НОВАЯ РЕДАКЦИЯ

Серия РЕШЕБ[НИК]

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

NEW

Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре

ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

9

«Дидактические материалы по АЛГЕБРЕ для 9 класса»
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.Б. Крайнева

В.Е. Бачурин

Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре за 9 класс

к пособию «Алгебра. Дидактические материалы.
9 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк,
Л.Б. Крайнева. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2010»

Издание одиннадцатое, переработанное и исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2012

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Б32

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Условия заданий и упражнений приводятся исключительно в учебных целях и в необходимом объеме как иллюстративный материал.

Изображение пособия «Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.Б. Крайнева. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2010» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Бачурин, В.Е.

Б32 Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре за 9 класс к пособию Ю.Н. Макарычева и др. «Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс» / В.Е. Бачурин. — 11-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 190, [2] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-04797-1

Предлагаемое учебное пособие содержит образцы выполнения всех заданий и упражнений из пособия «Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.Б. Крайнева. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2010».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по алгебре.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

Подписано в печать 16.09.2011. Формат 84x108/32.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 5,97. Усл. печ. л. 10,08. Тираж 10 000 экз. Заказ № 10718(3)

ISBN 978-5-377-04797-1

СОДЕРЖАНИЕ

Самостоятельные работы 4
Вариант 1 4
Вариант 2 64
Контрольные работы 127
Итоговый тест 163
Итоговое повторение по темам 164
Задания для школьных олимпиад 187

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1

1. 1) $f(x) = 12x–5; f(2) = 12 \cdot 2–5 = 19;$
$f(0) = 12 \cdot 0–5 = –5;\ f(–1) = 12 \cdot (–1)–5 = –17;$
2) $f(x) = x^2–8x; f(10) = 10^2–8 \cdot 10 = 20;$
$f(–2) = (–2)^2–8 \cdot (–2) = 20; f(0) = 0^2–80 = 0;$
3) $g(x) = \dfrac{x-5}{x+3}; g(-2) = \dfrac{-2-5}{-2+3} = -7; g(2) = \dfrac{2-5}{2+3} = -0{,}6; g(0) = \dfrac{0-5}{0+3} = -\dfrac{5}{3}.$
2. 1) $g(x) = 8–3x;$ **а)** $8–3x = 5, 3x = 3, x = 1;$ **б)** $8–3x = 11,\ 3x = –3, x = –1;$
в) $8–3x = 0; x = \dfrac{8}{3}.$

2) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x+2;$ **а)** $-\dfrac{1}{3}x+2 = 1, -\dfrac{1}{3}x = -1, x = 3;$

б) $-\dfrac{1}{3}x+2 = 4, -\dfrac{1}{3}x = 2, x = -6;$ **в)** $-\dfrac{1}{3}x+2 = 0, x = 6.$

3. а) $f(x) = \dfrac{5}{3-x} = 1;\ 3 - x = 5;\ x = -2;$

б) $f(x) = \dfrac{5}{3-x} = -2{,}5;\ 5(x - 3) = 10;\ x - 3 = 2;\ x = 5;$

в) $f(x) \neq 0$ ни для какого x;

4. а) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+1}; f(2)+f(-2) = 2f(2) = 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{4+1} = 8;$

б) $g(x) = \dfrac{2x^3-5x}{10}; g(3)+g(-3) = g(3)-g(3) = 0.$

5. $f(x) = kx+b;\ \begin{cases} 7 = 2k + b \\ 12 = 3k + b \end{cases};\ \begin{array}{l} 7-2k = 12-3k \\ k = 5 \\ b = 7-2\cdot 5 = -3 \end{array}$

С-2

1. 1) а) $f(x) = 19 – 2x; D(f) = R;$ **б)** $g(x) = \dfrac{40}{x}; D(f) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty);$

в) $\varphi(x) = x^2–4; D(\varphi) = R;$ **г)** $y = \sqrt{x}; D(y) = [0;+\infty];$

2) а) $g(x) = 8-x^2$; $D(g) = R$; б) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$; $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$;

в) $\varphi(x) = x-2$; $D(\varphi) = R$;

г) $y = \dfrac{8}{x+2}$; $x+2 \neq 0$; $x \neq -2$; $D(y) = (-\infty;-2) \cup (-2; +\infty)$.

2. а) $y = 37x+1$; $E(y) = R$; б) $y = -23$; $E(y) = -23$;

в) $y = \dfrac{19}{8}$; $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$;

г) $y = \sqrt{x}$; $E(y) = [0;+\infty]$; д) $y = |x|$; $E(y) = [0;+\infty]$.

3. а) $f(x) = 5x + 1$; $3 \leq x \leq 6 \Rightarrow 15 \leq 5x \leq 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 \leq 5x+1 \leq 31 \Rightarrow [16; 31]$;

б) $g(x) = 3 - 8x$; $-4 \leq x \leq 2 \Rightarrow -16 \leq -8x \leq 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow -13 \leq 3-8x \leq 35 \Rightarrow [-13; 35]$;

4. а) $f(x) = \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{101}{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt{x-8}$.

5. а) $y = \dfrac{1}{|x|-3}$; $|x| - 3 \neq 0$; $|x| \neq 3$; $|x| \neq \pm 3$

б) $y = \dfrac{1}{|x|-3}$; $|5-x| - 8 \geq 0$; $|5-x| \geq 8$; $\left[\begin{array}{l} 5-x \geq 8 \\ 5-x \leq -8 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 13 \end{array}\right.$

С-3

1.

1) а) $f(-3) = -2$; б) $f(-2) = 2$; в) $f(0) = 1$; г) $f(3) = 0$;

2) а) $f(x) = 2$; $x_1 = -2$; $x_2 = -0,5$; $x_3 = 3,5$; б) $f(x) = 0$; $x_1 = -2,5$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 3$;

в) $f(x) = -2$; $x = -3$;

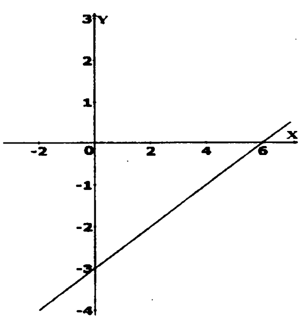
3) $f_{\max} = 3$, $f_{\min} = -2$; 4) $E(f) = [-2; 3]$.

2.

1)

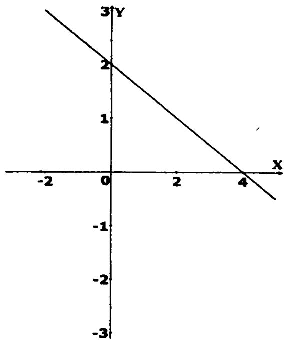
а) $y = 0,5x-3$;

x	0	6
y	-3	0



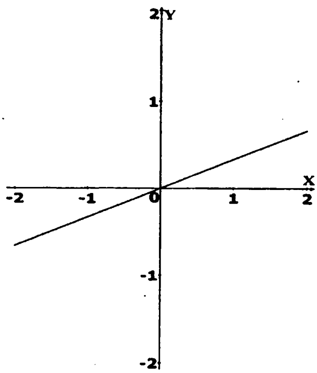
б) $y = -0{,}5x+2$;

x	0	4
y	2	0



в) $y = \dfrac{x}{3}$;

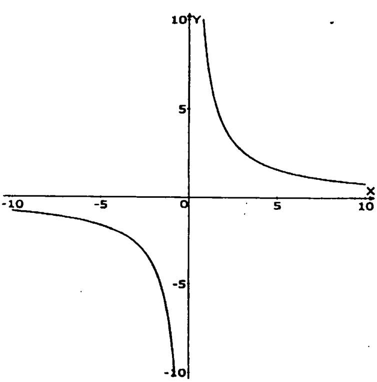
x	0	3
y	0	1

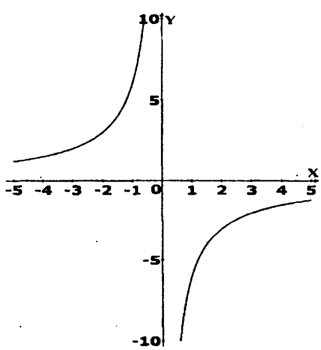


2)

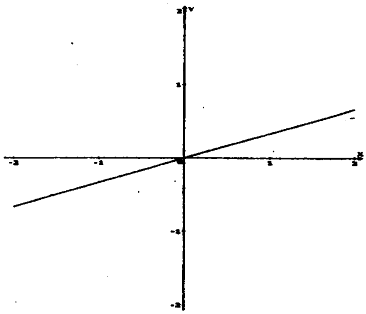
а) $y = \dfrac{8}{x}$;

б) $y = -\dfrac{6}{x}$;



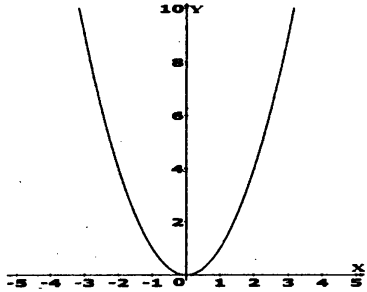


в) $y = \dfrac{x}{3}$;

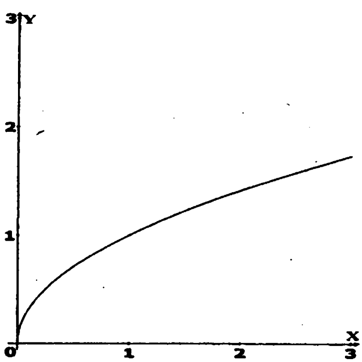


3)

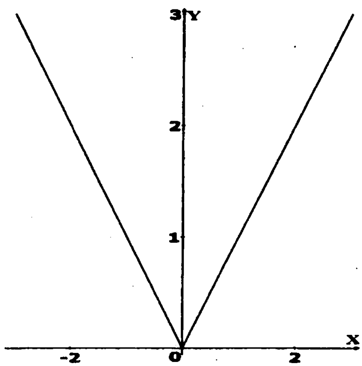
а) $y = x^2$;



б) $y = \sqrt{x}$; $x \geq 0$;



в) $y = |x|$.



3. 1) 1 ч со скоростью, равной 4 км/ч;

2) 5–1 = 4 (ч);

3) 7–5 = 2 (ч) скорость равна $\dfrac{4}{2}$ = 2(км/ч);

4) 4 км; 4 км; 2 км;

5) шоссе находится на расстоянии 2 км от дома, значит, от озера до шоссе он шел 1 ч.

4. 1) мотоциклист на 2 ч; **2)** 5 ч; 1,5 ч;

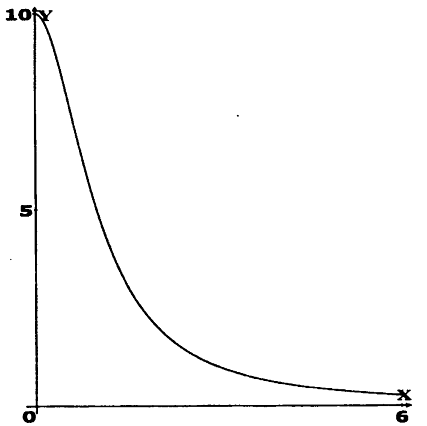
3) $\dfrac{75}{5}$ = 15 (км/ч); $\dfrac{75}{1{,}5}$ = 50 (км/ч)

4) мотоциклист на 1,5 ч;

5) через 1 ч; **6)** 75–52,5 = 22,5 (км).

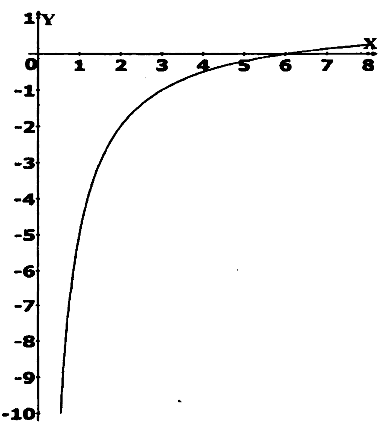
5. а) $y = \dfrac{10}{x^2+1}$, $0 \le x \le 6$;

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	5	2	1	$\dfrac{10}{17}$	$\dfrac{10}{26}$	$\dfrac{10}{37}$

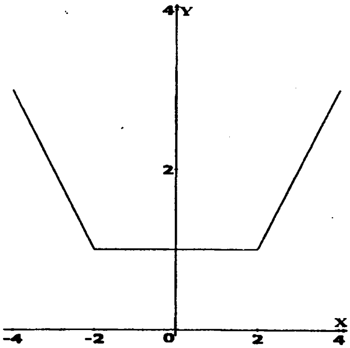


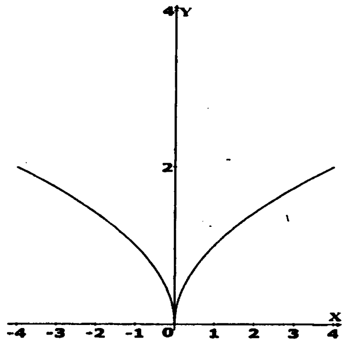
б) $y = \dfrac{x-6}{x} = 1 - \dfrac{6}{x}$, $1 \le x \le 6$.

x	1	2	3	4	5	6
y	–5	–2	–1	–0,5	–0,2	0



6. а) $y = \begin{cases} -x-1, & x < -2 \\ 1, & -2 \le x \le 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$; б) $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \ge 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$.



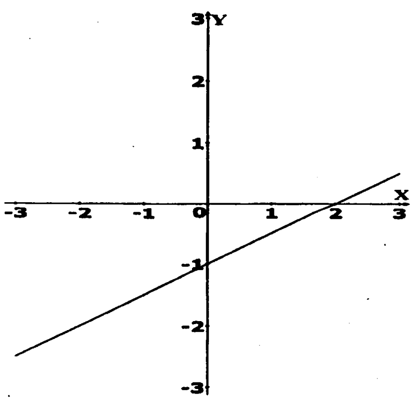


7. $f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \le x \le 1 \\ 1, & -1 < x \le 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 4 \end{cases}$.

8. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8} = \dfrac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{2(x^2-4)} =$

$= \dfrac{(x^2-4)(x-2)}{2(x^2-4)} = \dfrac{x}{2} - 1$;

$x^2 - 4 \ne 0$, т.к. знаменатель $x \ne \pm 2$.



С-4

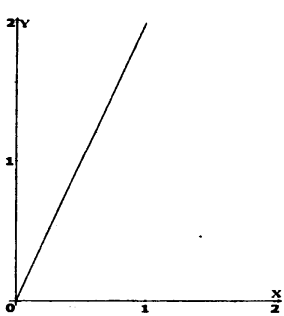
1. 1) а) $x_1 = -2{,}5$, $x_2 = 1$;
б) $f(x)>0$ при $x \in [-3; -2{,}5) \cup (1; 3]$; $f(x) < 0$ при $x \in (-2{,}5; 1)$;
2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-0{,}25; 2]$;
$f(x)$ убывает при $x \in [-3; -0{,}25]$ и $[2; 3]$;
3) $x_{max} = 2$, $x_{min} = -0{,}25$;
4) $E(f) = [-0{,}25; 2]$.

2. 1) а) $y = 28x+35$; $D(y) = R$, $E(y) = R$, $y > 0$ при $x > -\frac{35}{28}$, $y < 0$ при $x < -\frac{35}{28}$,

$y = 0$ при $x = -\frac{35}{28}$, $f(x)$ возрастает на R;
б) $y = -0{,}38x-19$; $D(y) = R$, $E(y) = R$;
$y > 0$ при $x < -\frac{19}{0{,}38} = -50$, $y < 0$ при $x > -50$;
$y = 0$ при $x = -50$, $f(x)$ убывает на R;
в) $y = 38$; $D(y) = R$, $E(y) = 38$, $y > 0$ на R;
2) а) $y = \frac{25}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $f(x)$ убывает на $D(y)$;
б) $y = -\frac{56}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
$y > 0$ при $x < 0$, $y < 0$ при $x > 0$, $f(x)$ возрастает на $D(y)$.

3. 1) а) $y = \frac{1}{3}x - 15$, $\frac{1}{3}x = 15$, $x = 45$; **б)** $y = -0{,}2x+46$, $-0{,}2x = -46$, $x = 230$;
в) $y = -24$ нет нулей функции;
2) а) $y = 7x(x+4)$, $x_1 = 0$, $x_2 = -4$; **б)** $y = 9(x^2+5)$ нет нулей функции;
в) $y = x(x+1)(x-2)$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$;
3) а) $y = \sqrt{x+2}$; $x = -2$; **б)** $y = \sqrt{x^2-1}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;
в) $y = \sqrt{x^2+1}$ нет нулей функции.

4. $f(x) = x+|x|$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$;



Свойства: $D(f) = R$, $E(f) = [0; +\infty)$.
Нули функции: $x \le 0$; $f(x) > 0$ при $x > 0$;
$f(x)$ возрастает при $x \ge 0$; $f_{min} = f(0) = 0$.
5. $D(g) = R$, $E(g) = [-4; 4]$;
$g(x) > 0$ при $x > 0$, $g(x) < 0$ при $x < 0$,
$g(x) = 0$ при $x = 0$;
$g(x)$ возрастает при $x \in [-2; 2]$;
$g(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$.

С-5

1.

1) а) $x^2-5x+6=0$; $D=25-46=1$; $x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$;

б) $-y^2-3y+4=0$; $y^2+3y-4=0$; $D=9+4\cdot4=25$; $y_1=\dfrac{-3+5}{2}=1,\ y_2=-4$;

в) $7a^2-21a+14=0$; $a^2-3a+2=0$;

$D=9-4\cdot2=1$; $a_1=\dfrac{3+1}{2}=2,\ a_2=1$;

г) $3b^2-12=0$; $b^2-4=0$; $b_{1,2}=\pm2$;

2) а) $2y^2-y-6=0$; $D=1+4\cdot2\cdot6=49$; $y_1=\dfrac{1+7}{4}=2,\ y_2=-\dfrac{3}{2}$;

б) $6a^2+5a+1=0$; $D=25-4\cdot6=1$; $a_1=\dfrac{-5+1}{12}=-\dfrac{1}{3},\ a_2=-\dfrac{1}{2}$;

в) $0{,}3x^2+0{,}1x=0$; $3x^2+x=0$; $x(3x+1)=0$; $x_1=0,\ x_2=-\dfrac{1}{3}$;

г) $c^2-3=0$; $c_{1,2}=\pm\sqrt{3}$;

3) а) $0{,}5x^2-x-0{,}5=0$; $x^2-2x-1=0$; $D=4+4=8$; $x_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$;

б) $-50a^2+5a+1=0$; $50a^2-5a-1=0$; $D=25+4\cdot50=225$;

$a_1=\dfrac{5+15}{100}=0{,}2,\ a_2=-0{,}1$;

в) $36b^2+12b-1=0$; $D=144+4\cdot36=2\cdot144$;

$b_{1,2}=\dfrac{-12\pm12\sqrt{2}}{2\cdot36}=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{6}$.

2. 1) а) $x^2-6x+11=x^2-2\cdot3x+9+2=(x-3)^2+2$;

б) $2y^2-4y-1=2(y^2-2y-\dfrac{1}{2})=2(y^2-2y+1-\dfrac{3}{2})=2((y-1)^2-\dfrac{3}{2})=2(y-1)^2-3$;

в) $a^2-2a=a^2-2a+1-1=(a-1)^2-1$;

2) а) $-y^2+4y+1=-(y^2-4y-1)=-(y^2-4y+4-5)=-(y-2)^2+5$;

б) $\dfrac{1}{3}x^2-2x+5=\dfrac{1}{3}(x^2-6x+15)=\dfrac{1}{3}(x^2-6x+9+6)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2+2$.

3. а) $y^2-4y+7=y^2-4y+4+3=(y-2)^2+3>0$;

б) $-y^2+6y-12=-(y^2-6y+12)=-(y^2-6y+9+3)=-(y-3)^2-3<0$.

4. а) $a^2-10a+27$; $a_0=\dfrac{10}{2}=5$;

б) $-a^2-6a-15$; $a_0=\dfrac{6}{-2}=-3$.

5. $(3+a)$ см и $(5-a)$ см — новые стороны;
$(3+a)(5-a)$ см^2 — площадь полученного прямоугольника;

$(3+a)(5-a) = -a^2+2a+15;\quad a_0 = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

Ответ: 1.

С-6

1. 1) а) $x^2-7x+12 = 0;\ D = 49-4\cdot 12 = 1;$

$x_1 = \dfrac{7+1}{2} = 4;\ x_2 = 3;\ x^2-7x+12 = (x-4)(x-3);$

б) $5x^2-5x-10 = 0;\ x^2-x-2 = 0;\ D = 1+4\cdot 2 = 9;$

$x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2;\ x_2 = -1;\ 5x^2-5x-10 = 5(x-2)(x+1);$

в) $4x^2-144 = (2x-12)(2x+12);$
г) $10x^2+29x-30 = 0;\ D = 841+40\cdot 30;$
2) а) $x^2-2x-63 = x^2-2x+1-64 = (x-1)^2-8^2 = (x-1-8)(x-1+8) = (x-9)(x+7);$
б) $6x^2+5x-4 = 0;$

$D = 25+4\cdot 6\cdot 4 = 121;\ x_1 = \dfrac{-5+11}{12};\ x_2 = -\dfrac{3}{2};$

$6x^2+5x-4 = 6(x-\dfrac{1}{2})(x+\dfrac{3}{2});$

в) $17x^2-425 = 17(x^2-25) = 17(x-5)(x+5);$
г) $5x^2-30x+35 = 0;\ x^2-6x+7 = 0;$
$D = 36-4\cdot 7 = 2\cdot 4;$

$x_{1,2} = \dfrac{6\pm 2\sqrt{2}}{2} = 3\pm\sqrt{2};\ 5x^2-30x+35 = 5(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}).$

2. 1) а) $x^2-3x+4 = 0;\ D = 9-4\cdot 4 < 0;$
б) $-2x^2+4x-7 = 0;\ 2x^2-4x+7 = 0;\ D = 16-4\cdot 2\cdot 7 < 0;$
2) а) $x^2-10x+27 = 0;\ D = 100-4\cdot 27 < 0;$
б) $-7x^2+6x-2 = 0;\ 7x^2-6x+2 = 0;\ D = 36-47\cdot 2 < 0;$
в) $x^2+1 = 0;\ D = -4 < 0.$

3. 1) а) $\dfrac{a^2-4}{7a+14} = \dfrac{(a-2)(a+2)}{7(a+2)} = \dfrac{a-2}{7};$

б) $\dfrac{b^2-b-6}{9b+18} = \dfrac{(b-3)(b+2)}{9(b+2)} = \dfrac{b-3}{9};$

$b^2-b-6 = 0;\ D = 1+4\cdot 6 = 25;\ b_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3;\ b_2 = -2;$

в) $\frac{7+6c-c^2}{21-3c}=\frac{c^2-6c-7}{3c-21}=\frac{c^2-6c+9-16}{3(c-7)}=\frac{(c-3)^2-4^2}{3(c-7)}=$

$=\frac{(c-3-4)(c-3+4)}{3(c-7)}=\frac{(c-7)(c+1)}{3(c-7)}=\frac{c+1}{3}$;

2) а) $\frac{y^2-49}{y^2+5y-14}=\frac{(y-7)(y+7)}{(y-2)(y+7)}=\frac{y-7}{y-2}$;

$y^2+5y-14=0$; $D=25+4\cdot14=81$; $y_1=\frac{-5+9}{2}=2$, $y_2=-7$;

б) $\frac{x^3+x^2-72x}{9x-72}=\frac{x(x^2+x-72)}{9(x-8)}=\frac{x(x-8)(x+9)}{9(x-8)}=\frac{x(x+9)}{9}$;

$x^2+x-72=0$; $D=1+4\cdot72=289$; $x_1=\frac{-1+17}{2}=8$, $x_2=-9$;

в) $\frac{5a-a^2}{5+34a-7a^2}=\frac{a^2-5a}{7a^2-34a-5}=\frac{a(a-5)}{7(a-5)\left(a+\frac{1}{7}\right)}=\frac{a}{7a+1}$;

$7a^2-34a-5=0$; $D=1156+4\cdot7\cdot5=1296$; $a_1=\frac{34+36}{14}=5$; $a_2=-\frac{1}{7}$.

4. 1) $\frac{y^2-11y-26}{9y+18}=\frac{(y-13)(y+2)}{9(y+2)}=\frac{y-13}{9}=f(y)$;

$y^2-11y-26=0$; $D=121+4\cdot26=225$; $y_1=\frac{11+15}{2}=13$, $y_2=-2$;

$f(-5)=\frac{-5-13}{9}=-2$; $f(31)=\frac{31-13}{9}=2$; $f(112)=\frac{112-13}{9}=9$;

2) $\frac{x^2-18x+80}{5x-50}=\frac{x^2-18x+81-1}{5(x-10)}=\frac{(x-9)^2-1}{5(x-10)}=$

$=\frac{(x-9-1)(x-9+1)}{5(x-10)}=\frac{(x-10)(x-8)}{5(x-10)}=\frac{x-8}{5}=f(x)$;

$f(-12)=\frac{-12-8}{5}=-4$; $f(8{,}5)=\frac{8{,}5-8}{5}=0{,}1$; $f(48)=\frac{48-8}{5}=8$.

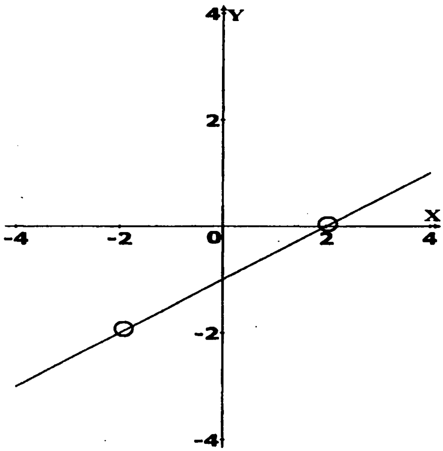
5. $\frac{8a-3}{a+5}-\frac{40-27a}{a^2+2a-15}=\frac{8a-3}{a+5}+\frac{27a-40}{(a-3)(a+5)}=$

$=\frac{(8a-3)(a-3)+27a-40}{(a-3)(a+5)}=\frac{8a^2-27a+9+27a-40}{(a-3)(a+5)}=$

$=\frac{8a^2-31}{(a-3)(a+5)}$

6. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8} = \dfrac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{2(x^2 - 4)} =$

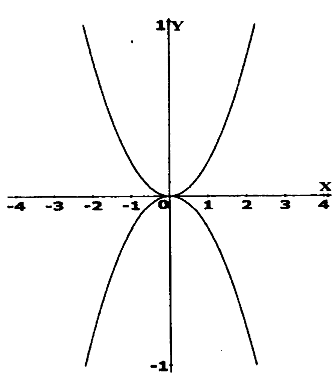
$= \dfrac{(x-2)(x^2-4)}{2(x^2-4)} = \dfrac{x-2}{2}$, $x \neq \pm 2$.



С-7

1. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2$;

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
$f(x)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	5



$f(-2{,}5) = f(2{,}5) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$;

$f(-3{,}5) = f(3{,}5) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{20}$; $g(x) = -\frac{1}{5}x^2$;

$g(-2{,}5) = g(2{,}5) = -f(2{,}5) = -\frac{5}{4}$; $g(-3{,}5) = g(3{,}5) = -f(3{,}5) = -\frac{49}{20}$.

2. $y = 2x^2$;

а) $y = 200$, $200 = 2x^2$, $x^2 = 100$, $x_{1,2} = \pm 10$; $(10, 200)$, $(-10, 200)$;

б) $y = 800$, $800 = 2x^2$, $x^2 = 400$, $x_{1,2} = \pm 20$; $(20, 800)$, $(-20, 800)$;

в) $y = 50x$,

$50x = 2x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 25$; $(0, 0)$, $(25, 1250)$;

г) $y = -3200x$, $-3200x = 2x^2$, $x_1 = 0$,

$x_2 = -1600$; $(0, 0)$; $(-1600, 5120000)$.

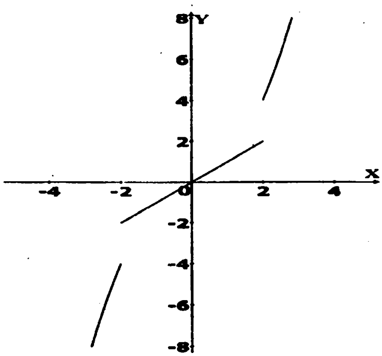
3. $y = -25x^2$;

а) $A(-2;-100)$; $-100 = -25(-2)^2$–верно, значит, принадлежит;

б) $B(2, 100)$; $100 = -25 \cdot 2^2$–неверно, значит, не принадлежит;

в) $C(\frac{1}{5};-1)$; $-1 = -25 \cdot \frac{1}{5^2}$–верно, значит, принадлежит.

4.



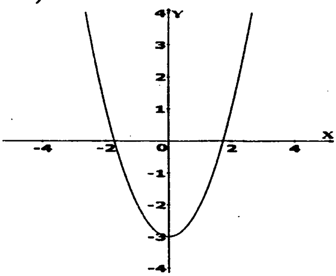
5. а) $y = \frac{1}{3}x^2$, $x \in [-3; 6]$; $y_{min} = y(0) = 0$; $y_{max} = y(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 = 12$;

б) $y = -\frac{1}{4}x^2$, $x \in [-2; 8]$; $y_{min} = y(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 = -16$, $y_{max} = y(0) = 0$.

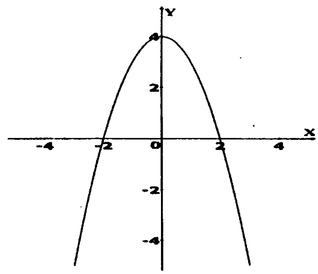
6. $h = \frac{9t^2}{2}$; $120 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$; $12 = \frac{t^2}{2}$; $t^2 = 24$ $t = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (с)

С-8

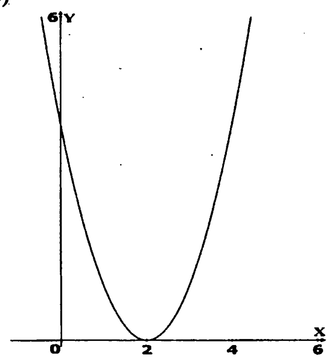
1. а)



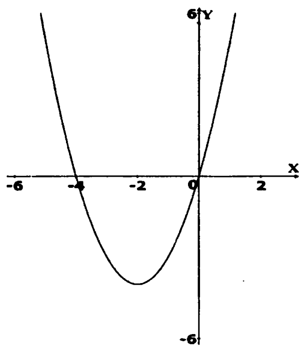
б)



в)



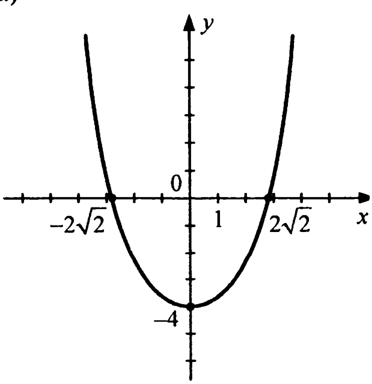
г)



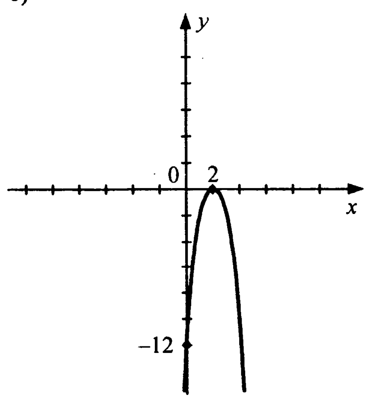
2. а) I и II б) I, II, III, IV в) III и IV

3.

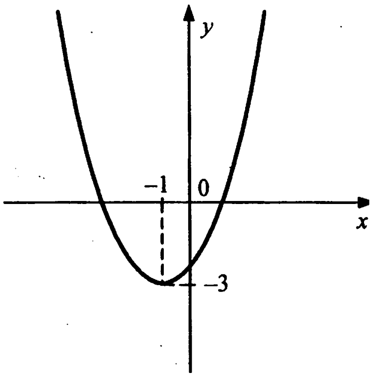
а)



б)



в)

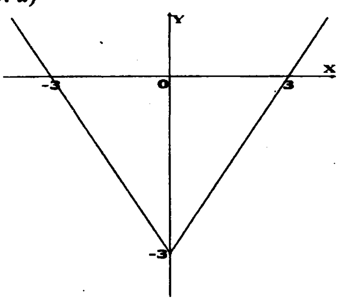


4. а) $4x^2 - 1 = 0;\ x^2 = \frac{1}{4};\ x = \pm\frac{1}{2}$

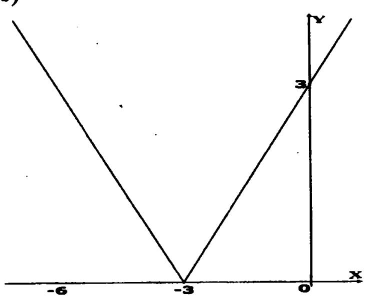
б) $-3x^2 + 9 = 0;\ x^2 = 3;\ x = \pm\sqrt{3}$;

в) $y = -x^2 - 16 < 0 \Rightarrow$ нулей нет

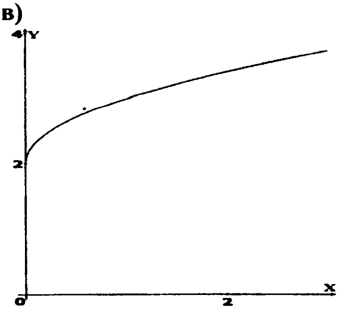
5. а)



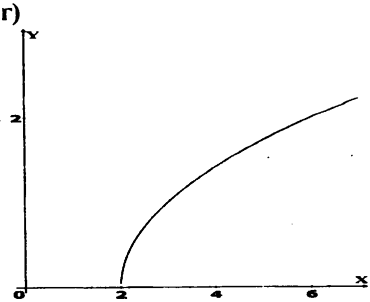
б)



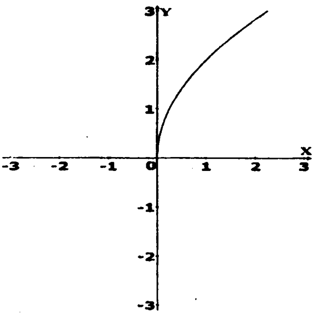
в)



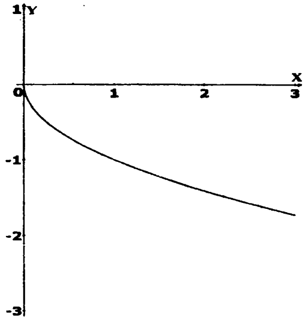
г)



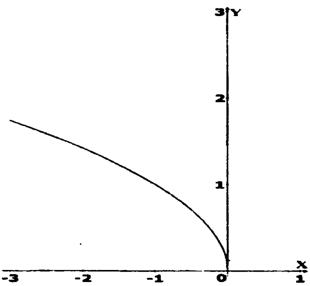
6. а)



б)



в)



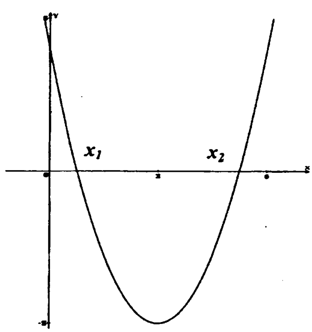
С-9

1. а) $f(x) = x^2-6x+4;\ m = \dfrac{6}{2} = 3,\ n = f(3) = 9-18+4 = -5;\ (3;-5);$

б) $f(x) = -x^2-4x+1;\ m = \dfrac{4}{-2} = -2,\ n = f(-2) = -4+8+1 = 5;\ (-2;\ 5);$

в) $f(x) = 3x^2-12x+2;\ m = \dfrac{12}{2\cdot 3} = 2,\ n = f(2) = 3\cdot 4-24+2 = -10;\ (2;-10).$

2. $f(x) = x^2-6x+4;$

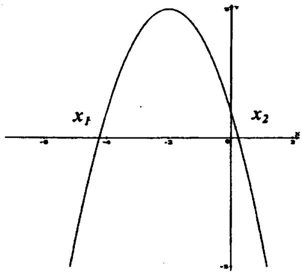


а) $x_1 \approx 0{,}7$ $x_2 \approx 5{,}2$;

$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

б) $f(x)$ возрастает при $x \in [3;+\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 3]$; $f_{\min} = -5$.

3. $f(x) = -x^2-4x+1$;



а) $x_1 \approx -4{,}2$; $x_2 \approx 0{,}2$; $f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $f(x) < 0$ при

$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$;

б) $f(x)$ возрастает при $x \in [-\infty;-2)$, убывает при

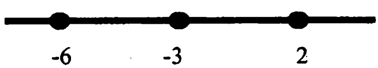
$x \in (-2;+\infty]$; $f_{\max} = 5$.

4. $y = x^2+6x+5$, $x \in [-6; 2]$;

$m = -\dfrac{6}{2} = -3$, $n = f(-3) = 9-18+5 = -4$; $(-3;-4)$;

$y(2) = 4+12+5 = 21$;

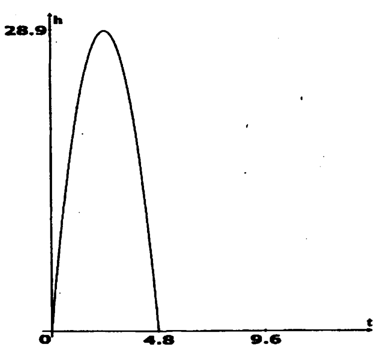
$E(y) = [-4; 21]$.



5. $y = x^2+bx+c$; $M(5, 7)$;

$5 = m = -\dfrac{b}{2}$, $b = -10$; $7 = n = f(5) = 25-50+c = c-25$; $c = 32$.

6. $h = 24t-5t^2$;



1) $h_0 = 28{,}8$; **2)** мяч поднимался вверх при $t \in [0; 2{,}4]$, опускался вниз при $t \in [2{,}4; 4{,}8]$; **3)** через 4,8 с.

С-10

1. $f(x) = x^{100}$;

1) а) $f(0{,}125) < f(0{,}13)$, т.к. $|0{,}125| < |0{,}13|$;

б) $f(-245) > f(-239)$, т.к. $|-245| > |-239|$;

в) $f(-5{,}7) = f(5{,}7)$, т.к. $|-5{,}7| = |5{,}7|$; **г)** $f(-12{,}4) > f(10{,}7)$, т.к. $|-12{,}4| > |10{,}7|$;

2) а) $f\left(\frac{2}{3}\right) > f\left(\frac{3}{5}\right)$, т.к. $\left|\frac{2}{3}\right| > \left|\frac{3}{5}\right|$; **б)** $f\left(-\frac{3}{7}\right) > f\left(-\frac{2}{5}\right)$, т.к. $\left|-\frac{3}{7}\right| > \left|-\frac{2}{5}\right|$;

в) $f(-0{,}325) = f\left(\frac{13}{40}\right)$, т.к. $|-0{,}325| = \left|\frac{13}{40}\right|$;

г) $f\left(-\frac{4}{7}\right) > f(0{,}57)$, т.к. $\left|-\frac{4}{7}\right| > |0{,}57|$.

2. $g(x) = x^{105}$;

1) а) $g(1{,}023) < g(1{,}13)$, т.к. $1{,}023 < 1{,}13$; **б)** $g(-2{,}7) < g(-2{,}2)$, т.к. $-2{,}7 < -2{,}2$;

в) $g(-4{,}1) < g(4{,}1)$, т.к. $-4{,}1 < 4{,}1$; **г)** $g(20{,}8) > g(-21{,}3)$, т.к. $20{,}8 > -21{,}3$;

2) а) $g\left(\frac{4}{7}\right) < g\left(\frac{3}{5}\right)$, т.к. $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$; **б)** $g\left(-\frac{8}{11}\right) < g(-0{,}7)$, т.к. $-\frac{8}{11} < -0{,}7$;

в) $g\left(-\frac{5}{7}\right) < \left(\frac{9}{13}\right)g$, т.к. $-\frac{5}{7} < \frac{9}{13}$;

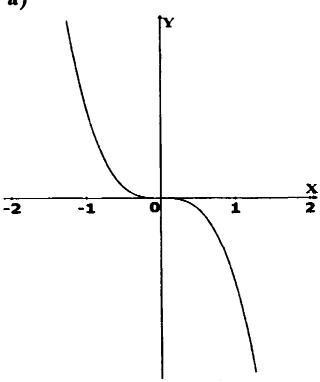
г) $g\left(-\frac{19}{25}\right) = -g(0{,}76)$, т.к. $-\frac{19}{25} = -0{,}76$.

3. $x^n = 2500$; **а)** 2 корня; **б)** 1 корень.

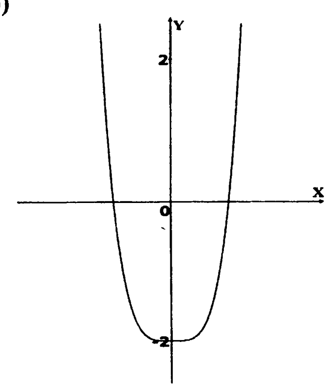
4. а) $x^3 = -27$, $x = -3$; **б)** $x^3 = \frac{8}{125}$, $x = \frac{2}{5}$;

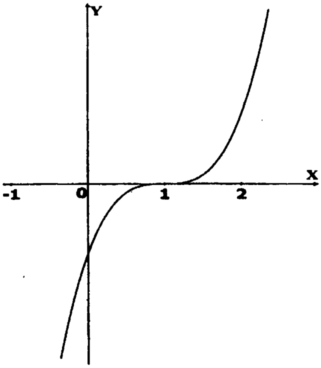
в) $x^4 = -81$ нет корней, т.к. $E(x^4) = [0;+\infty)$; **г)** $x^4 = 625$; $x = \pm 5$.

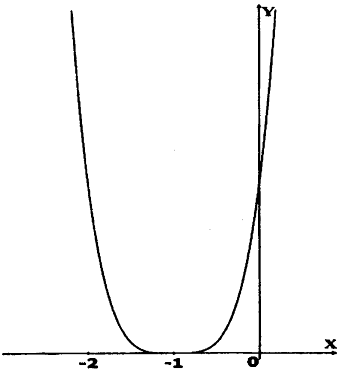
5. а)



б)



в) 

г) 

6. а) $x^4 = 32x+5$ два корня; **б)** $x^4 = 0{,}5x-8$ нет корней;
в) $x^3 = 32x+5$ три корня; **г)** $x^3 = 0{,}5x-8$ один корень.
7. а) $y = x^9$;
$548{,}471 = (-2{,}1)^9$ — ложно, значит, точка A не принадлежит графику;
$-10{,}8973 = (-0{,}973)^9$ — ложно, значит, точка B не принадлежит графику;
б) $y = x^8$;
$0{,}98746 = 1{,}2^8$ — ложно, значит, точка C не принадлежит графику;
$250{,}4781 = (-2{,}01)^8$ — ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

С-11

1. 1) а) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$; **б)** $\sqrt[3]{216} = 6$; **в)** $\sqrt[4]{0{,}0001} = 0{,}1$; **г)** $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$;

2) а) $6\sqrt[3]{0{,}125} = 6 \cdot 0{,}5 = 3$; **б)** $0{,}7\sqrt[4]{81} = 0{,}7 \cdot 3 = 2{,}1$;

в) $4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$; **г)** $6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -8$.

2. 1) а) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; **б)** $\sqrt[5]{0{,}00032} + \sqrt[3]{-0{,}008} = 0{,}2 - 0{,}2 = 0$;

в) $1{,}5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$;

2) а) $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$; **б)** $\sqrt[3]{0{,}216} - \sqrt[5]{-0{,}01024} = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$;

в) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt{12{,}25} = \frac{3}{5} + 3{,}5 = 0{,}6 + 3{,}5 = 4{,}1$.

3. а) $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$; **б)** $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{27} = 3$;

в) $0 < \sqrt[4]{0{,}8} < 1$; **г)** $1 < \sqrt[5]{30} < \sqrt[5]{32} = 2$.

4. 1) а) $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$; **б)** $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$;

в) $\left(-\sqrt[4]{21}\right)^4 = 21$; **г)** $-\sqrt[4]{21^4} = -21$; **д)** $\left(-\sqrt[5]{2}\right)^5 = -2$;

2) а) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3 = 8 \cdot 3 = 24$; **б)** $\left(-3\sqrt[4]{5}\right)^4 = 81 \cdot 5 = 405$; **в)** $\left(-\sqrt[5]{14}\right)^5 = -14$;

г) $-2\sqrt[5]{7^5} = -14$; **д)** $\left(-\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$.

