 2$; $y > 0$ при $x < 2$; $y < 0$ при $x > 2$;

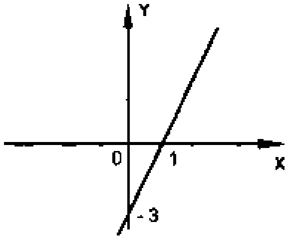
2) y – убывающая;

б) $y = 3x - 3$;

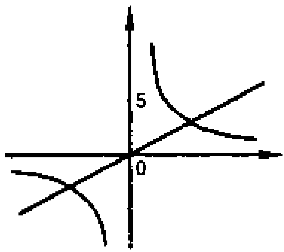
1) $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x > 1$; $y < 0$ при $x < 1$;

2) y – возрастающая.





4. $y = \frac{8}{x}$, $y = 5x$; $\frac{8}{x} = 5x$; $x^2 = \frac{8}{5}$; $x_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

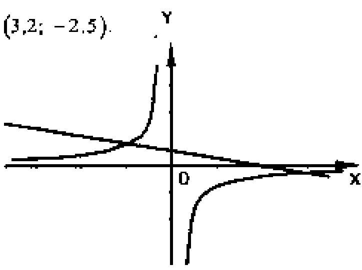


5. а) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; б) y убывает на $D(y)$.

6. $y = \frac{6}{x}$, $y = 1{,}5x$; $\frac{6}{x} = 1{,}5x$; $x^2 = 4$; $x_{1,2} = \pm 2$.

7. а) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; б) y убывает на $D(y)$.

8. $y = -\frac{8}{x}$, $y = -2x + 4$; $A(-1{,}2;\ 6{,}3)$; $B(3{,}2;\ -2{,}5)$.



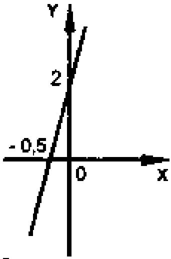
9. а) $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$; б) y возрастает на $D(y)$.

10. $y = 4x + b;\ 6 = 4 + b;\ b = 2;\ y = 4x + 2;$

а) $y = 0$ при $x = -0{,}5;$

$y > 0$ при $x > -0{,}5;$ $y < 0$ при $x < -0{,}5;$

б) y – возрастающая.



11. а) $y = \frac{1}{3}x - 5,\ y = \frac{1}{2}x - 5;\ \frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x - 5;\ x = 0,$ т.е. пересекаются;

б) $y = 3x + 7, y = 3x - 4;\ 3x + 7 = 3x - 4;\ 7 \neq -4$ – нет корней, т.е. не пересекаются.

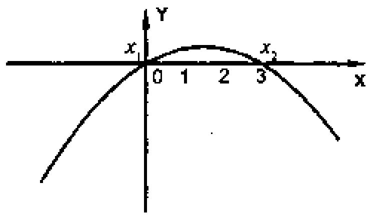
12. $y = -x^2 + 3x;$

а) $x_1 = 0,\ x_2 = 3;$ $y > 0$ при $x \in (0;\ 3);$

$y < 0$ при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (3;\ +\infty);$

б) y возрастает при $x \le 1{,}5;$

y убывает при $x \ge 1{,}5.$



13. $y = 2x^2 + 5x - 3;\ y(0) = -3,\ (0; -3);\ 2x^2 + 5x - 3 = 0;$

$D = 25 + 83 = 49;\ x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2};\ x_2 = -3;\ \left(\frac{1}{2}; 0\right), (-3; 0).$

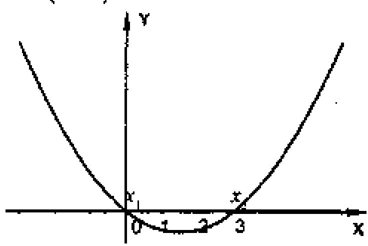
14. $y = x^2 - 3x;$

а) $x_1 = 0,\ x_2 = 3;$ $y < 0$ при $x \in (0; 3);$

$y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (3;\ +\infty);$

б) y возрастает при $x \ge 1{,}5;$

y убывает при $x \le 1{,}5.$



15. $y = -2x^2 - 5x + 3;\ y(0) = 3,\ (0;\ 3);\ 2x^2 + 5x - 3 = 0;$

$D = 25 + 8 \cdot 3 = 49;\ x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2};\ x_2 = -3.$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 0\right), (-3; 0).$

16. $y = -x^2 + 2x - 3 = -\left(x^2 - 2x + 3\right) =$

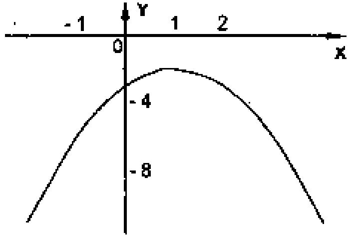
$= -\left(x^2 - 2x + 1 + 2\right) = -(x-1)^2 - 2;$

а) $y < 0$ при любых x;

б) y возрастает при $x \le 1$;

y убывает при $x \ge 1$.

в) $y_{\text{макс}} = -2$.