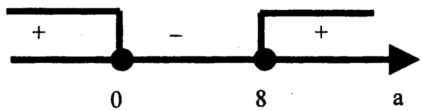
5. а) $x^3 = 5, x = \sqrt[3]{5}$; **б)** $x^6 = 17, x_{1,2} = \pm\sqrt[6]{17}$;

в) $\frac{1}{8}x^2 - 2 = 0, x^4 = 16, x_{1,2} = \pm 2$; **г)** $\frac{1}{2}x^5 + 16 = 0, x^5 = -32, x = -2$.

6. а) $\sqrt[10]{y-3}$, $y-3 \geq 0, y \geq 3$; **б)** $\sqrt[9]{x+5}$, x–любое;

в) $\sqrt[6]{a(a-8)}$, $a(a-8) \geq 0$;

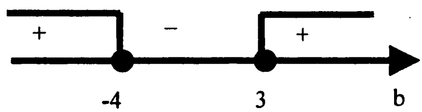
$a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$;



г) $\sqrt[8]{b^2 + b - 12}$, $b^2 + b - 12 \geq 0$,

$D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$,

$b_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$, $b_2 = -4$;



$b \in (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

7. а) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$ $x^5 = y$, тогда $y^2 - 31y - 32 = 0$,

$D = 961 + 4 \cdot 32 = 1089$,

$y_1 = \frac{31+33}{2} = 32$, $y_2 = -1$, $x^5 = 32$, $x = 2$, $x^5 = -1$, $x = -1$.

Ответ: -1 ; 2.

б) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$, $x^4 = y$, тогда $y^2 - 82y + 81 = 0$,

$D = 6724 - 4 \cdot 81 = 6400$,

$y_1 = \frac{82+80}{2} = 81$, $y_2 = 1$, $x^4 = 81$, $x_{1,2} = \pm 3$, $x^4 = 1$, $x_{3,4} = \pm 1$.

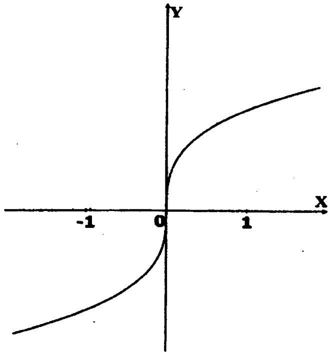
Ответ: ± 3 ; ± 1.

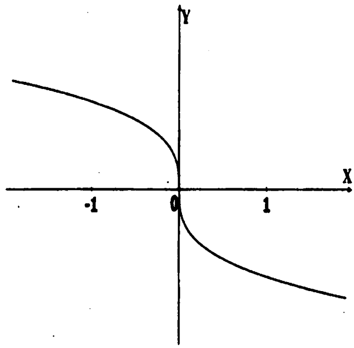
в) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ $x^2 = y$, тогда $y^2 + 2y - 15 = 0$,

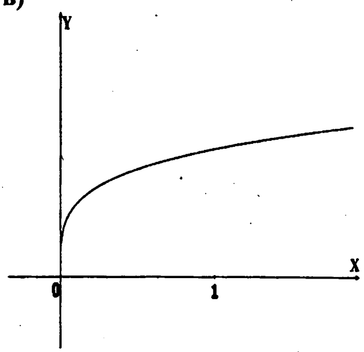
$D = 4 + 4 \cdot 15 = 64$,

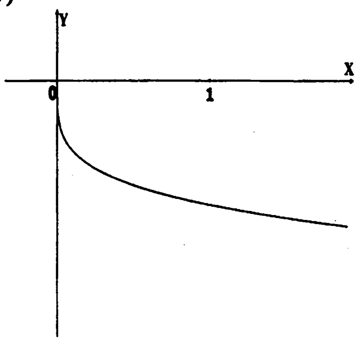
$y_1 = \frac{-2+8}{2} = 3$, $y_2 = -5$, $x^2 = 3$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x^2 = -5$ – нет корней.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

8. а) 

б) 

в) 

г) 

С-12

1. а) $x^5+3x^6-x^3+1=0$; $3x^6+x^5-x^3+1=0$ шестая степень;

б) $(x+4)(x-7)(x+8)=0$ третья степень;

в) $x^2(x+4)-(x-2)(x^2+1)=3$;
$x^3+4x^2-(x^3-2x^2+x-2)-3=0$; $6x^2-x-1=0$ вторая степень;

г) $(x^3-2)(3x^2+1)-3(x^5-2)=4$; $3x^5-6x^2+x^3-2-3x^5+6-4=0$;
$x^3-6x^2=0$ третья степень;

2. а) $x^3-4x=0$ $x(x^2-4)=0$ $x(x-2)(x+2)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$;

б) $x^2(x+1)+(x+4)=4$ $x^2(x+1)+x=0$; $x_1=0$, $x(x+1)+1=0$ $x^2+x+1=0$
$D=1-4<0$ нет корней;

в) $x^4-5x^2+4=0$; $D=25-4\cdot 4=9$;

$x_1{}^2=\dfrac{5+3}{2}=4$; $x_2{}^2=1$; $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 1$.

3. 1) а) $(12x + 1)(3x - 1) - (6x + 2)^2 = 10$;
$36x^2+3x-12x-1-(36x^2+24x+4)-10 = 0$;

$-9x-1-24x-4-10 = 0\ 33x = -15$; $x = -\dfrac{15}{33}$;

б) $(3x + 7)(3x - 7) - 3x(3x + 1) = 5$;
$9x^2-49-9x^2-3x-5 = 0$; $3x = -54$; $x = -18$;

в) $\dfrac{6x-1}{4} - \dfrac{3x+1}{3} = \dfrac{1}{4}$; $18x - 3 - 12x - 4 - 3 = 0$; $6x = 10$, $x = \dfrac{5}{3}$;

г) $\dfrac{x(2-x)}{2} + \dfrac{x(3+2x)}{4} = 1$; $2x(2 - x) + x(3 + 2x) - 4 = 0$;

$4x - 2x^2 + 3x + 2x^2 - 4 = 0$; $7x - 4 = 0$; $x = \dfrac{4}{7}$;

2) а) $(6x - 1)(x + 1) = 20$; $6x^2 + 5x - 21 = 0$;
$D = 25 + 4 \cdot 6 \cdot 21 = 529$;

$x_1 = \dfrac{-5+23}{12} = \dfrac{3}{2}$; $x_2 = -\dfrac{28}{12} = -\dfrac{7}{3}$;

б) $(x - 7)(x + 7) - 11x -30 = (x + 5)^2 + (x - 2)^2$;
$x^2 - 49 - 11x - 30 = x^2 + 10x + 25 + x^2 - 4x + 4$;
$x^2 + 17x + 108 = 0$; $D = 289-4 \cdot 108 < 0$. нет корней;

в) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{8} = \dfrac{x+1}{3}$; $\dfrac{x^2-2x}{16} = \dfrac{x+1}{3}$;
$3x^2-6x-16x-16 = 0$; $3x^2-22x-16 = 0$;

$D = 484+12 \cdot 16 = 676$; $x_1 = \dfrac{22+26}{6} = 8$; $x_2 = -\dfrac{2}{3}$;

2) $17 - 2x + \dfrac{x(3x+4)}{2} = 54\dfrac{1}{2}$;

$34 - 4x + 3x^2 + 4x - 109 = 0$; $3x^2 = 75$, $x^2 = 25$, $x_{1,2} = \pm 5$.

4. а) $x - 13 = 0$;
б) $(x - 4)(x + 11) = 0$, $x^2 + 7x - 44 = 0$;
в) $(x - 2)(x + 2)(x - 5) = 0$;
$(x^2 - 4)(x - 5) = 0$; $x^3 - 4x - 5x^2 + 20 = 0$; $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$.

5. а) $\dfrac{x(x-1)}{4} + \dfrac{(x-3)^2}{2} = \dfrac{(4-x)^2}{3} - \dfrac{1}{3}$;

$3x(x - 1) + 6(x - 3)^2 = 4(4 - x)^2 - 4$;
$3x^2 - 3x + 6(x^2 - 6x + 9) = 4(x^2 - 8x + 16) - 4$;
$3x^2 - 3x + 6x^2 - 36x + 54 - 4x^2 + 32x - 64 + 4 = 0$;
$5x^2 - 7x - 6 = 0$; $D = 49 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169$;

$x_1 = \dfrac{7+13}{10} = 2$; $x_2 = -\dfrac{3}{5}$;

б) $x + 1 = \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{x(x+2)}{4} + \frac{x-1}{2}$;
$4x + 4 = 2(x^2 - 6x + 9) + x^2 + 2x + 2x - 2$;
$2x^2 - 12x + 18 + x^2 + 4x - 2 - 4x - 4 = 0$;
$3x^2 - 12x + 12 = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $(x-2)^2 = 0$; $x = 2$.

6. а) $x^6 + 6x^4 + 7x^2 + 8 = 0$;
уравнение не имеет корней , т.к. $x^6 + 6x^4 + 7x^2 + 8 > 0$ при всех x.

б) $12x^5 + 11x^3 + 10x - 4 = 140$; верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля, а правая $140 > 0$);

в) $9x(x-1) - (3x+4)(3x-4) = 51 - 9x$;
$9x^2 - 9x - 9x^2 + 16 = 51 - 9x$; $16 = 51$ — нет корней;

г) $7x^5 + 14x^4 - 21x^2 - 49x = 13$; уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 7, а левая — нет.

С-13

1. а) $3(x-4) - 5(x+2) = cx - 6$;
$3(6-4) - 5(6+2) = 6c - 6$; $6 - 40 = 6c - 6$; $6c = -34 + 6$;
$6c = -28$; $c = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$;

б) $16x^2 + 2(b-4)x + (2-3b) = 0$;
$16 \cdot 16 + 2(b-4) \cdot 4 + 2 - 3b = 0$;
$256 + 8b - 32 + 2 - 3b = 0$; $5b = -226$; $b = -\frac{226}{5}$.

2. $bx - 1 = 0$; $bx = 1$; $x = \frac{1}{b}$; $b = \pm 1$.

3. $5x - 3a = 2$, $x = \frac{2+3a}{5}$.

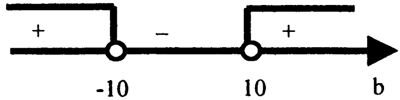
а) $\frac{2+3a}{5} > 0$, $2 + 3a > 0$, $a > -\frac{2}{3}$; **б)** $\frac{2+3a}{5} < 0$, $a < -\frac{2}{3}$;

в) $\frac{2+3a}{5} > 10$; $2 + 3a > 50$; $3a > 48$; $a > 16$;

г) $\begin{cases} \frac{2+3a}{5} > 1; \\ \frac{2+3a}{5} < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2+3a > 5; \\ 2+3a < 10; \end{cases}$ $\begin{cases} 3a > 3; \\ 3a < 8; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1 \\ a < \frac{8}{3} \end{cases}$; $1 < a < \frac{8}{3}$.

4. а) $4x^2 + 8x + b = 0$;
$D = 64 - 4 \cdot 4b > 0$; $64 - 16b > 0$; $16b < 64$; $b < 4$;

б) $5x^2 + bx + 5 = 0$;
$D = b^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 > 0$; $b^2 - 100 > 0$; $(b-10)(b+10) > 0$;

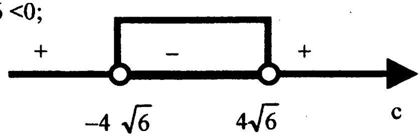


$b \in (-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.

5. а) $2x^2 - 6x + t = 0$; $D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot t = 0$; $36 = 8t$; $t = \dfrac{36}{8} = 4{,}5$;

б) $x^2 + tx + 4 = 0$; $D = t^2 - 4 \cdot 4 = 0$; $t^2 = 16$; $t_{1,2} = \pm 4$.

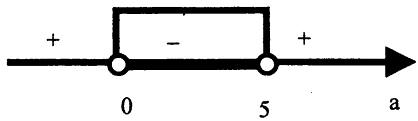
6. а) $4x^2 + cx + 6 = 0$; $D = c^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 < 0$;
$c^2 - 96 < 0$; $(c - 4\sqrt{6})(c + 4\sqrt{6}) < 0$.



$c \in (-4\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$.

б) $x^2 + 6x + c = 0$; $D = 36 - 4c < 0$; $4c > 36$, $c > 9$.

7. $a(x+1) = 5$; $x + 1 = \dfrac{5}{a}$; $x = \dfrac{5}{a} - 1$; $\dfrac{5}{a} - 1 > 0$; $\dfrac{5-a}{a} > 0$; $\dfrac{a-5}{a} < 0$.



$a = 1; 2; 3; 4$.

8. $x^2 + bx = 0$ при $b = 0$, $x = 0$ –единственный корень;
$x^2 - bx - 5 = 0$; $D = b^2 + 4 \cdot 5 > 0$ при любом b имеет два корня;
$x^2 + bx + 5 = 0$; $D = b^2 - 4 \cdot 5 > 0$ не при любом b;
$x^2 - 2b = 0$ при $b = 0$, $x = 0$–единственный корень;
$bx^2 - 2 = 0$ при $b = 0$ нет корней;
$x^2 - 4x + b = 0$; $D = 16 - 4b > 0$ не при любом b.
Ответ: $x^2 - bx - 5 = 0$.

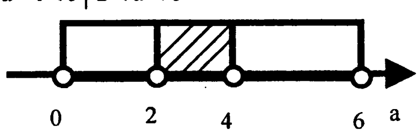
9. $x^2 + n^2(x-1) - x = 0$, пусть a и $-a$ корни уравнения, тогда

$$\begin{cases} a^2 + n^2(a-1) - a = 0 \\ a^2 + n^2(-a-1) + a = 0 \end{cases};$$

$n^2(a-1) - a = n^2(-a-1) + a$; $an^2 - n^2 - a = -an^2 - n^2 + a$;
$2an^2 = 2a$; $n^2 = 1$, $n = \pm 1$.

10. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$; $D = 4a^2 - 4(a^2 - 1) = 4$;

$$x_1 = \frac{2a+2}{2} = a + 1,\ x_2 = a - 1;\ \begin{cases} 1 < a+1 < 5 \\ 1 < a-1 < 5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 0 < a < 4 \\ 2 < a < 6 \end{array} \right..$$



Ответ: $a \in (2; 4)$.

С-14

1.

1) а) $9x^3-27x^2=0$; $x^3-3x^2=0$; $x^2(x-3)=0$; $x_1=0$, $x_2=3$;

б) $x^3-64x=0$; $x(x^2-64)=0$; $x(x-8)(x+8)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 8$;

в) $x^3+0{,}8x=0$; $x(x^2+0{,}8)=0$; $x=0$;

2) а) $x^3-4x^2-9x+36=0$; $x^2(x-4)-9(x-4)=0$; $(x-4)(x^2-9)=0$;
$(x-4)(x-3)(x+3)=0$; $x_1=4$, $x_{2,3}=\pm 3$;

б) $x^6+3x^4-x^2-3=0$; $x^4(x^2+3)-(x^2+3)=0$;
$(x^2+3)(x^4-1)=0$; $x^4=1$; $x_{1,2}=\pm 1$;

в) $y^3-2y^2=y-2$; $y^3-2y^2-y+2=0$; $y^2(y-2)-(y-2)=0$;
$(y-2)(y-1)(y+1)=0$; $y_1=2$, $y_{2,3}=\pm 1$.

2. а) $(x^2-7)^2-4(x^2-7)-45=0$; $x^2-7=y$, $y^2-4y-45=0$;

$D=16+4\cdot 45=196$;

$y_1=\dfrac{4+14}{2}=9$; $y_2=-5$;

$x^2-7=9$, $x_2=16$, $x_{1,2}=\pm 4$;

$x^2-7=-5$, $x^2=2$; $x_{3,4,}=\pm\sqrt{2}$;

б) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$;

$x^2+2x=y$, $y^2-2y-3=0$;

$D=4+4\cdot 3=16$; $y_1=\dfrac{2+4}{2}=3$, $y_2=-1$;

$x^2+2x=3$; $x^2+2x-3=0$; $D=4+4\cdot 3=16$;

$x_1=\dfrac{-2+4}{2}=1$, $x_2=-3$; $x^2+2x=-1$;

$x^2+2x+1=0$; $(x+1)^2=0$; $x_3=-1$;

в) $(x^2-x+1)(x^2-x-7)=65$;

$x^2-x=y$; $(y+1)(y-7)-65=0$; $y^2-6y-72=0$;

$D=36+4\cdot 72=324$; $y_1=\dfrac{6+18}{2}=12$, $y_2=-6$; $x^2-x=12$;

$x^2-x-12=0$; $D=1+4\cdot 12=49$;

$x_1=\dfrac{1+7}{2}=4$; $x_2=-3$;

$x^2-x=-6$; $x^2-x+6=0$; $D=1-4\cdot 6<0$ нет корней.

Ответ: -3; 4.

3. а) $x^4-13x^2+36=0$;

$D=169-4\cdot 36=25$; $x_1{}^2=\dfrac{13+5}{2}=9$ и $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 2$;

б) $x^4-5x^2+4=0$;

$D=25-4\cdot 4=9$; $x^2=\dfrac{5+3}{2}=4$ и $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 1$;

в) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$;

$D = 25 + 4 \cdot 6 = 49$; $x^2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$ и $x^2 = -6$ $x_{1,2} = \pm 1$;

г) $x^4 + 7x^2 - 44 = 0$;

$D = 49 + 4 \cdot 44 = 225$; $x^2 = \dfrac{-7+15}{2} = 4$ и $x^2 < 0$, $x_{1,2} = \pm 2$;

д) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;

$D = 81 - 4 \cdot 8 = 49$; $x_1{}^2 = \dfrac{-9+7}{2} < 0$; $x_2{}^2 < 0$ нет корней;

е) $x^4 + 16x^2 = 0$, $x^2(x^2 + 16) = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$;

4. $y = x^4 - 8x^2 - 9$; $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

$D = 64 + 4 \cdot 9 = 100$;

$x^2 = \dfrac{8+10}{2} = 9$ и $x^2 = -1 < 0$; $x_{1,2} = \pm 3$; (3; 0) и (– 3; 0).

5. $x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$; $x^4(x + 1) + 3x^2(x + 1) + 2(x + 1) = 0$;

$(x + 1)(x^4 + 3x^2 + 2) = 0$; $x_1 = -1$; $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$;

$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$; $x^2 = \dfrac{-3+1}{2} < 0$ и $x^2 = -2 < 0$.

Ответ: – 1.

6. а) $x^3 - 7x + 6$; $x^3 - x - 6x + 6 = 0$;

$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0$; $x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0$;

$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$; $x_1 = 1$;

$x^2 + x - 6 = 0$ $D = 1 + 4 \cdot 6 = 25$; $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ $x_3 = -3$;

б) $x^3 - 43x + 42$ $x^3 - x - 42x + 42 = 0$;

$x(x - 1)(x + 1) - 42(x - 1) = 0$; $(x - 1)(x^2 + x - 42) = 0$;

$x_1 = 1$; $x^2 + x - 42 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 42 = 169$; $x_1 = \dfrac{-1+13}{2} = 6$; $x_3 = -7$.

7. а) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 360$;

$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 360 = 0$; $x^2 + 5x + 4 = y$;

$y(y + 2) - 360 = 0$; $y^2 + 2y - 360 = 0$;

$D = 4 + 4 \cdot 360 = 4 \cdot 361$; $y_1 = \dfrac{-2+38}{2} = 18$, $y_2 = -20$;

$x^2 + 5x + 4 = 18$; $x^2 + 5x - 14 = 0$;

$D = 25 + 2 \cdot 14 = 81$; $x_1 = \dfrac{-5+9}{2} = 2$, $x_2 = -7$; $x^2 + 5x + 4 = -20$; $x^2 + 5x + 24 =$
0; $D = 25 - 4 \cdot 24 < 0$ нет корней.

Ответ: – 7; 2.

б) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) = 105$;

$(x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) - 105 = 0$;

$x^2 - 8x = y$; $(y + 7)(y + 15) - 105 = 0$;

$y^2 + 22y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = -22$;

$x^2-8x=0, x_1=0, x_2=8;$
$x^2-8x=-22, x^2-8x+22=0;$ $D=64-4\cdot 22<0$ нет корней.
Ответ: 0; 8.
8. а) $x^4-6x^2+a=0;$ $x^2=y;$ $y^2-6y+a=0;$ $f(y)=y^2-6y+a;$

$D=36-4a<0$ или $\begin{cases} f(0)>0 \\ m=\dfrac{6}{2}=3<0 \end{cases}$ – нет решений;

$36-4a<0;$ $4a>36;$ $a>9.$
Ответ: $a>9$.
б) $x^4+ax^2+9=0, x^2=y,$ $y^2+ay+9=0;$
$D=a^2-36<0;$ $(a-6)(a+6)<0;$ $-6<a<6$ или

$\begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}<0 \\ f(0)=9>0 \end{cases}$; $-a<0, a>0.$

Ответ: $a>-6$.

С-15

1. а) $\dfrac{2c^3-8c}{c^2+7c+10}=0$; $\begin{cases} c(c^2-4)=0 \\ (c+2)(c+5)\neq 0 \end{cases}$; $c=0, c=2;$

Ответ: 0 и 2.

б) $\dfrac{c^4-6c^3+9c^2}{c^4-81}=0$; $\begin{cases} c(c^2-6c+9)=0 \\ c^4\neq 81 \end{cases}$; $\begin{cases} c^2(c-3)^2=0 \\ c\neq\pm 3 \end{cases}$; $c=0;$

Ответ: 0.

2. $\dfrac{4a^3+8a^2-3a-6}{a^2-4}=0$; $\begin{cases} 4a^2(a+2)-3(a+2)=0 \\ a^2\neq 4 \end{cases}$;

$\begin{cases} (a+2)(4a^2-3)=0 \\ a\neq\pm 2 \end{cases}$; $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. а) $\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{26}{x^2+4x-5}-1$;

$\dfrac{4(x-1)-3(x+5)-26+x^2+4x-5}{(x-1)(x+5)}=0$;

$\dfrac{x^2+5x-50}{(x-1)(x+5)}=0$; $\begin{cases} (x-5)(x+10)=0 \\ (x-1)(x+5)\neq 0 \end{cases}$; $x=5, x=-10$

Ответ: 5 и -10.

б) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+2}{x+6}-\frac{8-2x}{x^2+7x+6}=0$;

$\frac{x(x+6)+(x+1)(x+2)-8+2x}{(x+1)(x+6)}=0$;

$\frac{2x^2+11x-6}{(x+1)(x+6)}=0$; $\begin{cases}(2x-1)(x+6)=0\\(x+1)(x+6)\neq 0\end{cases}$; $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

4. $\frac{x^2-4}{x}+\frac{x}{x^2-4}=3\frac{1}{3}$; $\frac{x^2-4}{x}=t$;

$t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$; $3t+\frac{3}{t}=10$; $3t^2-10t+3=0$;

$D=100-4\cdot 3\cdot 3=64$; $t_1=\frac{10+8}{6}=3$; $t_2=\frac{1}{3}$;

$\frac{x^2-4}{x}=3$; $x^2-4=3x$; $x^2-3x-4=0$;

$D=9+4\cdot 4=25$; $x_1=\frac{3+5}{2}=4$; $x_2=-1$;

$\frac{x^2-4}{x}=\frac{1}{3}$; $3x^2-x-12=0$;

$D=1+4\cdot 12\cdot 3=145$; $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{145}}{6}$.

5. $\frac{x^2+6}{x}-\frac{5x}{x^2+6}=4$

$t=\frac{x^2+6}{x}\Rightarrow t-\frac{5}{t}=4$; $t^2-4t-5=0$; $t=-1$ и $t=5$;

$t=-1\Rightarrow\frac{x^2+6}{x}=-1$; $x^2+x+6=0$;

$D=1-24=-23<0\Rightarrow$ корней нет

$t=5\Rightarrow\frac{x^2+6}{x}=5\Rightarrow x^2-5x+6=0$; $x=2$ и $x=3$.

Ответ: 2 и 3.

6. $x^2+x-4=\frac{4}{x}$; $x^3+x^2-4x-4=0$;

$x^2(x+1)-4(x+4)=0$; $(x+1)(x^2-4)=0$; $x=-1$, $x=\pm 2$

Ответ: -1, ± 2.

7. $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$;

$t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow 3(t^2-2)+7t=4$; $3t^2+7t-10=0$;

$D=49+120=169=13^2\Rightarrow t=1$ и $t=-\frac{10}{3}$

$t=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1$; $x^2-x+1=0$;

$D=1-4=-3<0\Rightarrow$ нет корней.

$t=-\frac{10}{3}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$; $3x^2+10x+3=0$;

$D=100-36=64=8^2$; $x=-3$ и $x=-\frac{1}{3}$

Ответ: -3 и $-\frac{1}{3}$.

8. $x^2+\frac{1}{x^2}=1{,}7\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow t^2-2=1{,}7t$;

$10t^2-17t-20=0$;

$D=289+800=1089=33^2$;

$t=2{,}5$ и $t=-0{,}8$

$t=2{,}5\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2{,}5$; $2x^2-5x+2=0$;

$D=25-16=9=3^2$; $x=2$ и $x=\frac{1}{2}$

$t=-0{,}8\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-0{,}8$; $5x^2+4x+5=0$;

$D=16-100<0\Rightarrow$ нет корней.

Ответ: 2 и $\frac{1}{2}$.

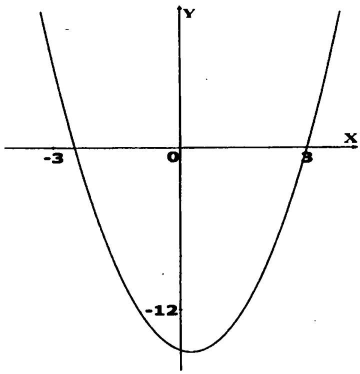
С-16

1.

1) $y=2x^2-x-15$; **а)** вверх;

б) $2x^2-x-15=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 15=121$; $x_2=\frac{1+11}{4}=3$; $x_1=-2{,}5$;

в)



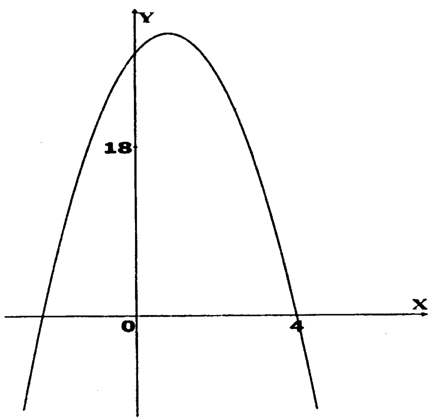
г) $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$; $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

2) $y = -3x^2+5x+28$;

а) вниз;

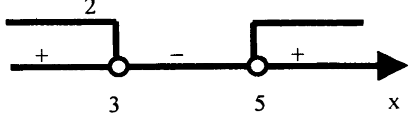
б) $3x^2-5x-28 = 0$; $D = 25+12 \cdot 28 = 19^2$; $x_2 = \dfrac{5+19}{6} = 4$; $x_1 = -\dfrac{7}{3}$;

в)



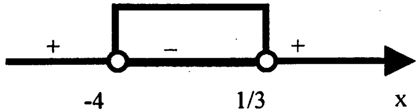
г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$.

2. а) $x^2-8x+15 > 0$; $D = 64-60 = 4$; $x_1 = \dfrac{8+2}{2} = 5$; $x_2 = 3$.



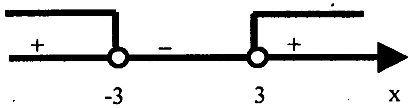
Ответ: $(-\infty; 3) \cup (5;+\infty)$.

б) $3x^2+11x-4 < 0$; $D = 121+12\cdot 4 = 169$; $x_1 = \dfrac{-11+3}{6} = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = -4$.



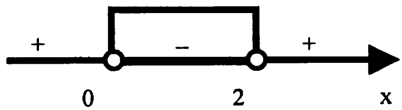
Ответ: $(-4; \frac{1}{3})$.

в) $x^2-9 > 0$ $(x-3)(x+3) > 0$



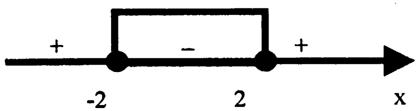
Ответ: $(-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

г) $2x-x^2 > 0$; $x^2-2x < 0$; $x(x-2) < 0$.



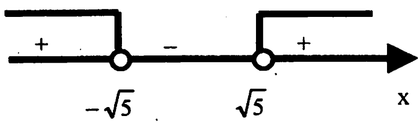
Ответ: $(0; 2)$.

3. а) $x^2 \le 4$; $(x-2)(x+2) \le 0$.



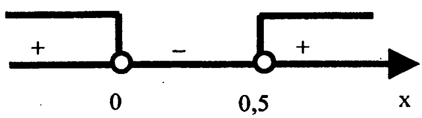
Ответ: $[-2; 2]$.

б) $x^2 > 5$, $x^2-5 > 0$; $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) > 0$.



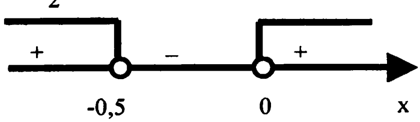
Ответ: $(-\infty;-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};+\infty)$.

в) $2x^2 \ge x$; $x^2-\dfrac{x}{2} \ge 0$; $x(x-\dfrac{1}{2}) \ge 0$.



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0{,}5;+\infty)$

г) $-3x < 6x^2$; $-\dfrac{x}{2} < x^2$; $x^2+\dfrac{x}{2} > 0$; $x(x+\dfrac{1}{2}) > 0$.



Ответ: $(-\infty;-0{,}5) \cup (0;+\infty)$.

4.

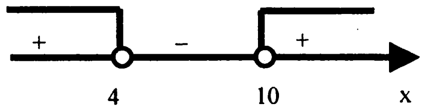
а) $5a^2-2a+1 > 0$;

$D = 4-4\cdot 5 < 0$; т.к. $b = 5 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

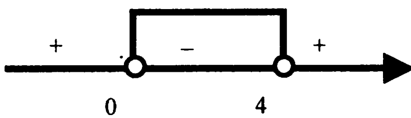
б) $6a < a^2+10 > 0$; $a^2-6a+10 > 0$; $D = 36-4\cdot 10 < 0$;

т.к. $b = 1 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

5. а) $y = \sqrt{x^2 - 14x + 40}$; $x^2 – 14x + 40 \geq 0$;
$D = 196–160 = 36$;
$x_1 = \dfrac{14+6}{2} = 10$; $x_2 = 4$.
Ответ: $(–\infty; 4] \cup [10;+\infty)$.

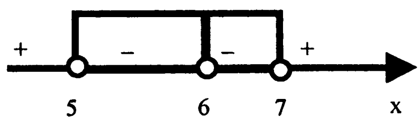


б) $y = \dfrac{9}{\sqrt{8x - 2x^2}}$;
$8x–2x^2 > 0$;
$2x^2–8x < 0$;
$x^2–4x < 0$;
$x(x–4) < 0$.
Ответ: $(0; 4)$.



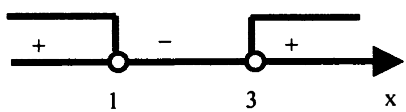
6. $x^2–6x+c < 0$;
а) $D = 36–4c$;
чтобы $(1; 5)$ был решением, нужно $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, т.е. $1–6+c = 0$; $c = 5$.
б) Ответ: ни при каких c.

7. $\dfrac{x^2 - 12x + 35}{(x-6)^2} < 0$;
$x^2–12x+35 = 0$;
$D = 144–140 = 4$;
$x_1 = \dfrac{12+2}{2} = 7$;
$x_2 = 5$; $\dfrac{(x-7)(x-5)}{(x-6)^2} < 0$.
Ответ: $(5; 6) \cup (6; 7)$.

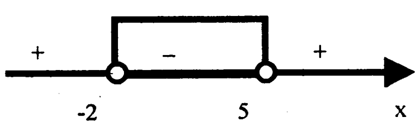


С-17

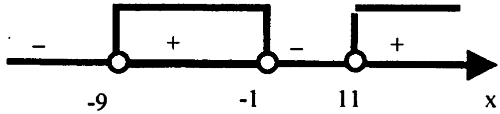
1.
1) а) $(x–1)(x–3) > 0$.



Ответ: $(–\infty; 1) \cup (3;+\infty)$.
б) $(x+2)(x–5)$.
Ответ: $(–2; 5)$.

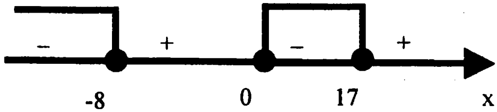


в) $(x+9)(x+1)(x-11) > 0$.



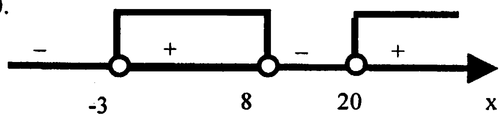
Ответ: $(-9;-1) \cup (11;+\infty)$.

г) $x(x+8)(x-17) \leq 0$.



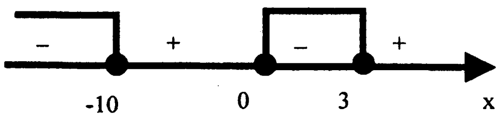
Ответ: $(-\infty;-8] \cup [0; 17]$.

2) а) $(x+3)(x-8)(x-20) > 0$.



Ответ: $(-3; 8) \cup (20;+\infty)$.

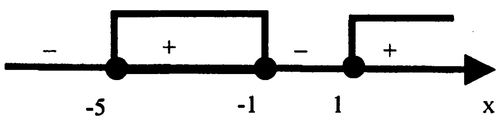
б) $x(x+10)(x-3) \leq 0$.



Ответ: $(-\infty;-10] \cup [0; 3)$.

в) $(x^2-1)(x+5) \geq 0$;

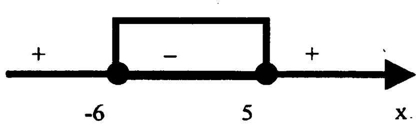
$(x-1)(x+1)(x+5) \geq 0$.



Ответ: $[-5;-1] \cup [1;+\infty)$.

г) $(x^2+1)(x+6)(x-5) \leq 0$;

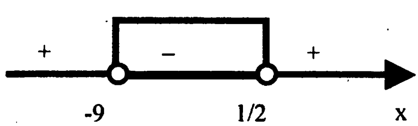
$(x+6)(x-5) \leq 0$.



Ответ: $[-6; 5]$.

2. 1) а) $(2x-1)(x+9) < 0$;

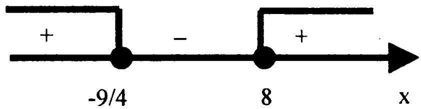
$(x-\frac{1}{2})(x+9) < 0$.



Ответ: $(-9; \frac{1}{2})$.

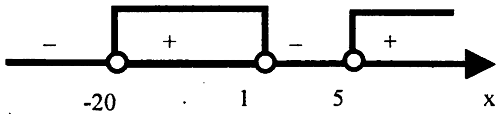
б) $(8-x)(4x+9) \le 0$;

$(x-8)(x+\frac{9}{4}) \ge 0.$



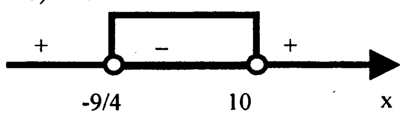
Ответ: $(-\infty;-\frac{9}{4}] \cup [8;+\infty)$.

в) $-(x-1)(5-x)(x+20) > 0$; $(x-1)(x-5)(x+20) > 0$.



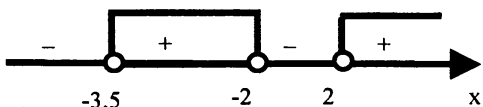
Ответ: $(-20; 1) \cup (5;+\infty)$.

2) а) $(4x+9)(10-x) > 0$; $(x+\frac{9}{4})(x-10) < 0$.



Ответ: $(-\frac{9}{4}; 10)$.

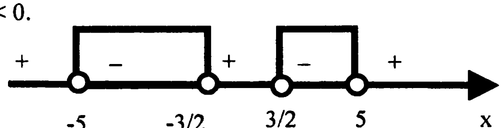
б) $(4-x^2)(10x+35) < 0$; $(x-2)(x+2)(x+3,5) > 0$.



Ответ: $(-3,5;-2) \cup (2;+\infty)$.

в) $(4x^2-9)(25-x^2)(3x^2+2) > 0$; $(x^2-\frac{9}{4})(x^2-25) < 0$;

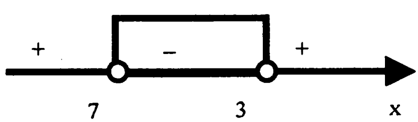
$(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})(x-5)(x+5) < 0.$



Ответ: $(-5;-\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; 5)$.

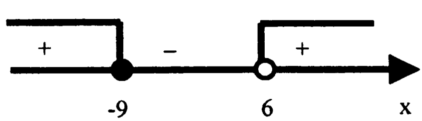
3.

1) а) $\frac{x-3}{x+7} < 0$.



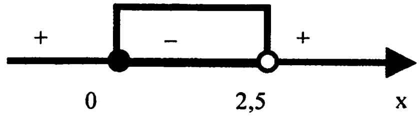
Ответ: $(-7; 3)$.

б) $\frac{x+9}{x-6} \ge 0$.



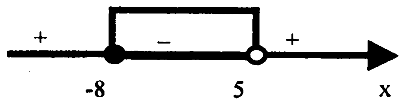
Ответ: $(-\infty;-9] \cup [6;+\infty)$.

в) $\dfrac{7x}{4x-10} \le 0$; $\dfrac{x}{x-2{,}5} \le 0$.



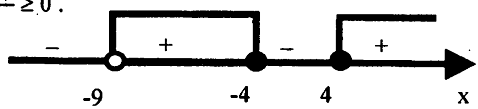
Ответ: $[0; 2{,}5]$.

2) а) $\dfrac{2x-10}{x+8} < 0$; $\dfrac{x-5}{x+8} < 0$.



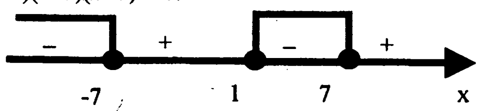
Ответ: $(-8; 5)$.

б) $\dfrac{x^2-16}{x+9} \ge 0$; $\dfrac{(x-4)(x+4)}{x+9} \ge 0$.



Ответ: $(-9;-4] \infty [4;+\infty)$.

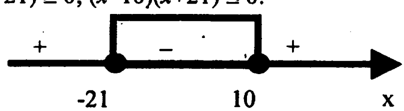
в) $\dfrac{(x-1)(x^2-49)}{x^2+8} \le 0$; $(x-1)(x-7)(x+7) \le 0$.



Ответ: $(-\infty;-7] \cup [1; 7]$.

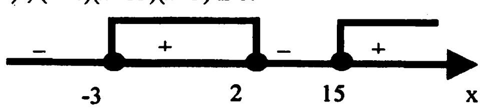
4.

а) $y = \sqrt{(10-x)(x+21)}$; $(10-x)(x+21) \ge 0$; $(x-10)(x+21) \le 0$.



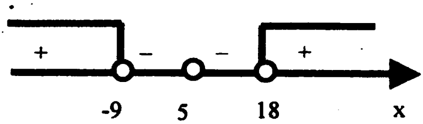
Ответ: $[-21; 10]$.

б) $y = \sqrt{(x-2)(x-15)(x+3)}$; $(x-2)(x-15)(x+3) \ge 0$.



Ответ: $[-3; 2] \cup [15;+\infty]$.

5. а) $(x+9)(x-5)^2(x-18) > 0$.



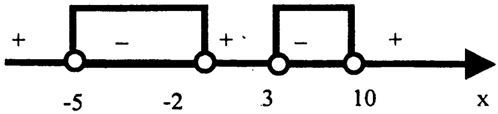
Ответ: $(-\infty;-9) \cup (18;+\infty)$.

б) $\dfrac{x^2-13x+30}{x^2+7x+10} < 0$; $x^2-13x+30 = 0$;

$D = 169-4 \cdot 30 = 49$; $x_1 = \dfrac{13+7}{2} = 10$; $x_2 = 3$;

$x^2+7x+10=0$; $D=49-4\cdot10=9$; $x_1=\dfrac{-7+3}{2}=-2$; $x_2=-5$;

$\dfrac{(x-10)(x-3)}{(x+2)(x+5)}<0$.

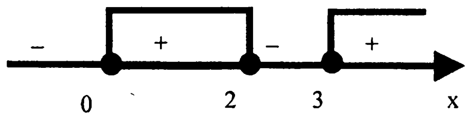


Ответ: $(-5;-2)\cup(3;\,10)$.

в) $x^3-5x^2+6x\ge0$; $x(x^2-5x+6)\ge0$; $x^2-5x+6=0$;

$D=25-24=1$ $x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$;

$x_2=2$; $x(x-2)(x-3)\ge0$.

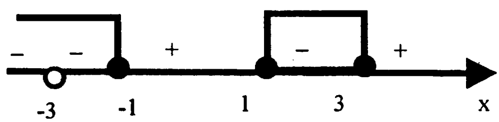


Ответ: $[0;\,2]\cup[3;+\infty]$.

г) $\dfrac{x^4-10x^2+9}{4x+12}\le0$; $x^4-10x^2+9=0$;

$D=100-4\cdot9=64$; $x_1^{\,2}=\dfrac{10+8}{2}=9$; $x_2^{\,2}=1$;

$\dfrac{(x^2-9)(x^2-1)}{x+3}\le0$; $\dfrac{(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)}{x+3}\le0$



Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup[1;\,3]$.

С-18

1. а) $\begin{cases}6-5x<4x-2\\3x\ge0\\4-2x>x+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x>8\\x\ge0\\3x<-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x<-1\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$

Ответ: $\varnothing$.

б) $\begin{cases}x^2-8x+15\ge0\\\dfrac{4-x}{2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-5)\ge0\\x>4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le3\\x>4\end{cases}\\\begin{cases}x\ge5\\x>4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 4<x\le5$

Ответ: $(4;\,5]$.

2. а) $\begin{cases} 3-\dfrac{1}{2}x<0 \\ 24-3x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>6 \\ x\le 8 \end{cases} \Rightarrow 7$ и $8.$

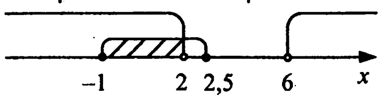
Ответ: 7 и 8.

б) $\begin{cases} 2x^2-3x-5\le 0 \\ -x^2+8x-12<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2{,}5)(x+1)\le 0 \\ (x-2)(x-6)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\le x<2 \Rightarrow -1, 0, 1$

$D=3^2-4\cdot 2\cdot(-5)=49=7^2 \Rightarrow$

$x_1=\dfrac{3+7}{4}=2{,}5$ и $x_2=\dfrac{3-7}{4}=-1$



Ответ: 0, ± 1.

3. $\begin{cases} 3x^2+5x-2\le 0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le \dfrac{1}{3} \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x<0.$

$D=5^2-4\cdot 3\cdot(-2)=49=7^2 \Rightarrow x_1=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{1}{3}$ и $x_2=\dfrac{-5-7}{6}=-2$

Ответ: [–2; 0).

4. а) $\begin{cases} 5x-2x^2\ge 0 \\ x^2-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2{,}5)\le 0 \\ x\ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2{,}5 \\ x\ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<1 \\ 1<x\le 2{,}5 \end{cases}$

Ответ: $[0;1)\cup(1;2{,}5]$.

б) $\begin{cases} 1-\dfrac{x^2}{16}\ge 0 \\ x^2-9\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\le 16 \\ x^2\ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 4 \\ |x|\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x\le -3 \\ 3\le x\le 4 \end{array}\right.$

Ответ: $[-4;-3]\cup[3;4]$.

5. $\begin{cases} (x^2-5x+6)^2\le 0 \\ (x^2+3x-1)^2\le 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ -10\le x^2+3x-1\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ и $x=3;$

$x=2 \Rightarrow 2^2+3\cdot 2-1=9$

$x=3 \Rightarrow 3^2+3^2-1=17>10$

Ответ: $x=2$.

6. $\begin{cases} 4x+3 \ge 27+x \\ p+6x < 2+5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \ge 24 \\ x < 2-p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 8 \\ x < 2-p \end{cases}$

Система имеет решение, если

$8 \le x < 2-p \Rightarrow 2-p > 8 \Leftrightarrow p < -6$.

Ответ: $p < -6$.