Вариант II

П-1

1. а) $\frac{1}{3} + 1{,}2\left(2{,}3 - 0{,}061 + 0{,}2\right) = \frac{1}{3} + 1{,}2 \cdot 1{,}995 = \frac{1}{3} + 2{,}394 = \frac{1}{3} + \frac{2394}{1000} = \frac{1}{3} + \frac{1197}{500} =$

$= \frac{4091}{1500} = 2\frac{1091}{1500}$; б) $5{,}07 + \left(0{,}6 \cdot 3{,}25 - 2{,}25\right) - 3\frac{1}{4} = -5{,}07 + 0{,}3 - 3{,}25 = -20{,}15$;

в) $\dfrac{-12{,}4 \cdot 1{,}5 + 24\frac{4}{5}}{2\frac{5}{6} \cdot 3 - 8\frac{5}{6}} = \dfrac{6{,}2}{\frac{51}{6} - \frac{53}{6}} = -6{,}2 \cdot 3 = -18{,}6.$

2. 1) $\frac{xy^2}{x-y}$; а) $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$; б) $\frac{1{,}6 \cdot 0{,}25}{1{,}6 + 0{,}5} = \frac{0{,}4}{2{,}1} = \frac{4}{21}$;

2) $\frac{xy}{x - y^2}$; а) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$; б) $\frac{-1{,}2 \cdot 0{,}6}{1{,}2 - 0{,}36} = -\frac{0{,}72}{0{,}84} = -\frac{72}{84} = -\frac{6}{7}$.

3) $\frac{ab}{a + b^2}$; а) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{25} = \frac{4}{25}$; б) $-\frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}5 + 0{,}16} = -\frac{0{,}2}{0{,}66} = -\frac{10}{33}$.

3. а) $\left(\frac{1}{8}\right)^0 + 6 \cdot 2^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = 1 + \frac{6}{8} + \frac{25}{4} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{25}{4} = 8$; б) $\frac{1}{4} \cdot 16^{\frac{1}{2}} + 32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} = 1{,}5$;

в) $4\frac{1}{2} \cdot 6^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{125}{8} - 1 = \frac{118}{8} = 14{,}75$;

г) $\frac{2}{7} \cdot 27^{\frac{2}{3}} + 49^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7} = \frac{18}{7} + \frac{1}{7} = 2\frac{5}{7}$;

д) $2^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 2^{-12} \cdot 2^{10} + \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 2^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2{,}5$;

е) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + (0{,}01)^{-0{,}5} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(10^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 10 = 11{,}5.$

4.а) $\sqrt{3^3\cdot16\cdot3^5}=\sqrt{3^8\cdot16}=3^4\cdot4=324$; б) $\left(\sqrt7-\sqrt3\right)\left(\sqrt7+\sqrt3\right)=\left(\sqrt7\right)^2-\left(\sqrt3\right)^2=7-3=4$;

в) $6^{\frac14}\cdot\sqrt[4]{6^3}=6^{\frac14}\cdot6^{\frac34}=6$; г) $\sqrt[3]{2^8\cdot125\cdot2}=\sqrt[3]{2^9\cdot5^3}=2^3\cdot5=40$;

д) $\left(3\sqrt2-\sqrt3\right)\left(3\sqrt2+\sqrt3\right)=\left(3\sqrt2\right)^2-\left(\sqrt3\right)^2=15$; е) $5^{1\frac13}\cdot\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac43}\cdot5^{\frac23}=5^2=25$;

ж) $\frac{4-\sqrt6}{4+\sqrt6}+\frac{4+\sqrt6}{4-\sqrt6}=\frac{16+6-8\sqrt6+16+6+8\sqrt6}{\left(4+\sqrt6\right)\left(4-\sqrt6\right)}=\frac{44}{10}=4{,}4$;

з) $\sqrt{8\sqrt3}\cdot\sqrt{3\sqrt{12}}=\sqrt{8\sqrt3\cdot3\sqrt{12}}=\sqrt{24\cdot6}=12$.

П-2

1. а) $(a-3)(a+3)-2a(4-a)=a^2-9-8a+2a^2=3a^2-8a-9$;

б) $(3x+1)^2-(3x-1)^2=9x^2+6x+1-9x^2+6x-1=12x$;

в) $(x+5)(x-5)-3x(2-x)=x^2-25-6x+3x^2=4x^2-6x-25$;

г) $(2x-1)^2-(x+3)^2=4x^2-4x+1-x^2-6x-9=3x^2-10x-8$;

д) $3x^2(x+4)-(3x-1)\left(x^2-2x+3\right)=$

$=13x^3+12x^2-3x^3+x^2+6x^2-2x-9x+3=19x^2-11x+3$;

е) $2a(a+3b)^2-(2a-b)\left(a^2+2b^2\right)=2a\left(a^2+6ab+9b^2\right)-\left(2a^3-a^2b+4ab^2-2b^3\right)=$

$=2a^3+12a^2b+18ab^2-2a^3+a^2b-4ab^2+2b^3=2b^3+13a^2b+14ab^2$;

2. 1) а) $5a^2+5ab=5a(a+b)$; б) $x^8-2x^5=x^5\left(x^3-2\right)$;

в) $4ac^2-8ac+4a^2c=4ac(c-2+a)$; г) $x^2-4y^2=(x-2y)(x+2y)$;

д) $9n-n^3=n\left(9-n^2\right)=n(3-n)(3+n)$; е) $49x^2-y^4=\left(7x-y^2\right)\left(7x+y^2\right)$;

2) а) $5ab-25a^2-25b^2=-\left(25a^2-5ab+25b^2\right)=-5\left(5a^2-ab+5b^2\right)$;

б) $x^2-3x-y^2-3y=\left(x^2-y^2\right)-(3x+3y)=(x-y)(x+y)-3(x+y)=$

$=(x+y)(x-y-3)$; в) $(a-3)^2-25=(a-3-5)(a-3+5)=(a-8)(a+2)$.

3. а) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}=\frac{a^2+3a-3a+9}{(a-3)(a+3)}=\frac{a^2+9}{a^2-9}$;

б) $\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{xy-x^2}=\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{x(y-x)}=\frac{2}{x-y}+\frac{2y}{x(x-y)}=\frac{2x+2y}{x(x-y)}$;

в) $\left(n^2-6n\right)\cdot\frac{n^2}{n^2-36}=\frac{n(n-6)\cdot n^2}{(n-6)(n+6)}=\frac{n^3}{n+6}$;

г) $\frac{1}{2x^2-4x}+\frac{1}{2x^2+4x}=\frac{2x(x+2)}{2x(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$.

4. $\left(m+1-\frac{m^2}{m+1}\right):\frac{m^2-1}{2m^2+m}=\frac{(m+1)^2-m^2}{m+1}\cdot\frac{(m+1)(m-1)}{2m^2+m}=$

$=\frac{(m^2+2m+1-m^2)(m-1)}{2m^2+m}=\frac{(2m+1)(m-1)}{m(2m+1)}=\frac{m-1}{m}.$

5. а) $\frac{3}{x+2}+\frac{3}{x-2}+\frac{12}{4-x^2}=\frac{3}{x+2}+\frac{3}{x-2}-\frac{12}{(x-2)(x+2)}=$

$=\frac{3x-6+3x+6-12}{(x-2)(x+2)}=\frac{6(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{6}{x+2}$; б) $\frac{2ab+a^2}{2b}\cdot\frac{2b}{2a^2+a}=$

$=\frac{a(2b+a)}{a(2a+1)}=\frac{a+2b}{2a+1}$; в) $(x^2-y^2):\frac{(x+y)^2}{2x}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}\cdot 2x=\frac{2x(x-y)}{x+y}.$

6. а) $\frac{3m^2-18}{m}\cdot\frac{2m}{m+3}+\frac{36m}{m-3}=$

$=\frac{3(m-3)(m+3)\cdot 2}{m+3}+\frac{36m}{m-3}=\frac{6(m^2-6m+9)+36m}{m-3}=\frac{6m^2+54}{m-3}$;

б) $\left(\frac{y}{x}-2+\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x^2}{x^2-y^2}=\frac{y^2-2xy+x^2}{xy}\cdot\frac{x^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2\cdot x}{y(x-y)(x+y)}=\frac{x(x-y)}{y(x+y)}$;

в) $\left(\frac{25}{a^3-25a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{a-5}{a^2+5a}-\frac{a}{25+5a}\right)=\left(\frac{25}{a(a-5)(a+5)}+\frac{1}{a+5}\right):$

$:\left(\frac{a-5}{a(a+5)}-\frac{a}{5(a+5)}\right)=\frac{25+a^2-5a}{a(a-5)(a+5)}\cdot\frac{5a(a+5)}{5a-25-a^2}=\frac{5}{5-a}.$

7. а) $(2^{13}\cdot 2^{-11})^{-1}=(2^2)^{-1}=\frac{1}{4}$; б) $\frac{0{,}001^5\cdot 10^{10}}{10^{-4}}=\frac{(10^{-3})^5\cdot 10^{14}}{1}=0{,}1$;

в) $\frac{27^{-2}\cdot 9^2}{3^{-4}}=\frac{(3^3)^{-2}\cdot(3^2)^2}{3^{-4}}=\frac{3^{-6}\cdot 3^4}{3^{-4}}=9$; г) $\frac{0{,}25^3\cdot 16^2}{2^4}=\frac{(2^{-2})^3\cdot(2^4)^2}{2^4}=\frac{2^{-6}\cdot 2^8}{2^4}=\frac{1}{4}.$

8. а) $(\sqrt{8}-4\sqrt{3}+\sqrt{12})\sqrt{2}=(2\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3})\sqrt{2}=(2\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sqrt{2}=4-2\sqrt{6}$;

б) $(1-\sqrt{5})^2=1-2\sqrt{5}+5=6-2\sqrt{5}$; в) $\frac{\sqrt{12}+3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+3)}{3\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{2}}{3}$;

г) $(\sqrt{32}-3\sqrt{2}+\sqrt{20})\sqrt{2}=(4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{5})\sqrt{2}=(\sqrt{2}+2\sqrt{5})\sqrt{2}=2+2\sqrt{10}$;

д) $(\sqrt{7}-1)^2=7+1-2\sqrt{7}=8-2\sqrt{7}$; е) $\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-3)}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-3}{3}.$

9. а) $cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+sin\frac{4\pi}{3}=cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=cos\frac{\pi}{3}-sin\frac{\pi}{3}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

б) $tg(-210°)\cdot ctg135°=-tg(180°+30°)\cdot ctg(90°+45°)=tg30°\cdot tg45=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $sin\frac{2\pi}{3}+cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=sin\frac{\pi}{3}-cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$;

г) $tg(-120°)\cdot ctg315°=-tg(90°+30°)\cdot ctg(360°-45°)=-ctg30°\cdot ctg45°=-\sqrt{3}$;

д) $sin(-390°)+cos405°=-sin(360°+30°)+cos(360°+45°)=$

$=-sin30°+cos45°=-0,5+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$;

е) $tg\frac{7\pi}{3}\cdot ctg\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=-tg\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot ctg\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-tg\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{4}=-\sqrt{3}$.