С-19

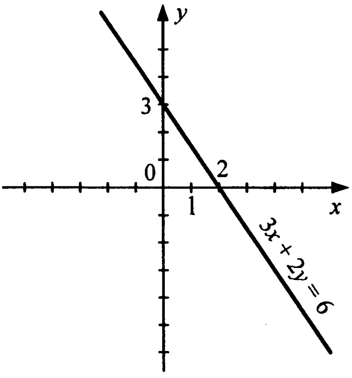
1. а) нет; **б)** да; **в)** нет;

2. а) (0; 3), (1; 1), (2; –1);

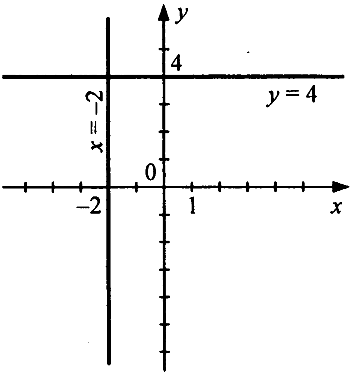
б) (–14; 0), (2; 8), (–2; –6);

3.

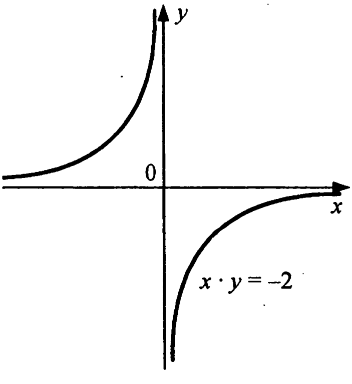
а)



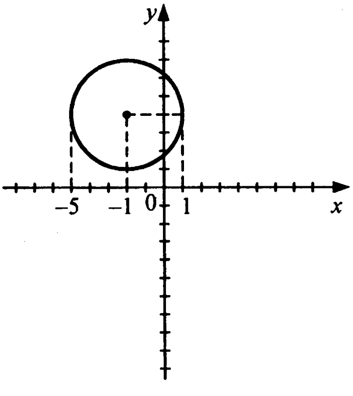
б)



в)



г)



4. а) гипербола $y=\frac{4}{x}$;

б) две пересекающиеся прямые $x = 3$ и $y = -2{,}5$;

в) точки (0; –2)

г) окружность с центром в точке (–5; –2) и радиусом $\sqrt{7}$.

5. $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

а) $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow R^2=9+(y+1)^2 \Rightarrow R=3$

Ответ: $(x-3)^2+(y+1)^2=9$.

б) $x=9,\ y=-7 \Rightarrow R^2=6^2+6^2=72 \Rightarrow R=6\sqrt{2}$

Ответ: $(x-3)^2+(y+1)^2=72$.

6. а) $xy=-5;\ y=-\frac{5}{x} \Rightarrow x=\pm1$ или $x=\pm5 \Rightarrow y=\mp5$ или $y=\mp1$.

Ответ: $(\pm1;\mp5)$ и $(\pm5;\mp1)$.

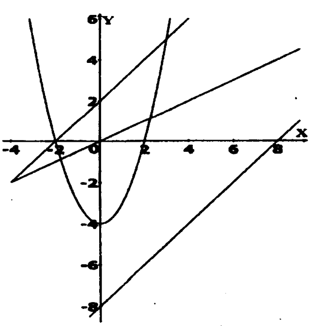
б) $x^2-y^2=7;\ (x+y)(x-y)=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\pm1 \\ x-y=\pm7 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\pm7 \\ x-y=\pm1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm4 \\ y=\mp3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm4 \\ y=\pm3 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(\pm4;\mp3)$ и $(\pm4;\pm3)$.

С-20

1. $\begin{cases} y=-0{,}5x^2+8 \\ xy=6 \end{cases}$. Три решения: (–4,4;–1,5), (0,8; 7,8), (3,5; 1,8).

2. $y=x^2-4$;



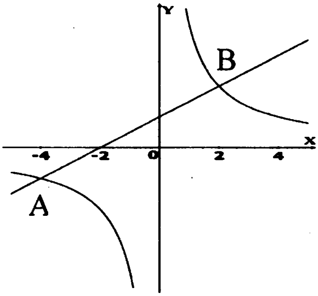
а) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$; две точки пересечения: $A(-2;\ 0)$, $B(3;\ 5)$;

б) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0{,}5x \end{cases}$; две точки пересечения: $C(-1{,}8;\ -0{,}8)$, $D(2{,}2;\ 1{,}2)$;

в) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 8 \end{cases}$; нет точек пересечения.

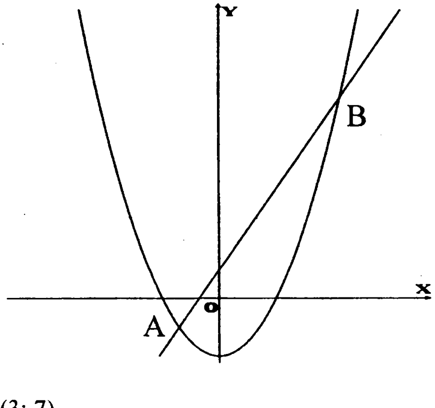
Ответ: нет решений.

3. а) $\begin{cases} y = \dfrac{8}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$.



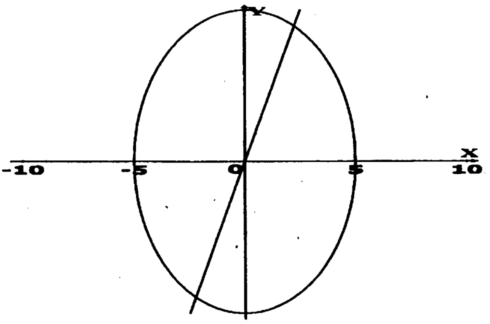
Ответ: (–4;–2), (2; 4).

б) $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.



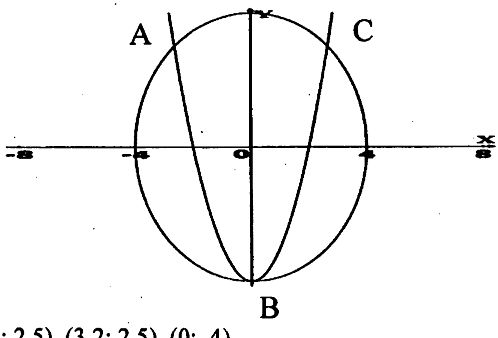
Ответ: (–1;–1), (3; 7).

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$.



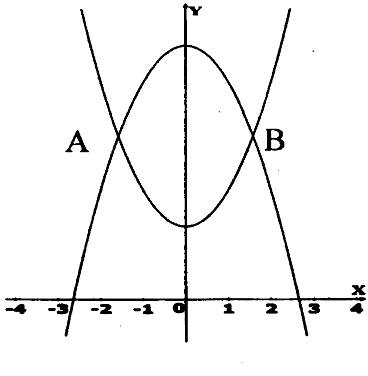
Ответ: (–2,2;–4,4), (2,2; 4,4).

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$.

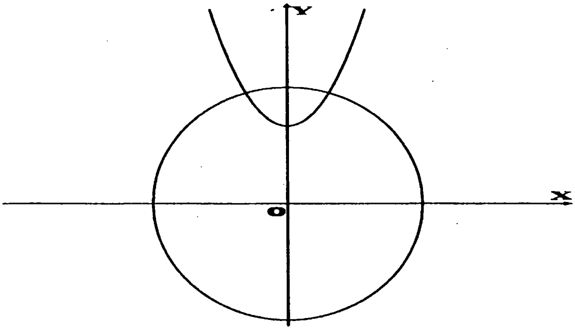


Ответ: (–3,2; 2,5), (3,2; 2,5), (0;–4).

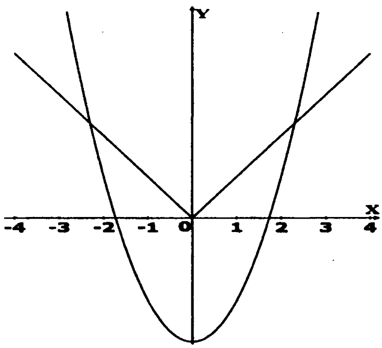
4. а) Ответ: два решения.



б) Ответ: два решения.



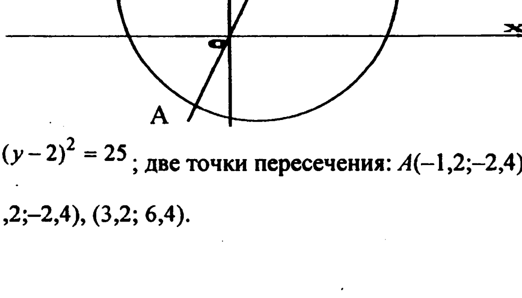
5. а)



$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = |x| \end{cases}$; две точки пересечения: $A(-2{,}2;\ 2{,}2)$, $B(2{,}2;\ 2{,}2)$.

Ответ: (–2,2; 2,2), (2,2; 2,2).

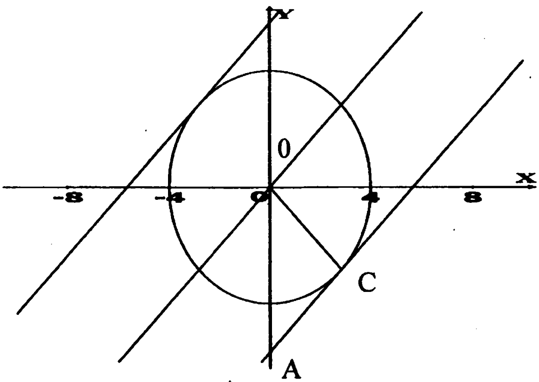
б)



$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$; две точки пересечения: $A(-1{,}2;-2{,}4)$, $B(3{,}2;\ 6{,}4)$.

Ответ: (–1,2;–2,4), (3,2; 6,4).

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y = k \end{cases}$.



Изобразим графики функций на рисунке.

Рассмотрим ΔOAC: $\angle C = 90°$, $\angle A = \angle O = 45°$.

$OC = 4$ (радиус окружности); $AC = 4$; $OA = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Ясно, что при $k = \pm 4\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $k \in (-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$–две точки; при $|k| > 4\sqrt{2}$ решения нет.

Ответ: а) $k = \pm 4\sqrt{2}$; б) $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ в) $(-\infty; -4\sqrt{2}) \cup (4\sqrt{2}; +\infty)$.

С-21

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6^2 + (-8)^2 = 100 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) - 2 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 36 + 64 = 100 \\ 18 - 16 - 2 = 0 \end{array} \right.$; верно, значит, является.

2. $\begin{cases} x^2 - 3y + 12 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x^2 - 3(x + 4) + 12 = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{array} \right.$; $x(x-3) = 0$;

$x_1 = 0, y_1 = 4$; (0; 4); $x_2 = 3, y_2 = 7$; (3; 7).

Проверка: (0; 4); $\begin{cases} 0^2 - 3 \cdot 4 + 12 = 0 \\ 4 = 0 + 4 \end{cases}$ — верно;

(3; 7); $\begin{cases} 3^2 - 3 \cdot 7 + 12 = 0 \\ 7 = 3 + 4 \end{cases}$ — верно.

3. 1) а) $\begin{cases} x^2+2y=6 \\ y=x-1 \end{cases}$; $\left| \begin{matrix} x^2+2(x-1)=6 \\ x^2+2x-2=6 \end{matrix} \right.$; $x^2+2x-8=0$;

$D=4+4\cdot 8=36$; $x_1=\dfrac{-2+6}{2}=2$; $x_2=-4$; $y_1=1$, $y_2=-5$.

Ответ: (2; 1), (–4;–5).

б) $\begin{cases} x=y-2 \\ xy-y=10 \end{cases} \Bigg|$; $y(y-2)-y=10$,

$y^2-3y-10=0$; $D=9+4\cdot 10=49$;

$y_1=\dfrac{3+7}{2}=5$, $y_2=-2$; $x_1=3$, $x_2=-4$.

Ответ: (3; 5), (–4;–2).

в) $\begin{cases} xy+x^2=4 \\ y=x+2 \end{cases} \left| \begin{matrix} x(x+2)+x^2=4 \\ 2x^2+2x-4=0 \end{matrix} \right.$; $x^2+x-2=0$; $D=1+4\cdot 2=9$;

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $x_2=-2$; $y_1=3$, $y_2=0$.

Ответ: (1; 3), (–2; 0).

2) а) $\begin{cases} x^2-y^2=24 \\ x-2y=7 \end{cases} \left| \begin{matrix} (7+2y)^2-y^2=24 \\ x=7+2y \end{matrix} \right.$;

$49+28y+4y^2-y^2-24=0$; $3y^2+28y+25=0$;

$D=784-12\cdot 25=484$; $y_1=\dfrac{-28+22}{6}=-1$; $y_2=-\dfrac{25}{3}$;

$x_1=7-2=5$; $x_2=7-\dfrac{50}{3}=-\dfrac{29}{3}$.

Ответ: (5; –1), $\left(-\dfrac{29}{3}; -\dfrac{25}{3}\right)$.

б) $\begin{cases} x+3y=11 \\ 2x+y^2=14 \end{cases} \left| \begin{matrix} x=11-3y \\ 2(11-3y)+y^2-14=0 \end{matrix} \right.$; $y^2-6y+8=0$;

$D=36-4\cdot 8=4$; $y_1=\dfrac{6+4}{2}=5$, $y_2=1$; $x_1=-4$, $x_2=8$.

Ответ: (–4; 5), (8; 1).

в) $\begin{cases} y^2-xy=12 \\ 3y-x=10 \end{cases} \left| \begin{matrix} y^2-y(3y10)12=0 \\ x=3y-10 \end{matrix} \right.$; $y^2-3y^2+10-12=0$;

$-2y^2+10y-12=0$; $y^2-5y+6=0$;

$D=25-4\cdot 6=1$; $y_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $y_2=2$; $x_1=-1$; $x_2=-4$.

Ответ: (–1; 3), (–4; 2).

3) а) $\begin{cases}(x-2)(y-1)=30\\2x-y=10\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}(x-2)(2x-11)=30\\y=2x-10\end{array}\right.$;

$2x^2-15x-8=0$;

$D=225+4\cdot 2\cdot 8=289$;

$x_1=\dfrac{15+17}{4}=8$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$; $y_1=6$; $y_2=-11$.

Ответ: $(8;\,6)$, $(-\dfrac{1}{2};-11)$.

б) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=14\\x-3y=10\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}(10+3y)^2-y(10+3y)+y^2=14\\x=10+3y\end{array}\right.$;

$100+60y+9y^2-10y-3y^2+y^2-14=0$;

$7y^2+50y+86=0$;

$D=2500-4\cdot 7\cdot 86=92$;

$y_{1,2}=\dfrac{-50\pm 2\sqrt{23}}{2\cdot 7}=\dfrac{-25\pm\sqrt{23}}{7}$; $x_{1,2}=10+\dfrac{-75\pm 3\sqrt{23}}{7}=\dfrac{-5\pm 3\sqrt{23}}{7}$.

Ответ: $\left(\dfrac{-5\pm 3\sqrt{23}}{7},\ \dfrac{-25\pm\sqrt{23}}{7}\right)$.

4. $\begin{cases}3x+2y=11\\5x-3y=12\\x^2+y^2-xy-y=6\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{11-2y}{3}\\\dfrac{55-10y}{3}-3y=12\end{array}\right.$;

$55-10y-9y=36$, $19y=19$,

$y=1$, $x=3$; $3^2+1^2-3\cdot 1-1=6$; $10-3-1=6$ – верно.

Ответ: $(3;\,1)$.

5. а) $\begin{cases}x^2-y^2=9\\xy=20\end{cases}$ $\left|\begin{array}{l}x^2-\dfrac{400}{x^2}=9\\y=\dfrac{20}{x}\end{array}\right.$;

$x^4-9x^2-400=0$; $D=81+4\cdot 400=1681$;

$x^2=\dfrac{9+41}{2}=25$; $x_{1,2}=\pm 5$; $y_{1,2}=\pm 4$.

Ответ: $(\pm 5;\,\pm 4)$.

б) $\begin{cases}x^2-3y^2=22\\x^2+3y^2=28\end{cases}$ $\left|\ 22+3y^2=28-3y^2\right.$;

$6y^2=6$; $y_{1,2}=\pm 1$; $x^2=22+3=25$; $x=\pm 5$.

Ответ: $(5;\,\pm 1)$, $(-5;\,\pm 1)$.

в) $\begin{cases} x^2+2x+3y=3 \\ x^2+x+2y=4 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y=\dfrac{3-x^2-2x}{3} \\ x^2+x+\dfrac{6-2x^2-4x}{3}=4 \end{array} \right.$;

$3x^2+3x+6-2x^2-4x=12;$

$x^2-x-6=0;$

$D=1+4\cdot 6=25,\ x_1=\dfrac{1+5}{2}=3,\ x_2=-2;$

$y_1=\dfrac{3-9-6}{3}=-4,\ y_2=\dfrac{3-4+4}{3}=1.$

Ответ: (3;–4), (–2; 1).

6. $x^2+(x^2-1-2)^2=5;\ x^2+(x^2-3)^2=5;\ x^2+x^4-6x^2+9=5;\ x^4-5x^2+4=0;$

$D=25-4\cdot 4=9;\ x_1{}^2=\dfrac{5+3}{2}=4;\ x_2{}^2=1;$

$x_{1,2}=\pm 2;\ x_{3,4}=\pm 1;\ y_{1,2}=3;\ y_{3,4}=0.$

Ответ: (±2; 3); (±1; 0).

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ 2y-x=1 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2y-1}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{5}{6}=0 \\ x=2y-1 \end{array} \right.$;

$6y+12y-6-5y(2y-1)=0;$

$18y-6-10y^2+5y=0;\ 10y^2-23y+6=0$

$D=529-40\cdot 6=289;\ y_1=\dfrac{23+17}{20}=2;$

$y_2=\dfrac{3}{10};\ x_1=3;\ x_2=-0{,}4.$

Ответ: (3; 2), (–0,4; 0,3).

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{3} \\ x-y=6 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{3} \\ x=6+y \end{array} \right.$; $\dfrac{x}{y}=a,\ a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{16}{3}=0;$

$3a^2-16a+3=0;\ D=256-4\cdot 3\cdot 3=220;$

$a_{1,2}=\dfrac{16\pm 2\sqrt{55}}{2\cdot 3}=\dfrac{8\pm\sqrt{55}}{3};$

$\dfrac{6+y}{y}=\dfrac{8\pm\sqrt{55}}{3};\ 18+3y=8y\pm\sqrt{55}\,y;$

$y_{1,2}=\dfrac{18}{5\pm\sqrt{55}};\ x_{1,2}=\dfrac{48\pm 6\sqrt{55}}{5\pm\sqrt{55}}.$

Ответ: $\left(\dfrac{48\pm 6\sqrt{55}}{5\pm\sqrt{55}},\ \dfrac{18}{5\pm\sqrt{55}}\right).$

С-22

1. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда

$\begin{cases} x-y=5 \\ xy=84 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=5+y \\ y(5+y)=84 \end{array} \right.; y^2+5y-84=0;$

$D=25+4\cdot 84=361; y_1=\dfrac{-5+19}{2}=7; y_2=-12;\ x_1=12; x_2=-7.$

Ответ: 12 и 7 или – 7 и – 12.

2. Пусть x см – один катет, тогда $(x+7)$ см – другой катет.
Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2+(x+7)^2=13^2$;
$x^2+x^2+14x+49-169=0$;
$2x^2+14x-120=0;\ x^2+7x-60=0$;
$D=49+4\cdot 60=289$;

$x_1=\dfrac{-7+17}{2}=5, x_2<0$; 5 см — первый катет,

$5+7=12$ (см) — второй катет.
Ответ: 5 и 12 см.

3. Пусть x м — длина, y м — ширина, тогда xy м^2 — площадь или 2080 м^2;
$2(x+y)$ м — периметр или 184 м.

Получаем систему: $\begin{cases} xy=2080 \\ 2(x+y)=184 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(92-y)=2080 \\ x=92-y \end{array} \right.;$

$y^2-92y+2080=0; D=8464-4\cdot 2080=144;$

$y_1=\dfrac{92+12}{2}=52; y_2=40; x_1=40; x_2=52.$

Ответ: 40 и 52 м.

4. Пусть x см — длина, y см — ширина, тогда $2(x+y)$ см — периметр или 20 см;
(x^2+y^2) см^2 — сумма площадей квадратов или 104 см^2.
Получаем систему:

$\begin{cases} 2(x+y)=20 \\ x^2+y^2=104 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=10-y \\ (10-y)^2+y^2=104 \end{array} \right.;$

$100-2y+2y^2-104>0; 2y^2-2y-4=0;$

$y^2-y-2=0; D=1+4\cdot 2=9; y_1=\dfrac{1+3}{2}=2;$

$y_2=-1<0; x=8$; 8 см — длина, 2 см — ширина.
Ответ: 8 и 2 см.

5. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда xy — их произведение, $(x+y)$ – их сумма.

Получаем систему: $\begin{cases} x+2y=19 \\ xy=x+y+29 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=19-2y \\ y(19-2y)=19-2y+y+29 \end{array} \right.;$

$-2y^2+19y=48-y; 2y^2-20y+48=0; y^2-10y+24=0;$

$D = 100 - 4 \cdot 24 = 4; y_1 = \dfrac{10+2}{2} = 6;\ y_2 = 4;$

$x_1 = 7,\ x_2 = 11.$

Ответ: 7 и 6 или 11 и 4.

6. Пусть x км/ч – скорость первой группы, y км/ч – скорость второй группы, тогда $(x + y)$ км/ч — скорость сближения;

$\dfrac{18}{x+y}$ ч – прошли вместе 18 км или 2ч. $\dfrac{18}{x}$ ч и $\dfrac{18}{y}$ ч – проходит весь путь первая и вторая группа соответственно. Известно, что $\dfrac{18}{x} = \dfrac{18}{y} + \dfrac{9}{10}$.

Получаем систему: $\begin{cases} \dfrac{18}{x+y} = 2; & \dfrac{9}{x+y} = 1 \\ \dfrac{18}{x} = \dfrac{18}{y} + \dfrac{9}{10}; & \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{10} \end{cases};$

$x + y = 9, y = 9 - x;$

$\dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{9-x} + \dfrac{1}{10}; 20(9 - x) - 20x - x(9 - x) = 0;$

$180 - 20x - 20x - 9x + x^2 = 0; x^2 - 49x + 180 = 0;$

$D = 2401 - 4 \cdot 180 = 1681; x_1 = \dfrac{49+41}{2} = 45; x_2 = 4; y_1 < 0; y_2 = 5;$

4 и 5 км/ч — скорости I и II групп соответственно.

Ответ: 4 и 5 км/ч.

7. Пусть 1 — вся работа, x ч — выполняет всю работу I машинистка, тогда $(x + 3)$ ч — выполняет всю работу II;

$\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+3}$ часть работы – производительность I и II.

Известно, что за $6\dfrac{2}{3}$ ч обе машинистки , работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\dfrac{20}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3}\right) = 1$; $\dfrac{2x+3}{x(x+3)} - \dfrac{3}{20} = 0$;

$40x + 60 - 3x(x + 3) = 0; 40x + 60 - 3x^2 - 9x = 0; 3x^2 - 31x - 60 = 0;$

$D = 961 + 4 \cdot 3 \cdot 60 = 1681; x_1 = \dfrac{31+41}{6} = 12, x_2 < 0;$

12 ч и 15 ч — требуется I и II машинистке, чтобы выполнить всю работу.

Ответ: 12 и 15 ч.

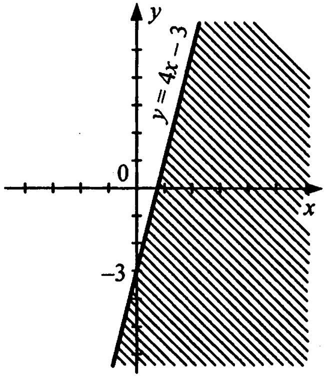
С-23

1. а) нет; **б)** да;

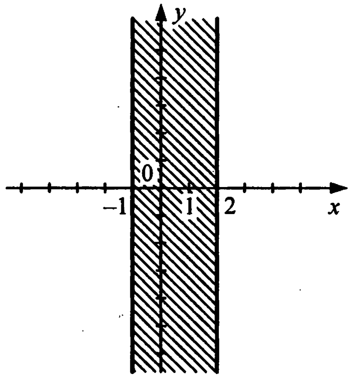
2. а) (0; 0), (1; 0);

б) (0; 0), (1; 1);

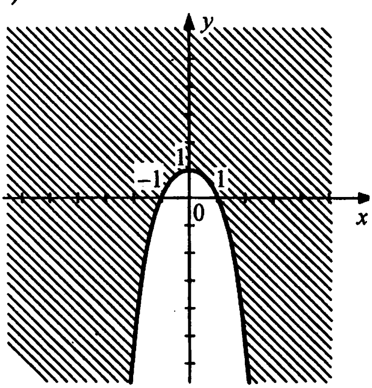
3. а)



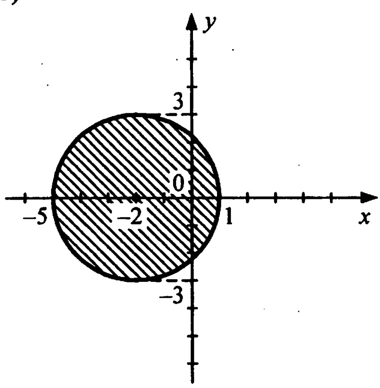
б)



в)



г)



4. а) Множество точек плоскости, лежащих выше графика параболы $y = -x^2 + 3x + 4$.

в) Множество точек плоскости, лежащих вне окружности $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, включая ее саму.

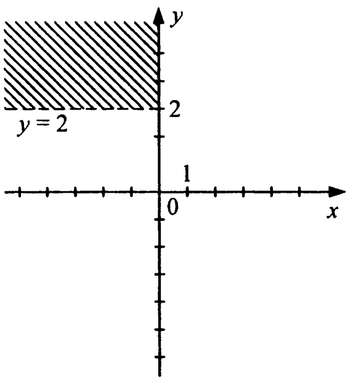
5. а) $y > 2x^2 + 3x - 1$;

б) $x^2 + (y - 4)^2 > 25$.

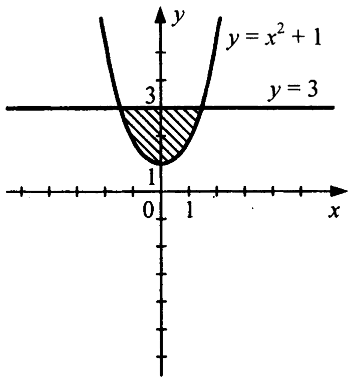
С-24

1. а) нет; б) нет; в) нет;

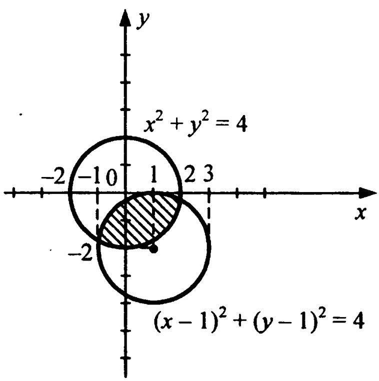
2. а)



б)



в)



3. а) треугольник с вершинами (–1; 0), (0; –2), (2; 0);

$S = \frac{1}{2} a \cdot h;\ a = 3,\ h = 2 \Rightarrow S = 3$

б) прямоугольник с вершинами (–2; 1), (3; 1), (3; 2), (–2; 2);

$S = ab;\ a = 1,\ b = 5 \Rightarrow S = 5$

4. а) $\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ 2y - x \ge -2 \\ x \ge 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 4 \\ x^2 + (y-1)^2 \ge 3 \end{cases}$

С-25

1. а) 10, 11, 12, 13, 14; **б)** 1, 4, 9, 16, 25; **в)** 4, 7, 10, 13, 16.

2. $a_n = 5n-2$;

а) $a_1 = 5 \cdot 1-2 = 3$; **б)** $a_6 = 5 \cdot 6-2 = 28$; **в)** $a_{10} = 5 \cdot 10-2 = 48$;

г) $a_{100} = 5 \cdot 100-2 = 498$; **д)** $a_k = 5k-2$; **е)** $a_{k+1} = 5(k+1)-2 = 5k+3$.

3. а) $x_n = n+6$; $x_2 = 2+6 = 8$; $x_5 = 5+6 = 11$; $x_{10} = 10+6 = 16$;

б) $x_n = \dfrac{2n-1}{3}$; $x_2 = \dfrac{2\cdot 2-1}{3} = 1$; $x_5 = \dfrac{2\cdot 5-1}{3} = 3$; $x_{10} = \dfrac{2\cdot 10-1}{3} = \dfrac{19}{3}$;

в) $x_n = n^2$; $x_2 = 2^2 = 4$; $x_5 = 5^2 = 25$; $x_{10} = 10^2 = 100$;

г) $x_n = n(n-1)$; $x_2 = 2(2-1) = 2$; $x_5 = 5(5-1) = 20$; $x_{10} = 10(10-1) = 90$;

д) $x_n = n^3-n$; $x_2 = 2^3-2 = 6$; $x_5 = 5^3-5 = 120$; $x_{10} = 10^3-10 = 990$;

е) $x_n = (-1)^n \cdot n$; $x_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$; $x_5 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$; $x_{10} = (-1)^{10} \cdot 10 = 10$.

4. $a_n = 55-4n$, $15 = 55-4n$, $4n = 40$, $n = 10$.

Ответ: 10.

5. а) $C_1 = 3$, $C_{n+1} = C_n+4$; $C_2 = C_1+4 = 7$, $C_3 = C_2+4 = 11$, $C_4 = C_3+4 = 15$, $C_5 = C_4+4 = 19$;

б) $C_1 = 4$, $C_{n+1} = 2C_n$; $C_2 = 2C_1 = 8$, $C_3 = 2C_2 = 16$, $C_4 = 2C_3 = 32$, $C_5 = 2C_4 = 64$.

6. 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; 0,42857.

7. $a_n = n^2-2n+3$;

а) $3 = n^2-2n+3$; $n^2-2n = 0$; $n = 2$, **значит,** $3 = a_2$;

б) $66 = n^2-2n+3$; $n^2-2n-63 = 0$; $D = 4+4 \cdot 63 = 4 \cdot 64$; $n = \dfrac{2+2\cdot 8}{2} = 9$,

значит, $66 = a_9$;

в) $103 = n^2-2n+3$; $n^2-2n-100 = 0$; $D = 4+4\cdot 100 = 4\cdot 101$;

$n = \dfrac{2+2\sqrt{101}}{2} \notin N$, **значит, 103–не член** $\{a_n\}$.

8. а) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = b_n+4$, $b_n = 4n$; **б)** $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 5b_n$, $b_n = 5^{n-1}$.

С-26

1. $a_1 = 3{,}4$; $a_2 = -0{,}2$; $d = a_2-a_1 = -0{,}2-3{,}4 = -3{,}6$;

$a_3 = a_2+d = -0{,}2-3{,}6 = -3{,}8$; $a_4 = a_2+2d = -0{,}2-2 \cdot 3{,}6 = -7{,}4$;

$a_5 = a_2+3d = -0{,}2-3 \cdot 3{,}6 = -11$; $a_6 = a_5+d = -11-3{,}6 = -14{,}6$.

2. $b_1 = -0{,}8$, $d = 4$; $b_3 = b_1+2d = -0{,}8+2 \cdot 4 = 7{,}2$;

$b_7 = b_1+6d = -0{,}8+6 \cdot 4 = 23{,}2$; $b_{24} = b_1+23d = -0{,}8+23 \cdot 4 = 91{,}2$;

$b_{k+1} = b_1+d(k+1-1) = b_1+kd$.

3. а) $a_1 = 16$, $a_8 = 37$; $a_8 = a_1+7d$, $7d = a_8-a_1$, $d = \dfrac{a_8-a_1}{7} = \dfrac{37-16}{7} = 3$;

б) $a_1 = 4$, $a_{18} = -11$; $a_{18} = a_1+17d$, $d = \dfrac{a_{18}-a_1}{17} = \dfrac{-11-4}{17} = -\dfrac{15}{17}$;

в) $a_1 = 0{,}5,\ a_{23} = -2{,}3;$

$a_{23} = a_1 + 22d,\ d = \dfrac{a_{23} - a_1}{22} = \dfrac{-2{,}3 - 0{,}5}{22} = -\dfrac{2{,}8}{22} = -\dfrac{1{,}4}{11} = -\dfrac{14}{110} = -\dfrac{7}{55}.$

4. $a_1 = 106,\ d = 12;\ a_6 = a_1 + 5d = 106 + 5\cdot 12 = 166;$

$a_{12} = a_1 + 11d = 106 + 11\cdot 12 = 238.$

5. $x_1 = 14,\ d = 0{,}5$

а) $x_n = 17{,}5 = x_1 + d(n-1) = 14 + 0{,}5(n-1) = 13{,}5 + 0{,}5n;$

$0{,}5n = 17{,}5 - 13{,}5;\ 0{,}5n = 4;\ n = 8$, значит, $17{,}5 = x_8;$

б) $x_n = 19 = x_1 + d(n-1) = 13{,}5 + 0{,}5n;$

$19 = 13{,}5 + 0{,}5n;\ 0{,}5n = 5{,}5;\ n = 11,$

значит, $19 = x_{11};$

в) $x_n = 34 = 13{,}5 + 0{,}5n;\ 0{,}5n = 20{,}5;\ n = 41$, значит, $34 = x_{41}$.

6. $a_1 = 18,\ d = a_2 - a_1 = 4 - 18 = -14;$

а) $-38 = a_1 + d(n-1) = 18 - 14(n-1) = 32 - 14n;$

$14n = 70,\ n = 5$, значит, $-38 = a_5;$

б) $-64 = 32 - 14n,\ 14n = 96,\ n = \dfrac{48}{7} \notin N$, значит, -64 не встретится среди данных чисел.

в) $-80 + 32 - 14n,\ 14n = 112,\ n = 8$, значит, $-80 = a_8$.

7. $2\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ 22;\ 2 = a_1,\ 22 = a_6;\ a_6 = a_1 + 5d,\ d = \dfrac{a_6 - a_1}{5} = \dfrac{22-2}{5} = 4;$

поэтому: $a_2 = a_1 + d = 2 + 4 = 6,\ a_3 = a_1 + 2d = 2 + 2\cdot 4 = 10,$

$a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3\cdot 4 = 14,\ a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4\cdot 4 = 18.$

8. a_n – арифметическая прогрессия;

$a_5 = a_1 + 4d,\ a_2 = a_1 + d,$

$a_{n-2} = a_1 + d(n-2-1) = a_1 + d(n-3),$

$a_{n-5} = a_1 + d(n-5-1) = a_1 + d(n-6),$

$a_2 + a_{n-2} = a_1 + d + a_1 + d(n-3) = 2a_1 + d(n-2),$

$a_5 + a_{n-5} = a_1 + 4d + a_1 + d(n-6) = 2a_1 + (n-2),$

значит, $a_2 + a_{n-2} = a_5 + a_{n-5}$, что и требовалось доказать.

9. $a_1 = 7$; Пусть $a_2 = x^2,\ a_3 = (x+1)^2$, где x – натуральное число.

Тогда $a_2 - a_1 = a_3 - a_2;$

Получаем: $x^2 - 7 = (x+1)^2 - x^2;\ x^2 - 7 = 2x + 1;\ x^2 - 2x - 8 = 0;$

$D = 4 + 4\cdot 8 = 36;\ x_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4;\ x_2 \notin N.$

Значит, $a_2 = 4^2 = 16,\ a_3 = (4+1)^2 = 25.$

Ответ: 16 и 25.

10. По свойству арифметической прогрессии

$b^2 - a^2 = c^2 - b^2,\ b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2}.$

Нужно доказать, что

$$\frac{1}{a+c}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{a+b+b+c}{2(a+b)(b+c)}=\frac{a+2b+c}{2(a+b)(b+c)},$$

$(a+c)(a+2b+c)=2(a+b)(b+c)$.

Т.е. надо доказать, что:

$a^2+ac+2ab+2bc+ac+c^2=2(ab+b^2+ac+bc)$;

$a^2+2ac+2ab+2bc+c^2=2ab+2b^2+2ac+2bc$; $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$.

Т.е. мы видим, что равенство $\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)$;

равносильно равенству $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$.

Значит, числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ также составляют арифметическую прогрессию, что и требовалось доказать.

С-27

1. $a_1=-16$, $a_2=-13$, $d=a_2-a_1=3$;

а) $S_6=\dfrac{2a_1+d(6-1)}{2}\cdot 6=\dfrac{2a_1+5d}{2}\cdot 6=(-32+15)\cdot 3=-51$;

б) $S_{16}=\dfrac{2a_1+15d}{2}\cdot 16=(-32+45)\cdot 8=104$;

в) $S_{25}=\dfrac{2a_1+24d}{2}\cdot 25=\dfrac{(-32+72)}{2}\cdot 25=500$;

г) $S_{k+1}=\dfrac{2a_1+d(k+1-1)}{2}\cdot(k+1)=\dfrac{-32+kd}{2}\cdot(k+1)$.

2. а) $a_1=4$, $d=2$; $S_{12}=\dfrac{2a_1+11d}{2}\cdot 12=\dfrac{2\cdot 4+11\cdot 2}{2}\cdot 12=180$;

б) $a_1=-5$, $d=3$; $S_{12}=(2\cdot(-5)+11\cdot 3)\cdot 6=23\cdot 6=138$;

в) $a_1=16{,}5$, $d=-1{,}5$; $S_{12}=(2\cdot 16{,}5+11\cdot(-1{,}5))\cdot 6=99$;

г) $a_1=1+\sqrt{3}$, $d=-\sqrt{3}$;

$S_{12}=(2(1+\sqrt{3})+11\cdot(-\sqrt{3}))\cdot 6=(2-9\sqrt{3})\cdot 6=12-54\sqrt{3}$.

3. $a_n=3n+2$; $a_1=3+2=5$, $a_2=3\cdot 2+2=8$, $d=a_2-a_1=3$;

$S_5=\dfrac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=\dfrac{10+12}{2}\cdot 5=55$,

$S_{40}=\dfrac{2a_1+39d}{2}\cdot 40=(10+117)\cdot 20=2540$,

$$S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = \frac{10 + 3(k-1)}{2} \cdot k = \frac{7 + 3k}{2} \cdot k.$$

4. а) $a_1 = 1$, $d = 1$, S_{80}–?; $S_{80} = \dfrac{2a_1 + 79d}{2} \cdot 80 = 81 \cdot 40 = 3240$;

б) $a_1 = 10$, $d = 1$, S_{90}–?; $S_{90} = \dfrac{2a_1 + 89d}{2} \cdot 90 = (20+89) \cdot 45 = 4905$;

в) $a_1 = 2$, $d = 2$, S_{50}–?; $S_{50} = \dfrac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = (4+98) \cdot 25 = 2550$.

5. а) $a_1 = 8$, $a_7 = 24$; $a_7 = a_1 + 6d$; $d = \dfrac{a_7 - a_1}{6} = \dfrac{24-8}{6} = \dfrac{8}{3}$;

$S_{10} = \dfrac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (16+24) \cdot 5 = 200$;

б) $a_4 = 16$, $a_{12} = 88$; $\begin{cases} 16 = a_1 + 3d \\ 88 = a_1 + 11d \end{cases}$ $\Bigg|$ $16 - 3d = 88 - 11d$; $8d = 72$, $d = 9$;

$a_1 = 16 - 3 \cdot 9 = -11$; $S_{10} = \dfrac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (-22+81) \cdot 5 = 295$.

6. $a_1 = 15$, $d = 2$; $S_{26} = \dfrac{2a_1 + 25d}{2} \cdot 26 = (30+50) \cdot 13 = 1040$.

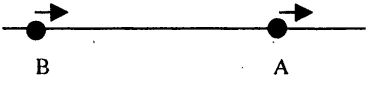
7. $S_3 = 48$, $S_6 = 141$;

$$\begin{cases} 48 = \dfrac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 \\ 141 = \dfrac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} 16 = a_1 + d \\ \\ 47 = 2a_1 + 5d \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} d = 16 - a_1 \\ 47 = 2a_1 + 5(16 - a_1) \end{array};$$

$47 = -3a_1 + 80$; $3a_1 = 33$; $a_1 = 11$; $d = 16 - 11 = 5$.

8.

Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 10 км, за второй час на 15 км, за третий час на 20 км.



Поэтому $a_1 = 10$, $d = 5$, $S_n = 135$, n – ?;

$135 = \dfrac{2 \cdot 10 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$;

$270 = (20 + 5n - 5) \cdot n$, $n(5n + 15) - 270 = 0$,
$n(n + 3) - 54 = 0$; $n^2 + 3n - 54 = 0$;

$D = 9 + 4 \cdot 54 = 225$; $n_1 = \dfrac{-3 + 15}{2} = 6$; $n_2 < 0$ – не удовлетворяет услови

задачи;
Итак, через 6 ч легковой автомобиль догонит грузовой.

9. а) $3 + 7 + 11 + ... + x = 253$,

$d = 4,\ a_1 = 3;\ S_n = 253 = \dfrac{2\cdot 3 + 4(n-1)}{2}\cdot n$;

$253 = \left(3 + 2(n-1)\right)\cdot n;\ 253 = (2n+1)\cdot n;\ 2n^2 + n - 253 = 0;$

$D = 1 + 4\cdot 2\cdot 253 = 2025 = 45^2 \Rightarrow\ n_1 = \dfrac{1+45}{4} = 11{,}5$ и $n_2 = \dfrac{1-45}{4} = -11$

Ответ: нет корней.

б) $8 + 5 + 2 + ... + x = -130,\ d = -3,\ a_1 = 8;\ S_n = -130 = \dfrac{2\cdot 8 - 3(n-1)}{2}\cdot n$;

$-260 = \left(16 - 3(n-1)\right)\cdot n;\ -26 = n(19 - n);\ 3n^2 - 19n - 260 = 0;$

$D = 19^2 + 4\cdot 3\cdot 260 = 3481 = 59^2 \Rightarrow n = \dfrac{19+59}{6} = 13$.

Ответ: $n = 13$.

10. а) $S_n = 5n^2+3n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \left(a_1 + \dfrac{d}{2}(n-1)\right)\cdot n$;

$5n^2+3n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n;\ \begin{cases}\dfrac{d}{2} = 5; & d = 10\\ a_1 - \dfrac{d}{2} = 3; & a_1 = 8\end{cases};$

Значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

б) $S_n = 3n^2;\ 3n^2 = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n;\ \dfrac{d}{2} = 3,\ d = 6;\ a_1 - \dfrac{d}{2} = 0,\ a_1 = 3.$

Значит, $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия.

в) $S_n = (4n-1)n = 4n^2-n;\ 4n^2-n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$;

$$\begin{cases}\dfrac{d}{2} = 4, & d = 8\\ a_1 - \dfrac{d}{2} = -1, & a_1 = 3\end{cases}.$$

Значит, $\{a_n\}$–арифметическая прогрессия.

С-28

1. $b_1 = 0{,}3;\ b_2 = 1{,}8;\ q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{1{,}8}{0{,}3} = 6;\ b_3 = b_2\cdot q = 1{,}8\cdot 6 = 10{,}8;$

$b_4 = b_3\cdot q = 10{,}8\cdot 6 = 64{,}8;\ b_5 = b_4\cdot q = 64{,}8\cdot 6 = 388{,}8;$

$b_6 = b_5\cdot q = 388{,}8\cdot 6 = 2332{,}8.$

2. $b_1 = 1{,}6$; $q = 2$;
$b_3 = b_1q^2 = 1{,}6 \cdot 4 = 6{,}4$; $b_5 = b_3q^2 = 6{,}4 \cdot 4 = 25{,}6$;
$b_7 = b_5q^2 = 25{,}6 \cdot 4 = 102{,}4$; $b_k = b_1q^{k-1} = 1{,}6 \cdot 2^{k-1} = 0{,}8 \cdot 2^k$.

3. а) $a_1 = 3,\ q = 2;\ a_6 = a_1q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$;

б) $a_1 = 64,\ q = -\dfrac{1}{4};\ a_7 = a_1q^6 = 64 \cdot \dfrac{1}{4^6} = \dfrac{1}{64}$;

в) $a_1 = 125,\ q = \dfrac{1}{5};\ a_5 = a_1q^4 = 5^3 \cdot \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{5}$;

г) $a_1 = 2\sqrt{2},\ q = \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ a_8 = a_1q^7 = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2^{7/2}} = \dfrac{1}{4}$.

4. а) $b_6 = \dfrac{1}{27},\ q = \dfrac{1}{3};\ b_6 = b_1 \cdot q^5;\ \dfrac{1}{27} = b_1 \cdot \dfrac{1}{3^5};\ b_1 = \dfrac{3^5}{3^3} = 9$;

б) $b_7 = 256,\ q = -2;\ b_7 = b_1 \cdot q^6,\ 256 = b_1 \cdot 2^6;\ b_1 = \dfrac{256}{64} = 4$.