10. а) $\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg(2\pi-\alpha)}{sin(-\alpha)}=-\frac{ctg\alpha\cdot tg\alpha}{sin\alpha}=-\frac{1}{sin\alpha}$;

б) $cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha=cos\frac{\pi}{4}cos\alpha-sin\frac{\pi}{4}sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}cos\alpha$;

в) $\frac{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot tg(\pi+\alpha)}{cos(-\alpha)}=\frac{tg\alpha\cdot tg\alpha}{cos\alpha}=\frac{sin^2\alpha}{cos^3\alpha}$;

г) $cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha=cos\frac{\pi}{6}\cdot cos\alpha+sin\frac{\pi}{6}\cdot sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha=\frac{1}{2}sin\alpha$;

д) $cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)sin(2\pi-\alpha)-cos\alpha\, sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=sin\alpha\cdot sin\alpha+cos\alpha\cdot cos\alpha=1$.

11. а) $\frac{sin2\alpha}{2cos^2\alpha}=\frac{2sin\alpha cos\alpha}{2cos^2\alpha}=tg\alpha$;

б) $(cos\alpha+sin\alpha)^2-sin2\alpha=cos^2\alpha+sin^2\alpha+sin2\alpha-sin2\alpha=1$.

П-3

1. а) $4x-5(3x-0,5)=3(7-3x)$; $4x-15x+2,5=21-9x$; $2x=-18,5$; $x=-9,25$;

б) $18x-8x^2=0$; $9x-4x^2=0$; $x(9-4x)=0$; $x_1=0$; $9-4x=0$; $x_2=2,25$;

в) $6x^2-8x+2$; $3x^2-4x+1=0$; $D=16-4\cdot3=4$; $x_1=\frac{4+2}{6}=1$; $x_2=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$;

г) $2x-\frac{4}{x-3}=4$; $2x^2-6x-4-4x+12=0$; $2x^2-10x+8=0$; $x^2-5x+4=0$;

$D=9$; $x_1=\frac{5+3}{2}=4$; $x_2=1$. **Ответ:** а) $-9,25$; б) 0 и 2,25; в) 1 и $\frac{1}{3}$ г) 4 и 1.

2. а) $x^4-4x^2=0$; $x^2(x^2-4)=0$; $x^2(x-2)(x+2)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm2$

б) $5(x-6)^2+11(x-6)^2=x-6$; $x-6=0$; $x_1=6$; $5(x-6)+11=1$;

$5(x-6)=-10$; $x_2=4$.

3. а) $7x-3(2x-1,5)=4(x+3)$; $7x-6x+4,5=4x+12$; $3x=-7,5$; $x=-2,5$;

б) $8x-2x^2=0$; $4x-x^2=0$; $x_1=0$; $x_2=4$;

в) $-3x^2-5x+2=0$; $3x^2+5x-2=0$; $D=25+4\cdot3\cdot2=49$; $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{3}$;

г) $2+\frac{8}{x-3}=\frac{4}{x}$; $2x(x-3)+8x=4(x-3)$; $2x^2-6x+8x=4x-12$;

$x^2-x+6=0$; $D=1-4\cdot6<0$ – нет корней.

Ответ: а) $-2,5$; б) 0 и 4; в) -2 и $\frac{1}{3}$; г) нет корней.

4. а) $x^4-x^2=0$; $x^2(x^2-1)=0$; $x^2(x-1)(x+1)0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm1$;

б) $2(x-1)^2+3(x-1)=x-1$; $x-1=0$; $x_1=1$; $2(x-1)+3=1$;

$2(x-1)=-2$; $x-1=-1$; $x_2=0$.

Ответ: а) -1; 0 и 1; б) 0 и 1.

5. а) $\frac{4x-1}{9}-\frac{3x+1}{12}=\frac{2}{3}$; $16x-4-9x-3=24$; $7x=31$; $x=4\frac{3}{7}$;

б) $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0$; $x^2-2x-1=0$; $D=4+4=8$; $x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$.

в) $\frac{x}{x+5}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{50}{x^2-25}$; $\frac{x}{x+5}+\frac{x+5}{x-5}-\frac{50}{(x-5)(x+5)}=0$;

$x^2-5x+x^2+10x+25-50=0$; $2x^2+5x-25=0$; $D=25+4\cdot2\cdot25=225$;

$x_1=\frac{-5+15}{4}=2,5$; $x_2=-5$ – посторонний корень, т.к. $x\neq\pm5$.

Ответ: а) $4\frac{3}{7}$; б) $1\pm\sqrt{2}$; в) $-2,5$.