5. а) $b_3 = 12,\ b_5 = 48;\ b_5 = b_3q^2,\ q^2 = \dfrac{b_5}{b_3},\ q = \sqrt{\dfrac{b_5}{b_3}} = \sqrt{\dfrac{48}{12}} = 2$;

б) $b_4 = 25,\ b_6 = 16;\ b_6 = b_4q^2,\ q = \sqrt{\dfrac{b_6}{b_4}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

6. $\dfrac{1}{9},\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ 27$;

$b_1 = \dfrac{1}{9},\ b_6 = 27;\ b_6 = b_1 \cdot q^5;\ q = \sqrt[5]{\dfrac{b_6}{b_1}} = \sqrt[5]{27 \cdot 9} = 3$;

$b_2 = \dfrac{1}{9} \cdot 3 = \dfrac{1}{3};\ b_3 = \dfrac{1}{3} \cdot 3 = 1;\ b_4 = 1 \cdot 3 = 3;\ b_5 = 3 \cdot 3 = 9$.

7. a_n — геометрическая прогрессия.

а) $2a_1,\ 2a_2,\ 2a_3$ — очевидно, геометрическая прогрессия с тем же самым знаменателем.

б) $a_1+3,\ a_2+3,\ a_3+3$ — не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n = 2^n$.

Тогда $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8$, но $a_1+3 = 5,\ a_2+3 = 7,\ a_3+3 = 11$;

$\dfrac{7}{5} \neq \dfrac{11}{7}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.

в) $\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ \sqrt{a_3}$ –геометрическая прогрессия, т.к. $\dfrac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} = \dfrac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}}$.

8. $\begin{cases} b_4 - b_2 = 18 \\ b_5 - b_3 = 36 \end{cases} \left|\ \begin{matrix} b_1q^3 - b_1q = 18 \\ b_1q^4 - b_1q^2 = 36 \end{matrix}\right.;\quad \dfrac{b_1(q^4 - q^2)}{b_1(q^3 - q)} = \dfrac{36}{18}$;

$\frac{q^3-q}{q^2-1}=2$; $\frac{q(q^2-1)}{q^2-1}=2$; $q=\pm1$ или $q=2$;

$q=1$ — не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1=b_2=b_3=b_4$ и $b_4-b_2=0\neq 18$.

Разберем случай $q=-1$.

$b_2=-b_1$, $b_3=b_1$, $b_4=-b_1$, $b_5=b_1$, $b_4-b_2=0\neq 18$;

Значит, $q=-1$ не подходит. Остается $q=2$.

Тогда $b_1=\frac{18}{q^3-q}=\frac{18}{8-2}=3$.

Ответ: $b_1=3$; $q=2$.

9. b_1, b_2, b_3, b_4; $\begin{cases}b_1+b_4=52\\ b_2+b_3=16\end{cases}$; $\left|\begin{array}{l}b_1+b_1q^3=52\\ b_1q+b_1q^2=16\end{array}\right.$; $\frac{b_1(1+q^3)}{b_1(q+q^2)}=\frac{52}{16}$;

$\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)}=\frac{13}{4}$; $q=-1$ или $4q^2-4q+4=13q$; $4q^2-17q+4=0$;

$D=289-4\cdot16=225$; $q_1=\frac{17+15}{8}=4$; $q_2=\frac{1}{4}$.

Если $q=-1$, то $b_2=-b_1$, $b_3=b_1$,
$b_4=-b_1$; $b_1+b_4=0\neq 52$.

Значит, $q=-1$ — не подходит $b_1=\frac{52}{1+q^3}=\frac{52}{63}=\frac{4}{5}$;

$b_2=\frac{4}{5}\cdot4=\frac{16}{5}$; $b_3=\frac{16}{5}\cdot4=\frac{64}{5}$, $b_4=\frac{64}{5}\cdot4=\frac{256}{5}$.

Если же $q=\frac{1}{4}$, то $b_1=\frac{52}{1+\frac{1}{64}}=\frac{52\cdot64}{65}=\frac{4}{5}\cdot64=\frac{256}{5}$, $b_2=\frac{256}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{64}{5}$,

$b_3=\frac{64}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{16}{5}$, $b_4=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{64}{5}$, $\frac{256}{5}$.

10. a, b, c — геометрическая прогрессия, т.е. $b^2=ac$.

Надо доказать, что $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$, т.е., что
$a^2+ab+ac-cb-b^2-bc+ac+bc+c^2=a^2+b^2+c^2$; $b^2=ac$.

Видно, что оба данных равенства эквивалентны, значит, требуемое равенство – тождество. Ч.т.д.

С-29

1. а) $b_1 = 32,\ q = \frac{1}{4}$;

$$S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{32\left(\frac{1}{4^5}-1\right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{1023\cdot 32\cdot 4}{4^5\cdot 3} = \frac{1023}{8\cdot 3} = \frac{341}{8};$$

б) $b_1 = -4,\ q = 2;\ S_5 = \frac{-4(2^5-1)}{2-1} = -124;$

в) $b_1 = 27,\ q = -\frac{1}{3};\ S_5 = \frac{27\left(-\frac{1}{3^5}-1\right)}{-\frac{1}{3}-1} = \frac{244\cdot 27\cdot 3}{4\cdot 243} = \frac{4941}{243} = \frac{183}{9} = \frac{61}{3};$

г) $b_1 = 2\sqrt{3},\ q = \sqrt{3};\ S_5 = \frac{2\sqrt{3}\left(3^{5/2}-1\right)}{\sqrt{3}-1} = \frac{54-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$

2. а) $b_1 = 3,\ q = \frac{6}{3} = 2;\ S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{3\cdot 63}{1} = 189;$

б) $b_1 = 5,\ b_2 = -\frac{2{,}5}{5} = -\frac{1}{2};\ S_6 = \frac{5\left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{5\cdot 63\cdot 2}{64\cdot 3} = \frac{5\cdot 21}{32} = \frac{105}{32};$

в) $b_1 = 4,\ q = \frac{4^2}{4} = 4;\ S_6 = \frac{4(4^6-1)}{4-1} = \frac{4\cdot 4095}{3} = 5460;$

г) $b_1 = \sqrt{3},\ q = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};\ S_6 = \frac{\sqrt{3}(27-1)}{\sqrt{3}-1} = \frac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$

3. а) $a_1 = 64,\ q = \frac{1}{4};\ S_5 = \frac{64\cdot\left(\frac{1}{4^5}-1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \frac{64\cdot 1023\cdot 4}{4^5\cdot 3} = \frac{341}{4};$

б) $a_1 = 10,\ q = \frac{1}{2};\ S_8 = \frac{10\left(\frac{1}{2^8}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{10\cdot 255\cdot 2}{2^8} = \frac{5\cdot 255}{2^6} = \frac{1275}{64};$

в) $a_1 = 3,\ q = -2,\ S_4 = \frac{3(16-1)}{-3} = -15;$

г) $a_1 = 3\sqrt{2},\ q = \sqrt{2},\ S_6 = \frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$

4. а) $b_3 = \frac{1}{25}$, $b_4 = \frac{1}{125}$, $q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{1}{5}$, $b_3 = b_1q^2$; $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 1$,

$$S_4 = \frac{\frac{1}{5^4} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{624 \cdot 5}{625 \cdot 4} = \frac{156}{125};$$

б) $b_2 = 6$, $b_4 = 24$, $b_4 = b_2q^2$, $q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = 2$, $b_2 = b_1q$,

$b_1 = \frac{b_2}{q} = 3$, $S_4 = \frac{3(16-1)}{2-1} = 45$.

5. а) $q = 2$, $S_5 = 93$, $93 = \frac{b_1(32-1)}{2-1} = 31b_1$, $b_1 = 3$;

б) $q = \frac{2}{3}$, $S_4 = 65$, $65 = \dfrac{b_1\left(\frac{16}{81} - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{b_1 \cdot 65 \cdot 3}{81}$, $b_1 = 27$.

6. а) $x_n = 2 \cdot 3^n$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3$, $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{2 \cdot 3^{n+2}}{2 \cdot 3^{n+1}} = 3$,

т.е. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$ для любого n, значит, $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия;

б) $x_n = 2^n$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 2$, значит, $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия;

в) $x_n = 3^n - 3$ $x_1 = 0$, значит, $\{x_n\}$ — не геометрическая прогрессия, т.к. у геометрической прогрессии $x_1 \neq 0$.

7. $\begin{cases} b_6 - b_4 = 72 \\ b_3 - b_5 = 9 \end{cases}$ $\left|\begin{array}{l} b_1q^5 - b_1q^3 = 72 \\ b_1q^2 - b_1q^4 = 9 \end{array}\right.$; $\frac{b_1(q^5 - q^3)}{b_1(q^2 - q^4)} = 8$; $\frac{q^3 - q}{1 - q^2} = 8$;

$\frac{q(q^2-1)}{1-q^2} = 8$; $q = \pm 1$ или $q = -8$.

Если $q = \pm 1$, то $b_6 = b_4$ и $b_6 - b_4 = 0 \neq 72$, значит, $q = \pm 1$ — не подходит;

$b_1 = \frac{9}{q^2(1-q^2)} = -\frac{9}{64 \cdot 63} = -\frac{1}{448}$; $S_8 = \frac{8^8 - 1}{448 \cdot 9} = \frac{1864135}{448}$.

8. $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 91 \end{cases}$ $\left|\begin{array}{l} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 13 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 91 \end{array}\right.$; $\frac{b_1(1+q+q^2)}{b_1^2(1+q^2+q^4)} = \frac{1}{7}$;

$7(1+q+q^2) = b_1(1+q^2+q^4)$.

С-30

1. Все способы можно разделить на 6 групп. В i-ой группе $(i \in \{0,...,5\})$ на первой полке i книг, а на второй 5 –) i. Если книги различны, то нужно учесть способы расстановки книг в каждой группе. Для этого нужно переставлять книги на каждой из двух полок. Таких перестановок для i-ой группы в точности $i!(5-i)!$.

2. 9! = 362880 способами.

3. а) $\frac{28!}{24!} = 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 = 491400$

б) $\frac{12!}{16!} = \frac{1}{3 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{1}{43680}$

в) $\frac{39!}{35! \cdot 5!} = \frac{36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39}{120} = 16450{,}2$

4. а) $410 = 2 \cdot 5 \cdot 41$; $41 > 40$ и 41 — простое $\Rightarrow$ не делится

б) $500 = 4 \cdot 5 \cdot 25 \Rightarrow$ делится

в) $780 = 20 \cdot 39 \Rightarrow$ делится

5. 30, 37, 38, 70, 73, 78, 80, 83, 87.

6. а) $8! \cdot 9 = 9! \Rightarrow$ второе больше в 8 раз

б) $(n-1)! \cdot n = n! \Rightarrow$ второе больше в $(n-1)$ раз.

7. Каждый из 9 выпускников дал визитку 8 одноклассникам, поэтому всего было роздано $8 \cdot 9 = 72$ визитки.

8. Осталось свободными 3 буквы из 6, поэтому 3! = 6 способами можно их переставить. Существует 4 позиции, где буквы *у*, *р*, *а* идут подряд, следовательно, всего способов $4 \cdot 6 = 24$.

С-31

1. а) $\frac{13!}{7! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{8 \cdot 9 \cdot 10} = 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$

б) $\frac{4! \cdot 5!}{10!} = \frac{3 \cdot 8}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 14} = \frac{1}{1260}$

в) $\frac{5! \cdot 8!}{10! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \frac{2}{3}$

2. $C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$

3. $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120$

4. Каждый поселок соединен с 9 остальными. Так как всего 10 поселков, то дорог, соединяющих каждые два из них, в точности $9\cdot 10 = 90$. Но дорога соединяющая i-ый поселок с j-ым — это та же дорога, которая соединяет j-ый поселок с i-ым, поэтому каждая дорога подсчитана 2 раза. Следовательно, количество дорог равно 45.

5. Данное количество номеров совпадает с числом способов выбрать 4 различных цифры из множества {0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, т.е.

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4} = 126\,.$$

6. а) C_{12}^8 способами можно расположить 8 фломастеров по 412 ячейкам. Если фломастеры разноцветные, то нужно учесть их всевозможные перестановки, которых в точности 8!. Поэтому, всего способов $8!\cdot C_{12}^8 = \dfrac{12!}{4!}$.

б) Так как свободных ячеек нет, то фломастеры можно только переставлять друг с другом, поэтому всего 12! способов.

7. а) 5! = 120 **б)** 4 = ; 24

С-32

1. а) $\dfrac{8}{8+12} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$ **б)** $\dfrac{12}{8+12} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

2. Всего двузначных чисел 90, а из них делящихся на 3 в точности 30, т.к. неравенство $9 < 3n \le 99$ имеет 30 целых корней. Поэтому вероятность равна $\dfrac{30}{90} = \dfrac{1}{3}$.

3. а) $\dfrac{1}{6}$ **б)** $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

4. Вероятность событий A и B больше 0, но меньше 1;
Вероятность события C равна 1;
Вероятность события D равна 0.

5. Та как события независимые, а вероятность одного события, т.е. вытащили 1 деталь, равна $\dfrac{20-3}{20} = \dfrac{17}{20}$, то искомая вероятность равна $\left(\dfrac{17}{20}\right)^5$.

6. а) Так как бросание кубиков независимое, то всего существует $6\cdot 6 = 36$ исходов бросания. Из них только у 4 сумма равна 5: (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1). Поэтому вероятность равна $\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

б) Всего 6 исходов с суммой не более 4: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (1; 3), (2; 2), (3; 1). Поэтому вероятность равна $1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.

7. Площадь круга равна $\pi\cdot 6^2=36\pi$, а площадь квадрата равна $\left(6\sqrt{2}\right)^2=36\cdot 2$, поэтому вероятность равна $\frac{36\cdot 2}{36\cdot\pi}=\frac{2}{\pi}\approx\frac{2}{3}$.

Вариант 2

С-1

1. 1) $f(x) = 21x - 7, f(3) = 21 \cdot 3 - 7 = 56;$
$f(0) = 21 \cdot 0 - 7 = - 7; f(- 2) = 21\cdot(- 2) - 7 = - 49;$
2) $g(x) = x^2 - 10x; g(8) = 8^2 - 108 = - 16;$
$g(- 3) = (- 3)^2 - 10\cdot(- 3) = 39; g(0) = 0^2 - 10\cdot 0 = 0;$

3) $\varphi(x) = \frac{x-6}{x+4}; \varphi(- 3) = \frac{-3-6}{-3+4} = - 9;$

$\varphi(6) = \frac{6-6}{6+4} = 0; \varphi(0) = \frac{0-6}{0+4} = - 1,5.$

2. 1) $f(x) = 12 - 5x;$

а) $12 - 5x = 2, 5x = 10, x = 2;$ **б)** $12 - 5x = 24, 5x = - 12, x = - \frac{12}{5};$

в) $12 - 5x = 0; 5x = 12, x = \frac{12}{5};$

2) $g(x) = \frac{1}{4}x + 9;$ **а)** $\frac{1}{4}x + 9 = 10, \frac{1}{4}x = 1, x = 4;$

б) $\frac{1}{4}x + 9 = 1, \frac{1}{4}x = - 8, x = - 32;$ **в)** $\frac{1}{4}x + 9 = 0, \frac{1}{4}x = - 9, x = 36.$

3. а) $g(x)=-\frac{3}{4+x}=1; x + 4 = - 3; x = - 7$

б) $g(x)=-\frac{3}{4+x}=-1,5; x + 4 = 2; x = - 2$

в) $g(x)\neq 0$ ни для какого x.

4. а) $f(x) = \frac{x^2+5}{6x^2}, f(5) + f(- 5) = 2f(5) = 2 \cdot \frac{5^2+5}{6\cdot 5^2} = 0,4;$

б) $g(x) = \frac{4x^3-x}{9}, g(- 2) + g(2) = - g(2) + g(2) = 0.$

5. $g(x) = kx + b$,

$\begin{cases} 5 = k + b \\ -1 = 3k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = 5 - b \\ -1 = 3(5 - b) + b \end{cases}$;

$-1 = 15 - 3b + b$; $2b = 16$; $b = 8$; $k = 5 - 8 = -3$.

С-2

1. 1) а) $f(x) = 37-3x$, $D(f) = R$; **б)** $g(x) = \dfrac{53}{x}$, $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$;

в) $\varphi(x) = x^2-7$, $D(\varphi) = R$; **г)** $y = \sqrt{x}$, $D(y) = [0;+\infty]$;

2) а) $g(x) = 10-x^2$, $D(g) = R$; **б)** $f(x) = -\dfrac{42}{x}$, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$;

в) $\varphi(x) = \sqrt{x-3}$, $x-3 \geq 0$, $x \geq 3$, $D(\varphi) = [3;+\infty]$;

г) $y = \dfrac{12}{x+4}$, $x+4 \neq 0$; $x \neq -4$,

$D(y) = (-\infty;-4) \cup (-4;+\infty)$.

2. а) $y = -24x+5$, $E(y) = R$; **б)** $y = 41$, $E(y) = 41$;

в) $y = -\dfrac{22}{x}$, $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

г) $y = \sqrt{x}$, $E(y) = [0;+\infty)$; **д)** $y = |x|$, $E(y) = [0;+\infty)$.

3. а) $g(x) = 4x - 1$; $2 \leq x \leq 8 \Rightarrow 8 \leq 4x \leq 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \leq 4x - 1 \leq 31 \Rightarrow [7; 31]$

б) $h(x) = 5 - 6x$; $-3 \leq x \leq 4 \Rightarrow -24 \leq -6x \leq 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow -19 \leq 5 - 6x \leq 23 \Rightarrow [-19; 23]$

4. а) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x-4}$;

б) $g(x) = \sqrt{x-6}$.

5. а) $y = \dfrac{1}{5-|x|}$; $|x| \neq 5$; $x \neq \pm 5$

б) $y = \sqrt{|x-4|-6}$; $|x-4| \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 \geq 6 \\ x-4 \leq -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

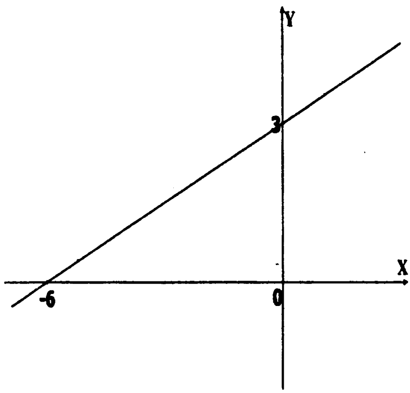
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 10 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [10; +\infty)$

С-3

1. 1) а) $g(-1) = -3$; **б)** $g(0) = -1$; **в)** $g(1) = 0$; **г)** $g(3) = 1{,}5$;
2) а) $g(x) = 3$, $x = -3$; **б)** $g(x) = 0$, $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3{,}5$;
в) $g(x) = -2$, $x_1 = -2$; $x_2 = -0{,}5$;
3) $g_{\max} = 3$, $g_{\min} = -3$; **4)** $E(g) = [-3;\ 3]$.
2. 1)

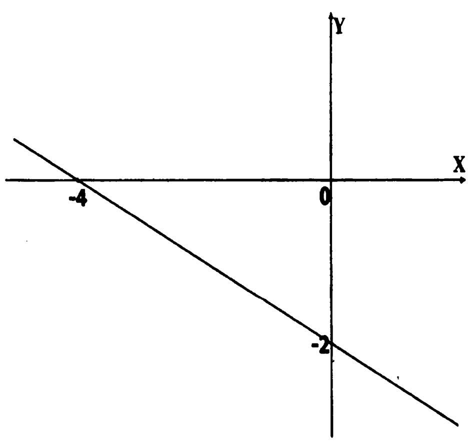
а) $y = 0{,}5x+3$;

x	0	–6
y	3	0



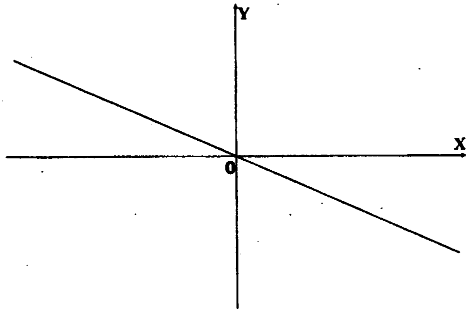
б) $y = -0{,}5x-2$;

x	0	–4
y	–2	0

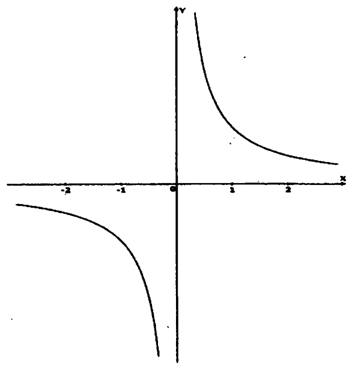


в) $y = -\frac{1}{3}x$;

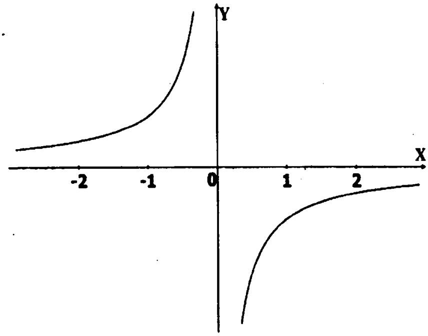
x	0	-3
y	0	1



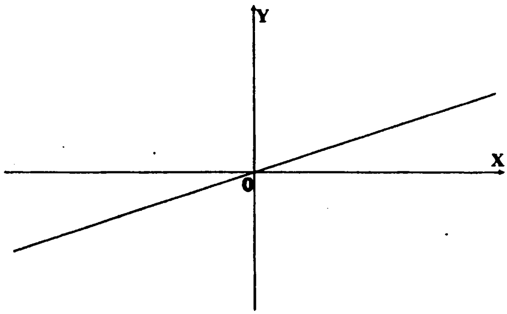
2) а) $y = \frac{6}{x}$;



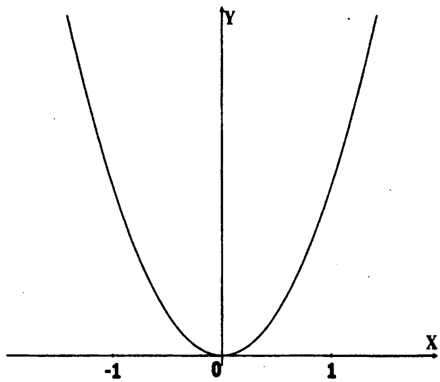
б) $y = -\frac{8}{x}$;



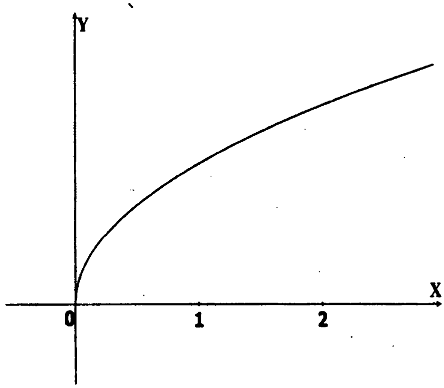
в) $y = \dfrac{x}{4}$;



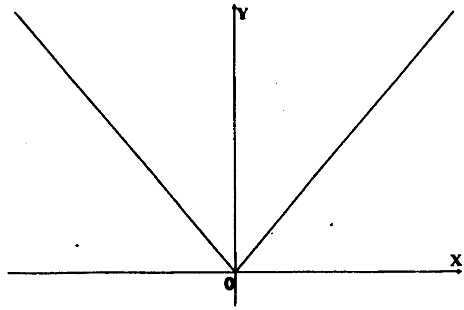
3) а) $y = x^2$;



б) $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$;



в) $y = |x|$.



3. 1) два привала–30 мин и 1 ч; 2) 6 км; 6 км; 6 км;

3) 6 км/ч; $\frac{6}{2} = 3$ (км/ч); $\frac{6}{1,5} = 4$ (км/ч); 4) 6 ч;

5) 7,5 км; 10,5 км; 12 км.

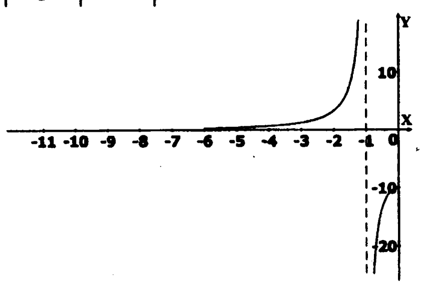
4. 1) велосипедист на 3 ч; 2) 6,5 ч; 2,5 ч;

3) $\frac{35}{6,5} = \frac{70}{13}$ (км/ч); $\frac{35}{2,5} = 14$ (км/ч); 4) велосипедист на 1 ч;

5) через 2 ч; 6) 10 (км).

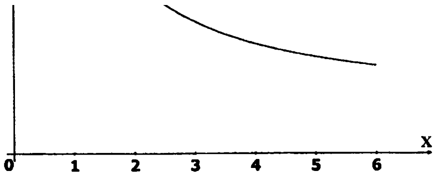
5. а) $y = \frac{10}{x^2 - 1}$, $-6 \le x \le 0$;

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{3}$	–	-10

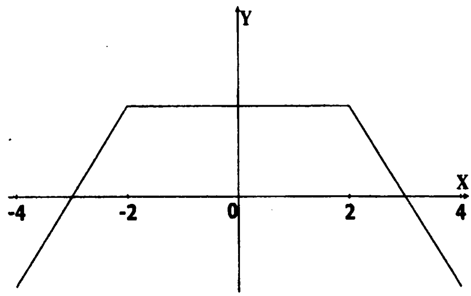


б) $y = \frac{x+6}{x}$, где $1 \le x \le 6$.

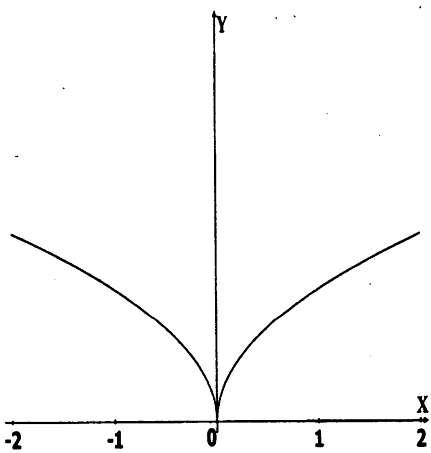
x	1	2	3	4	5	6
y	7	4	3	2,5	$\frac{11}{5}$	1



6. а) $y = \begin{cases} x+3, & \text{если} \quad x < -2 \\ 1, & \text{если} \quad -2 \le x \le 2; \\ -x+3, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$



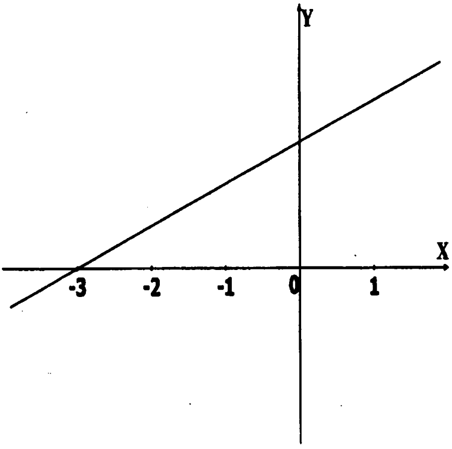
б) $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \ge 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}.$



7. $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & -2 \le x \le -1 \\ 2, & -1 < x \le 2 \\ 2x-2, & 2 < x \le 3 \end{cases}.$

8. $g(x) = \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{2(x^2-1)} = \dfrac{x^2(x+3)-(x+3)}{2(x^2-1)} = \dfrac{(x+3)(x^2-1)}{2(x^2-1)} = \dfrac{x}{2}+1{,}5$;

$x^2-1 \ne 0$, т.к. знаменатель $x \ne \pm 1$.



С-4

1. 1) а) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$;

б) $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 1) \cup (3; 4]$;

$f(x) < 0$ при $x \in [-3; -2] \cup (1; 3)$;

2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-3; -1]$ и $[2; 4]$;

$f(x)$ убывает при $x \in [-1; 2]$;

3) $x_{max} = -1$, $x_{min} = -3$;

4) $E(f) = [-2; 3]$.

2. 1) а) $y = 25x-18$,

$D(y) = E(y) = R$, $y > 0$ при $x > \dfrac{18}{25}$, $y < 0$ при $x < \dfrac{18}{25}$,

$y = 0$ при $x = \dfrac{18}{25}$, $y(x)$ возрастает на R;

б) $y = -0{,}83x+16{,}2$; $D(y) = E(y) = R$;

$y>0$ при $x<\dfrac{16{,}2}{0{,}83} = \dfrac{1620}{83}$, $y<0$ при $x>\dfrac{1620}{83}$; $y = 0$ при $x = \dfrac{1620}{83}$,

$y(x)$ убывает на R;

в) $y = -27$ $D(y) = R$, $E(y) = -27$, $y < 0$ на R;

2) а) $y = \frac{36}{x}$;

$D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$; $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $y(x)$ убывает на $D(y)$;

б) $y = -\frac{63}{x}$, $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$;

$y > 0$ при $x < 0$, $y < 0$ при $x > 0$, $y(x)$ возрастает на R.

3. 1) а) $y = \frac{1}{5}x-8$, $\frac{1}{5}x = 8$, $x = 40$;

б) $y = -0{,}4x+32$, $0{,}4x = 32$, $x = 80$;

в) $y = 47$ нет нулей функции;

2) а) $y = 9x(x-5)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$;

б) $y = 16(x^2+2)$ нет нулей функции;

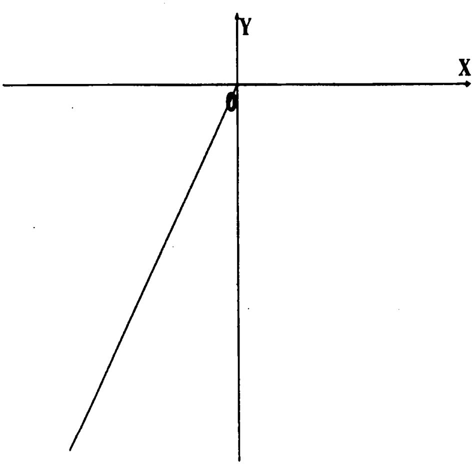
в) $y = x(x-1)(x+2)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$;

3) а) $y = \sqrt{x-3}$, $x = 3$;

б) $y = \sqrt{x^2-4}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;

в) $y = \sqrt{x^2+4}$ нет нулей функции.

4. $g(x) = x-|x|$; $g(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.



Свойства: $D(g) = R$, $E(g) = (-\infty; 0]$.

Нули функции: $x \ge 0$, $g(x) < 0$ при $x < 0$,

$g(x)$ возрастает при $x \le 0$, $g_{max} = g(0) = 0$.

5. $D(f) = R$, $E(f) = [-4; 4]$;
$f(x) > 0$ при $x<0$, $f(x)<0$ при $x > 0$, $f(x) = 0$ при $x = 0$
$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty;-2]$ и $[2;+\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in [-2; 2]$.

С-5

1. 1) а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; $D = 64 - 60 = 4$; $x_1 = \dfrac{8+2}{2} = 5$; $x_2 = 3$;

б) $-y^2 + 3y - 10 = 0$, $y^2 - 3y + 10 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 10 < 0$, значит, нет корней;

в) $4b^2 - 16b + 12 = 0$, $b^2 - 4b + 3 = 0$,

$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$, $b_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$, $b_2 = 1$;

г) $2a^2 - a = 0$, $a(2a - 1) = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0{,}5$;

2) а) $5y^2 + 14y - 3 = 0$,

$D = 196 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 256$, $y_1 = \dfrac{-14+16}{10} = 0{,}2$, $y_2 = -3$;

б) $10b^2 - 7b + 1 = 0$, $D = 49 - 4 \cdot 10 = 9$, $b_1 = \dfrac{7+3}{20} = 0{,}5$, $b_2 = 0{,}2$;

в) $-0{,}4c^2 + 0{,}8 = 0$, $0{,}4c^2 = 0{,}8$, $c^2 = 2$, $c_{1,2} = \pm\sqrt{2}$;

г) $7x^2 - 28 = 0$, $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

3) а) $0{,}5x^2 - x - 1 = 0$, $x^2 - 2x - 2 = 0$,

$D = 4 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 3$, $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$;

б) $-100c^2 + 20c + 3 = 0$, $100c^2 - 20c - 3 = 0$,

$D = 400 + 4 \cdot 100 \cdot 3 = 1600$, $c_1 = \dfrac{20+40}{200} = 0{,}3$; $c_2 = -\dfrac{20}{200} = -0{,}1$;

в) $-25a^2 + 10a - 1 = 0$, $25a^2 - 10a + 1 = 0$, $D = 100 - 4 \cdot 25 = 0$,

$a = \dfrac{10}{50} = 0{,}2$.

2. 1) а) $x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x + 2)^2 - 3$;

б) $3b^2 - 12b + 11 = 3(b^2 - 4b + \dfrac{11}{3}) = 3(b^2 - 4b + 4 - \dfrac{1}{3}) = 3(b - 2)^2 - 1$;

в) $y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y + 1)^2 - 1$;

2) а) $-b^2 + 6b - 8 = -(b^2 - 6b + 8) = -(b^2 - 6b + 9 - 1) = -(b - 3)^2 + 1$;

б) $\dfrac{1}{4}y^2 - y + 2 = \dfrac{1}{4}(y^2 - 4y + 8) = \dfrac{1}{4}(y^2 - 4y + 4 + 4) = \dfrac{1}{4}(y - 2)^2 + 1$.

3. а) $x^2 - 10x + 28 = x^2 - 10x + 25 + 3 = (x - 5)^2 + 3 > 0$;

б) $-x^2 + 4x - 6 = -(x^2 - 4x + 6) = -(x^2 - 4x + 4 + 2) = -(x - 2)^2 - 2 < 0$.

4. а) $b^2 - 4b + 9$, $b_0 = \dfrac{4}{2} = 2$;

б) $-b^2 + 6b - 14$, $b_0 = \dfrac{-6}{-2} = 3$.

5. $(12 - b)$ см, $(8 + b)$ см — новые стороны;
$(12 - b)(8 + b)$ см^2 — площадь полученного прямоугольника;
$(12 - b)(8 + b) = -b^2 + 4b + 96$, $b_0 = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

С-6

1. 1) а) $x^2 - 7x + 10 = 0$,
$D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = \dfrac{7+3}{2} = 5$, $x_2 = 2$, $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$;
б) $3x^2 + 3x - 6 = 0$, $x^2 + x - 2 = 0$,
$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$, $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, $x_2 = -2$,
$3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$;
в) $7x^2 - 63 = 7(x^2 - 9) = 7(x-3)(x+3)$;
г) $5x^2 + 19x - 4 = 0$,
$D = 361 + 4 \cdot 5 \cdot 4 = 441$, $x_1 = \dfrac{-19+21}{10} = \dfrac{1}{5}$, $x_2 = -4$,

$5x^2 + 19x - 4 = 5(x - \dfrac{1}{5})(x+4) = (5x-1)(x+4)$;
2) а) $x^2 + x - 72 = 0$,
$D = 1 + 4 \cdot 72 = 289$, $x_1 = \dfrac{-1+17}{2} = 8$, $x_2 = -9$, $x^2 + x - 72 = (x-8)(x+9)$;
б) $7x^2 + 20x - 3 = 0$,
$D = 400 + 4 \cdot 7 \cdot 3 = 484$, $x_1 = \dfrac{-20+22}{14} = \dfrac{1}{7}$, $x_2 = -3$,

$7x^2 + 20x - 3 = 7(x - \dfrac{1}{7})(x+3) = (7x-1)(x+3)$;
в) $12x^2 - 588 = 12(x^2 - 49) = 12(x-7)(x+7)$;
г) $3x^2 - 12x + 3 = 3(x^2 - 4x + 1) = 3(x^2 - 4x + 4 - 3) = 3((x-2)^2 - 3) =$
$= 3(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})$.
2. 1) а) $x^2 - 5x + 7 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 7 < 0$;
б) $-3x^2 + 2x - 1 = 0$, $3x^2 - 2x + 1 = 0$, $D = 4 - 4 \cdot 3 < 0$;
2) а) $x^2 - 12x + 39 = 0$, $D = 144 - 4 \cdot 39 < 0$;
б) $-4x^2 + 4x - 3 = 0$, $4x^2 - 4x + 3 = 0$, $D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$;
в) $x^2 + 3 = 0$, $D = -4 \cdot 3 < 0$.

3. 1) а) $\frac{4b+12}{b^2-9}=\frac{4(b+3)}{(b-3)(b+3)}=\frac{4}{b-3}$;

б) $\frac{c^2+c-6}{7c+21}=\frac{(c-2)(c+3)}{7(c+3)}=\frac{c-2}{7}$,

$c^2+c-6=0$, $D=1+4\cdot 6=25$, $c_1=\frac{-1+5}{2}=2$, $c_2=-3$;

в) $\frac{16-2x}{8+7x-x^2}=\frac{2(8-x)}{-(x-8)(x+8)}=\frac{2}{x+1}=x^2-7x-8=0$,

$D=49+4\cdot 8=81$, $x_1=\frac{7+9}{2}=8$; $x_2=-1$;

2) а) $\frac{a^2-16a+63}{a^2-81}=\frac{(a-9)(a-7)}{(a-9)(a+9)}=\frac{a-7}{a+9}$,

$a^2-16a+63=0$, $D=256-4\cdot 63=4$,

$a_1=\frac{16+2}{2}=9$, $a_2=7$;

б) $\frac{y^3+7y^2-60y}{10y-50}=\frac{y(y^2+7y-60)}{10(y-5)}=\frac{y(y-5)(y+12)}{10(y-5)}=\frac{y(y+2)}{10}$,

$y^2+7y-60=0$, $D=49+4\cdot 60=289$,

$y_1=\frac{-7+17}{2}=5$, $y_2=-12$;

в) $\frac{3+14b-5b^2}{3b-b^2}=\frac{-(b-3)\left(b+\frac{1}{5}\right)\cdot 5a}{b(3-b)}=\frac{5b+1}{b}$, $5b^2-14b-3=0$,

$D=196+4\cdot 5\cdot 3=256$, $b_1=\frac{14+16}{10}=3$; $b_2=-\frac{1}{5}$.

4. 1) $\frac{x^2-8x-33}{10x+30}=\frac{(x-11)(x+3)}{10(x+3)}=\frac{x-11}{10}=f(x)$, $x^2-8x-33=0$,

$D=64+4\cdot 33=196$, $x_1=\frac{8+14}{2}=11$, $x_2=-3$,

$f(-9)=\frac{-9-11}{10}=-2$; $f(12)=\frac{12-11}{10}=0{,}1$; $f(111)=\frac{111-11}{10}=10$;

2) $\frac{8y-56}{y^2-27y+140}=\frac{8(y-7)}{(y-20)(y-7)}=\frac{8}{y-20}=f(y)$,

$y^2-27y+140=0$,

$D=729-4\cdot 140=169$, $y_1=\frac{27+13}{2}=20$; $y_2=7$,

$f(-4) = \dfrac{8}{-4-20} = -\dfrac{1}{3}$; $f(22{,}5) = \dfrac{8}{22{,}5-20} = 3{,}2$;

$f(24) = \dfrac{8}{24-20} = 2.$

5. $\dfrac{9b-4}{b+7} - \dfrac{44-16b}{b^2+5b-14} = \dfrac{9b-4}{b+7} - \dfrac{44-16b}{(b-2)(b+7)} =$

$= \dfrac{(9b-4)(b-2)-44+16b}{(b-2)(b+7)} = \dfrac{9b^2-4b-18b+8-44+16b}{(b-2)(b+7)} = \dfrac{9b^2-6b-36}{(b-2)(b+7)}$,

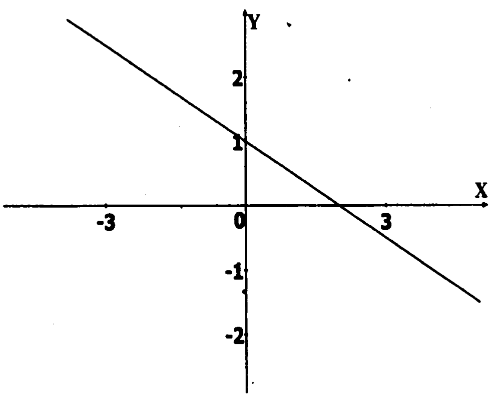
$b^2 + 5b - 14 = 0,$

$D = 25 + 4\cdot 14 = 81,\ b_1 = \dfrac{-5+9}{2} = 2;\ b_2 = -7.$

6. $y(x) = \dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{18-2x^2} = \dfrac{x^2(x-2)-9(x-2)}{2(9-x^2)} =$

$= -\dfrac{(x-2)(x^2-9)}{2(x^2-9)} = \dfrac{2-x}{2} = -\dfrac{x}{2}+1,$

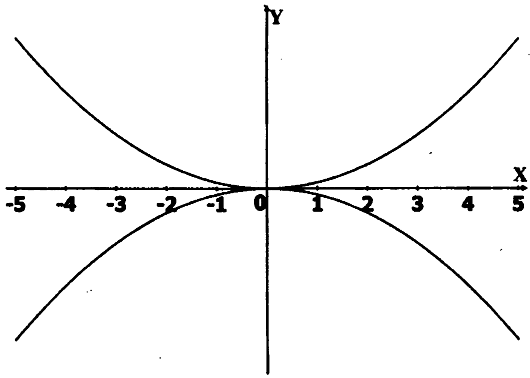
$x \neq \pm 3.$



С-7

1. $g(x) = \dfrac{1}{10}x^2$;

x	0	±1	±2	±4	±6	±8
$g(x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{32}{5}$



$g(-3) = g(3) = 0{,}9,\ g(-5) = g(5) = 2{,}5,$

$f(x) = -\dfrac{1}{10}x^2, f(-3) = f(3) = -0{,}9, f(-5) = f(5) = -2{,}5.$

2. $y = -2x^2;$

а) $y = -200,\ -200 = -2x^2,\ x^2 = 100,\ x = \pm 10,\ (10,-200),\ (-10,-200);$

б) $y = -3200,\ -3200 = -2x^2,\ x^2 = 1600,\ x = \pm 40;\ (40,-3200),\ (-40,-3200)$

в) $y = 40x,\ 40x = -20x^2,\ x_1 = 0,\ x_2 = -2;\ (0,\ 0),\ (-2,-80);$

г) $y = -1400x,\ -1400x = -2x^2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 700;\ (0,\ 0);\ (700,-980000).$

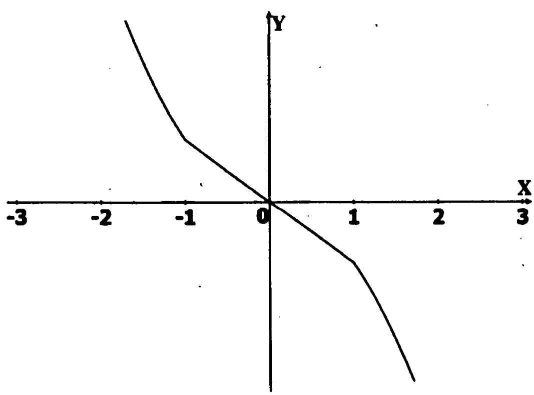
3. $y = 40x^2;$

а) $A(-2;-160);\ -160 = 40\cdot 4$ — ложно, значит, не принадлежит;

б) $B(2,\ 160);\quad 160 = 40\cdot 4$ — верно, значит, принадлежит;

в) $C(0{,}1;\ 0{,}4);\quad 0{,}4 = 40\cdot 0{,}01$ — верно, значит, принадлежит.

4.



5.

а) $y = \frac{1}{4}x^2, \; x \in [-4; 8],$

$y_{\min} = y(0) = 0, y_{\max} = y(8) = 16;$

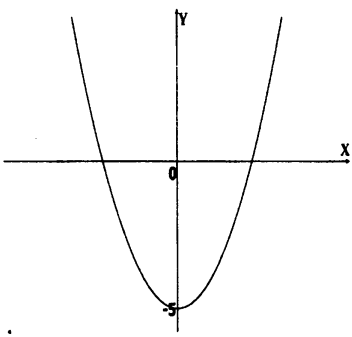
б) $y = -\frac{1}{3}x^2, x \in [-6; 3],$

$y_{\min} = y(-6) = -\frac{1}{3} \cdot 36 = -12, y_{\max} = y(0) = 0.$

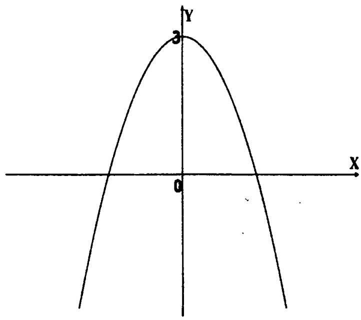
6. $S = \frac{gt^2}{2}$; $560 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$; $t^2 = 112$; $t = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ (с).