6. а) $x^3-81x=0$; $x(x^2-81)=0$; $x(x-9)(x+9)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm9$;

б) $x^4-5x^2+4=0$; $x^2=y\geq0$; $y^2-5y+4=0$; $D=25-16=9$;

$y_1=\frac{5+3}{2}=4$; $y_2=1$; $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm2$; $x_{3,4}=\pm1$;

в) $(x^2-4)^2+5(x^2-4)=0$; $x^2-4=0$; $x_{1,2}=\pm2$; $x^2-4+5=0$; $x^2=-1$ – нет корней.

Ответ: а) 0 и ±9; б) ±1 и ±2; в) ±2.

7. а) $\begin{cases}2x+4y=16;\ x+2y=8;\ 2y=8-x\\3x-2y=-16;\ 2y=3x+16\end{cases}$; $3x+16=8-x$; $4x=-8$; $x=-2$; $y=\frac{8+2}{2}=5$;

Ответ: $(-2;\ 5)$.

б) $\begin{cases} 2x+y^2=11 \\ x-y=4;\ x=4+y \end{cases}$; $8+2y+y^2-11=0$; $y^2+2y-3=0$;

$D=4+4\cdot3=16$; $y_1=\dfrac{-2+4}{2}=1$; $y_2=-3$; $x_1=4+1=5$; $x_2=4-3=1$;

Ответ: (5; 1) и (1; –3).

в) $\begin{cases} xy=-8 \\ x+2y=6;\ x=6-2y \end{cases}$; $y(6-2y)+8=0$; $2y^2-6y-8=0$; $y^2-3y-4=0$;

$D=9+4\cdot4=25$; $y_1=\dfrac{3+5}{2}=4$; $y_2=-1$; $x_1=6-2\cdot4=-2$; $x_2=6+2=8$.

Ответ: (–2; 4) и (8; –1).

8. а) $\begin{cases} 3x-2y=3; \\ 2x-4y=10;\ x-2y=5;\ x=5+2y \end{cases}$; $3(5+2y)-2y=3$;

$15+6y-2y=3$; $4y=-12$; $y=-3$; $x=5-2\cdot3=-1$;

б) $\begin{cases} x+3y=3;\ x=3-3y \\ 3xy=2 \end{cases}$; $3y(3-3y)=2$; $9y-9y^2=2$; $9y^2-9y+2=0$;

$D=81-4\cdot9\cdot2=9$; $y_1=\dfrac{9+3}{18}=\dfrac{2}{3}$; $y_2=\dfrac{1}{3}$; $x_1=3-3\cdot\dfrac{2}{3}=1$; $x_2=3-3\cdot\dfrac{1}{3}=2$.

в) $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ x-y=5;\ x=5+y \end{cases}$; $25+10y+y^2+y^2=25$; $2y^2+10y=0$;

$y_1=0$; $y_2=-5$; $x_1=5$; $x_2=0$;

Ответ: а) (–1; –3); б) $\left(1;\ \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(2;\ \dfrac{1}{3}\right)$; в) (5; 0) и (0; –5).

9. а) $\begin{cases} \dfrac{2x-5y}{3}+\dfrac{3x-2y}{4}=5;\ 8x-20y+9x-6y=60 \\ \dfrac{x-2y}{4}-2y=3;\ x-2y-8y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} 17x-26y=60 \\ x=10y+12 \end{cases}$;

$170y+84-26y=60$; $144y=-24$; $y=-\dfrac{1}{6}$; $x=-\dfrac{10}{6}+12=\dfrac{31}{3}$;

б) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7; \\ x-y=-1;\quad y=x+1 \end{cases}$; $x^2-x|x+1|+|x+1|^2=7$;

$x^2-x^2-x+x^2+2x+1-7=0$; $x^2+x-6=0$; $D=1+4\cdot6=25$;

$x_1=\dfrac{-1+5}{2}=2$; $x_2=-3$; $y_1=3$; $y_2=-2$.

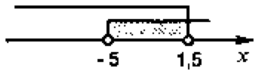
Ответ: а) $\left(\dfrac{31}{3};\ -\dfrac{1}{6}\right)$; б) (2; 3) и (–3; –2).

10. $y=-2x^2-2x+4$; $y=9-5x$; $-2x^2-2x+4=9-5x$;

$2x^2-3x+5=0$; $D=9-4\cdot2\cdot5<0$ – нет корней.

Ответ: нет корней.

11. а) $\begin{cases}3x+7>5x+10;\ 2x<3;\ x<-1{,}5\\ 4x-1>x-16;\ 3x>-15;\ x>-5\end{cases}$

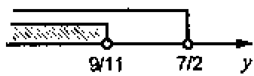


Ответ: $(-5;\ -1{,}5)$

б) $\begin{cases}x-10>2x-4;\ x<-6\\ 3x-4(x-7)<16-3x;\ 3x-4x+28+3x<16;\ 2x<-12;\ x<-6\end{cases}$

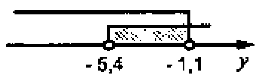
Ответ: $(-\infty;\ -6)$.

в) $\begin{cases}\dfrac{y-5}{3}-2y>2y-8;\quad y-5-6y>6y-24;\ 11y<19;\ y<\dfrac{19}{11}\\ 3y-\dfrac{2y+10}{2}<2;\ 6y-2y-10<4;\ 4y<14;\ y<\dfrac{7}{2}\end{cases}$



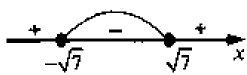
Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{19}{11}\right)$.