С-8

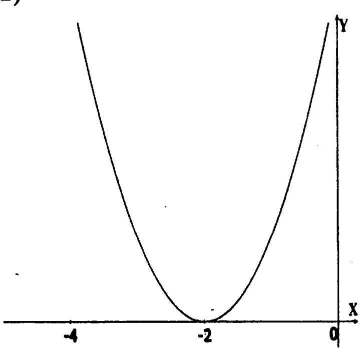
1. а)



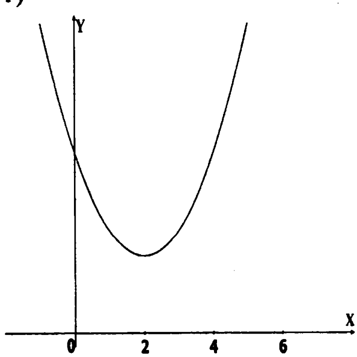
б)



в)

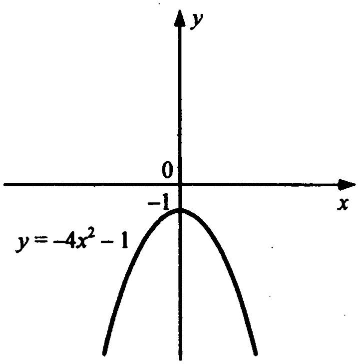


г)

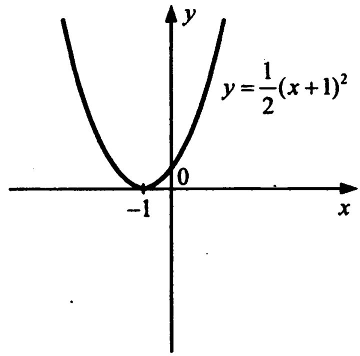


2. а) I, II, III IV; **б)** III и IV; **в)** I и II;

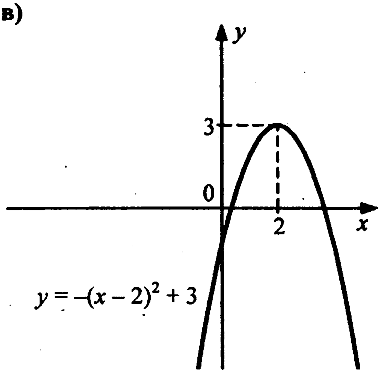
3. а)



б)



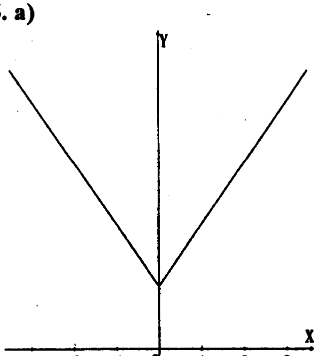
в)



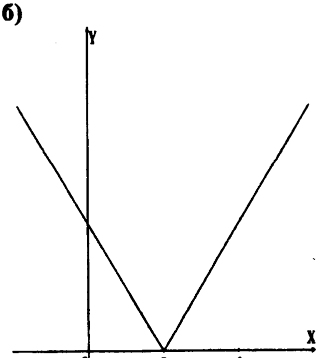
4. а) $-9x^2 + 1 = 0;\ x^2 = \frac{1}{9};\ x = \pm\frac{1}{3};$ **б)** $x^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ **нет нулей;**

в) $-2x^2 + 16 = 0;\ x^2 = 8;\ x = \pm 2\sqrt{2}$.

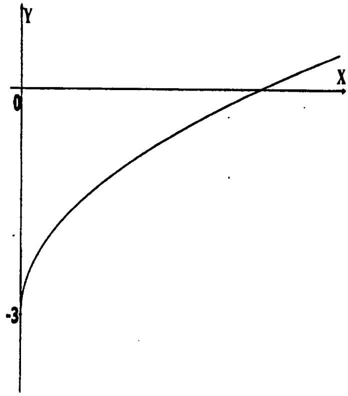
5. а)



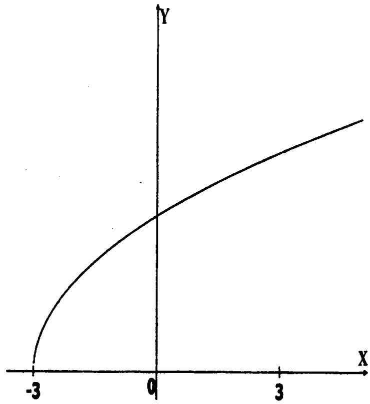
б)



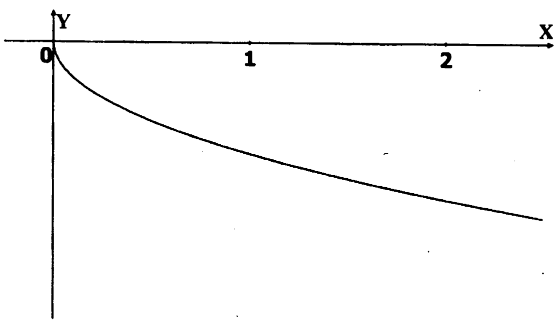
в)



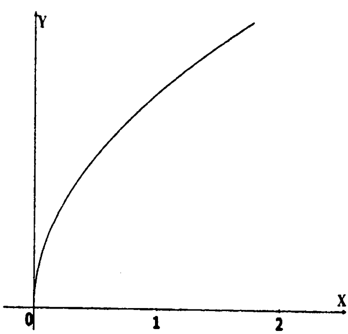
г)



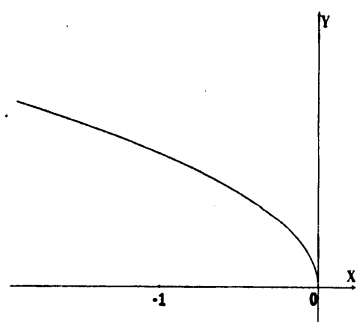
6. а)



б)



в)



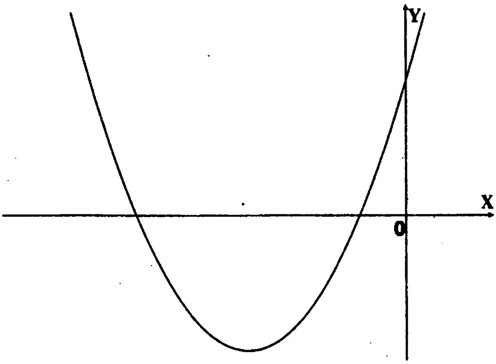
С-9

1. а) $g(x)=x^2+4x+2$, $m=-\frac{4}{2}=-2$, $n=f(-2)=4-8+2=-2$, $(-2;-2)$;

б) $g(x)=-x^2-6x+3$, $m=\frac{6}{-2}=-3$, $n=f(-3)=-9+18+3=12$, $(-3;\ 12)$;

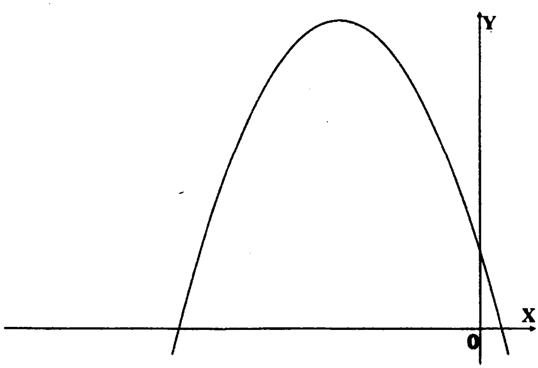
в) $g(x)=4x^2-8x-1$, $m=\frac{8}{8}=1$, $n=f(1)=4-8-1=-5$, $(1;-5)$.

2. $g(x)=x^2+4x+2$;

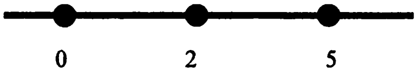


а) $x_1\approx-3{,}4$ $x_2\approx-0{,}6$,
$g(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;+\infty)$,
$g(x)<0$ при $x\in(x_1;\ x_2)$;
б) $g(x)$ возрастает при $x\in[-2;+\infty)$, убывает при $x\in(-\infty;-2]$, $g_{\min}=-2$.

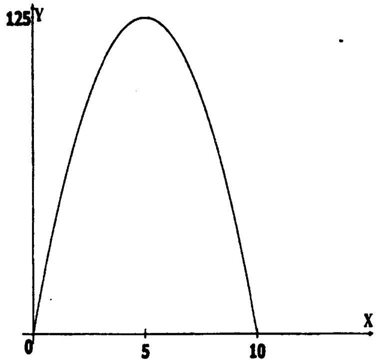
3. $g(x)=-x^2-6x+3$;



а) $x_1 \approx -6{,}4$ $x_2 \approx 0{,}4$,
$g(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$,
$g(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
б) $g(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -3]$, убывает при $x \in [-3; +\infty)$,
$g_{\max} = 12$.
4. $y = -x^2+4x+3$, $x \in [0; 5]$,
$m = \dfrac{-4}{-2} = 2$, $n = y(2) = -4+8+3 = 7$,.
$y(5) = -25+20+3 = -2$,
$E(y) = [-2; 7]$.



5. $y = x^2+bx+c$, $K(7, 2)$, $m = -\dfrac{b}{2} = 7$, $b = -14$,
$2 = n = f(7) = 49-14\cdot 7+c = c-49$, $c = 51$.
6. $S(t) = 50t-5t^2$;



1) 125 м; 2) стрела поднималась вверх при $t \in [0; 5]$, опускалась вниз при $t \in [5; 10]$; 3) через 10 с.

С-10

1. $g(x) = x^{80}$;
1) а) $g(1{,}423) > g(1{,}327)$, т.к. $|1{,}423| > |1{,}327|$;
б) $g(-80{,}3) > g(-78{,}2)$, т.к. $|-80{,}3| > |-78{,}2|$;
в) $g(-23{,}1) > g(18{,}7)$, т.к. $|-23{,}1| > |18{,}7|$;
г) $g(-42{,}8) = g(42{,}8)$, т.к. $|-42{,}8| = |42{,}8|$;
2) а) $g\left(\dfrac{5}{8}\right) < g\left(\dfrac{2}{3}\right)$, т.к. $\left|\dfrac{5}{8}\right| < \left|\dfrac{2}{3}\right|$;

б) $g\left(-\frac{4}{9}\right) < g\left(-\frac{1}{2}\right)$, т.к. $\left|-\frac{4}{9}\right| < \left|-\frac{1}{2}\right|$;

в) $g\left(-\frac{17}{20}\right) = g(0,85)$, т.к. $\left|-\frac{17}{20}\right| = |0,85|$;

г) $g(-0,72) > g\left(-\frac{5}{7}\right)$, т.к. $|-0,72| > \left|-\frac{5}{7}\right|$.

2. $f(x) = x^{95}$;

1) а) $f(23,4) > f(21,8)$, т.к. $23,4 > 21,8$;

б) $f(-3,9) < f(-3,7)$, т.к. $-3,9 < -3,7$;

в) $f(-52,3) < f(52,3)$, т.к. $-52,3 < 52,3$;

г) $f(-47,2) < f(45,8)$, т.к. $-47,2 < 45,8$;

2) а) $f\left(\frac{3}{7}\right) < f\left(\frac{4}{9}\right)$, т.к. $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$;

б) $f(-0,4) < f\left(\frac{6}{13}\right)$, т.к. $-0,4 < \frac{6}{13}$;

в) $f\left(-\frac{3}{8}\right) = -f(0,375)$, т.к. $-\frac{3}{8} = -0,375$;

г) $f(-27,4) < f(27,4)$, т.к. $-27,4 < 27,4$.

3. $x^n = 450$; а) 2 корня; б) 1 корень.

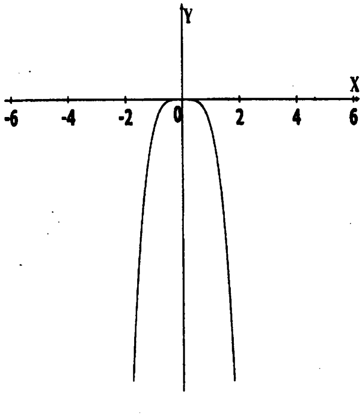
4. а) $x^4 = 441$, $x = \pm\sqrt[4]{441}$;

б) $x^4 = -36$, нет корней, т.к. $E(x^4) = [0;+\infty)$;

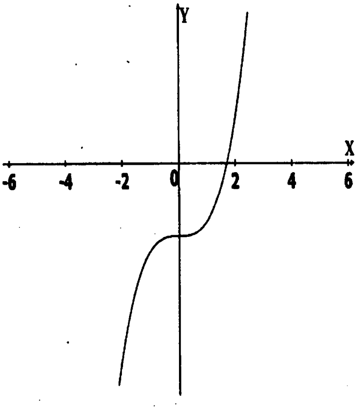
в) $x^3 = -64$, $x = -4$; г) $x^3 = \frac{27}{125}$, $x = \frac{3}{5}$.

5.

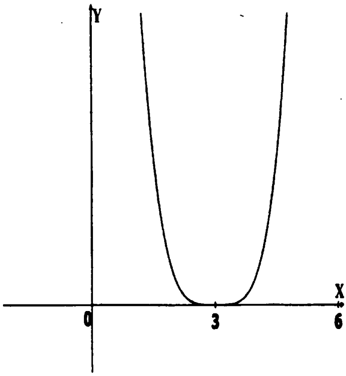
а)



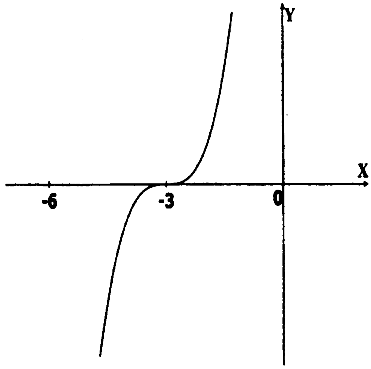
б)



в)



г)



6. а) $x^3 = 23x+7$ три корня; б) $x^3 = 0{,}25x-4$ один корень;
в) $x^4 = 23x+7$ два корня; г) $x^4 = 0{,}25x-4$ нет корней.
7. а) $y = x^7$, $549{,}827 = (-3{,}7)^7$ — ложно, значит, точка M не принадлежит графику.
$-12{,}749 = (-0{,}89)^7$ — ложно, значит, точка K не принадлежит графику.
б) $y = x^6$; $1{,}0487 = 1{,}3^6$ — ложно, значит, точка P не принадлежит графику.
$1{,}8724 = (-0{,}8)^6$ — ложно, значит, точка Q не принадлежит графику.

С-11

1. 1) а) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; б) $\sqrt[3]{343} = 7$;

в) $\sqrt[4]{0{,}0016} = 0{,}2$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}} = -\frac{1}{3}$;

2) а) $5\sqrt[3]{0{,}216} = 5\cdot 0{,}6 = 3$; б) $0{,}3\cdot\sqrt[3]{64} = 0{,}3\cdot 4 = 1{,}2$;

в) $6\cdot\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = 6\cdot\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = 6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -9$;

г) $12\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} = 12\cdot\sqrt[4]{\frac{625}{81}} = 12\cdot\frac{5}{3} = 20$.

2. 1) а) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$;

б) $\sqrt[5]{0{,}00001} - \sqrt[3]{-0{,}064} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$;

в) $2{,}5\sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = 2{,}5\cdot 0{,}5 - \frac{5}{2} = 2{,}5\cdot 0{,}5 - 2{,}5 = -1{,}25$;

2) а) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}-\sqrt[4]{\frac{16}{625}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$;

б) $\sqrt[3]{0,343}-\sqrt[5]{-0,00243}=0,7+0,3=1$;

в) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\sqrt[3]{0,125}=\frac{5}{3}-0,5=\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.

3. а) $3=\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}=4$; б) $3=\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{57}<\sqrt[3]{64}=4$;

в) $0<\sqrt[4]{0,6}<1$; г) $2<\sqrt[5]{32}<\sqrt[5]{48}<\sqrt[5]{243}=3$.

4. 1) а) $\left(\sqrt{15}\right)^2=15$; б) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^3=9$; в) $\left(-\sqrt[4]{17}\right)^4=17$; г) $-\sqrt[4]{17^4}=-17$;

д) $\left(-\sqrt[7]{3}\right)^7=-3$;

2) а) $\left(3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3=27\cdot2=54$; б) $\left(-2\cdot\sqrt[4]{7}\right)^4=16\cdot7=112$; в) $\left(-\sqrt[5]{26}\right)^5=-26$;

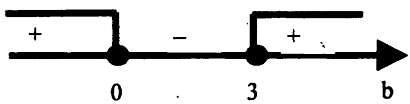
г) $-3\cdot\sqrt[5]{6^5}=-3\cdot6=-18$; д) $\left(-\sqrt[8]{3}\right)^8=3$.

5. а) $x^4=7, x=\pm\sqrt[4]{7}$; б) $x^5=30, x=\sqrt[5]{30}$; в) $\frac{1}{32}x^6-2=0, x^6=64, x=\pm2$;

г) $\frac{1}{4}x^5+7=0, x^5=-28, x=-\sqrt[5]{28}$.

6. а) $\sqrt[8]{x+8}$, $x+8\ge0$, $x\ge-8$; б) $\sqrt[7]{y-2}$, y — любое;

в) $\sqrt[4]{b(b-3)}$, $b(b-3)\ge0$;

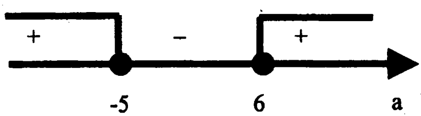


$b\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

г) $\sqrt[6]{a^2-a-30}$, $a^2-a-30\ge0$,

$D=1+4\cdot30=121$,

$a_1=\frac{1+11}{2}=6$, $a_2=-5$;



$a\in(-\infty;-5]\cup[6;+\infty)$.

7. а) $x^8-15x^4-16=0$, $x^4=y\ge0$, тогда $y^2-15y-16=0$, $D=289$, $y_1=\frac{15+17}{2}=16$,

$y_2<0$, $x^4=16$, $x_{1,2}=\pm2$.

Ответ: ±2.

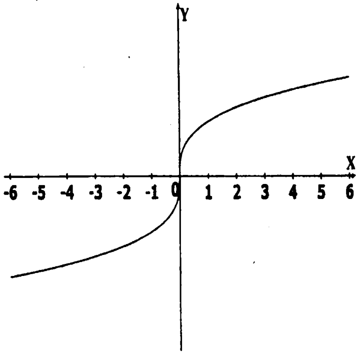
б) $x^4-10x^2+27=0$, $x^2=y\ge0$, тогда $y^2-10y+27=0$, $D<0$ нет корней.

в) $x^6-7x^3-8=0$, $x^3=y$, тогда $y^2-7y-8=0$, $D=81$, $y_1=\frac{7+9}{2}=8$, $y_2=-1$,

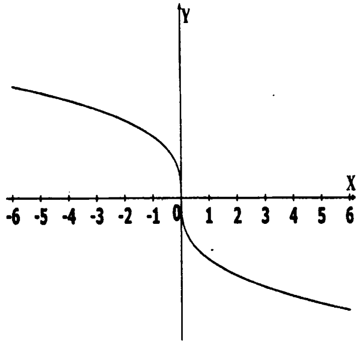
$x^3=8, x=2$; $x^3=-1, x=-1$.

Ответ: -1; 2.

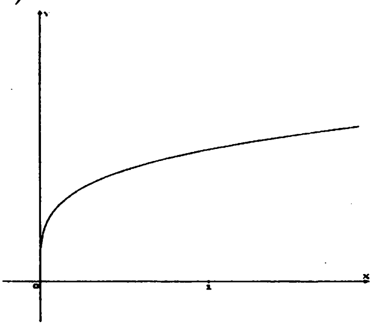
8. а)



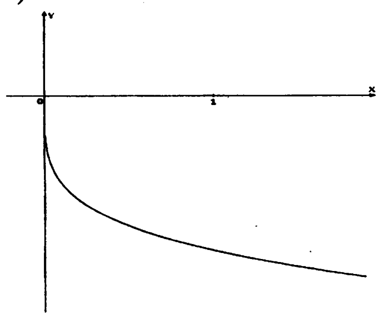
б)



в)



г)



С-12

1. а) $x^4 - x^3 + 2x^5 - 2 = 0$, $2x^5 + x^4 - x^3 - 2 = 0$ пятая степень;
б) $(2x - 1)(x + 4)(x - 8) = 0$ третья степень;
в) $(x^2 + 6)(x - 5) - x(x + 1)(x - 1) = 0$, $x^3 + 6x - 5x^2 - 30 - x^3 + x = 0$,
$-5x^2 + 7x - 30 = 0$ вторая степень;
г) $(5x^4 - 1)(5x^2 - 2) - (5x^3 + 1)^2 = 0$,
$25x^6 - 5x^2 - 10x^4 + 2 - 25x^6 - 10x^3 - 1 = 0$,
$-10x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ четвертая степень.
2. а) $x^3 - 9x = 0$, $x(x^2 - 9) = 0$, $x(x - 3)(x + 3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 3$;
б) $x^2(x - 7) + 7(x^2 - x) = -6$, $x^3 - 7x^2 + 7x^2 - 7x + 6 = 0$, $x^3 - 7x + 6 = 0$,
$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$, $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$;
в) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$,

$$D = 169 - 4 \cdot 36 = 25,\ x_1^2 = \frac{13+5}{2} = 9,\ x_2^2 = 4,\ x_{1,2} = \pm 3;\ x_{3,4} = \pm 2.$$

3. 1) а) $(8x+1)(2x-3)-(4x-2)^2=1$,
$16x^2+2x-24x-3-16x^2+16x-4-1=0$,

$-6x=8,\ x=-\frac{4}{3}$;

б) $5x(5x-1)-(5x+3)(5x-3)=x-3$,
$25x^2-5x-25x^2+9=x-3,\ 6x=12,\ x=2$;

в) $\frac{2x-1}{5}-\frac{x+1}{2}=1,\ 4x-2-5x-5=10,\ x=-17$;

г) $\frac{x(2x-5)}{6}-\frac{x(x-2)}{3}=1$,

$2x^2-5x-2x^2+4x-6=0,\ x=-6$;

2) а) $(2x-3)(x+1)=x^2+17$,
$2x^2-3x+2x-3=x^2+17,\ x^2-x-20=0$,

$D=1+4\cdot 20=81,\ x_1=\frac{1+9}{2}=5,\ x_2=-4$;

б) $(x-7)(x+7)+(x-2)^2=11x+30-(x+5)^2$,
$x^2-49+x^2-4x+4=11x+30-x^2-10x-25$,
$3x^2-5x-50=0$,
$D=25+4\cdot 3\cdot 50=625$,

$x_1=\frac{5+25}{6}=5,\ x_2=-\frac{10}{3}$;

в) $\frac{x^2}{27}+\frac{x}{3}=\frac{x+9}{3},\ \frac{x^2}{27}=3,\ x^2=81,\ x_{1,2}=\pm 9$;

г) $\frac{x^2-6x-4}{3}=\frac{11x}{10}+1$

$10x^2-60x-40=33x+30,\ 10x^2-93x-70=0$,

$\mathrm{D}=107^2,\ x_1=\frac{93+107}{10}=20,\ x_2=-1{,}4$.

4. а) $x+11=0$;
б) $(x-2)(x+9)=0,\ x^2+7x-18=0$;
в) $(x-4)(x-7)(x+7)=0$,
$(x-4)(x^2-49)=0,\ x^3-4x^2-49x+196=0$.

5. а) $\frac{x(2-x)}{2}+\frac{3(x-3)^2}{2}=2\frac{1}{2}-\frac{2(4-x)^2}{3}$,

$3x(2-x)+9(x^2-6x+9)=15-4(16-8x+x^2)$,
$6x-3x^2+9x^2-54x+81=15-64+32x-4x^2$,
$10x^2-80x+130=0,\ x^2-8x+13=0$,

$D=64-4\cdot 13=4\cdot 3,\ x_{1,2}=\frac{8\pm 2\sqrt{3}}{2}=4\pm\sqrt{3}$;

б) $x = \frac{(3-x)^2}{9} - \frac{x(x-12)}{18} + \frac{(3-x)(x-2)}{36}$,

$36x = 4(9 - 6x + x^2) - 2x(x - 12) + (3x - x^2 - 6 + 2x)$,

$6x = 36 - 24x + 4x^2 - 2x^2 + 24x - x^2 - 6 + 5x$,

$x^2 - 31x + 30 = 0$,

$D = 961 - 4 \cdot 30 = 841, x_1 = \frac{31+29}{2} = 30, x_2 = 1$.

6. а) $x^6 + 3x^4 + x^2 = -16$,

$x^6 + 3x^4 + x^2 + 16 = 0$, уравнение не имеет корней , т.к. $x^6 + 3x^4 + x^2 + 16 > 0$ при всех x;

б) $25x(x + 2) - (5x - 1)(5x + 1) = 25(2x - 1) + 26$,

$25x^2 + 50x - 25x^2 + 1 = 50x - 25 + 26$;

$1 = 1$ — у этого уравнения корень — любое число;

в) $6x^5 + 8x^3 + 12x - 41 = 0$, $6x^5 + 8x^3 + 12x = 41$, верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля), а правая $41 > 0$;

г) $5x^5 + 25x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 5x = 17$, уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 5, а левая — нет.

С-13

1. а) $5(x - 2) - 4(3 + x) = 2 + ax$,

$5(6 - 2) - 4(3 + 6) = 2 + 6a$, $20 - 36 = 2 + 6a$, $6a = -18$, $a = -3$;

б) $9x^2 + 3(c + 2) - (3 - 2c) = 0$,

$9 \cdot 25 + 3(c + 2) - (3 - 2c) = 0$, $3c + 6 - 3 + 2c + 225 = 0$,

$5c = -228$, $c = -\frac{228}{5} = -45{,}6$, $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

2. $kx + 1 = 7$, $kx = 6$; $x = \frac{6}{k}$, $k = \pm1; \pm2; \pm3; \pm6$.

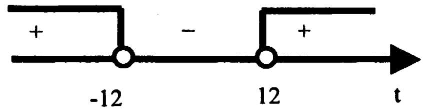
3. $4x - 2b = 5$, $x = \frac{2b+5}{4}$;

а) $\frac{2b+5}{4} > 0$, $2b > -5$, $b > -2{,}5$; **б)** $\frac{2b+5}{4} < 0$, $b < -2{,}5$;

в) $\frac{2b+5}{4} > 8$; $2b + 5 > 32$; $2b > 27$; $b > 13{,}5$;

г) $\begin{cases} \frac{2b+5}{4} > 1; \quad 2b+5 > 4; \quad b > -0{,}5 \\ \frac{2b+5}{4} < 3; \quad 2b+5 < 12; \quad b < 3{,}5 \end{cases}$ $-0{,}5 < b < 3{,}5$.

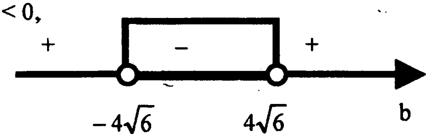
4. а) $2x^2 + 4x + t = 0$,
$D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot t > 0$, $16 - 8t > 0$, $8t < 16$; $t < 2$;
б) $6x^2 + tx + 6 = 0$,
$D = t^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 > 0$,
$t^2 - 144 > 0$,
$(t - 12)(t + 12) > 0$.



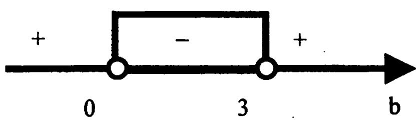
$t \in (-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.

5. а) $4x^2 - 8x + c = 0$,
$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0$, $64 = 16c$, $c = 4$;
б) $x^2 + cx + 16 = 0$,
$D = c^2 - 4 \cdot 16 = 0$, $c^2 = 64$, $c_{1,2} = \pm 8$.
6. а) $6^2 + bx + 4 = 0$,
$D = b^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 < 0$,
$b^2 - 96 < 0$, $(b - 4\sqrt{6})(b + 4\sqrt{6}) < 0$,

$-4\sqrt{6} < b < 4\sqrt{6}$.



б) $x^2 + 8x + b = 0$,
$D = 64 - 4b < 0$,
$4b > 64$, $b > 16$.
7. $b(2 - x) = 6$,
$2 - x = \frac{6}{b}$, $x = 2 - \frac{6}{b}$, $x = \frac{2b - 6}{b}$,
$\frac{2b-6}{b} < 0$, $\frac{b-3}{b} < 0$.



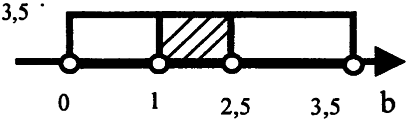
$b = 1; 2$.

8. $x^2 + ax = 0$ при $a = 0$, $x = 0$ — единственный корень;
$x^2 + ax - 1 = 0$, $D = a^2 + 4 > 0$ при любом a имеет два корня;
$x^2 + ax + 1 = 0$, $D = a^2 - 4 > 0$ не при любом a;
$x^2 - a = 0$ при $a = 0$ $x = 0$ — единственный корень.
Ответ: $x^2 + ax - 1 = 0$.
9. $2x^2 + nx - (18 - x) = 0$, пусть a и $-a$ корни уравнения, тогда
$$\begin{cases} 2a^2 + na - (18 - a) = 0 \\ 2a^2 - na - (18 + a) = 0 \end{cases},$$
$na - (18 - a) + na + (18 + a) = 0$,
$2na + 2a = 0$, $n + 1 = 0$, $n = -1$.

10. $x^2-4bx+4b^2-1=0$,

$D=16b^2-4(4b^2-1)=4,\ x_1=\dfrac{4b+2}{2}=2b+1,\ x_2=2b-1,$

$\begin{cases}1<2b+1<6\\1<2b-1<6\end{cases}\begin{cases}0<2b<5\\2<2b<7\end{cases}\begin{cases}0<b<2{,}5\\1<b<3{,}5\end{cases}.$



Ответ: (1; 2,5).

С-14

1) а) $18y^3-36y^2=0$,
$y^2(y-2)=0,\ y_1=0\ y_2=2;$
б) $x^3-144x=0$,
$x(x^2-144)=0,\ x(x-12)(x+12)=0,\ x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 12;$
в) $x^2+0{,}9x=0$,
$x(x+0{,}9)=0,\ x_1=0,\ x_2=-0{,}9;$
2) а) $16x^3-32x^2-x+2=0$,
$16x^2(x-2)-(x-2)=0,\ (16x^2-1)(x-2)=0,$

$(4x-1)(4x+1)(x-2)=0,\ x_{1,2}=\dfrac{1}{4},\ x_3=2;$

б) $x^6-x^4+5x^2-5=0,\ x^4(x^2-1)+5(x^2-1)=0,$
$(x^2-1)(x^4+5)=0,\ (x-1)(x+1)=0,\ x_{1,2}=\pm 1,$
в) $y^6+4y^4=y^2+4,\ y^4(y^2+4)=y^2+4,\ y^4=1,\ y_{1,2}=\pm 1.$
2. а) $(x^2-10)^2-3(x^2-10)+4=0,$
$x^2-10=y,\ y^2-3y+4=0,\ D=9-4\cdot 4=<0$ нет корней;
б) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)+6=0,\ x^2+x=y,\ y^2-5y+6=0,$

$D=25-4\cdot 6=1,\ y_1=\dfrac{5+1}{2}=3,\ y_2=2;$

$x^2+x=3,\ x^2+x-3=0,$

$D=1+4\cdot 3=13,\ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2},$

$x^2+x=2,\ \ x^2+x-2=0,$

$D=1+4\cdot 2=9,\ x_3=\dfrac{-1+3}{2}=1,\ x_4=-2;$

в) $(x^2+x+6)(x^2+x-4)=144,\ x^2+x+6=y,$
$y(y-10)=144,\ y^2-10y-144=0,$

$D=100+4\cdot 144=676,\ y_1=\dfrac{10+26}{2}=18,\ y_2=-8,$

$x^2 + x + 6 = 18, x^2 + x - 12 = 0,$

$D = 1 + 4 \cdot 12 = 49, x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3 ; x_2 = -4,$

$x^2 + x + 6 = -8, x^2 + x + 14 = 0,$

$D = 1 - 4 \cdot 14 < 0$ нет корней.

Ответ: 3; – 4.

3. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$

$D = 100 - 4 \cdot 9 = 64, x_1{}^2 = \dfrac{10+8}{2} = 9, x_2{}^2 = 1, x_{1,2} = \pm 3, x_{3,4} = \pm 1;$

б) $x^4 - 18x^2 + 32 = 0,$

$D = 324 - 4 \cdot 32 = 196, x_1{}^2 = \dfrac{18+14}{2} = 16, \ x_2{}^2 = 2, x_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = \pm\sqrt{2};$

в) $x^4 - x^2 - 12 = 0,$

$D = 1 + 4 \cdot 12 = 49, x_1{}^2 = \dfrac{1+7}{2} = 4, x_2{}^2 = < 0, x_{1,2} = \pm 2;$

г) $x^4 + 6x^2 - 27 = 0,$

$D = 36 + 4 \cdot 27 = 144, x_1{}^2 = \dfrac{-6+12}{2} = 3, x_2{}^2 < 0, x_{1,2} = \pm\sqrt{3};$

д) $x^4 + 15x^2 + 54 = 0,$

$D = 225 - 4 \cdot 54 = 9, x_1{}^2 = \dfrac{-15+3}{2} < 0, x_2{}^2 < 0$ нет корней;

е) $x^4 + 25x^2 = 0, x^2(x^2 + 25) = 0, x^2 = 0, x = 0.$

4. $y = x^4 - 3x^2 - 4, x^4 - 3x^2 - 4 = 0,$

$D = 9 + 4 \cdot 4 = 25, x_1{}^2 = \dfrac{3+5}{2} = 4, x_2{}^2 < 0, x_{1,2} = \pm 2.$

Ответ: (±2; 0).

5. $x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0,$

$x^4(x + 1) + 3x^2(x + 1) + 4(x + 1) = 0,$

$(x + 1)(x^4 + 3x^2 + 4) = 0,$

$x_1 = -1, x^4 + 3x^2 + 4 = 0,$

$D = 9 - 4 \cdot 4 = < 0$, нет корней.

Ответ: – 1.

6. а) $x^3 - 13x + 12,$

$x^3 - x - 12x + 12 = 0, x(x^2 - 1) - 12(x - 1) = 0,$

$x(x - 1)(x + 1) - 12(x - 1) = 0,$

$(x - 1)(x^2 + x - 12) = 0, x_1 = 1, x^2 + x - 12 = 0,$

$D = 49, x_2 = \dfrac{-1+7}{2} = 3, x_3 = -4;$

б) $x^3 - 31x + 30 = 0, x^3 - x - 30x + 30 = 0,$

$x(x^2 - 1) - 30(x - 1) = 0,$

$x(x - 1)(x + 1) - 30(x - 1) = 0,$

$(x-1)(x^2+x-30)=0,$
$x_1=1,\ x^2+x-30=0,\ D=121,$
$x_2=\dfrac{-1+11}{2}=5,\ x_3=-6.$

7. а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=840,$
$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=840,\ x^2-5x+4=y,$
$y(y+2)=840,\ y^2+2y-840=0,$
$D=4+4\cdot 840=4\cdot 841,\ y_1=\dfrac{-2+58}{2}=28,\ y_2=-30,$
$x^2-5x+4=28,\ x^2-5x-24=0,$
$D=25+4\cdot 24=121,\ x_1=\dfrac{5+11}{2}=8,\ x_2=-3,$
$x^2-5x+4=-30,\ x^2-5x+34=0,$
$D=25-4\cdot 34<0$ нет корней.
Ответ: $-3;\ 8.$

б) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=945,$
$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=945,\ x^2+8x+7=y,$
$y(y+8)=945,\ y^2+8y-945=0,$
$D=64+4\cdot 945=62^2,\ y_1=\dfrac{-8+62}{2}=27,\ y_2=-35,$
$x^2+8x+7=27,\ x^2+8x-20=0,$
$D=64+4\cdot 20=144,\ x_1=\dfrac{-8+12}{2}=2,\ x_2=-10,$
$x^2+8x+7=-35,\ x^2+8x+42=0,$
$D=64-4\cdot 42<0$ нет корней.
Ответ: $-10;\ 2.$

8. а) $x^4-8x^2+a=0,\ x^2=y,\ y^2-8y+a=0,$
$f(y)=y^2-8y+a,$
$D=64-4a<0$ или $\begin{cases} f(0)>0 \\ m=\dfrac{8}{2}=4<0 \end{cases}$ — нет решений,
$64<4a,\ a>16.$
Ответ: $a>16.$

б) $x^4+ax^2+25=0,$
$x^2=y,\ y^2+ay+25=0,\ f(y)=y^2+ay+25,\ D=a^2-4\cdot 25<0,$
$(a-10)(a+10)<0,\ -10<a<10$ или $\begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}<0 \\ f(0)=25>0 \end{cases},\ a>0.$
Ответ: $a>-10.$

C-15

1. а) $\dfrac{3b^3-3b}{b^2+7b+6}=0$;

$\begin{cases}3b(b^2-1)=0\\ b^2+7b+6\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}b(b+1)(b-1)=0\\ (b+1)(b+6)\neq 0\end{cases}$; $b=0$, $b=1$;

Ответ: $b=0$ и $b=1$.

б) $\dfrac{b^4+10b^3+25b^2}{b^4-625}=0$;

$\begin{cases}b^2(b^2+10b+25)=0\\ (b^2-25)(b^2+25)\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}b^2(b+5)^2=0\\ b\neq \pm 5\end{cases}$; $b=0$;

Ответ: $b=0$.

2. $\dfrac{x^3+6x^2-5x-30}{x^2-36}=0$;

$\begin{cases}x(x^2-5)+6(x^2-5)=0\\ x^2\neq 36\end{cases}$; $\begin{cases}(x+6)(x^2-5)=0\\ x\neq \pm 6\end{cases}$; $x=$:

Ответ: $x=\pm\sqrt{5}$.

3. а) $\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{11}{x^2-x-12}+1$;

$\dfrac{2(x+3)-5(x-4)-11-(x^2-x-12)}{(x-4)(x+3)}=0$;

$\dfrac{-x^2-2x+27}{(x-4)(x+3)}=0$; $\begin{cases}x^2+2x-27=0\\ (x-4)(x+3)\neq 0\end{cases}$;

$D=4+4\cdot 27=7\cdot 4^2$; $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{7}}{2}=-1\pm\sqrt{7}$.

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{7}$.

б) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+1}{x+5}-\dfrac{7-x}{x^2+7x+10}=0$;

$\dfrac{x(x+5)+(x+1)(x+2)-7+x}{(x+2)(x+5)}=0$;

$\dfrac{2x^2+9-5}{(x+2)(x+5)}=0$; $\begin{cases}(2x-1)(x+5)=0\\ (x+2)(x+5)\neq 0\end{cases}$; $x=\dfrac{1}{2}$

Ответ: $x=\dfrac{1}{2}$.

4. $\frac{x^2-3}{x}+\frac{x}{x^2-3}=2\frac{1}{2}$,

$\frac{x^2-3}{x}=t$, $t+\frac{1}{t}-\frac{5}{2}=0$, $2t^2-5t+2=0$, $D=25-4\cdot 2\cdot 2=9$,

$t_1=\frac{5+3}{4}=2$, $t_2=\frac{1}{2}$,

$\frac{x^2-3}{x}=2$, $x^2-2x-3=0$, $D=4+4\cdot 3=16$, $x_1=\frac{2+4}{2}=3$, $x_2=-1$,

$\frac{x^2-3}{x}=\frac{1}{2}$, $2x^2-x-6=0$,

$D=1+4\cdot 2\cdot 6=49$, $x_3=\frac{1+7}{4}=2$, $x_4=-1{,}5$.

5. $\frac{x^2+8}{x}-\frac{12x}{x^2+8}=4$

$t=\frac{x^2+8}{x}\Rightarrow t-\frac{12}{t}=4$; $t^2-4t-12=0$; $t=6$ и $t=-2$

$t=6\Rightarrow\frac{x^2+8}{x}=6$; $x^2-6x+8=0$; $x=2$ и $x=4$

$t=-2\Rightarrow\frac{x^2+8}{x}=-2$; $x^2+2x+8=0$;

$D=2^2-4\cdot 8=-28<0\Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $x=2$ и $x=4$.

6. $x^2+2x-9=\frac{18}{x}$;

$x^3+2x^2-9x-18=0$;

$x^2(x+2)-9(x+2)=0$; $(x+2)(x^2-9)=0$;

$x=-2$, $x=\pm 3$

Ответ: $x=-2$ и $x=\pm 3$.

7. $2\left(x^2+\frac{1}{x}\right)+x-\frac{1}{x}=7$;

$t=x-\frac{1}{x}\Rightarrow 2(t^2+2)+t=7$; $2t^2+t-3=0$;

$D=1+4\cdot 2\cdot 3=25=5^2\Rightarrow t_1=1$ и $t_2=-\frac{3}{2}$

$t=1\Rightarrow x-\frac{1}{x}=1$; $x^2-x-1=0$; $D=1+4=5\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$t=-\frac{3}{2}\Rightarrow x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$; $2x^2+3x-2=0$;

$d=9+4\cdot 2\cdot 2=25\cdot 5^2\Rightarrow x_3=\frac{1}{2}$ и $x_4=-2$

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2};-2$.

8. $x^2-\frac{1}{x^2}=2\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|:\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{8}{3}$; $3x^2-8x-3=0$; $D=64+4\cdot 3\cdot 3=100=10^2\Rightarrow$

$x=3$ и $x=-\frac{1}{3}$

$x>1\Rightarrow x=3$

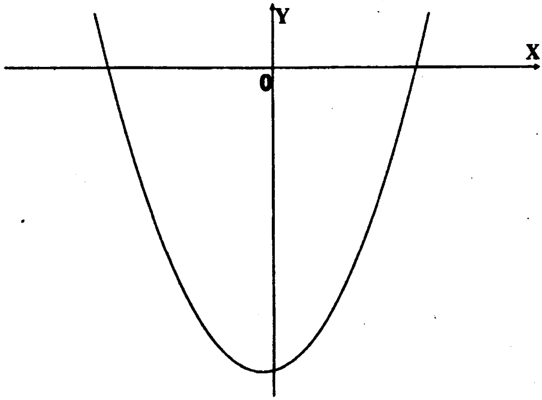
Ответ: 3 и $\frac{1}{3}$.

С-16

1. 1) $y=3x^2+x-17$;

а) вверх; **б)** $3x^2+x-17=0$, $D=1+4\cdot 3\cdot 17=205$, $x_{2,1}=\frac{-1\pm 2\sqrt{51}}{6}$;

в)



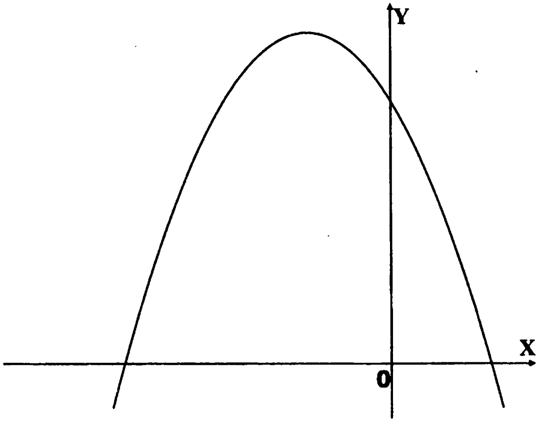
г) $y>0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$, $y<0$ при $x\in(x_1;x_2)$;

2) $y = -2x^2 - 5x + 12$;

а) вниз;

б) $2x^2 + 5x - 12 = 0$ $D = 25 + 8 \cdot 12 = 121$ $x_2 = \dfrac{-5+11}{4} = 1{,}5$; $x_1 = -4$;

в)

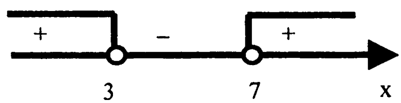


г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

2. а) $x^2 - 10x + 21 > 0$,

$D = 100 - 4 \cdot 21 = 16$,

$x_1 = \dfrac{10+4}{2} = 7$; $x_2 = 3$.

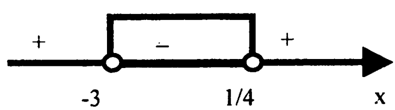


Ответ: $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.