12. $\begin{cases}\dfrac{y-5}{4}<\dfrac{2y+3}{3};\quad 3y-15<8y+12;\ 5y>-27;\ y>-\dfrac{27}{5}\\ \dfrac{4y+1}{2}<\dfrac{y-4}{3};\ 12y+3<2y-8;\ 10y<-11;\ y<-1{,}1\end{cases}$



Ответ: –5; –4; –3; –2.

13. а) $x^2-7\le0$; $(x-\sqrt7)(x+\sqrt7)\le0$.



Ответ: $\left[-\sqrt7;\ \sqrt7\right]$.

б) $x^2-6x+10>2$; $x^2-6x+8>0$; $D=36-32=4$;

$x_1=\dfrac{6+2}{2}=4$; $x_2=2$.

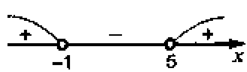
Ответ: $(-\infty;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

в) $x^2-5x+7<0$; $D=25-47<0$; т.к. $a=1>0$, то нет решений.

Ответ: нет решений.

г) $(x-5)(x+1)>0$;

$x_1=5$, $x_2=-1$.



Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup(5;\ +\infty)$.

П-4

1. а) $y=\frac{x-1}{x+5}$; $x+5\neq 0$, т.к. знаменатель; $x\neq -5$;

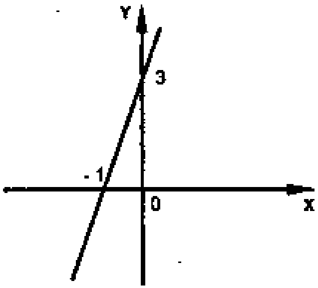
б) $y=\sqrt{4-x}$; $4-x\geq 0$; $D\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$; $x\leq 4$;

в) $y=\frac{5}{x-1}$; $x-1\neq 0$; $x\neq 1$; г) $y=\sqrt{3x+6}$; $3x+6\geq 0$; $3x\geq -6$; $x\geq -2$.

2. а) $y=3x+3$;

1) $y=0$ при $x=-1$; $y>0$ при $x>-1$; $y<0$ при $x<-1$;

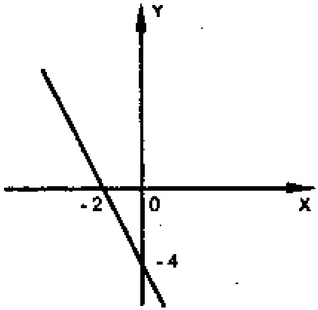
2) y – возрастающая;



б) $y=-2x-4$;

1) $y=0$ при $x=-2$; $y>0$ при $x<-2$; $y<0$ при $x>-2$;

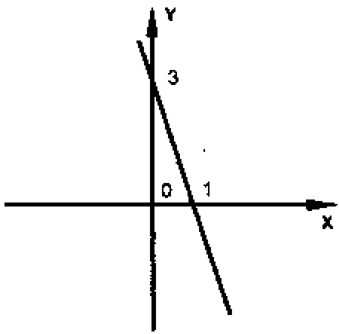
2) y – убывающая.



3. а) $y=-3x+3$;

1) $y=0$ при $x=1$; $y>0$ при $x<1$; $y<0$ при $x>1$;

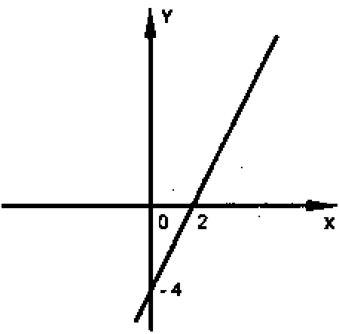
2) y – убывающая;



б) $y=2x-4$;

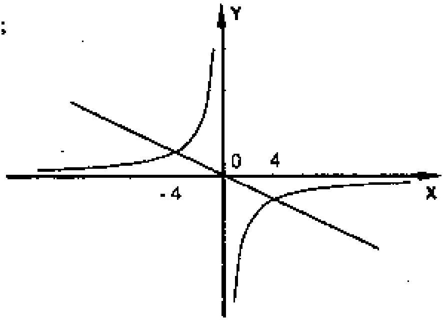
1) $y=0$ при $x=2$; $y>0$ при $x>2$; $y<0$ при $x<2$;

2) y – возрастающая.



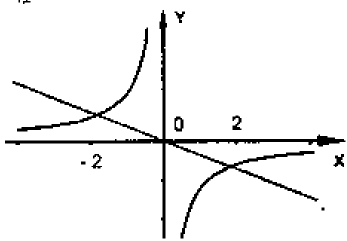
4. $y=-\frac{4}{x}$, $y=-\frac{1}{4}x$; $-\frac{4}{x}=-\frac{1}{4}x$;

$x^2=16$; $x_{1,2}=\pm 4$.



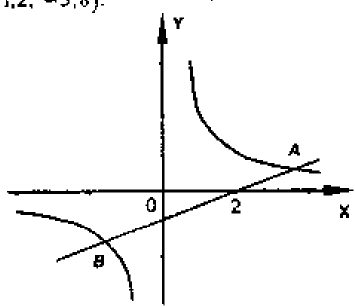
5. $y=-\frac{4}{x}$; а) $y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$; б) y возрастает на $D(y)$.