б) $4x^2 + 11x - 3 < 0$,

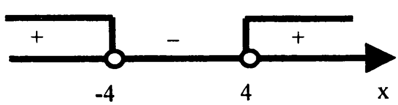
$D = 121 + 16 \cdot 3 = 169$,

$x_1 = \dfrac{-11+3}{8} = \dfrac{1}{4}$; $x_2 = -3$.



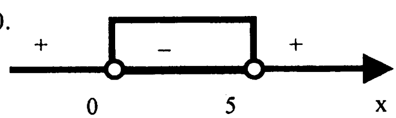
Ответ: $(-3; \dfrac{1}{4})$.

в) $x^2 - 16 > 0$ $(x-4)(x+4) > 0$.



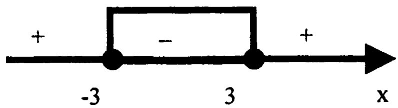
Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

г) $5x - x^2 > 0$, $x^2 - 5x < 0$, $x(x-5) < 0$.



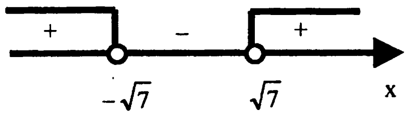
Ответ: $(0; 5)$.

3. а) $x^2 \le 9$, $(x-3)(x+3) \le 0$.



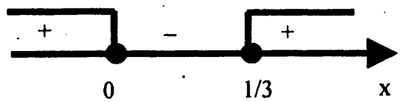
Ответ: $[-3; 3]$.

б) $x^2 > 7$, $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$.

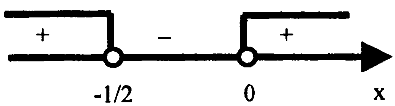
в) $3x^2 \ge x$, $x^2 - \frac{x}{3} \ge 0$, $x(x - \frac{1}{3}) \ge 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$.

г) $-4x < 8x^2$, $8x^2 + 4x > 0$,

$x^2 + \frac{x}{2} > 0$, $x(x + \frac{1}{2}) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; +\infty)$.

4. а) $7b^2 - 4b + 1 > 0$,

$D = 16 - 4 \cdot 7 < 0$ т.к. $a = 7 > 0$, то любое b — решение, ч.т.д.

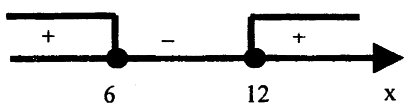
б) $8b < b^2 + 17$, $b^2 - 8b + 17 > 0$,

$D = 64 - 4 \cdot 17 < 0$ т.к. $a = 1 > 0$, то любое b — решение, ч.т.д.

5. а) $y = \sqrt{x^2 - 18x + 72}$, $x^2 - 18x + 72 \ge 0$,

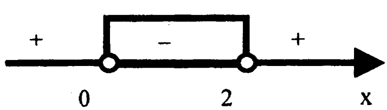
$D = 324 - 4 \cdot 72 = 36$,

$x_1 = \frac{18+6}{2} = 12$; $x_2 = 6$.



Ответ: $(-\infty; 6] \cup [12; +\infty)$.

б) $y = \frac{7}{\sqrt{6x - 3x^2}}$,



$6x - 3x^2 > 0$, $3x^2 - 6x < 0$,

$x^2 - 2x < 0$ $x(x-2) < 0$.

Ответ: $(0; 2)$.

6. $x^2 - 8x + c < 0$

а) $D = 64 - 4c$, чтобы $(3; 5)$ был решением, нужно $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, т.е.

$9 - 24 + c = 0$; $c = 15$.

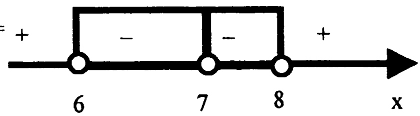
Ответ: 15.

б) Ответ: ни при каких c.

7. $\dfrac{x^2-14x+48}{(x-7)^2}<0$, $\dfrac{(x-6)(x-8)}{(x-7)^2}<0$,

$x^2-14x+48=0$, $D=196-4\cdot48=$

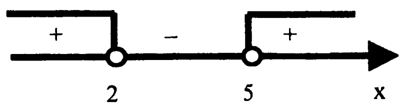
$x_1=\dfrac{14+2}{2}=8$; $x_2=6$.



Ответ: $(6;\,7)\cup(7;\,8)$.

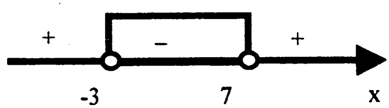
С-17

1. 1). а) $(x-2)(x-5)>0$.



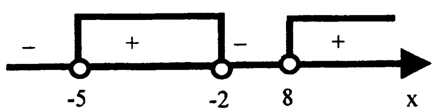
Ответ: $(-\infty;\,2)\cup(5;+\infty)$.

б) $(x+3)(x-7)<0$.



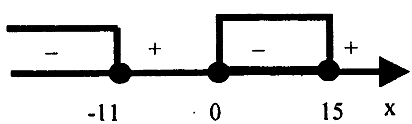
Ответ: $(-3;\,7)$.

в) $(x+5)(x+2)(x-8)>0$.



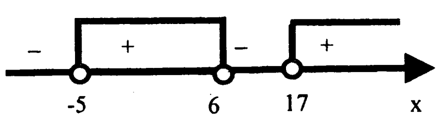
Ответ: $(-5;-2)\cup(8;+\infty)$.

г) $x(x+11)(x-15)\le 0$.



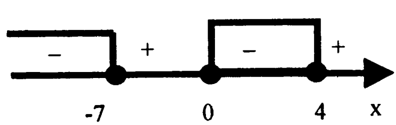
Ответ: $(-\infty;-11]\cup[0;\,15]$.

2) а) $(x+5)(x-6)(x-17)>0$.



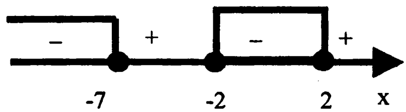
Ответ: $(-5;\,6)\cup(17;+\infty)$.

б) $x(x+7)(x-4)\le 0$.

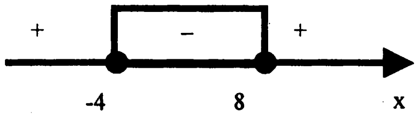


Ответ: $(-\infty;-7]\cup[0;\,4]$.

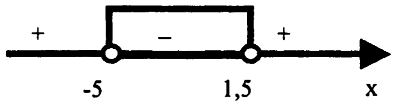
в) $(x^2-4)(x+7) \le 0$,
$(x-2)(x+2)(x+7) \le 0$.



Ответ: $(-\infty;-7] \cup [-2; 2]$.
г) $(x^2+4)(x+4)(x-8) \le 0$,
$(x+4)(x-8) \le 0$.

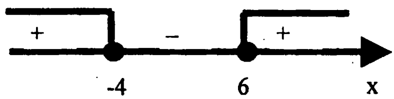


Ответ: $[-4; 8]$.
2. 1) а) $(2x-3)(x+5) < 0$,
$(x-1{,}5)(x+5) < 0$.



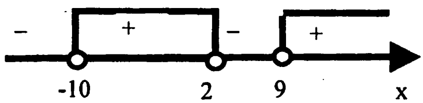
Ответ: $(-5; 1{,}5)$.

б) $(6-x)(3x+12) \le 0$, $(x-6)(x+4) \ge 0$.



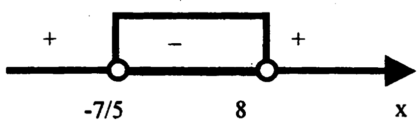
Ответ: $(-\infty;-4] \cup [6;+\infty)$.

в) $-(x-2)(9-x)(x+10) > 0$,
$(x-2)(x-9)(x+10) > 0$.

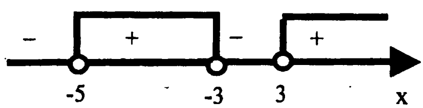


Ответ: $(-10; 2) \cup (9;+\infty)$.

2) а) $(5x+7)(8-x) > 0$,
$(x+\frac{7}{5})(x-8) < 0$.

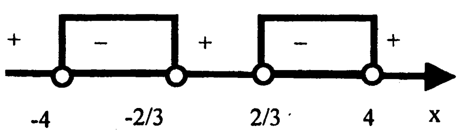


Ответ: $(-\frac{7}{5}; 8)$.
б) $(9-x^2)(6x+30) < 0$,
$(x-3)(x+3)(x+5) > 0$.



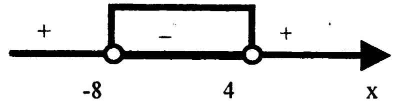
Ответ: $(-5;-3) \cup (3;+\infty)$.
в) $(9x^2-4)(16-x^2)(2x^2+3) > 0$,
$(x^2-\frac{4}{9})(x^2-16) < 0$,

$(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})(x-4)(x+4) < 0$.



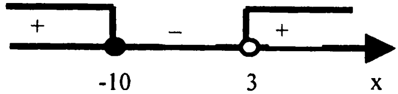
Ответ: $(-4;-\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 4)$.

3. 1). а) $\dfrac{x-4}{x+8}<0$.



Ответ: (–8; 4).

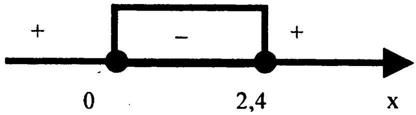
б) $\dfrac{x+10}{x-3}\geq 0$.



Ответ: $(-\infty;-10]\cup[3;+\infty)$.

в) $\dfrac{9x}{5x-12}\leq 0$,

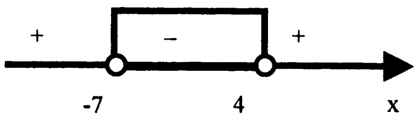
$\dfrac{x}{x-2{,}4}\leq 0$.



Ответ: [0; 2,4].

2) а) $\dfrac{3x-12}{x+7}<0$,

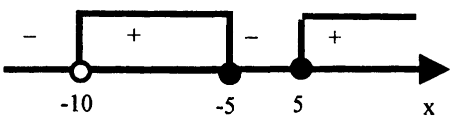
$\dfrac{x-4}{x+7}<0$.



Ответ: (–7; 4).

б) $\dfrac{x^2-25}{x+10}\geq 0$,

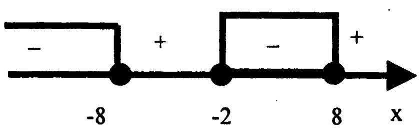
$\dfrac{(x-5)(x+5)}{x+10}\geq 0$.



Ответ: (–10;–5] ∞ [5;+∞).

в) $\dfrac{(x+2)(x^2-64)}{x^2+15}\leq 0$,

$(x+2)(x-8)(x+8)\leq 0$.

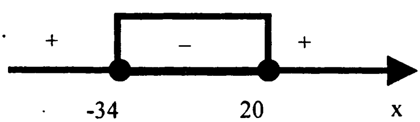


Ответ: $(-\infty;-8]\cup[-2;8]$.

4.

а) $y=\sqrt{(x+34)(20-x)}$,

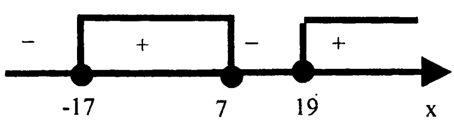
$(x+34)(20-x)\geq 0$, $(x+34)(x-20)\leq 0$.



Ответ: [–34; 20].

б) $y=\sqrt{(x-7)(x+17)(x-19)}$,

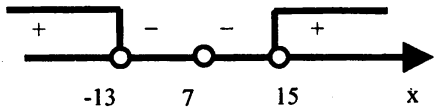
$(x-7)(x+17)(x-19)\geq 0$.



Ответ: [–17; 7] ∪ [19;+∞].

5.

а) $(x+13)(x-7)^2(x-15) > 0.$



Ответ: $(-\infty;-13) \cup (15;+\infty)$.

б) $\dfrac{x^2+15x+56}{x^2-12x+20} < 0$, $x^2+15x+56=0$,

$D = 225-4 \cdot 56 = 1$,

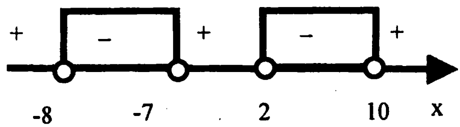
$x_1 = \dfrac{-15+1}{2} = -7$; $x_2 = -8$,

$x^2-12x+20 = 0$,

$D = 144-4 \cdot 20 = 64$,

$x_1 = \dfrac{12+8}{2} = 10$, $x_2 = 2$,

$\dfrac{(x+7)(x+8)}{(x-2)(x-10)} < 0$.



Ответ: $(-8;-7) \cup (2; 10)$.

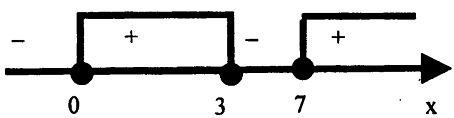
в) $x^3-10x^2+21x \geq 0$,

$x(x^2-10x+21) \geq 0$, $x^2-10x+21 = 0$,

$D = 100-4 \cdot 21 = 16$,

$x_1 = \dfrac{10+4}{2} = 7$; $x_2 = 3$,

$x(x-7)(x-3) \geq 0$.



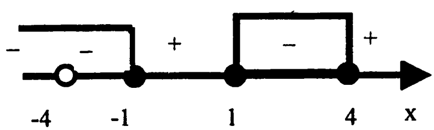
Ответ: $[0; 3] \cup [7;+\infty]$.

г) $\dfrac{x^4-17x^2+16}{5x+20} \leq 0$,

$x^4-17x^2+16 = 0$,

$D = 289-4 \cdot 16 = 225$,

$x_1{}^2 = \dfrac{17+15}{2} = 16$, $x_2{}^2 = 1$,



$\dfrac{(x^2-16)(x^2-1)}{x+4} \leq 0$,

$\dfrac{(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)}{x+4} \leq 0$.

Ответ: $(-\infty;-4) \cup (-4;-1] \cup [1; 4]$.

С-18

1. а) $\begin{cases} 3x-2>5x-8 \\ 5x\le 0 \\ 13-x>5x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<6 \\ x\le 0 \\ 4x<10 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 0$

Ответ: $(-\infty; 0]$.

б) $\begin{cases} -x^2+6x-8\ge 0 \\ \dfrac{3-x}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4)\le 0 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x<3$

Ответ: $[2; 3)$.

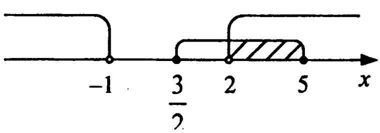
2. а) $\begin{cases} 10+2x\ge 0 \\ 1+\dfrac{1}{3}x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -5 \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow -5\le x<-3 \Rightarrow x=-5$ и $x=-4$

Ответ: $-5; -4$.

б) $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ 2x^2-13x+15\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)>0 \\ (x-5)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x\le 5 \Rightarrow$

$x=3, x=4, x=5$

$D=13^2-4\cdot 2\cdot 15=49=7^2 \Rightarrow x_1=\dfrac{13+7}{4}=5$ и $x_2=\dfrac{13-7}{4}=\dfrac{3}{2}$



Ответ: 3, 4, 5.

3. $\begin{cases} 4x^2-11x-3\le 0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\le x\le 3 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}\le x<0$

$D=11^2+4\cdot 4\cdot 3=169=13^2 \Rightarrow x_1=\dfrac{11-13}{8}=-\dfrac{1}{4}$ и $x_2=\dfrac{11+13}{8}=3$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

4. а) $\begin{cases} 7x-x^2\ge 0 \\ 4-x^2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-7)\le 0 \\ x^2\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 7 \\ x\ne \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<2 \\ 2<x\le 7 \end{cases}$

Ответ: $[0; 2)\cup(2; 7]$.

б) $\begin{cases} x^2-4\ge 0 \\ 1-\dfrac{x^2}{25}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 4 \\ x^2\le 25 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le |x|\le 5$

Ответ: $[-5;-2]\cup[2;5]$.

5. $\begin{cases} (x^2-x-6)^2\le 0 \\ (x^2+2x+1)^2\ge 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0 \\ x^2+2x+1\ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ (x+1)^2\ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

$x^2-x-6=0 \Rightarrow x=3$ и $x=-2$

$x=3 \Rightarrow (3+1)^2=4^2=16\ge 10$

$x=-2 \Rightarrow (-2+1)^2=1<10$

Ответ: $x=3$.

6. $\begin{cases} 3x-2>2x+1 \\ 2-7x<5p-8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<5p-2 \end{cases}$

Система не имеет решения, если $5p-2\le 3 \Leftrightarrow p\le 1$.

Ответ: $p\le 1$.

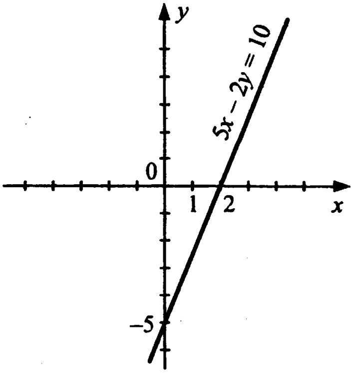
С-19

1. а) да; **б)** нет; **в)** да;

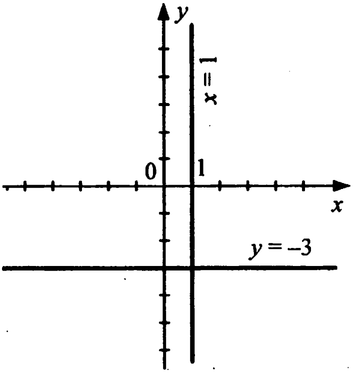
2. а) (5; 0), (9; 1), (1; –1);

б) (15; 0) (5; 2), (3; 4);

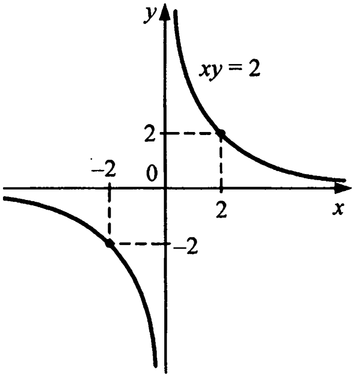
3. а)



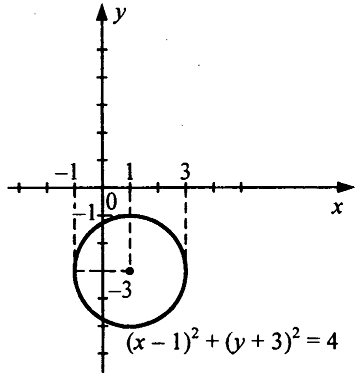
б)



в)



г)



4. а) гипербола $y = -\frac{6}{x}$;

б) две пересекающиеся прямые $x = -4$ и $y = 4$;

в) точка (3; 0);

г) окружность с центром (–1; 2) и радиусом $\sqrt{5}$.

5. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = R^2$

а) $x = -2$ и $y = 0 \Rightarrow R^2 = 1$

Ответ: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

б) $x = 1$ и $y = 5 \Rightarrow R^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

Ответ: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

6. а) $xy = 3$; $y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \pm 1$ или

$x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 3$ или $y = \pm 1$;

Ответ: $(\pm 1; \pm 3)$ и $(\pm 3; \pm 1)$.

б) $x^2 - y^2 = 5$;

$$(x-y)(x+y) = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = \pm 1 \\ x + y = \pm 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = \pm 5 \\ x + y = \pm 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \mp 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

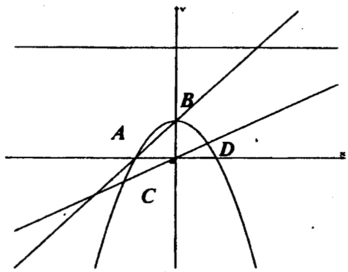
Ответ: $(\pm 3; \pm 2)$ и $(\pm 3; \mp 2)$.

C-20

1. $\begin{cases} xy = 6 \\ y = 0{,}5x^2 - 8 \end{cases}$.

Три решения: (–3,6;–1,8), (–0,8;–7,8), (4,2; 1,3).

2. $y = -x^2+1$.



а) $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$, две точки пересечения: $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$.

Ответ: (–1; 0), (0; 1).

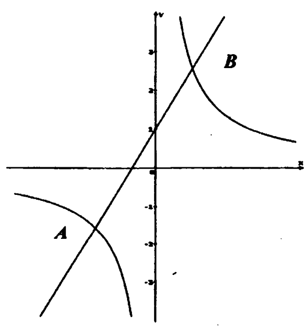
б) $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0{,}5x \end{cases}$, две точки пересечения: $C(-1{,}4;-0{,}8)$, $D(0{,}8;\ 0{,}5)$.

Ответ: (–1,4;–0,8), (0,8; 0,5).

в) $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 3 \end{cases}$, нет точек пересечения.

Ответ: нет решения.

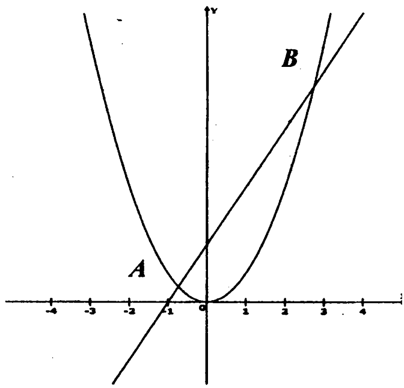
3. а)



$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ y = x + 1 \end{cases}$.

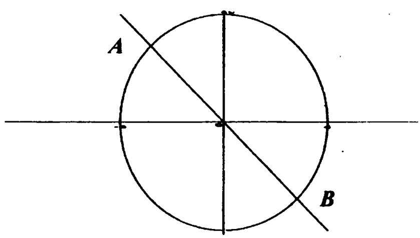
Ответ: (1,6; 2,6), (–2,6;–1,6).

б) $\begin{cases} y = 0{,}5x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$.



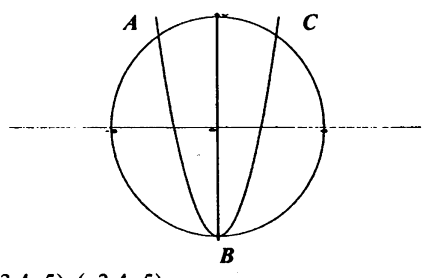
Ответ: (–0,8; 0,2), (2,5; 3,5).

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x \end{cases}$.



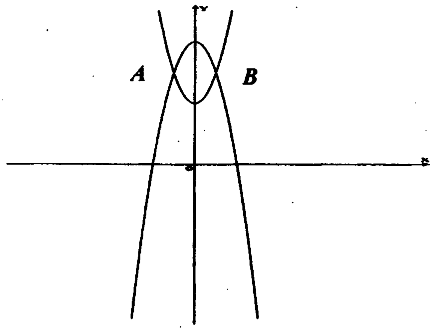
Ответ: (2,9;–2,9), (–2,9; 2,9).

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$.

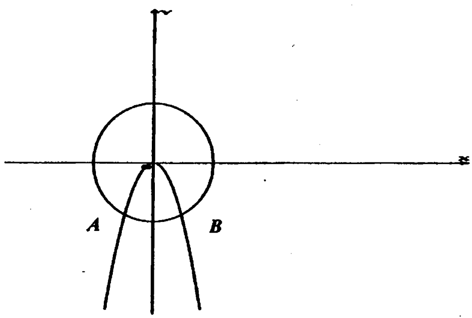


Ответ: (0;–6), (3,4; 5), (–3,4; 5).

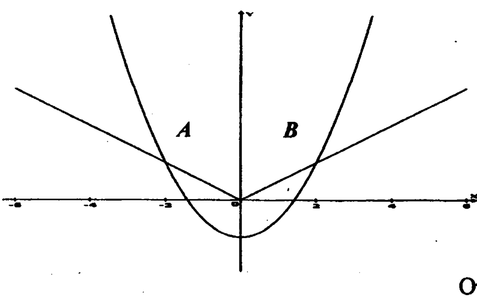
4. а) $\begin{cases} y = -x^2 + 8 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$. Ответ: два решения.



б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x^2 \end{cases}$. Ответ: два решения.

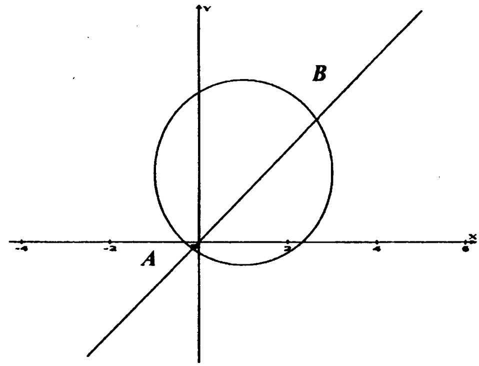


5. а) $\begin{cases} y = |x| \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$, две точки пересечения: $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$.



Ответ: $(-2; 2)$, $(2; 2)$.

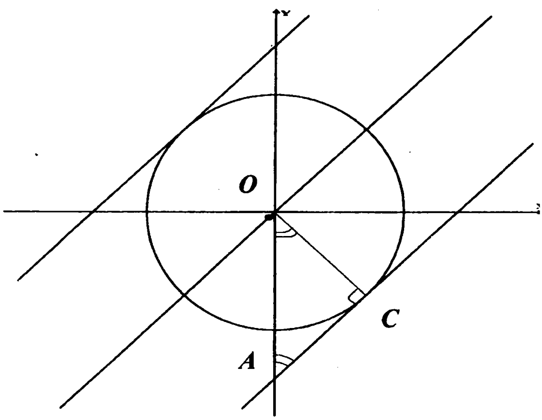
б)



$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=16 \\ y=x\end{cases},$$

две точки пересечения: $A(-0{,}5;-0{,}5)$, $B(5{,}2;\ 5{,}2)$.
Ответ: (–0,5;–0,5), (5,2; 5,2).

6. $\begin{cases}x^2+y^2=9 \\ x-y=m; \quad y=x-m\end{cases}.$



Изобразим графики функций.
Рассмотрим ΔAOC:
$\angle C=90°$, $\angle A=\angle O=45°$.

$OC=3$ (радиус) $AC=3$ $OA=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

Ясно, что при $m = \pm 3\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $m \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$–две точки; при $|m| > 3\sqrt{2}$ решений нет.

Ответ: а) $m = \pm 3\sqrt{2}$; б) $(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ в) $(-\infty; -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}; +\infty)$.

С-21

1. $\begin{cases} xy + 42 = 0 \\ x^2 - 2y - 61 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 7 \cdot (-6) + 42 = 0 \\ 49 - 2 \cdot (-6) - 61 = 0 \end{cases}$ верно, значит, является.

2. $\begin{cases} x^2 - 5y - 24 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$, $x^2 - 5(x-2) - 24 = 0;\ x^2 - 5x + 10 - 24 = 0;$,

$x^2 - 5x - 14 = 0$, $D = 25 + 4 \cdot 14 = 81$,

$x_1 = \dfrac{5+9}{2} = 7$, $y_1 = 7 - 2 = 5$, $(7; 5)$, $x_2 = -2$, $y_2 = -2 - 2 = -4$, $(-2; -4)$.

Проверка: $(7; 5)$ $\begin{cases} 7^2 - 5 \cdot 5 - 24 = 0 \\ 5 = 7 - 2 \end{cases}$ — верно,

$(-2; -4)$ $\begin{cases} (-2)^2 - 5 \cdot (-4) - 24 = 0 \\ -4 = -2 - 2 \end{cases}$ — верно.

Ответ: $(7; 5)$, $(-2; -4)$.

3. 1) а) $\begin{cases} x^2 - 2y = 54 \\ y = x - 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 - 2(x-3) = 54 \\ x^2 - 2x - 48 = 0 \end{cases}$;

$D = 4 + 4 \cdot 48 = 196$, $x_1 = \dfrac{-2+14}{2} = 8$, $x_2 = -6$, $y_1 = 8 - 3 = 5$, $y_2 = -6 - 3 = -9$.

Ответ: $(8; 5)$, $(-6; -9)$.

б) $\begin{cases} x = y + 3 \\ xy - y = 7 \end{cases}$, $y(y+3) - y = 7$, $y^2 + 2y - 7 = 0$,

$D = 4 + 4 \cdot 7 = 32$, $y_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$,

$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2} + 3 = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: $(2 \pm 2\sqrt{2}; -1 \pm 2\sqrt{2})$.

в) $\begin{cases} xy + x^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$, $x(x+2) + x^2 = 4;\ 2x^2 + 2x - 4 = 0;\ x^2 + x - 2 = 0$,

$D = 9$, $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, $x_2 = -2$, $y_1 = 1 + 2 = 3$, $y_2 = -2 + 2 = 0$.

Ответ: $(1; 3)$, $(-2; 0)$.

2) а) $\begin{cases} 4y + x = 0 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{array}{l} x = -4y \\ 16y^2 + y^2 = 17 \end{array}$,

$17y^2 = 17, y_{1,2} = \pm 1, x_{1,2} = \mp 4.$

Ответ: $(\pm 4; \mp 1)$

б) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y^2 = -1 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{array}{l} x = 1 - 2y \\ 2 - 4y + y^2 = -1 \end{array}$,

$y^2 - 4y + 3 = 0, D = 4, y_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3, y_2 = 1,$

$x_1 = 1-2\cdot 3 = -5, x_2 = 1-2\cdot 1 = -1.$

Ответ: $(-5; 3), (-1; 1)$.

в) $\begin{cases} xy + y^2 = 24 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{array}{l} y(7 + 2y) + y^2 = 24 \\ x = 7 + 2y \end{array}$,

$3y^2 + 7y - 24 = 0, D = 49 + 4 \cdot 3 \cdot 24 = 337, y_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{337}}{6}$,

$x_{1,2} = 7 + \dfrac{-7 \pm \sqrt{337}}{3} = \dfrac{14 \pm \sqrt{337}}{3}$.

Ответ: $\left(\dfrac{14 \pm \sqrt{337}}{3}; \dfrac{-7 \pm \sqrt{337}}{6}\right)$.

3) а) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 36 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{array}{l} (4 + 2y)(y+1) = 36 \\ x = 6 + 2y \end{array}$, $2y^2 + 6y - 32 = 0,$

$y^2 + 3y - 16 = 0,$

$D = 9 + 4 \cdot 16 = 73, y_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}, x_{1,2} = 6 - 3 \pm \sqrt{73} = 3 \pm \sqrt{73}$.

Ответ: $\left(3 \pm \sqrt{73}; \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{array}{l} x^2 + x(10 - 3x) - (10 - 3x)^2 = 4 \\ y = 10 - 3x \end{array}$,

$x^2 + 10x - 3x^2 - 100 + 60x - 9x^2 = 4, 11x^2 - 70x + 104 = 0,$

$D = 4900 - 4 \cdot 11 \cdot 104 = 324,$

$x_1 = \dfrac{70 + 18}{22} = 4, x_2 = \dfrac{26}{11},$

$y_1 = 10 - 3\cdot 4 = -2, y_2 = 10 - 3\cdot\dfrac{26}{11} = \dfrac{32}{11}$.

Ответ: $(4; -2), \left(\dfrac{26}{11}; \dfrac{32}{11}\right)$.

4. $\begin{cases} 5x+3y=14 \\ 2x-5y=18 \\ x^2+y^2+2xy-x=0 \end{cases}$ $\left| \begin{aligned} & x=\frac{14-3y}{5} \\ & \frac{28-6y}{5}-5y=18 \end{aligned} \right.$,

$28-6y-25y=90,\ 31y=-62,$

$y=-2,\ x=4,\ 4^2+(-2)^2+2\cdot4\cdot(-2)-4=0$ – верно.

Ответ: $(4; -2)$.

5. а) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ xy=8 \end{cases}$ $\left| \begin{aligned} & x^2+\frac{64}{x^2}=18 \\ & y=\frac{8}{x} \end{aligned} \right.$, $x^4-18x^2+64=0,$

$D=324-4\cdot64=68,\ x^2{}_{1,2}=\dfrac{18\pm2\sqrt{17}}{2}=9\pm\sqrt{17},\ x_{1,2}=\pm\sqrt{9+\sqrt{17}},$

$x_{3,4}=\pm\sqrt{9-\sqrt{17}},\ y_{1,2}=\pm\dfrac{8}{\sqrt{9+\sqrt{17}}},\ y_{3,4}=\pm\dfrac{8}{\sqrt{9-\sqrt{17}}},$

б) $\begin{cases} 2x^2-y^2=41 \\ 2x^2+y^2=59 \end{cases}$,

$4x^2=100,\ x^2=25,\ x_{1,2}=\pm5,\ y^2=50-41=9,\ y_{1,2}=\pm3.$

Ответ: $(\pm5; 3), (\pm5; -3)$.

в) $\begin{cases} x^2-3x-2y=4 \\ x^2+x-3y=18 \end{cases}$ $\left| \begin{aligned} & y=\frac{x^2-3x-4}{2} \\ & x^2+x-\frac{3x^2-9x-12}{2}=18 \end{aligned} \right.$,

$2x^2+2x-3x^2+9x+12=36,\ x^2-11x+24=0,$

$D=121-4\cdot24=25,\ x_1=\dfrac{11+5}{2}=8,\ x_2=3,$

$y_1=\dfrac{64-24-4}{2}=18,\ y_2=\dfrac{9-9-4}{2}=-2.$

Ответ: $(8; 18), (3; -2)$.

6. $x^2+(x^2-10-1)^2=13,\ x^2+(x^2-11)^2=13,\ x^2+x^4-22x^2+121=13,$

$x^4-21x^2+108=0,\ D=9,\ x_1{}^2=\dfrac{21+3}{2}=12,\ x_2{}^2=9,\ x_{1,2}=\pm2\sqrt{3},\ x_{3,4}=\pm3,$

$y_{1,2}=12-10=2,\ y_{3,4}=9-10=-1.$

Ответ: $(\pm2\sqrt{3}; 2); (\pm3; -1)$.

7. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ 2x-y=2 \end{cases}$ $\left| \begin{aligned} & \frac{1}{x}-\frac{1}{2x-2}=\frac{1}{12} \\ & y=2x-2 \end{aligned} \right.$,

$12(2x-2)-12x-x(2x-2)=0,$

$6(2x-2)-6x-x(x-1)=0,$
$12x-12-6x-x^2+x=0, x^2-7x+12=0,$

$D=1, x_1=\dfrac{7+1}{2}=4, x_2=3, y_1=6, y_2=4.$

Ответ: (4; 6), (3; 4).

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3} \\ x-y=6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \dfrac{6+y}{y}+\dfrac{y}{6+y}-\dfrac{10}{3}=0 \\ x=6+y \end{array} \right.,$

$3(6+y)^2+3y^2-10y(6+y)=0, 3(36+12y+y^2)+3y^2-60y-10y^2=0,$
$108+36y+3y^2+3y^2-60y-10y^2=0, 4y^2+24y-108=0, y^2+6y-27=0,$

$D=36+4\cdot27=144, y_1=\dfrac{-6+12}{2}=3, y_2=-9, x_1=9, x_2=-3.$

Ответ: (9;3), (–3; –9).

С-22

1. Пусть x–первое число, y–второе число, тогда

$\begin{cases} x+y=25 \\ xy=144 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y=25-x \\ x(25-x)=144 \end{array} \right.,$

$x^2-25x+144=0, D=49, x_1=\dfrac{25+7}{2}=16, x_2=9, y_1=9, y_2=16.$

Ответ: 16, 9.

2. Пусть x см–один катет, тогда $(x+4)$ см – другой катет.
Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2+(x+4)^2=400,$
$2x^2+8x+16-400=0, x^2+4x-192=0,$

$D=28^2, x_1=\dfrac{-4+28}{2}=12, x_2<0.$

12 см — первый катет, 12+4 = 16 (см) — второй катет.

3. Пусть x м , y м–ширина и длина соответственно.
Тогда xy м^2 — площадь или 3250 м^2, $2(x+y)$ м — периметр или 230 м.
Получаем систему:

$\begin{cases} xy=3250 \\ 2(x+y)=230 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(115-y)=3250 \\ x=115-y \end{array} \right.,$

$y^2-115y+3250=0, D=225, y_1=\dfrac{115+15}{2}=65, y_2=50,$

$x_1=115-65=50, x_2=115-50=65.$

Ответ: 50 м, 65 м.

4. Пусть x см, y см — ширина и длина соответственно. Тогда $2(x+y)$ см — периметр или 24 см. (x^2+y^2) см^2— сумма площадей квадратов или 148 см^2

Получаем систему:

$$\begin{cases}2(x+y)=24\\ x^2+y^2=148\end{cases}\left|\begin{matrix}x=12-y\\ (12-y)^2+y^2=148\end{matrix}\right.,$$

$144-24y+2y^2=148$, $2y^2-24y-4=0$, $y^2-12y-2=0$,

$D=144+4\cdot 2=152$,

$$y_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{152}}{2}=6\pm\sqrt{38},\ y=6+\sqrt{38},\ x=6-\sqrt{38}.$$

Ответ: $6-\sqrt{38}$ см, $6+\sqrt{38}$ см.

5. Пусть x — первое число, y — второе число, тогда xy — их произведение, $(x+y)$ — их сумма $3y$ — утроенное второе число.

Получаем систему: $\begin{cases}xy=x+y+13\\ x-3y=9\end{cases}\left|\begin{matrix}y(3y+9)=3y+9+y+13\\ x=3y+9\end{matrix}\right.,$

$3y^2+9y=4y+22$, $3y^2+5y-22=0$,

$$D=25-4\cdot 3\cdot 22=289,\ y_1=\frac{-5+17}{6}=2,$$

$$y_2=-\frac{11}{3},\ x_1=3\cdot 2+9=15,\ x_2=-11+9=-2.$$

Ответ: 15 и 2 или -2 и $-\frac{11}{3}$.

6. Пусть x км/ч — скорость I автомобиля, y км/ч — скорость II автомобиля, $3x$, $3y$ км — прошли за 3 ч соответственно I и II автомобиль. $\frac{360}{x}$ ч, $\frac{360}{y}$ ч — потратили на весь путь I и II автомобиль соответственно.

Получаем систему: $\begin{cases}3x-3y=30\\ \frac{360}{x}+\frac{1}{2}=\frac{360}{y}\end{cases}\left|\begin{matrix}x-y=10;\ x=10+y\\ \frac{360}{10+y}+\frac{1}{2}-\frac{360}{y}=0\end{matrix}\right.,$

$720y+y^2+10y-7200-720y=0$, $y^2+10y-7200=0$,

$$D=100+4\cdot 7200=170^2,\ y_1=\frac{-10+170}{2}=80,\ y_2<0,\ x_1=10+80=90.$$

90 и 80 км/ч — скорости I и II автомобиля соответственно.

7. Пусть 1–вся работа, x ч — выполняет всю работу I тракторист, тогда $(x+4)$ ч — выполняет всю работу II тракторист. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+4}$ часть работы — производительность I и II.

Известно, что за 2 ч 40 мин оба тракториста, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)=1$, $\frac{8}{3x}+\frac{8}{3(x+4)}-1=0$,

$8x + 32 + 8x - 3x^2 - 12x = 0,\ 3x^2 - 4x - 32 = 0,$

$D = 16+12 \cdot 32 = 400,\ x_1 = \dfrac{4+20}{6} = 4,\ x_2 < 0.$

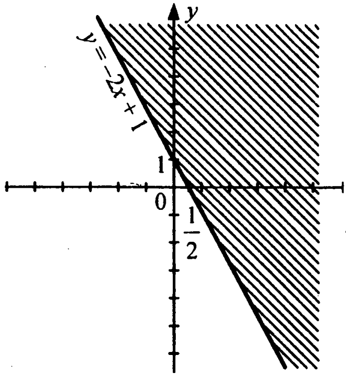
4 ч и 8 ч — потребуется I и II трактористу, чтобы выполнить всю работу.

С-23

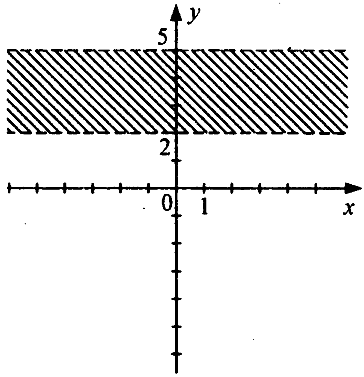
1. а) нет; **б)** да;

2. а) (0; 0), (1; 1); **б)** (0; 5), (1; 4)

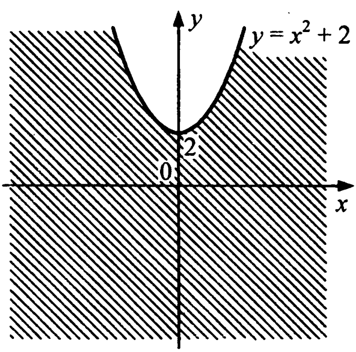
3. а)



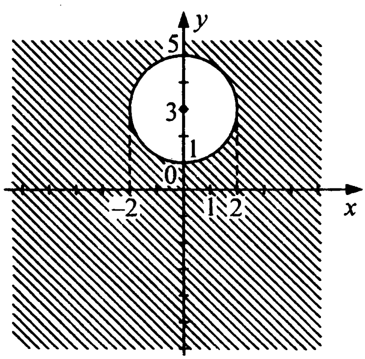
б)



в)



г)



4. а) множество точек плоскости, лежащих над графиком параболы $y = -x^2 + 2x + 8$;

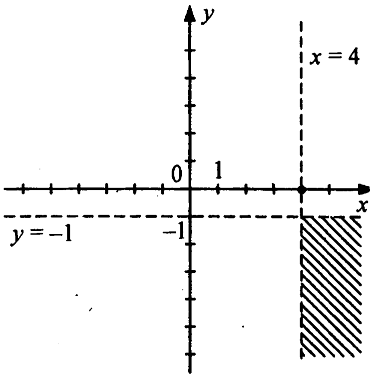
б) множество точек плоскости, лежащих внутри окружности $(+3)^2 + (y-4)^2 \le 36$, включая ее саму.

5. а) $y < -x^2 + 4x + 1$; **б)** $(x+6)^2 + y^2 > 16$.

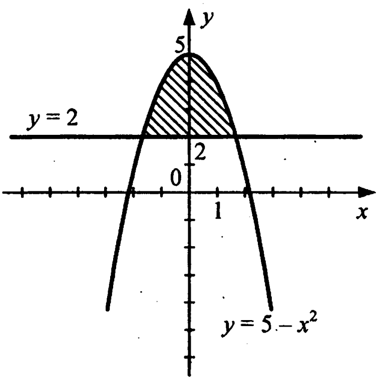
С-24

1. а) нет; б) да; в) нет;

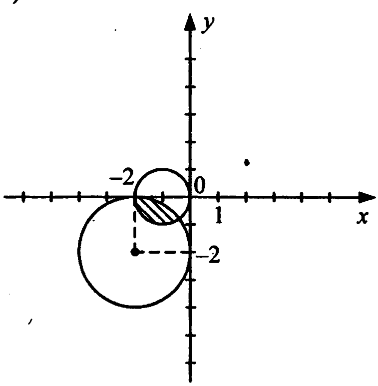
2. а)



б)



в)



3. а) треугольник с вершинами (–2; 0), (0; 1), (0; –2);

$S=\frac{1}{2}a\cdot h;\ a=3,\ h=2\Rightarrow S=3$.

б) прямоугольник с вершинами (–2; 3), (–2; 4), (1; 4), (1; 3);

$S=ab;\ a=3,\ b=1\Rightarrow S=3$

4. а) $\begin{cases}3x+y\le 3\\ y-x\le 3\\ y\ge 0\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+1)^2+y^2\ge 4\\ (x+1)^2+y^2\le 16\end{cases}$

С-25

1. а) 14, 13, 12, 11, 10; **б)** 1, 8, 27, 64, 125; **в)** 7, 12, 17, 22, 27.

2. $x_n = 6n - 1$;

а) $x_1 = 6 \cdot 1 - 1 = 5$; **б)** $x_4 = 6 \cdot 4 - 1 = 23$;

в) $x_{20} = 6 \cdot 20 - 1 = 119$; **г)** $x_{100} = 6 \cdot 100 - 1 = 599$;

д) $x_k = 6k - 1$; **е)** $x_{k+2} = 6(k + 2) - 1 = 6k - 11$.

3. а) $a_n = n - 2$, $a_3 = 3 - 2 = 1$,$a_6 = 6 - 2 = 4$, $a_{20} = 20 - 2 = 18$;

б) $a_n = \dfrac{3n-1}{2}$, $a_3 = \dfrac{9-1}{2} = 4$, $a_6 = \dfrac{18-1}{2} = 8{,}5$, $a_{20} = \dfrac{60-1}{2} = 29{,}5$;

в) $a_n = n^2$, $a_3 = 3^2 = 9$, $a_6 = 6^2 = 36$, $a_{20} = 20^2 = 400$;

г) $a_n = n(n + 1)$,

$a_3 = 3(3 + 1) = 12$, $a_6 = 6(6 + 1) = 42$, $a_{20} = 20(20 + 1) = 420$;

д) $a_n = -n^2 + 6$, $a_3 = -9 + 6 = -3$, $a_6 = -36+6 = -30$, $a_{20} = -400+6 = -394$;

е) $a_n = (-1)^n$, $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_6 = (-1)^6 = 1$, $a_{20} = (-1)^{20} = 1$.

4. $25 = 46 - 3n$, $3n = 21$, $n = 7$.

Ответ: 7.

5. а) $C_1 = 8$, $C_{n+1} = C_n - 1$, $C_2 = C_1 - 1 = 7$, $C_3 = C_2 - 1 = 6$, $C_4 = C_3 - 1 = 5$,
$C_5 = C_4 - 1 = 4$;

б) $C_1 = 32$, $C_{n+1} = 0{,}5C_n$, $C_2 = 0{,}5C_1 = 16$, $C_3 = 0{,}5C_2 = 8$,
$C_4 = 0{,}5C_3 = 4$, $C_5 = 0{,}5C_4 = 2$.

6. 0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; 0,22222.

7. $b_n = n^2 - 4n + 9$;

а) $9 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, **значит**, $9 = b_4$;

б) $59 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 50 = 0$;

$D = 16 + 4 \cdot 50 = 216$, $n_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{216}}{2} \notin N$, **значит, 59 не член** $\{b_n\}$;

в) $409 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 400 = 0$, $D = 16 + 4 \cdot 400 = 1616$,

$n_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{1616}}{2} \notin N$, **значит, 409 – не член** $\{b_n\}$.

8. а) $x_1 = 6$, $x_{n+1} = x_n + 6$, $x_n = 6n$;

б) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n$, $x_n = 3^{n-1}$.

С-26

1. $a_1 = 2{,}8$, $a_2 = -0{,}4$, $d = a_2 - a_1 = -0{,}4 - 2{,}8 = -3{,}2$,

$a_3 = a_2 + d = -0{,}4 - 3{,}2 = -3{,}6$,

$a_4 = a_3 + d = -3{,}6 - 3{,}2 = -6{,}8$, $a_5 = a_4 + d = -6{,}8 - 3{,}2 = -10$,

$a_6 = a_5 + d = -10 - 3{,}2 = -13{,}2$.

2. $a_1 = -1{,}2$, $d = 3$,

а) $a_4 = a_1+3d = -1{,}2+9 = 7{,}8$, **б)** $a_8 = a_1+7d = -1{,}2+21 = 19{,}8$,

в) $a_{21} = a_1+20d = -1{,}2+60 = 58{,}8$,

г) $a_{k+2} = a_1+(k-1)\, d = -1{,}2+3k-3 = -4{,}2+3k$.

3. а) $a_1 = 5$, $a_8 = 19$, $a_8 = a_1+7d$, $d = \dfrac{a_8 - a_1}{7} = \dfrac{19-5}{7} = 2$,

б) $a_1 = 2$, $a_{11} = -5$, $a_{11} = a_1+10d$, $d = \dfrac{a_{11} - a_1}{10} = \dfrac{-5-2}{10} = -0{,}7$,

в) $a_1 = -0{,}3$, $a_7 = 1{,}9$, $a_7 = a_1+6d$, $d = \dfrac{a_7 - a_1}{6} = \dfrac{1{,}9 + 0{,}3}{6} = \dfrac{1{,}1}{3} = \dfrac{11}{30}$.

4. $a_1 = 80$, $d = 17$, $a_8 = a_1+7d = 80+7 \cdot 17 = 199$,
$a_{12} = a_1+11d = 80+11 \cdot 17 = 267$.

5. $b_1 = 12$, $d = 3$,

а) $b_n = -6 = b_1+d(n-1) = 12+3(n-1) = 3n+9$, $3n = -15$, $n = -5 \notin N$,
значит, -6 – не член $\{b_n\}$;

б) $0 = 3n+9$, $n = -3 \notin N$, значит, 0 – не член $\{b_n\}$;

в) $9 = 3n+9$, $n = 0 \notin N$, значит, 9 — не член $\{b_n\}$.

6. $a_1 = 6{,}5$, $d = 8-6{,}5 = 1{,}5$;

а) $13 = a_1+d(n-1) = 6{,}5+1{,}5(n-1) = 1{,}5n+5$,

$8 = 1{,}5n$; $n = \dfrac{8}{1{,}5} \notin N$, значит, 13 не встретится;

б) $22{,}5 = 1{,}5n+5$,

$1{,}5n = 17{,}5$, $n = \dfrac{17{,}5}{1{,}5} \notin N$, значит, 22,5 не встретится;

в) $36 = 1{,}5n+5$,

$1{,}5n = 31$, $n = \dfrac{31}{1{,}5} \notin N$, значит, 36 не встретится.

7. 64, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 46, $a_1 = 64$, $a_7 = 46$, $a_7 = a_1+6d$, $d = \dfrac{a_7 - a_1}{6} = -3$,

поэтому: $a_2 = a_1+d = 61$, $a_3 = a_2+d = 58$, $a_4 = a_3+d = 55$,
$a_5 = a_4+d = 52$, $a_6 = a_5+d = 49$.

8. $x_4 = x_1 + 3d$, $x_6 = x_1 + 5d$,
$x_4 + x_{n-4} = x_1 + 3d + x_1 + (n-4-1)d = 2x_1 + 3d + nd - 5d =$
$= 2x_1 + nd - 2d$, $x_6 + x_{n-6} = x_1 + 5d + x_1 + d(n-6-1) =$
$= 2x_1 + 5d + nd - 7d = 2x_1 + nd - 2d = x_4 + x_{n-4}$.

9. $a_1 = 47$; Пусть $a_2 = x^2$, $a_3 = (x+1)^2$, где $x \in N$. Тогда $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.
Получаем: $x^2 - 47 = (x+1)^2 - x^2$, $x^2 - 47 = 2x + 1$, $x^2 - 2x - 48 = 0$,
$D = 4 + 4 \cdot 48 = 4 \cdot 49$,

$x_1 = \dfrac{2 + 2 \cdot 7}{2} = 8$, $x_2 < 0$. Значит, $a_2 = 8^2 = 64$, $a_3 = 81$.

Ответ: 64 и 81.

10. По свойству арифметической прогрессии

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}.$$

Нужно доказать, что $b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2}$.

Докажем это:

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = 0,\ \frac{2}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} = 0,$$

$2(a+b)(b+c) - (a+b)(a+c) - (a+c)(b+c) = 0,$

$2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc - a^2 - ab - ac - bc - ab - bc - ac - c^2 = 0,$

$b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2}$, ч.т.д.

С-27

1. $a_1 = 4,\ a_2 = -6,\ d = a_2 - a_1 = -10;$

а) $S_8 = \dfrac{2a_1 + d(8-1)}{2}\cdot 8 = \dfrac{8-10\cdot 7}{2}\cdot 8 = -62\cdot 4 = -248;$

б) $S_{18} = \dfrac{2a_1 + d(18-1)}{2}\cdot 18 = (8 - 10\cdot 17)\cdot 9 = -1458;$

в) $S_{35} = \dfrac{2a_1 + d(35-1)}{2}\cdot 35 = \dfrac{8-10\cdot 34}{2}\cdot 35 = -5810;$

г) $S_k = \dfrac{2a_1 + d(k-1)}{2}\cdot k = \dfrac{8-10(k-1)}{2}\cdot k = k(4 - 5k + 5) = k(9-5k).$

2. а) $S_{10} = \dfrac{2a_1 + d(10-1)}{2}\cdot 10 = \dfrac{10+3\cdot 9}{2}\cdot 10 = 185;$

б) $S_{10} = \dfrac{2a_1 + d(10-1)}{2}\cdot 10 = (-16 + 4\cdot 9)\cdot 5 = 100;$

в) $S_{10} = \dfrac{2a_1 + d(10-1)}{2}\cdot 10 = (37 - 2{,}5\cdot 9)\cdot 5 = 72{,}5;$

г) $S_{10} = (2a_1 + 9d)\cdot 5 = (4 - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{2})\cdot 5 = 20 + 35\sqrt{2}$.

3. $x_n = 4n + 5,\ x_1 = 4 + 5 = 9,\ x_6 = 4\cdot 6 + 5 = 29,$

$x_{20} = 80 + 5 = 85,\ x_k = 4k + 5,$

$S_6 = \dfrac{x_1 + x_6}{2}\cdot 6 = 38\cdot 3 = 114,\ S_{20} = \dfrac{x_1 + x_{20}}{2}\cdot 20 = 940,$

$S_k = \dfrac{9+4k+5}{2}\cdot k = k(7+2k).$

4. а) $a_1 = 1,\ d = 1,\ a_{50} = 50,\ S_{50} = \dfrac{1+50}{2}\cdot 50 = 51\cdot 25 = 1275;$

б) $a_1 = 4,\ d = 4,\ a_{25} = 100,$

$S_{25} = \dfrac{4+100}{2}\cdot 25 = 1300;$

в) $a_1 = 1, d = 2, a_{50} = 99, S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500.$

5. а) $a_1 = 6, a_{11} = 46, d = \frac{a_{11} - a_1}{10} = \frac{40}{10} = 4,$

$S_{12} = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 28 \cdot 12 = 336;$

б) $a_6 = 12, a_{16} = 100,$

$$\begin{cases} 12 = a_1 + 5d \\ 100 = a_1 + 15d \end{cases} \left| \begin{array}{l} a_1 = 12 - 5d \\ a_1 = 100 - 15d \end{array} \right., \ 12 - 5d = 100 - 15d,$$

$10d = 88, d = 8{,}8, a_1 = 12 - 5 \cdot 8{,}8 = -32, S_{12} = \frac{-64 + 8{,}8 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 196{,}8.$

6. $a_1 = 12, d = 3, S_{1800} = \frac{24 + 3 \cdot 1799}{2} \cdot 1800 = 4878900$ (м).

7. $S_3 = 60, S_7 = 56, \begin{cases} 60 = \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 \\ 56 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 20 = a_1 + d \\ 8 = a_1 + 3d \end{array} \right.,$

$20 - d = 8 - 3d, 2d = -12,$

$d = -6, a_1 = 8 + 3 \cdot 6 = 26.$

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 60 + 45 = 105 (км), а за каждый последующий на 5 км больше. Значит, $a_1 = 105, d = 5, S_n = 450, n$ – ?;

$450 = \frac{210 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n, 900 = (205 + 5n) \cdot n, 5n^2 + 205n - 900 = 0,$

$n^2 + 41n - 180 = 0, D = 49^2, n_1 = \frac{-41 + 49}{2} = 4, n_2 < 0.$

Итак, через 4 ч автомобили встретятся.

9. а) $2 + 6 + 10 + ... + x = 450, d = 4, a_1 = 2, S_n = 450, 450 = \frac{4 + 4(n-1)}{2} \cdot n,$

$450 = (2 + 2(n - 1)) \cdot n, 2n^2 = 450, n^2 = 225, n = 15,$

$a_{15} = a_1 + 14d = 2 + 4 \cdot 14 = 58;$

б) $30 + 27 + 24 + ... + x = 162, d = -3, a_1 = 30,$

$S_n = 162, 162 = \frac{60 - 3(n-1)}{2} \cdot n,$

$324 = (63 - 3n)n, 3n^2 - 63n + 324 = 0, n^2 - 21n + 108 = 0,$

$D = 441 - 4 \cdot 108 = 9,$

$n_1 = \frac{21+3}{2} = 12, n_2 = 9, a_9 = a_1 + 8d = 30 - 24 = 6,$

$a_{12} = a_1 + 11d = 30 - 33 = -3.$

10. а) $S_n = n^2 + n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, $n + 1 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$,

$\begin{cases} 1 = \frac{d}{2}; & d = 2 \\ 1 = a_1 - \frac{d}{2}; & a_1 = 2 \end{cases}$, значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

б) $S_n = n(n + 4) = \frac{2a_1 + d(n+1)}{2} \cdot n$, $n + 4 = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$,

$\begin{cases} \frac{d}{2} = 1; & d = 2 \\ 4 = a_1 - \frac{d}{2}; & a_1 = 5 \end{cases}$.

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

в) $S_n = 4n^2 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, $4n = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$, $\begin{cases} \frac{d}{2} = 4, & d = 8 \\ a_1 - \frac{d}{2} = 0, & a_1 = 4 \end{cases}$.

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

С-28

1. $b_1 = 1{;}6$; $b_2 = 0{,}8$, $q = \frac{b_2}{b_1} = 0{,}5$,

$b_3 = b_2 \cdot q = 0{,}4$, $b_4 = b_3 \cdot q = 0{,}2$, $b_5 = b_4 \cdot q = 0{,}1$,
$b_6 = b_5 \cdot q = 0{,}05$.

2. $a_1 = 3{,}2$, $q = \frac{1}{2}$;

а) $a_2 = a_1q = 1{,}6$; **б)** $a_4 = a_1q^3 = 3{,}2 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}4$;

в) $a_7 = a_1q^6 = 3{,}2 \cdot \frac{1}{64} = 0{,}05$; **г)** $a_{k+1} = a_1q^k = \frac{3{,}2}{2^k}$.

3. а) $b_1 = 2$, $q = 3$, $b_6 = b_1q^5 = 2 \cdot 3^5 = 486$;

б) $b_1 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$, $b_9 = b_1q^8 = 16 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{2^4}{2^8} = \frac{1}{16}$;

в) $b_1 = 128$, $q = \frac{1}{4}$ $b_4 = b_1q^3 = 128 \cdot \frac{1}{64} = 2$;

г) $b_1 = 4$, $q = \sqrt{3}$ $b_7 = b_1q^6 = 4(\sqrt{3})^6 = 108$.

4. а) $a_5 = \frac{1}{64}$, $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{2^4}{64} = \frac{1}{4}$;

б) $a_6 = 243$, $q = -3$, $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -\frac{243}{243} = -1$.

5. а) $b_5 = 11$, $b_7 = 99$, $b_7 = b_5q^2$, $q = \pm\sqrt{\frac{b_7}{b_5}} = \pm 3$;

б) $b_6 = 100$, $b_8 = 9$, $b_8 = b_6q^2$, $q = \pm\sqrt{\frac{b_8}{b_6}} = \pm 0{,}3$.

6. $\frac{1}{16}$, b_2, b_3, b_4, 16; $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $q = \pm\sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm 4$,

$b_2 = b_1 \cdot q = \pm\frac{1}{4}$; $b_3 = b_2 \cdot q = 1$, $b_4 = b_3 \cdot q = \pm 4$.

7. а) $a_1 - 1$, $a_2 - 1$, $a_3 - 1$ – не геометрическая прогрессия.
Для доказательства можно взять, например, $a_n = 2^n$.

Тогда $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, но $a_1 - 1 = 1$, $a_2 - 1 = 3$, $a_3 - 1 = 7$, $\frac{3}{1} \neq \frac{7}{3}$,

значит, это уже не геометрическая прогрессия.
б) $4a_1$, $4a_2$, $4a_3$ — очевидно, геометрическая прогрессия с тем же самым знаменателем.

в) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ — геометрическая прогрессия.

8. $\begin{cases} b_5 - b_3 = 72 \\ b_4 - b_2 = 36 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1q^4 - b_1q^2 = 72 \\ b_1q^3 - b_1q = 36 \end{array} \right.$, $\frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 2$;

$\frac{q(q^2 - 1)}{q^2 - 1} = 2$, $q = \pm 1$ или $q = 2$, $q = 1$ — не подходит к условию задачи,

т.к. тогда бы $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$,
$b_5 - b_3 = 0 \neq 72$, $q = -1$ — также не подходит по схожим причинам.

Если $q = 2$, то $b_1 = \frac{36}{q^3 - q} = \frac{36}{6} = 6$.

Ответ: $b_1 = 6$; $q = 2$.

9. $\begin{cases} b_1 + b_4 = 13 \\ b_2 + b_3 = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 + b_1q^3 = 13 \\ b_1q + b_1q^2 = 4 \end{array} \right.$, $\frac{1 + q^3}{q + q^2} = \frac{13}{4}$, $\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \frac{13}{4}$,

$q_1 = -1$, $4q^2 - 4q + 4 = 13q$, $4q^2 - 17q + 4 = 0$, $D = 289 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225$,

$q_2 = \frac{17 + 15}{8} = 4$, $q_3 = \frac{1}{4}$, $q = -1$ — не подходит, т.к. тогда бы $b_2 = -b_3$,

$b_2 + b_3 = 0 \neq 4$.

Если $q = 4$, то $b_1 = \frac{13}{1+q^3} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$, $b_2 = \frac{4}{5}$, $b_3 = \frac{16}{5}$, $b_4 = \frac{64}{5}$.

Если же $q = \frac{1}{4}$, то $b_1 = \frac{13}{1+\frac{1}{64}} = \frac{64}{5}$, $b_2 = \frac{16}{5}$, $b_3 = \frac{4}{5}$, $b_4 = \frac{1}{5}$.

10. a, b, c, d — геометрическая прогрессия, т.е. $b^2 = ac$, $c^2 = bd$.
Надо доказать, что
$(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$, т.е., что
:$a^2 - 2ad + d^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$, $2b^2 + 2c^2 =$
$= 2ac + 2bc + 2bd - 2ad$.
Т.к. a, b, c, d – геометрическая прогрессия, то
$bc = ad$; $2b^2 + 2c^2 = 2(ac + bd)$,
$2bc - 2ad = 0$, т.е. $2b^2 + 2c^2 = 2(ac + bd) + 2bc - 2ad$.
Видно, что оба данных равенства эквивалентны, значит, требуемое равенство – тождество. Ч.т.д.

С-29

1. а) $b_1 = 27, q = \frac{1}{3}, S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{27\left(\frac{1}{729}-1\right)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{27\cdot728\cdot3}{729\cdot2} = \frac{364}{9}$;

б) $b_1 = -9, q = 2, S_6 = \frac{-9(2^6-1)}{2-1} = -567$;

в) $b_1 = 16, q = -\frac{1}{2}, S_6 = \frac{16\cdot\left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{16\cdot63\cdot2}{64\cdot3} = \frac{21}{2}$;

г) $b_1 = 3\sqrt{2}, q = \sqrt{2}, S_6 = \frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1} = 21\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

2. а) $b_1 = 8, q = \frac{1}{2}, S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{8\left(\frac{1}{32}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{8\cdot31\cdot2}{32} = \frac{31}{2} = 15{,}5$;

б) $b_1 = 1{,}5, q = -2, S_5 = \frac{1{,}5(-32-1)}{-2-1} = 16{,}5$;

в) $b_1 = 3, q = 3, S_5 = \frac{3(3^5-1)}{3-1} = 363$;

г) $b_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$, $S_5 = \dfrac{\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}\,(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) =$

$= \sqrt{2}\,(8-\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}\,(7+3\sqrt{2})$.

3. а) $a_1 = 81$, $q = \dfrac{1}{3}$, $S_6 = \dfrac{81\cdot\left(\dfrac{1}{729}-1\right)}{\dfrac{1}{3}-1} = \dfrac{364}{3}$;

б) $a_1 = 18$, $q = -\dfrac{1}{2}$, $S_5 = \dfrac{18\left(-\dfrac{1}{32}-1\right)}{-\dfrac{1}{2}-1} = \dfrac{18\cdot 33\cdot 2}{32\cdot 3} = 12{,}375$;

в) $a_1 = 4$, $q = -3$, $S_4 = \dfrac{4(81-1)}{-4} = -80$;

г) $a_1 = \sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$, $S_8 = \dfrac{\sqrt{3}(81-1)}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{80\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = 40\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)$.

4. а) $b_4 = \dfrac{1}{16}$, $b_5 = \dfrac{1}{64}$, $q = \dfrac{1}{4}$,

$b_1 = \dfrac{b_4}{q^3} = 4$, $S_5 = \dfrac{4\left(\dfrac{1}{1024}-1\right)}{\dfrac{1}{4}-1} = \dfrac{4\cdot 1023\cdot 4}{1024\cdot 3} = \dfrac{341}{64}$;

б) $b_2 = 4$, $b_4 = 36$, $q = \sqrt{\dfrac{b_4}{b_2}} = 3$, $b_1 = \dfrac{4}{3}$, $S_5 = \dfrac{4(243-1)}{3\cdot 2} = \dfrac{484}{3}$.

5. а) $q = \dfrac{2}{3}$, $S_4 = 65$, $65 = \dfrac{b_1\left(\dfrac{16}{81}-1\right)}{\dfrac{2}{3}-1} = \dfrac{b_1\cdot 65\cdot 3}{81}$, $b_1 = 27$;

б) $q = 2$, $S_8 = 765$, $765 = \dfrac{b_1(256-1)}{2-1} = 255b_1$, $b_1 = 3$.

6. а) $b_n = 4^n$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{4^{n+1}}{4^n} = 4$, $\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 4$, т.е. $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$ для любого n, значит, $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия;

$b_1 = 4$; $q = 4$, $S_4 = \dfrac{4(256-1)}{3} = \dfrac{1020}{3} = 340$;

б) $b_n = 2\cdot 5^n$; $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 5$, значит, $\{b_n\}$–геометрическая прогрессия;

$b_1 = 10$; $q = 5$, $S_4 = \dfrac{10(625-1)}{4} = 1560$;

в) $x_n = 2^n - 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \neq \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$, значит, $\{x_n\}$ — не геометрическая прогрессия.

7. $\begin{cases} b_5 - b_3 = 144 \\ b_4 - b_2 = 48 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} b_1q^4 - b_1q^2 = 144 \\ b_1q^3 - b_1q = 48 \end{array} \right.$, $\frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 3$, $\frac{q(q^2-1)}{q^2-1} = 3$, $q_1 = 3$,

$q_{2,3} = \pm 1$, $q = \pm 1$ не подходит, т к $b_5 - b_3 \neq 144$ в этом случае $b_1 = \frac{48}{27-3} = 2$,

$S_6 = \frac{2(729-1)}{2} = 728$.

8. $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \end{cases}$, $b_2 = \sqrt{b_1b_3}$, $\begin{cases} b_1 + b_3 + \sqrt{b_1b_3} = 14 \\ b_1^2 + b_1b_3 + b_3^2 = 84 \end{cases}$.

С-30

1. Все способы можно разделить на 5 групп. В i-ой группе $(i \in \{0,...,4\})$ в первой корзине i мячей, а во второй $4 - i$.

2. $6! = 720$

3. а) $\frac{36!}{33!} = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840$;

б) $\frac{18!}{20!} = \frac{1}{19 \cdot 20} = \frac{1}{380}$;

в) $\frac{52!}{48! \cdot 5!} = \frac{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 54145$;

4. а) $400 = 8 \cdot 50 \Rightarrow$ делится;

б) $98 = 2 \cdot 49 \Rightarrow$ делится;

в) $510 = 10 \cdot 51; 51 > 50$ и 51 — простое $\Rightarrow$ делится.

5. 204, 206, 208, 240, 246, 248, 260, 264, 268, 280, 284, 286,
402, 406, 408, 420, 426, 428, 460, 462, 468, 480, 482, 486,
602, 604, 608, 620, 624, 628, 640, 642, 648, 680, 682, 684,
802, 804, 806, 820, 824, 826, 840, 842, 846, 860, 862, 864.

6. а) $10! \cdot 8 = 8! \cdot 720 > 8! \cdot 10$;

б) $(n+2)! \cdot n = n! \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) > n!(n+2)$, при $n \geq 1$

$n = 0 \Rightarrow (0+2)! \cdot 0 = 0 < 2 = 0! \cdot (0+2)!$

7. Каждый из 7 участников конференции дал 6 участникам свой номер, поэтому всего было $7 \cdot 6 = 42$ обмена телефонными номерами.

8. Если зафиксировать позиции букв в, е, р, то останутся свободными 4 позиции, на которые можно расставить 4 буквы 4! = 24 способами. Существуют 5 позиций, где буквы в, е, р идут подряд, следовательно, всего способов $5 \cdot 24 = 120$.

С-31

1. а) $\frac{15!}{9!\cdot 6!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=5\cdot 7\cdot 11\cdot 13=5005$;

б) $\frac{3!\cdot 4!}{8!}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=\frac{1}{5\cdot 7\cdot 8}=\frac{1}{280}$;

в) $\frac{6!\cdot 7!}{4!\cdot 9!}=\frac{5\cdot 6}{8\cdot 9}=\frac{5}{12}$;

2. $C_{32}^{3}=\frac{32!}{29!\cdot 3!}=\frac{30\cdot 31\cdot 32}{2\cdot 3}=4960$;

3. $C_{9}^{4}=\frac{9!}{4!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{}2\cdot 3\cdot 4=2\cdot 7\cdot 9=126$;

4. Через первую точку можно провести 8 прямых, через вторую — 7 прямых (т.к. одна уже была учтена в первом случае, через третью — 6 прямых, и т.д. Через восьмую точку — 1 прямую, а для девятой точки все прямые уже были учтены.

Поэтому всего: $0+1+2+...+8=\frac{1+8}{2}\cdot 8=36$.

5. Данное количество номеров совпадает с числом способов выбрать 4 различные цифры из множества $\{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$, т.е. $C_{8}^{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}=2\cdot 5\cdot 7=70$.

6. а) $6!\cdot C_{10}^{6}=\frac{6!\cdot 10!}{6!\cdot 4!}=\frac{10!}{4!}=5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=151200$; **б)** 10!

7. а) 4! = 24; **б)** 3! = 6;

С-32

1. а) $\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12}$; **б)** $\frac{7}{5+7}=\frac{7}{12}$.

2. Всего двузначных чисел 90, а из них тех, которые являются квадратами некоторых чисел 6, т.к.

$x=n^2$

$10\le x\le 90$

$10\le n^2\le 90 \Leftrightarrow 4^2\le n^2\le 9^2 \Leftrightarrow 4\le n\le 9 \Rightarrow 6$ возможностей для n.

Поэтому вероятность равна $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

3. а) $\frac{1}{6}$; **б)** $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

4. Вероятность событий A и B больше 0, но меньше 1;
Вероятность события C равна 1;
Вероятность события D равна 0.

5. Так как события независимые (взятие одной тетради), а вероятность одного события равна $\frac{25-5}{25}=\frac{4}{5}$, то искомая вероятность равна $\left(\frac{4}{5}\right)^7$.

6. а) Так как бросание кубиков независимое, то всего существует $6 \cdot 6 = 36$ исходов бросания. Из них только у 3 сумма равна 4: (1; 3), (2; 2), (3; 1). Поэтому вероятность равна $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

б) Всего 1 исход с суммой менее 3: (1; 1). Поэтому вероятность равна $\frac{1}{36}$.

7. Площадь квадрата равна $6^2 = 36$ см^2, а площадь круга равна $\pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9\pi \approx 27$, поэтому вероятность равна $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1. Вариант 1

1. $f\left(\frac{51}{17}\right)=0$; $f(0)<0$; $f(10)>0$; Функция возрастающая.

2. а) $x^2-14x+45=0$;

$D=196-4\cdot45=16$; $x_1=\frac{14+4}{2}=9$; $x_2=5$;

$x^2-14x+45=(x-9)(x-5)$;

б) $3y^2+7y-6=0$;

$D=49+4\cdot3\cdot6=121$; $y_1=\frac{-7+11}{6}=\frac{2}{3}$; $y_2=-3$;

$3y^2+7y-6=3(y+3)(y-\frac{2}{3})=(y+3)(3y-2)$.

3. $\frac{3p^2+p-2}{4-9p^2}=\frac{3\left(p-\frac{2}{3}\right)(p+1)}{(2-3p)(2+3p)}=-\frac{(3p-2)(p+1)}{(3p-2)(2+3p)}=-\frac{p+1}{3p+2}$;

$3p^2+p-2=0$; $D=1+4\cdot3\cdot2=25$; $p_1=\frac{-1+5}{6}=\frac{2}{3}$; $p_2=-1$.

4. Нули функции: $x=2$, $x=6$;

Функция возрастает на $[0;4]$ и убывает на $[-2;0]\cup[4;6]$;

ОЗФ: $[-3;2]$.

5. $\begin{cases} a+b=50 \\ a>0 \\ b>0 \\ a\cdot b\to\max \end{cases}$

$b=50-a$; $a\cdot b=a(50-a)=50a-a^2$

$a\cdot b$ — max в вершине параболы

$y=50x-x^2$, т.е. при $a=-\frac{50}{2(-1)}=25$;

$b=50-a=25\Rightarrow a\cdot b=25^2=625$.

Ответ: $a=b=25$.

Вариант 2

1. $f\left(\frac{65}{13}\right)=0$; $f(10)<0$; $f(0)>0$; Функция убывающая.

2. а) $x^2-10x+21=0$;

$D=100-4\cdot21=16$; $x_1=\frac{10+4}{2}=7$; $x_2=3$;

$x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$;

б) $5y^2+9y-2=0$;

$D=81+4\cdot5\cdot2=121$; $y_1=\frac{-9+11}{10}=\frac{1}{5}$; $y_2=-2$;

$5y^2+9y-2=5(y-\frac{1}{5})(y+2)=(5y-1)(y+2)$.

3. $\frac{4c^2+7c-2}{1-16c^2}=\frac{4\left(c-\frac{1}{4}\right)(c+2)}{(1-4c)(1+4c)}=-\frac{(4c-1)(c+2)}{(4c-1)(4c+1)}=-\frac{c+2}{4c+1}$;

$4c^2+7c-2=0$; $D=49+4\cdot4\cdot2=81$; $c_1=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4}$, $c_2=-2$.

4. Нули функции: $x=-3$, $x=1$, $x=3$;

Функция возрастает на $[-5;-1]\cup[2;4]$ и убывает на $[-1;2]$;

ОЗФ: $[-2;4]$.

5. $\begin{cases} c+d=70 \\ c>0 \\ d>0 \\ c\cdot d\to\max \end{cases}$

$d=70-c$; $c\cdot d=c(70-c)=70c-c^2$ — max в вершине параболы $y=70-x^2$, т.е. при $c=-\frac{70}{2(-1)}=35$;

$d=70-c=35\Rightarrow c\cdot d=35^2=1225$.

Ответ: $c=d=35$.

Вариант 3

1. $f(3)=0$; $f(0)<0$; $f(10)>0$; Функция возрастающая.

2. а) $x^2-12x+35=0$; $D=144-4\cdot35=4$; $x_1=\frac{12+2}{2}=7$, $x_2=5$;

$x^2-12x+35=(x-5)(x-7)$;

б) $7y^2 + 19y - 6 = 0$;

$D = 361 + 4\cdot7\cdot6 = 529$; $y_1 = \dfrac{-19+23}{14} = \dfrac{2}{7}$, $y_2 = -3$;

$7y^2 + 19y - 6 = 7(y - \dfrac{2}{7})(y + 3) = (7y - 2)(y + 3)$.

3. $\dfrac{5a^2+19a-4}{1-25a^2} = \dfrac{5\left(a-\dfrac{1}{5}\right)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)} = -\dfrac{(5a-1)(a+4)}{(5a-1)(5a+1)} = -\dfrac{a+4}{5a+1}$;

$5a^2 + 19a - 4 = 0$;

$D = 361 + 4\cdot5\cdot4 = 441$;

$a_1 = \dfrac{-19+21}{10} = \dfrac{1}{5}$, $a_2 = -4$.

4. Нули функции: $x = 1$, $x = 5$;

Функция возрастает на $[0; 3]$ и убывает на $[-1; 0]\cup[3;6]$;

ОЗФ: $[-2; 2]$.

5. $\begin{cases} a+b=46 \\ a>0 \\ b>0 \\ a\cdot b \to \max \end{cases}$

$b = 46 - a$; $a\cdot b = a(46-a) = 46a - a^2$;

$a\cdot b$ — max в вершине параболы $y = 46x - x^2$, т.е. при $a = -\dfrac{46}{2\cdot(-1)} = 23$.

$b = 46 - a = 23 \Rightarrow a\cdot b = 23^2 = 529$.

Ответ: $a = b = 23$.

Вариант 4

1. $f(4) = 0$; $f(10) < 0$; $f(0) > 0$; Функция убывающая.

2. а) $x^2 - 18x + 45 = 0$;

$D = 324 - 4\cdot45 = 144$; $x_1 = \dfrac{18+12}{2} = 15$, $x_2 = 3$;

$x^2 - 18x + 45 = (x - 15)(x - 3)$;

б) $9x^2 + 25x - 6 = 0$;

$D = 625 + 4\cdot9\cdot6 = 841$;

$x_1 = \dfrac{-25+29}{18} = \dfrac{2}{9}$, $x_2 = -3$;

$9x^2 + 25x - 6 = 9(x - \dfrac{2}{9})(x + 3) = (9x - 2)(x + 3)$.

3. $\dfrac{7b^2+11b-6}{9-49b^2}=\dfrac{7\left(b-\dfrac{3}{7}\right)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)}=-\dfrac{(7b-3)(b+2)}{(7b-3)(3+7b)}=-\dfrac{b+2}{7b+3}$;

$7b^2+11b-6=0$; $D=121+4\cdot7\cdot6=289$; $b_1=\dfrac{-11+17}{14}=\dfrac{3}{7}$, $b_2=-2$.

4. Нули функции: $x=-2, x=1, x=5$;

Функция возрастает на $[-3;0]\cup[3;5]$ и убывает на $[0;3]$;

ОЗФ: $[-2;2]$.

5. $\begin{cases} m+n=62 \\ m>0 \\ n>0 \\ m\cdot n \text{ — max} \end{cases}$

$m=62-n; m\cdot n=n(62-n)=62\cdot n-n^2$;

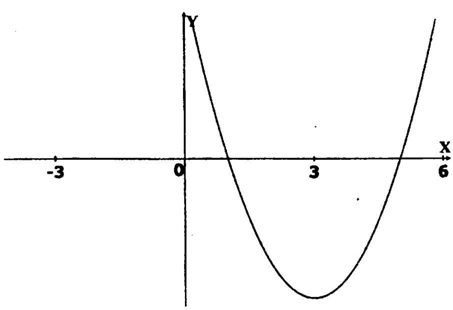
$m\cdot n$ — max в вершине параболы $y=62x-x^2$, т.е. при $n=-\dfrac{62}{2\cdot(-1)}=31$

$m=62-n=31\Rightarrow m\cdot n=31^2=961$.

Ответ: $m=n=31$.

К-2. Вариант 1

1.



$y=x^2-6x+5=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-4$;

а) $y(0{,}5)=2{,}25$; б) $(x-3)^2-4=-1$; $(x-3)^2=3$; $x=3\pm\sqrt{3}$;

в) $(x-3)^2-4=0$; $x-3=2, x_1=5$; $x-3=-2$, $x_2=1$;

$y>0$ при $x\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(1;5)$;

г) функция возрастает при $x\in[3;+\infty)$.

2. $y(x)=x^2-8x+7$; $m=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{8}{2}=4$, $n=f(4)=16-32+7=-9$.

3. Вершина параболы: $x_в = \frac{6}{2} = 3$ и $y_в = x_в^2 - 6 \cdot x_в - 13 = -22$;

$y(-2) = 3, y(7) = -6$

$\Rightarrow$ ОЗФ: $[-22; 3]$

4. $\frac{1}{4}x^2 = 5x - 16$, $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 16 = 0$, $x^2 - 20x + 64 = 0$;

$D = 400 - 4 \cdot 64 = 144$;

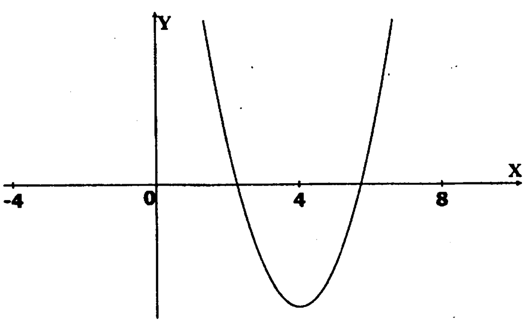
$x_1 = \frac{20+12}{2} = 16$; $x_2 = 4$; $y_1 = \frac{1}{4} \cdot 16^2 = 64$; $y_2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$.

Ответ: пересекаются в 2-х точках (16; 64) и (4; 4).

5. $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + 12\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} + 12\sqrt[4]{\frac{625}{81}} = -\frac{3}{2} + 12 \cdot \frac{5}{3} = \frac{37}{2}$.

Вариант 2

1.



$y = x^2 - 8x + 13 = x^2 - 8x + 16 - 3 = (x-4)^2 - 3$;

а) $y(1{,}5) = 3{,}25$; б) $(x-4)^2 - 3 = 2$; $(x-4)^2 = 5$; $x = 4 \pm \sqrt{5}$

в) $(x-4)^2 - 3 = 0$; $(x-4)^2 = 3$; $x - 4 = \pm\sqrt{3}$; $x_{2,1} = 4 \pm \sqrt{3}$;

$y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $y < 0$; при $x \in (x_1; x_2)$;

г) функция возрастает при $x \in [4; +\infty)$.

4. $y(x) = -x^2 + 6x - 4$;

$m = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$, $n = f(3) = -9 + 18 - 4 = 5$.

3. Вершина параболы: $x_в = \frac{4}{2} = 2$ и $y_в = x_в^2 - 4 \cdot x_в - 7 = -11$;

$y(-1) = -2, y(5) = -2$

$\Rightarrow$ ОЗФ: $[-11; -2]$

4. $\frac{1}{5}x^2 = 20 - 3x$, $\frac{1}{5}x^2 + 3x - 20 = 0$, $x^2 + 15x - 100 = 0$;

$D = 225 + 4 \cdot 100 = 625$;

$x_1 = \dfrac{-15 + 25}{2} = 5$; $x_2 = -20$;

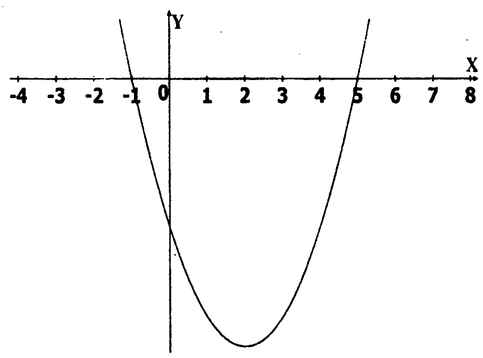
$y_1 = \frac{1}{5} \cdot 5^2 = 5$; $y_2 = \frac{1}{5} \cdot 20^2 = 80$.

Ответ: пересекаются в 2-х точках (5; 5) и (–20; 80).

5. $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} + 8\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} + 8\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = -\frac{4}{3} + 8 \cdot \frac{3}{2} = \frac{32}{3}$.

Вариант 3

1.



$y = x^2 - 4x - 5 = x^2 - 4x + 4 - 9 = (x-2)^2 - 9$;

а) $y(0{,}5) = -6{,}75$; б) $(x-2)^2 - 9 = 3$; $(x-2)^2 = 12$; $x - 2 = \pm 2\sqrt{3}$; $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$;

в) $(x-2)^2 - 9 = 0$; $x - 2 = 3$, $x_1 = 5$; $x - 2 = -3$, $x_2 = -1$;

$y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-1; 5)$;

г) функция убывает при $x \in (-\infty; 2]$.

2. Наименьшее значение в вершине параболы: $x_в = -1$ и $y_в = -25$.

Ответ: –25.

3. Вершина параболы: $x_в = \frac{2}{2} = 1$ и $y_в = x_в^2 - 2 \cdot x_в - 8 = -9$;

$y(-1) = -5$, $y(3) = -5$

$\Rightarrow$ ОЗФ: $[-9; -5]$.

4. $\frac{1}{3}x^2 = 6x - 15$, $\frac{1}{3}x^2 - 6x + 15 = 0$, $x^2 - 18x + 45 = 0$;

$D = 324 - 4\cdot45 = 144;$

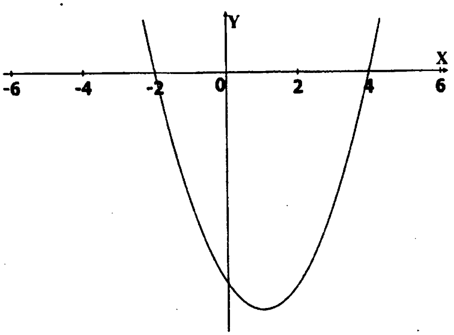
$x_1 = \dfrac{18+12}{2} = 15$; $x_2 = 3$; $y_1 = \dfrac{1}{3}\cdot15^2 = 75$; $y_2 = \dfrac{1}{3}\cdot3^2 = 3$.

Ответ: пересекаются в 2-х точках (15; 75) и (3; 3).

5. $\sqrt[3]{-4\dfrac{17}{27}} + 6\sqrt[4]{3\dfrac{13}{81}} = \sqrt[3]{-\dfrac{125}{27}} + 6\sqrt[4]{\dfrac{256}{81}} = -\dfrac{5}{3} + 6\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{19}{3}$.

Вариант 4

1.



$y = x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1 - 9 = (x-1)^2 - 9;$

а) $y(-1{,}5) = -2{,}75$; б) $(x-1)^2 - 9 = 3$; $(x-1)^2 = 12$; $x-1 = \pm2\sqrt{3}$; $x = 1 \pm 2\sqrt{3}$;

в) $(x-1)^2 - 9 = 0$; $(x-1)^2 = 9$; $x-1 = 3$; $x_1 = 4$; $x-1 = -3$; $x_2 = -2$;

$y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2; 4)$;

г) функция возрастает при $x \in [1; +\infty)$.

2. $y(x) = -x^2 + 4x + 3$; $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$, $n = f(2) = -4 + 4\cdot2 + 3 = 7$.

3. Вершина параболы: $x_в = \dfrac{2}{2} = 1$ и $y_в = x_в^2 - 2\cdot x_в - 3 = -4$;

$y(0) = -3$, $y(3) = 0$

$\Rightarrow$ ОЗФ: $[-4; 0]$

4. $\dfrac{1}{2}x^2 = 12 - x$, $\dfrac{1}{2}x^2 - 12 + x = 0$, $x^2 + 2x - 24 = 0$;

$D = 4 + 4\cdot24 = 100$;

$x_1 = \dfrac{-2+10}{2} = 4$; $x_2 = -6$; $y_1 = \dfrac{1}{2}\cdot4^2 = 8$; $y_2 = \dfrac{1}{2}\cdot36 = 18$.

Ответ: пересекаются в 2-х точках (4; 8) и (–6; 18).

5. $2\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}=2\sqrt[5]{-\frac{243}{32}}+\sqrt[4]{\frac{625}{16}}=$

$=-2\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$.

К-3. Вариант 1

1. а) $x^3-81x=0$; $x(x^2-81)=0$;
$x(x-9)(x+9)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm9$;

б) $\frac{x^2+1}{5}-\frac{x+1}{4}=1$; $4x^2-5x-21=0$;

$D=25+4\cdot4\cdot21=361=19^2$; $x_1=\frac{5+19}{8}=3$ и $x_2=\frac{5-19}{8}=-\frac{7}{4}$

Ответ: 3 и $-\frac{7}{4}$.

2. $x^4-19x^2+48=0$; $x^2=y\geq0$, тогда, $y^2-19y+48=0$;
$D=361-4\cdot48=169$;

$y_1=\frac{19+13}{2}=16$, $y_2=3$; $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm4$; $x^2=3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$.

3. $\frac{a^3-2a^2-9a+18}{a^2-4}=0\Leftrightarrow\frac{a(a^2-9)-2(a^2-9)}{a^2-4}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{(a^2-9)(a-2)}{a^2-4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2=9\\a=2\end{array}\right.\\a^2\neq4\end{cases}\Leftrightarrow a=\pm3.$$

Ответ: ±3.

4. а) $\frac{3y+2}{4y^2+y}+\frac{y-3}{16y^2-1}=\frac{3}{4y-1}$;

$$\frac{(3y+2)(4y-1)+(y-3)y-3\cdot y(4y+1)}{y(4y+1)(4y-1)}=0;$$

$$\frac{y^2-y-2}{y(4y+1)(4y-1)}=0;$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-1\end{array}\right.\\y\neq0,\ y\neq\pm\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-1\end{array}\right.$$

Ответ: 2 и -1.

б) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 9) = 171$;
$t = x^2 + 3x + 1$; $t(t - 10) = 171$; $t^2 - 10t - 171 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = 19 \\ t = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 18 = 0 \\ x^2 + 3x + 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Ответ: -6 и 3.

5. $\dfrac{x^3}{x-2} = x^2 - 3x + 1$;
$x^3 = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$; $5x^2 - 7x + 2 = 0$;

$$D = 49 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9 = 3^2 \Rightarrow x_1 = \frac{7+3}{10} = 1 \text{ и } x_2 = \frac{7-3}{10} = 0,4.$$

Ответ: (1; –1) и (0,4; –0,04).