6. $y=-\frac{6}{x}$, $y=-1,5x$; $-\frac{6}{x}=-1,5x$; $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm 2$.



7. $y=-\frac{6}{x}$; а) $y>0$ при $x<0$; $y<0$ при $x>0$; б) y возрастает на $D(y)$.

8. $y=\frac{12}{x}$, $y=2x-4$; A$(3,5;\ 3,2)$; B$(-1,2;\ -5,8)$.



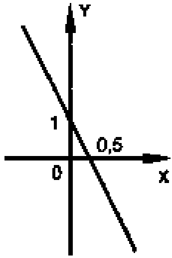
9. $y=\frac{12}{x}$; **а)** $y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$; **б)** y возрастает на $D(y)$.

10. $y=-2x+b$; $-1=-2+b$; $b=1$; $y=-2x+1$;

а) $y=0$ при $x=0{,}5$;

$y>0$ при $x<0{,}5$; $y<0$ при $x>0{,}5$;

б) y – убывающая.



11. а) $y=3x-5$, $y=2x-5$; $3x-5=2x-5$; $x=0$, т.е. пересекаются;

б) $y=-\frac{1}{2}x+3$, $y=-\frac{1}{2}x-7$; $-\frac{1}{2}x+3=-\frac{1}{2}x-7$ – нет корней, т.е. не пересекаются.

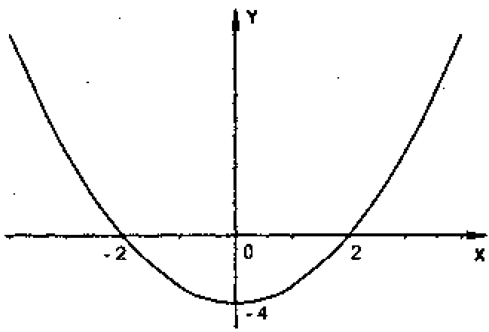
12. $y=x^2-4$;

а) $x_{1,2}=\pm2$; $y>0$ при $x\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$;

$y<0$ при $x\in(-2;\ 2)$;

б) y возрастает при $x\geq0$;

y убывает при $x\leq0$.



13. $y=-2x^2+x+3$; $y(0)=3$, $(0;\ 3)$; $2x^2-x-3=0$;

$D=1+4\cdot3\cdot2=25$; $x_1=\frac{1+5}{4}=1{,}5$; $x_2=-1$; $(1{,}5;\ 0)$, $(-1;\ 0)$.

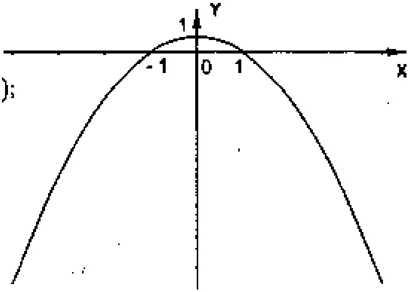
14. $y = -x^2 + 1$;

а) $x_{1,2} = \pm 1$; $y > 0$ при $x \in (-1; 1)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

б) y возрастает при $x \le 0$;

y убывает при $x \ge 0$.



15. $y = 2x^2 - x - 3$; $y(0) = -3$, $(0; -3)$; $2x^2 - x - 3 = 0$;

$$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25;\ x_1 = \frac{1+5}{4} = 1{,}5;\ x_2 = -1;\ (1{,}5; 0),\ (-1; 0).$$

16. $y = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$;

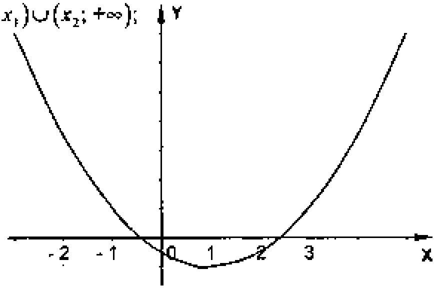
а) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

б) y возрастает при $x \ge 1$;

y убывает при $x \le 1$.

в) $y_{min} = 2$.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Осенняя олимпиада

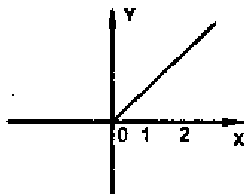
1. Пусть x – цифра десятков, y – цифра единиц, тогда $10x+y$ – данное число.
   Получаем уравнение: $10x+y=xy+12$.
   Перепишем его в виде: $(10-y)(x-1)=2$.
   В последенем уравнении слева стоит произведение двух натуральных чисел, значит, возможны два случая:

1) $\begin{cases}10-y=2;\ y=8\\ x-1=1;\ x=2\end{cases}$; 2) $\begin{cases}10-y=1;\ y=9\\ x-1=2;\ x=3\end{cases}$

Ответ: 2 и 8 или 3 и 9.

2. Предположим, что дробь $\frac{a}{b}$ сократима, т.е. $a=a_1k;\ b=b_1k$, где $k\neq1$ – натуральное число. Тогда получаем: $\frac{a-b}{a+b}=\frac{a_1k-b_1k}{a_1k+b_1k}=\frac{k(a_1-b_1)}{k(a_1+b_1)}=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}$, т.е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно. Значит, дробь $\frac{a}{b}$ несократима, ч.т.д.

3. $y=x+|x|=\begin{cases}x+x=2x,\ x\geq0\\ x-x=0,\ x<0\end{cases}$.



4. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, ч.т.д.

5. $(1+x)^2=4x(1-x^2)$; пусть $x^2=a>0$ имеем: $x^2=-1-4x$;
   $(1+a)^2=4x(1-a)$; $a^2+(2+4x)a+1-4x=0$; $D=16x^2$;
   $a_1=\frac{-2-4x+4x}{2}=-1<0$; $a_2=\frac{-2-4x-4x}{2}=-1-4x$;
   $x^2+4x+1=0$; $D=16-4=12$; $x_{1,2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$. **Ответ:** $-2\pm\sqrt{3}$.

6. $|x-1|+|x+2|\leq3$. Нули модулей $x_1=-2;\ x_2=1$.

а) $(-\infty;\ -2]$; $1-x-x-2\leq3$; $2x\geq-4$; $x\geq-2$; $x=-2$;

б) $[-2;\ 1]$; $1-x+x+2\leq3$; $3\leq3$; $x\in[-2;\ 1]$;

в) $[1;\ +\infty)$; $x-1+x+2\leq3$; $2x\leq2$; $x\leq1$; $x=1$;

Итого получаем: $-2\leq x\leq1$. **Ответ:** $-2\leq x\leq1$.

7. Пусть $AB = a$ км, x км/ч, y км/ч – скорости пешехода и велосипедиста соответственно.

Получаем: $\begin{cases} \dfrac{a-6}{y}=\dfrac{6}{x}, & \dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{a-6} \\ \dfrac{a}{y}=\dfrac{a-16}{x}, & \dfrac{x}{y}=\dfrac{a-16}{a} \end{cases}$; $\quad \dfrac{6}{a-6}=\dfrac{a-16}{a}$;

$a^2-22a+96=6a$; $a^2-28a+96=0$; $D=400$;

$a_1=\dfrac{28+20}{2}=24$; $a_2=4$ – не подходит по условию. **Ответ:** $AB = 24$ км.

8. $x^2y^2-9x^2-4y^2+36=0$; $9x^2+4y^2+12xy=x^2y^2+12xy+36$;

$(3x+2y)^2=(xy+6)^2$;

$3x+2y=xy+6$;	$3x+2y=-(xy+6)$;
$3x-xy=6-2y$;	$3x+xy=-6-2y$;
$x=\dfrac{6-2y}{3-y}=2$;	$x=\dfrac{-6-2y}{3+y}=-2$;
$y=3$.	$y=-3$.

Ответ: графики уравнения – объединение четырех прямых:
$x=-2$; $x=2$; $y=-3$; $y=3$.

Весенняя олимпиада

1. $x^6-x^5+x^3-x+1=x^6-x^5+x^4-x^4+x^3-x^2+x^2-x+1=$
$=x^4\left(x^2-x+1\right)-x^2\left(x^2-x+1\right)+\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$.

2. $2x^2+2xy+4y^2+2x+6y+5\geq 1$

$x^2+2xy+y^2+x^2+2x+1+3y^2+6y+3=(x+y)^2+(x+1)^2+3(y+1)^2\geq 0$

При любых x и y, значит, исходное неравенство так же верно для любых x и y, ч.т.д.

3. $|x|+|y|=1$.

4. а) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$; $x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-2\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}=\sqrt{x}$;

$2x-2\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x}$; $2x=2\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}$; $4x^2=4x^2-4x+x+4\sqrt{x\left(x^2-x\right)}$;

$3x=4\sqrt{x\left(x^2-x\right)}$; $9x^2=16x\left(x^2-x\right)$, $x_1=0$; $9=16(x-1)$, $x_2=1\dfrac{9}{16}$.

б) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)}=\sqrt[3]{1-x^2}$;

$$(1+x^2)-3\sqrt[3]{(1+x)^4(1-x)^2}+3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4}-(1-x)^2=1-x^2.$$

5. $\frac{a_1}{1-q}=56$.

Квадраты образуют новую бесконечную геометр. прогрессию $cb_1=a_1^2$, $q_1=q^2$.

Имеем: $\frac{a_1^2}{1-q^2}=448$; $\begin{cases}\frac{a_1}{1-q}=56; \quad a_1=56(1-q)\\ \frac{a_1^2}{1-q^2}=448\end{cases}$; $\frac{56^2(1-q)^2}{(1-q)(1+q)}=448$;

$\frac{56(1-q)}{1+q}=8$; $7(1-q)=1+q$; $7-7q=1+q$; $8q=6$; $q=\frac{3}{4}$; $a_1=56\cdot\frac{1}{4}=14$.

Ответ: $a_1=14$, $q=\frac{3}{4}$

6. $\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}+$

$+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}=$

$=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, ч.т.д.

7. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$.

8. $x^2-y^2=21$; $(x-y)(x+y)=21$; $x>y$;

$(x-y)$, $(x+y)$ – натуральные; $21=3\cdot7$ или $21=1\cdot21$;

Получаем: $\begin{cases}x-y=3; \; x=3+y\\ x+y=7\end{cases}$; $3+2y=7$; $2y=4$; $y=2$; $x=5$;

или

$\begin{cases}x-y=1; \; x=y+1\\ x+y=21\end{cases}$; $2y=20$; $y=10$; $x=11$.

Ответ: (5; 2) или (11; 10).