Вариант 2

1. а) $x^3 - 64x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 64) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 64 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 8 \end{array}\right.$

Ответ: 0 и ± 8.

б) $\dfrac{x^2 - 4}{3} - \dfrac{6 - x}{2} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 44 = 0$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 44 = 361 = 19^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-3+19}{4} \text{ и } x_2 = \frac{-3-19}{4} = -\frac{11}{2}.$$

Ответ: 4 и $-\dfrac{11}{2}$.

2. $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

$$t = x^2 \Rightarrow t^2 - 20t + 64 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 4 \end{array}\right.$$

Ответ: ± 2 и ± 4.

3. $\dfrac{b^3 - 5b^2 - 4b + 20}{b^2 - 25} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(b^2 - 4)(b - 5)}{b^2 - 25} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b^2 = 4 \\ b = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow b = \pm 2 \\ b^2 \neq 25 \end{cases}$$

Ответ: ± 2.

4. а) $\frac{10y}{9y^2-4}+\frac{y-5}{3y+2}=\frac{y-3}{2-3y}$;

$$\frac{10y+(y-5)(3y-2)+(y-3)(3y+2)}{9y^2-4}=0;$$

$$\frac{6y^2-14y+4}{9y^2-4}=0; \qquad \frac{3y^2-7y+2}{9y^2-4}=0;$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right.\\ y\neq\pm\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$$D=49-4\cdot3\cdot2=25=5^2\Rightarrow y_1=\frac{7+5}{6}=2 \text{ и } y_2=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3}$$

Ответ: 2 и $\frac{1}{3}$.

б) $(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)=840$;
$t=x^2+5x+4$;
$t(t+2)=840$;
$t^2+2t-840=0$;

$$\left[\begin{array}{l}t=28\\ t=-30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+5x-24=0\\ x^2+5x+34=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+5x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-8\\ x=3\end{array}\right.$$

Ответ: –8 и 3.

5. $\frac{x}{x-3}=\frac{3x-4}{2x}$;

$$\frac{2x^2-(3x-4)(x-3)}{2x(x-3)}=0;$$

$$\frac{-x^2+13x-12}{2x(x-3)}=0; \left[\begin{array}{l}x=12\\ x=1\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(12;\frac{4}{3}\right)$ и $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 3

1. а) $x^3-36x=0$; $x(x^2-36)=0$;
$x(x-6)(x+6)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm6$;

б) $\frac{x^2-1}{6}-\frac{x-1}{4}=3 \Leftrightarrow 4x^2-6x-70=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-35=0$

$D=9+4\cdot 2\cdot 35=289=17^2 \Rightarrow$

$x_1=\frac{3+17}{4}=5$ и $x_2=\frac{3-17}{4}=-\frac{7}{2}$

Ответ: 5 и $-\frac{7}{2}$.

2. $x^4-29x^2+100=0$

$t=x^2 \Rightarrow t^2-29t+100=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=25 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=25 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 5 \\ x=\pm 4 \end{array}\right.$

Ответ: ± 5 и ± 4.

3. $\frac{a^3+108-3a^2-36a}{a^2-9}=0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-36)(a-3)}{a^2-9}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2=36 \\ a=3 \end{array}\right. \\ a^2 \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow a=\pm 6$

Ответ: ± 6.

4. а) $\frac{5y-6}{4y^2-9}-\frac{3-3y}{3+2y}=\frac{3}{2y-3}$;

$\frac{5y-6-(3-3y)(2y-3)-3(2y+3)}{4y^2-9}=0$;

$\frac{6y^2-16y-6}{4y^2-9}=0$;

$\frac{3y^2-8y-3}{4y^2-9}=0$;

$D=64+4\cdot 3\cdot 3=100=10^2$

$y_1=\frac{8+10}{6}=3$ и $y_2=\frac{8-10}{6}=-\frac{1}{3}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ y \neq \pm\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ответ: 3 и $-\frac{1}{3}$.

б) $(x^2-x+1)(x^2-x-2)=378$;

$t=x^2-x+1$;

$t(t-3)=378$; $t^2-3t=378$;

$$\left[\begin{array}{l} t=21 \\ t=-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-20=0 \\ x^2-x+19=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-x-20=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Ответ: 5 и –4.

5. $\dfrac{x^3}{x-4}=x^2+2x$;

$$x\left(\frac{x^2}{x-4}-(x+2)\right)=0;$$

$$\frac{x\left(x^2-(x+2)(x-4)\right)}{x-4}=0;$$

$$\frac{x(2x+8)}{x-4}=0; \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Ответ: (0; 0) и (–4; 8).

Вариант 4

1. а) $x^3-25x=0$; $x(x^2-25)=0$; $x(x-5)(x+5)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 5$;

б) $\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{3x-1}{4}=2$; $2x^2-2-3x+1-8=0$; $2x^2-3x-9=0$;

$D=9+4\cdot 2\cdot 9=81$; $x_1=\dfrac{3+9}{4}=3$, $x_2=-1{,}5$.

2. $x^4-40x^2+144=0$

$$t=x^2 \Rightarrow t^2 40t+144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=36 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=36 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 6 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

Ответ: ± 6 и ± 2.

3. $\dfrac{c^3-7c^2-4c+28}{c^2-49}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(c^2-4)(c-7)}{c^2-49}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} c^2=4 \\ c=7 \end{array}\right. \\ c^2\neq 49 \end{array}\right. \Leftrightarrow c=\pm 2.$$

Ответ: ± 2.

4. а) $\dfrac{20y}{36y^2-4}-\dfrac{2y-3}{2-6y}=\dfrac{5-2y}{6y+2}$;

$\dfrac{20y+(2y-3)(6y+2)+(2y-5)(6y-2)}{36y^2-4}=0$;

$\dfrac{24y^2-28y+4}{36y^2-4}=0$;

$6y^2-7y+1=0$; $D=49-4\cdot6=25=5^2$;

$y_1=\dfrac{7+5}{12}=1$ и $y_2=\dfrac{7-5}{12}=\dfrac{1}{6}$

Ответ: 1 и $\dfrac{1}{6}$.

б) $(x^2+3x+4)(x^2+3x+9)=266$;
$t=x^2+3x+4$; $t(t+5)=266$;
$t^2+5t-266=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=-19 \\ t=14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x+23=0 \\ x^2+3x-10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ответ: –5 и 2.

5. $\dfrac{x^3}{x+20}=x^2-20$;

$\dfrac{x^3-(x^2-20)(x+20)}{x+20}=0$; $\dfrac{-20x^2+20x+400}{x+20}=0$;

$x^2-x-20=0$; $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right.$

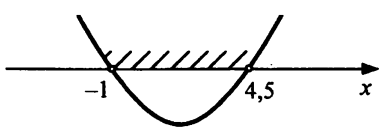
Ответ: (5; 5) и (–4; –4).

К-4. Вариант 1

1. а) $2x^2-7x-9<0$

$D=7^2+4\cdot2\cdot9=121=11^2 \Rightarrow$

$x_1=\dfrac{7+11}{4}=4,5$ и $x_2=\dfrac{7-11}{4}=-1$



Ответ: (–1; 4,5).

б) $x^2 > 49 \Leftrightarrow |x| > 7$

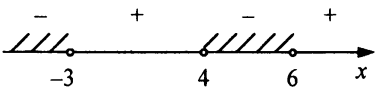
Ответ: $(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$.

в) $4x^2 - x + 1 > 0$

$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

2. $(x + 3)(x - 4)(x - 6) < 0$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (4; 6)$.

3. $3x^2 + mx + 12 = 0$

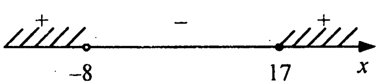
$D = m^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = m^2 - 12^2 > 0 \Leftrightarrow |m| > 12$

Ответ: $(-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.

4. а) $$\frac{5x+1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+1<0 \\ x-2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+1>0 \\ x-2<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-0,2 \\ x>2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-0,2 \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -0,2 < x < 2$$

Ответ: $(-0,2; 2)$.

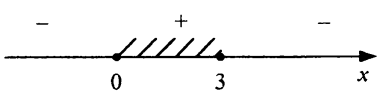
б) $$\frac{3x-1}{x+8} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-17}{x+8} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-8 \\ x \geq 17 \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -8) \cup [17; +\infty)$.

5. а) $y = \sqrt{6x - 2x^2}$

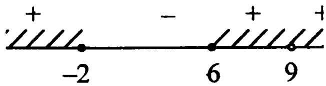
ООФ: $6x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$



Ответ: $[0; 3]$.

б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x - 12}}{2x - 18}$

ООФ: $\begin{cases} x^2-4x-12\ge 0 \\ 2x-18\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+2)\ge 0 \\ x\ne 9 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty;-2]\cup[6;9)\cup(9;+\infty)$.

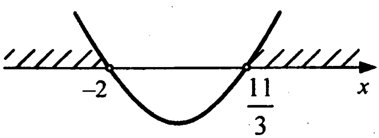
в) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{7-5x}$

ООФ: $\begin{cases} 16-x^2\ge 0 \\ 7-5x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 4 \\ x\le 1{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow -4\le x\le 1{,}4$

Ответ: [–4; 1,4].

Вариант 2

1. а) $3x^2-5x-22>0$



$D=5^2+4\cdot 3\cdot 22=289=17^2 \Rightarrow$

$x_1=\frac{5+17}{6}=\frac{11}{3}$ и $x_2=-2$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{11}{3};+\infty\right)$.

б) $x^2<81 \Leftrightarrow |x|<9$

Ответ: (–9; 9).

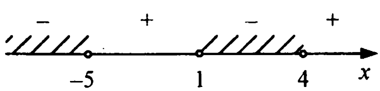
в) $2x^2+3x+8<0$

$D=3^2-4\cdot 2\cdot 8=-55<0$

Ответ: $\varnothing$.

2. $(x+5)(x-1)(x-4)<0$

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(1;4)$.

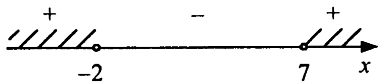


3. $5x^2 + nx + 20 = 0$

$D = n^2 - 4\cdot 5\cdot 20 = n^2 - 20^2 < 0 \Leftrightarrow |n| < 20$

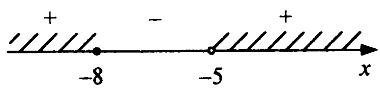
Ответ: $(-20; 20)$.

4. а) $\dfrac{2x+4}{x-7} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-7} > 0$



Ответ: $(-\infty; -2)\cup(7; +\infty)$.

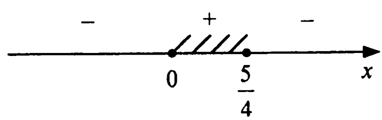
б) $\dfrac{x-1}{x+5} \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{2x+16}{x+5} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+8}{x+5} \ge 0$



Ответ: $(-\infty; -8]\cup(-5; +\infty)$.

5. а) $y = \sqrt{5x - 4x^2}$

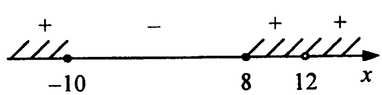
ООФ: $5x - 4x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{5}{4} - x\right) \ge 0$



Ответ: $\left[0; \dfrac{5}{4}\right]$.

б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 80}}{3x - 36}$

ООФ: $\begin{cases} x^2 + 2x - 80 \ge 0 \\ 3x - 36 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+10)(x-8) \ge 0 \\ x \ne 12 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; -10]\cup[8; 12)\cup(12; +\infty)$.

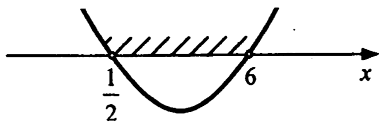
в) $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{5 - 2x}$

ООФ: $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 3 \\ x \leq 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2{,}5$

Ответ: $[-3;\ 2{,}5]$.

Вариант 3

1. а) $2x^2 - 13x + 6 < 0$

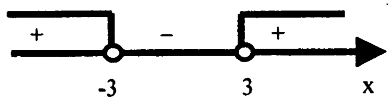


$D = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 121 = 11^2 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{13+11}{4} = 6$ и $x_2 = \dfrac{13-11}{4} = \dfrac{1}{2}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 6\right)$.

б) $x^2 - 9 > 0$; $(x-3)(x+3) > 0$.



Ответ: $(-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

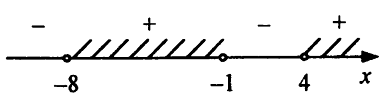
в) $3x^2 - 6x + 32 > 0$; $3x^2 - 6x + 32 = 0$;

$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 32 < 0$;

т.к. $a = 3 > 0$, то x–любое.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

2. $(x + 8)(x - 4)(x + 1) > 0$

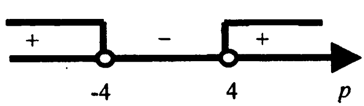


Ответ: $(-8; -1) \cup (4; +\infty)$.

3. $2x^2 + px + 2 = 0$;

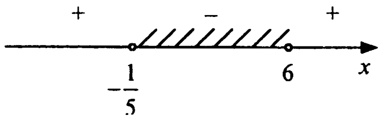
$D = p^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = p^2 - 16$.

Т.к. уравнение имеет 2 корня, то $D > 0$; $p^2 - 16 > 0$; $(p - 4)(p + 4) > 0$.



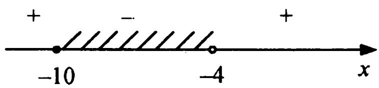
Ответ: $(-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$.

4. а) $\dfrac{5x+1}{x-6}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x+\frac{1}{5}}{x-6}<0$



Ответ: $\left(-\dfrac{1}{5}; 6\right)$.

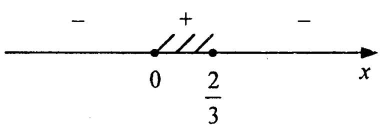
б) $\dfrac{x-2}{x+4}\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+10}{x+4}\leq 0$



Ответ: $[-10; -4)$.

5. а) $y=\sqrt{2x-3x^2}$

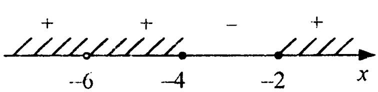
ООФ: $2x-3x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{2}{3}-x\right)\geq 0$



Ответ: $\left[0; \dfrac{2}{3}\right]$.

б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+6x+8}}{3x+18}$

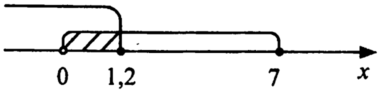
ООФ: $\begin{cases} x^2+6x+8\geq 0 \\ 3x+18\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+4)\geq 0 \\ x\neq -6 \end{cases}$.



Ответ: $(-\infty; -6)\cup(-6; -4]\cup[-2; +\infty)$.

в) $y=\sqrt{7x-x^2}+\sqrt{6-5x}$

ООФ: $\begin{cases}7x-x^2\ge 0\\ 6-5x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(7-x)\ge 0\\ x\le 1{,}2\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1{,}2$

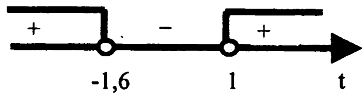


Ответ: [0; 1,2].

Вариант 4

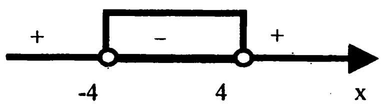
1. а) $5x^2+3x-8>0$; $5x^2+3x-8=0$;

$D=9+4\cdot 5\cdot 8=169$; $x_1=\dfrac{-3+13}{10}=1$, $x_2=-1{,}6$.



Ответ: $(-\infty;-1{,}6)\cup(1;+\infty)$.

б) $x^2-16<0$; $(x-4)(x+4)<0$.



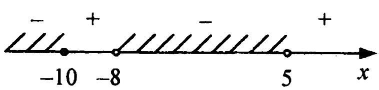
Ответ: $(-4; 4)$.

в) $5x^2-4x+21>0$; $5x^2-4x+21=0$; $D=16-4\cdot 5\cdot 21<0$;

т.к. $a=5>0$, то x–любое.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

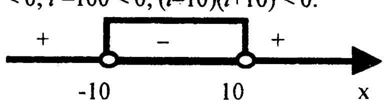
2. $(x+8)(x-5)(x+10)<0$



Ответ: $(-\infty;-10)\cup(-8;5)$.

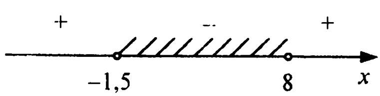
3. $25x^2+tx+1=0$; $D=t^2-4\cdot 25=t^2-100$.

Т.к. уравнение не имеет корней, то $D<0$; $t^2-100<0$; $(t-10)(t+10)<0$.



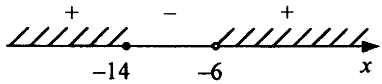
Ответ: $(-10; 10)$.

4. а) $\dfrac{6x+9}{x-8}<0\Leftrightarrow\dfrac{x+1{,}5}{x-8}<0$



Ответ: $(-1{,}5; 8)$.

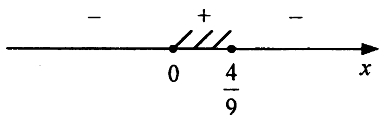
б) $\dfrac{2x-4}{x+6} \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{2x+28}{x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+14}{x+6} \ge 0$



Ответ: $(-\infty; -14] \cup (-6; +\infty)$.

5. а) $y = \sqrt{4x - 9x^2}$

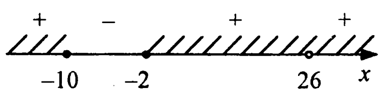
ООФ: $4x - 9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{4}{9} - x\right) \ge 0$



Ответ: $\left[0; \dfrac{4}{9}\right]$.

б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 12x + 20}}{2x - 52}$

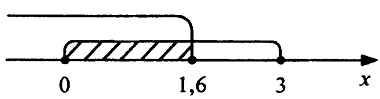
ООФ: $\begin{cases} x^2 + 12x + 20 \ge 0 \\ 2x - 52 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+10)(x+2) \ge 0 \\ x \ne 26 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; -10] \cup [-2; 26) \cup (26; +\infty)$.

в) $y = \sqrt{6x - 2x^2} + \sqrt{8 - 5x}$

ООФ: $\begin{cases} 6x - 2x^2 \ge 0 \\ 8 - 5x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - x) \ge 0 \\ x \le 1{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1{,}6$



Ответ: [0; 1,6].

К-5. Вариант 1

1. $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2(y+1) \\ (x+1)y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ y(y+1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases} \end{array} \right.$

$y^2+y-6=0;\ D=1+4\cdot 6=25=5^2 \Rightarrow$

$y_1=\dfrac{-1+5}{2}=2$ и $y_2=\dfrac{-1-5}{2}=-3$

Ответ: (5; 2) и (–5; –3).

2. $\begin{cases} b=a+7 \\ a^2+b^2=13^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+7 \\ a^2+(a+7)^2=169 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a+7 \\ 2a^2+14a-120=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+7 \\ a^2+7a-60=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=12 \end{cases}$

Ответ: $a=5$ и $b=12$.

3. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(7-3y)^2=5 \\ x=7-3y \end{cases} \Leftrightarrow$

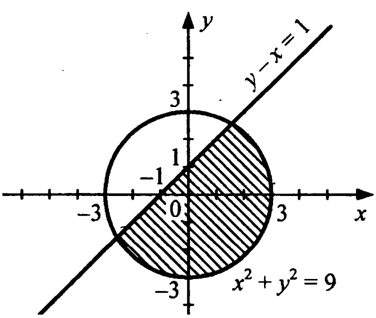
$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2-42y+44=0 \\ x=7-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2-21y+22=0 \\ x=7-3y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0{,}4 \\ y=2{,}2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array} \right.$

$D=21^2-4\cdot 5\cdot 22=1 \Rightarrow$

$y_1=\dfrac{21+1}{10}=2{,}2$ и $y_2=\dfrac{21-1}{10}=2$

Ответ: (0,4; 2,2) и (1; 2).

4. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ y-x \le 1 \end{cases}$



5. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ 5x-y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y-6x=xy \\ y=5x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-x)(5x-9)-6x=0 \\ y=5x-9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2+33x-54=0 \\ y=5x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3{,}6 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \end{array} \right.$

$5x^2-33x+54=0$

$D=33^2-4\cdot5\cdot54=9=3^2 \Rightarrow$

$x_1=\dfrac{33+3}{10}=3{,}6$ и $x_2=\dfrac{33-3}{10}=3$

Ответ: (3,6; 9) и (3; 6).

Вариант 2

1. $\begin{cases} 3x+y=10 \\ x^2-y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-3x \\ x^2+3x-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-6 \\ y=28 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: (–6; 28) и (3; 1).

2. $\begin{cases} 2a+2b=14 \\ a^2+b^2=5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7-a \\ a^2+(7-a)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$

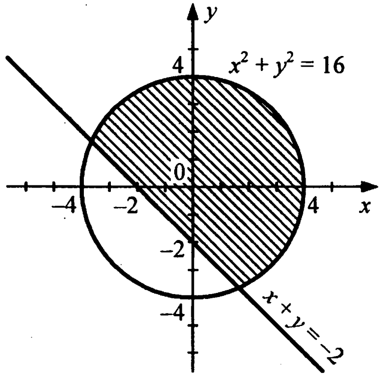
$\Leftrightarrow \begin{cases} b=7-a \\ 2a^2-14a+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7-a \\ a^2-7a+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: 3 и 4.

3. $\begin{cases} y=x^2-14 \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-20=0 \\ y=6-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5 \\ y=11 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: (–5; 11) и (4; 2).

4. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16 \\ x+y \ge -2 \end{cases}$



5. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ 3x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=xy \\ y=3x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(3x-3)-2x=0 \\ y=3x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-11x+6=0 \\ y=3x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$D=11^2-4\cdot 3\cdot 6=49=7^2 \Rightarrow$

$x_1=\dfrac{11+7}{6}=3$ и $x_2=\dfrac{11-7}{6}=\dfrac{2}{3}$

Ответ: (3; 6) и $\left(\dfrac{2}{3};-1\right)$.

Вариант 3

1. $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x-xy=8 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y=-3x-1 \\ x-xy=8 \end{array} \right.$; $x+x(3x+1)=8$; $3x^2+2x-8=0$; $D=4+4\cdot 3\cdot 8=100$;

$x_1=\dfrac{-2+10}{6}=\dfrac{4}{3}$; $x_2=-2$; $y_1=-3\cdot\dfrac{4}{3}-1=-5$; $y_2=-3\cdot(-2)-1=5$.

Ответ: $(\dfrac{4}{3};-5)$, $(-2; 5)$.

2. Пусть x м — меньшая сторона прямоугольника.
Тогда $(x+4)$ м — другая его сторона, $x(x+4)$ м^2 — его площадь или 45 м^2.
Получаем уравнение:
$x(x+4) = 45$; $x^2+4x-45 = 0$;

$D = 16+4\cdot45 = 196$; $x_1 = \dfrac{-4+14}{2} = 5$, $x_2 < 0$ — не удовлетворяет условию задачи. Итак, 5 м — меньшая сторона, $5+4 = 9$ (м) — другая сторона.
Ответ: 5 м и 9 см.

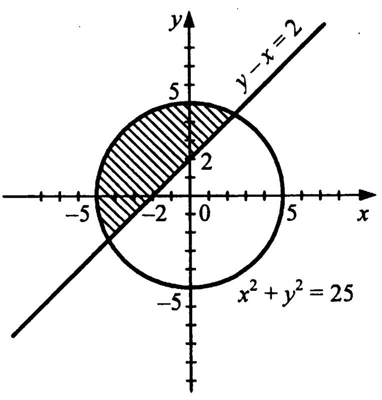
3. $x^2+y^2 = 17$, $5x-3y = 17$; $x^2 = 17-y^2$; $x = \dfrac{3y+17}{5}$; $17-y^2 = \left(\dfrac{3y+17}{5}\right)^2$;

$\dfrac{9y^2+102y+289}{25}+y^2-17 = 0$; $9y^2+102y+289+25y^2-425 = 0$;

$34y^2+102y-136 = 0$; $y^2+3y-4 = 0$; $D = 9+4\cdot4 = 25$

$y_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$; $y_2 = -4$; $x_1 = \dfrac{3+17}{5} = 4$; $x_2 = \dfrac{17-12}{5} = 1$.

4. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 25 \\ y-x \ge 2 \end{cases}$



5. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12} \\ 2x-y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12(x-y)=xy \\ y=2x-18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+12)(2x-18)-12x=0 \\ y=2x-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-108=0 \\ y=2x-18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=12 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-9 \\ y=-36 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: (12, 6) и (–9; –36).

Вариант 4

1. $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2-y=10 \end{cases}\Bigg| \begin{cases} x=2+5y \\ x^2-y=10 \end{cases}$; $(2+5y)^2-y=10$;

$25y^2+20y+4-y-10=0$; $25y^2+19y-6=0$;

$D=361+4\cdot25\cdot6=961$;

$y_1=\dfrac{-19+31}{50}=\dfrac{6}{25}$; $y_2=-1$; $x_1=2+5\cdot\dfrac{6}{25}=\dfrac{16}{5}$; $x_2=2-5=-3$.

Ответ: $\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{6}{25}\right)$, $(-3;-1)$.

2. Пусть x см и y см–стороны прямоугольника. Тогда $2(x+y)$ см — его периметр или 26 см, xy см^2 — его площадь или 42 см^2.

Получаем систему: $\begin{cases} 2(x+y)=26 \\ xy=42 \end{cases}\Bigg| \begin{cases} y=13-x \\ xy=42 \end{cases}$;

$x(13-x)=42$; $x^2-13x+42=0$;

$D=169-4\cdot42=1$; $x_1=\dfrac{13+1}{2}=7$; $x_2=6$;

$y_1=13-7=6$; $y_2=13-6=7$;

Итак, стороны прямоугольника равны 6 см и 7 см.

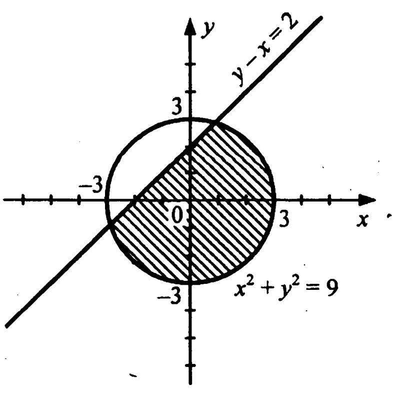
3. $y=x^2-8$, $x+y=4$;

$x^2-8=4-x$; $x^2+x-12=0$; $D=1+4\cdot12=49$;

$x_1=\dfrac{-1+7}{2}=3$; $x_2=-4$; $y_1=4-3=1$; $y_2=4-(-4)=8$.

Ответ: (3; 1), (–4; 8).

4. $\begin{cases} x^2+y^2\le9 \\ y-x\le2 \end{cases}$



5. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \\ 5x-y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y-12x=xy \\ y=5x-18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-12)(5x-18)+12x=0 \\ y=5x-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-66x+216=0 \\ y=5x-18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x=7{,}2 \\ y=18 \end{cases} \end{array} \right.$$

$D=66^2-4\cdot5\cdot216=36=6^2 \Rightarrow$

$x_1=\dfrac{66-6}{10}=6$ и $x_2=\dfrac{66+6}{10}=7{,}2$

Ответ: (6, 12) и (7,2; 18).

К-6. Вариант 1

1. $a_1=-25$, $d=4$

$a_{30}=a_1+29\cdot d=91$

Ответ: $a_{30}=91$.

2. $a_1=2$ и $a_2=5 \Rightarrow d=a_2-a_1=3 \Rightarrow$

$S_{15}=\dfrac{a_1+a_{15}}{2}\cdot15=\dfrac{2a_1+14\cdot d}{2}\cdot15=345$

Ответ: $S_{15}=345$.

3. $c_1=30$ и $c_7=21 \Rightarrow c_7-c_1=6\cdot d=-9 \Rightarrow d=-1{,}5$

$-6=c_1+n\cdot d=30-1{,}5\cdot n$

$1{,}5n=36$; $n=24$

Ответ: $-6=c_{25}$.

4. $S_{20}=\dfrac{b_1+b_{20}}{2}\cdot20=10(3+41)=440$

Ответ: $S_{20}=440$.

5. $a_1=4$, $a_n=4+(n-1)\cdot4$

$4+(n-1)\cdot4=4\cdot n\le150 \Leftrightarrow n\le37{,}5$

$S=\dfrac{a_1+a_{37}}{2}\cdot37=\dfrac{4+148}{2}\cdot37=2812$

Ответ: $S=2812$.

Вариант 2

1. $a_1=38$, $d=-3 \Rightarrow a_{40}=a_1+39d=-79$

Ответ: $a_{40}=-79$.

2. $a_1 = 1$ и $a_2 = 6 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 10(2 \cdot a_1 + 19 \cdot d) = 970$$

Ответ: $S_{20} = 970$.

3. $c_1 = -6$, $c_9 = 6 \Rightarrow c_9 - c_1 = 8d = 12 \Rightarrow d = 1{,}5$

$39 = c_1 + n \cdot d = 1{,}5n - 6$

$1{,}5n = 45;\ n = 30$

Ответ: $39 = c_{31}$.

4. $S_{30} = \dfrac{b_1 + b_{30}}{2} \cdot 30 = 15(2 + 89) = 1365$

Ответ: 1365.

5. $a_1 = 3, a_n = 3 + (n-1) \cdot 3$

$$3 + (n-1) \cdot 3 = 3 \cdot n \le 80 \Leftrightarrow n \le \frac{80}{3} \Rightarrow n \le 26$$

$$S = \frac{a_1 + a_{26}}{2} \cdot 26 = 13(3 + 78) = 1053$$

Ответ: 1053.

Вариант 3

1. $a_1 = -15, d = 3;\ a_{23} = a_1 + 22d = -15 + 22 \cdot 3 = 51$.

2. 8; 4; 0; ...; $a_1 = 8$; $d = a_2 - a_1 = 4 - 8 = -4$;

$$S_{16} = \frac{2a_1 + d \cdot 15}{2} \cdot 16 = (2 \cdot 8 - 15 \cdot 4) \cdot 8 = -44 \cdot 8 = -352.$$

3. $c_1 = -31, c_6 = -11 \Rightarrow c_6 - c_1 = 5d = 20 \Rightarrow d = 4$

$5 = c_1 + nd = 4n - 31$

$4n = 36;\ n = 9$

Ответ: $5 = c_{10}$.

4. $S_{60} = \dfrac{b_1 + b_{60}}{2} \cdot 60 = 30(2 + 238) = 7200$

Ответ: 7200.

5. 7, 14, 21, ..., 147–арифметическая прогрессия;

$a_1 = 7, a_2 = 14$,

$d = 14 - 7 = 3$;

$a_n = 7 + 7(n-1) = 7n$; $147 = 7n$, $n = 21$, значит, $147 = a_{21}$.;

$$S = S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21 = \frac{7 + 147}{2} \cdot 21 = 1617.$$

Вариант 4

1. $a_1 = -9$, $d = 4$; $a_{43} = a_1+42d = -9+42\cdot4 = 159$.

2. $-63;-58;-53$; ... — арифметическая прогрессия; $a_1 = -63$; $a_2 = -58$;

$d = a_2-a_1 = -58-(-63) = 5$; $S_{14} = \dfrac{2a_1+13d}{2}\cdot14 = (-126+5\cdot13)\cdot7 = -427$.

3. $b_1 = -16, b_9 = 16 \Rightarrow b_9 - b_1 = 8d = 32 \Rightarrow d = 4$

$36 = b_1 + nd = 4\cdot n - 16$

$4n = 52$; $n = 13$

Ответ: $36 = b_{14}$.

4. $a_n = 3n-2$.

Проверим, что (a_n) — арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$; $a_{n-1} = 3(n-1)-2 = 3n-5$; $a_{n+1} = 3(n+1)-2 = 3n+1$;

$3n-2 = \dfrac{3n-5+3n+1}{2}$ — верно, значит, (a_n) — арифметическая прогрессия

$a_1 = 3-2 = 1$, $a_2 = 3\cdot2-2 = 4$; $d = 4-1 = 3$; $S_{120} = \dfrac{2+3\cdot119}{2}\cdot120 = 21540$.

5. 9, 18, 27, ..., 72 — арифметическая прогрессия; $a_n = 9n$;

$72 = 9n$, $n = 8$, значит, $72 = a_8$; $S = S_8 = \dfrac{a_1+a_8}{2}\cdot8 = (9+72)\cdot4 = 324$.

К-7. Вариант 1

1. $b_1 = 1500, q = -0{,}1 \Rightarrow b_7 = b_1\cdot q^6 = 0{,}0015$.

Ответ: 0,0015.

2. $b_4 = b_1\cdot q^3 = b_1\cdot3\sqrt{3} = 18 \Rightarrow b_1 = 2\sqrt{3}$

Ответ: $b_1 = 2\sqrt{3}$.

3. $S_6 = b_1\dfrac{1-q^6}{1-q} = 8\dfrac{1-\frac{1}{2}6}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{63}{4}$

Ответ: $S_6 = \dfrac{63}{4}$.

4. $b_4 = 2, b_6 = 200 \Rightarrow \dfrac{b_6}{b_4} = q^2 = 100 \Rightarrow q = 10$. $b_1 = \dfrac{b_4}{q^3} = 0{,}002$

Ответ: $b_1 = 0{,}002$.

5. $S_4 = b_1\dfrac{q^4-1}{q-1} = 15b_1 = 45 \Rightarrow b_1 = 3 \Rightarrow S_8 = b_1\dfrac{q^8-1}{q-1} = 765.$

Ответ: $S_8 = 765$.

Вариант 2

1. $b_1 = 0{,}0027, q = -10 \Rightarrow b_8 = b_1 \cdot q^7 = -27000$

Ответ: $b_8 = -27000$.

2. $b_6 = b_1 \cdot q^5 = b_1 \cdot 4\sqrt{2} = 40 \Rightarrow b_1 = 5\sqrt{2}$

Ответ: $b_1 = 5\sqrt{2}$.

3. $S_6 = b_1\dfrac{q^6-1}{q-1} = 81 \cdot \dfrac{3^6-1}{3-1} = 29484$.

Ответ: $S_6 = 29484$.

4. $b_5 = 0{,}5; b_7 = 0{,}005; \dfrac{b_7}{b_5} = q^2 = 0{,}01 \Rightarrow q = 0{,}1.\ b_1 = \dfrac{b_5}{q^4} = 5000$

Ответ: $b_1 = 5000$.

5. $S_3 = b_1\dfrac{q^3-1}{q-1} = 13b_1 = 26 \Rightarrow b_1 = 2 \Rightarrow S_6 = b_1\dfrac{q^6-1}{q-1} = 728$

Ответ: $S_6 = 728$.

Вариант 3

1. $b_1 = 0{,}81$, $q = -\dfrac{1}{3}$; $b_6 = b_1 q^5 = 0{,}81 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5 = -\dfrac{0{,}81}{24^3} = -\dfrac{1}{300}$.

2. $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 36 \cdot b_1 = 432 \Rightarrow b_1 = 12$

Ответ: $b_1 = 12$.

3. $S_8 = b_1\dfrac{q^8-1}{q-1} = 16 \cdot \dfrac{2^8-1}{2-1} = 4080$

Ответ: 4080.

4. $b_3 = 4{,}8; b_6 = 38{,}4 \Rightarrow \dfrac{b_6}{b_3} = q^3 = 8 \Rightarrow q = 2.\ b_1 = \dfrac{b_3}{q^2} = 1{,}2$

Ответ: $b_1 = 1{,}2$.

5. $S_3 = b_1\dfrac{q^3-1}{q-1} = 21 \cdot b_1 = -105 \Rightarrow b_1 = -5 \Rightarrow S_5 = b_1\dfrac{q^5-1}{q-1} = -1705.$

Ответ: $S_5 = -1705$.

Вариант 4

1. $b_1 = -125,\ q = \frac{1}{5};\ b_5 = b_1 q^4 = -125 \cdot \frac{1}{625} = -\frac{1}{5} = -0{,}2.$

2. $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 9 \cdot b_1 = 27 \Rightarrow b_1 = 3$

Ответ: $b_1 = 3$.

3. $\frac{b_5}{b_2} = q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_2}{q} = 0{,}04$. $S_9 = b_1 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = 20{,}44$

Ответ: $S_9 = 20{,}44$.

4. $\frac{b_6}{b_3} = q^3 = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 1{,}6$

Ответ: $b_1 = 1{,}6$.

5. $S_3 = b_1 \frac{1 - q^3}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{7}{4} = 28 \Rightarrow b_1 = 16 \Rightarrow S_7 = b_1 \frac{1 - q^7}{1 - q} = 31{,}75$.

Ответ: $S_7 = 31{,}75$.

К-8. Вариант 1

1. На первое место — 5 способов, на второе — 4, и т.д.

Всего $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! - 120$.

Ответ: 120.

2. Всего 3 позиции. На первую позицию можно поставить — 5 цифр, на вторую — 4, на третью — 3. Всего $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ цифр.

Ответ: 60.

3. $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

Ответ: 45.

4. Среди 25 шаров, только у 9 номер является простым числом, поэтому вероятность равна: $\frac{9}{25}$.

Ответ: $\frac{9}{25}$.

5. Мальчиков можно выбрать $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ способами, а девочек — $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ способами. Всего 560 способов.

Ответ: 560.

6. Всего таким образом получится 4! = 24 четырехзначных числа, из них тех, которые больше 7000, 3! = 6.

Поэтому вероятность равна $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Вариант 2

1. На первую позицию можно поставить 6 цифр, на вторую — 5 и т.д. Всего $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ цифр.

Ответ: 720.

2. $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

Ответ: 56.

3. Дежурного можно выбрать 15 способами, а помощника — 14. Всего $15 \cdot 14 = 210$ способов.

Ответ: 210.

4. $\frac{30-5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

5. Книги можно выбрать $C_9^2 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$ способами, а журналы — $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. Всего $36 \cdot 20 = 720$ способов.

Ответ: 720.

6. Всего таким образом получится 5! = 120 слов, поэтому вероятность равна $\frac{2}{120} = \frac{1}{60}$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

Вариант 3

1. На первое место можно определить 8 способами, на второе — 7 и т.д. Всего: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$.

Ответ: 40320.

2. Председателя можно выбрать 12 способами, а заместителя — 11. Всего $12 \cdot 11 = 132$ способа.

Ответ: 132.

3. $C_{19}^3=\frac{19!}{3!\cdot 16!}=969$.

Ответ: 969.

4. $\frac{25-2-3}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

5. Юношей можно выделить $C_{15}^2=\frac{15!}{2!\cdot 13!}=105$ способами, а девушек — $C_{12}^2=\frac{12!}{2!\cdot 10!}=55$ способами. Всего $105\cdot 66=6930$ способов.

Ответ: 6930.

6. Всего таким образом получится 4! = 24 четырехзначных числа. Из них четных — $2\cdot 3!=12$, поэтому вероятность равна $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Вариант 4

1. Первый урок можно выбрать 5 способами, второй — 4 и т.д.

Всего $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!=120$ способов.

Ответ: 120.

2. Одна прямая соединяет 2 точки, поэтому всего $C_{10}^2=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=45$ прямых.

Ответ: 45.

3. Председателя можно выбрать 30 способами, заместителя — 29 способами, а секретаря — 28, поэтому всего 24360 способов.

Ответ: 24360.

4. Среди чисел 1, 2, 3, ..., 20 только 8 простых, поэтому вероятность равна $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

5. Юношей можно выделить $C_{10}^2=45$ способами, а девушек — $C_{12}^2=66$.

Всего $45\cdot 66=2970$ способов.

Ответ: 2970.

6. Вероятность равна нулю, т.к. нет буквы «а».
Ответ: 0.

К-9. Вариант 1

1. $\left(\frac{x-y}{x}-\frac{y-x}{y}\right):\frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{x\cdot y}:\frac{x+y}{x\cdot y}=x-y$

Ответ: $x-y$.

2. $\begin{cases}x^2+2y=-2\\x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x=0\\y=-x-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: (0; –1) и (2; –3).

3. $3+x\le 8x-(3x+7)$; $4x\ge 10$; $x\ge 2{,}5$

Ответ: $[2{,}5;+\infty)$.

4. $\frac{a^{-3}\cdot(a^4)^2}{a^{-6}}=a^{-3+8+6}=a^{11}$

Ответ: a^{11}.

5. $\begin{cases}x^2-5x+6\le 0\\2x-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 3\\x\le 2{,}5\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x\le 2{,}5$

Ответ: [2; 2,5].

6. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$;

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=-0{,}96$.

7. Пусть x деталей - в час должна была изготовлять бригада. Тогда $\frac{40}{x}$ — плановый срок выполнения задания, $(x+8)$ — изготовляет в час бригада в действительности, $\left(\frac{40}{x}-2\right)$ — в действительности работала бригада, $(x+8)\left(\frac{40}{x}-2\right)$дет. — изготовила бригада или 48 деталей. Получаем уравнение:

$(x+8)\left(\frac{40}{x}-2\right)=48$; $40+\frac{320}{x}-2x-16=48$;

$x-12+24-\frac{160}{x}=0$; $x+12-\frac{160}{x}=0$; $x^2+12x-160=0$;

$\mathrm{D}=144+4\cdot 160=784$. $x_1=\dfrac{-12+28}{2}=8$, $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. 8дет. — должна была изготовлять в час бригада.

Вариант 2

1. $\dfrac{a}{a+c}\cdot\left(\dfrac{a+c}{c}+\dfrac{a+c}{a}\right)=\dfrac{a}{c}+1=\dfrac{a+c}{c}$

Ответ: $\dfrac{a+c}{c}$.

2. $\begin{cases} y^2+2x=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2y=0 \\ x=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (1; 0) и (–1; 2).

3. $6x-8\geq 10x-(4-x)$

$5x\leq -4$; $x\leq -0{,}8$

Ответ: $(-\infty;-0{,}8]$.

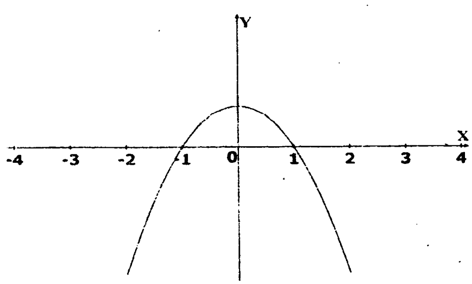
4. $\dfrac{\left(x^{-4}\right)^2\cdot x^9}{x^{-1}}=x^{-8+9+1}=x^2$

Ответ: x^2.

5. $\begin{cases} x^2-6x+8\leq 0 \\ 3x-8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\leq x\leq 4 \\ x\geq 2\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 2\dfrac{2}{3}\leq x\leq 4$

Ответ: $\left[2\dfrac{2}{3};4\right]$.

6. $y=-x^2+1$; $y<0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;-\infty)$.



7. Пусть x км/ч — скорость 1 велосипедиста. Тогда $(x+3)$ км/ч — скорость второго, $\frac{45}{x}$ ч и $\frac{45}{x+3}$ ч — были в пути 1–ый и 2-ой велосипедисты соответственно, на 30+15 = 45мин = $\frac{3}{4}$ ч – был меньше в пути 2-ой велосипедист. Получаем уравнение: $\frac{45}{x}=\frac{45}{x+3}+\frac{3}{4}$; $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+3}-\frac{1}{4}=0$;

$\begin{array}{l} 60(x+3)-60x-x(x+3)=0 \\ 60x+180-60x-x^2-3x=0 \end{array}$; $x^2+3x-180=0$;

$D=9+4\cdot 180=729$ $x_1=\frac{-3+27}{2}=12$, $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. 12 км/ч – скорость 1 велосипедиста.

Вариант 3

1. $\left(\frac{m+5}{m-5}-\frac{m}{m+5}\right)\cdot\frac{m+5}{3m+5}=\frac{m^2+10m+25-m^2+5m}{(m-5)(m+5)}\cdot\frac{m+5}{3m+5}=$

$=\frac{5(3m+5)}{(m-5)(3m+5)}=\frac{5}{m-5}$.

2. $\begin{cases} x+2y=11 \\ xy=14 \end{cases}$; $\begin{cases} x=11-2y \\ xy=14 \end{cases}$; $y(11-2y)=14$; $2y^2-11y+14=0$;

$B=121-4\cdot 2\cdot 14=9$; $y_1=\frac{11+3}{4}=\frac{7}{2}$, $y_2=2$;

$x_1=11-2\cdot\frac{7}{2}=4$, $x_2=11-2\cdot 2=7$.

Ответ: $(4;3{,}5)$, $(7;2)$.

3. $5x-3(x-1{,}5)<4x+1{,}5$; $5x-3x+4{,}5<4x+1{,}5$; $\begin{array}{l} 2x>3 \\ x>1{,}5 \end{array}$.

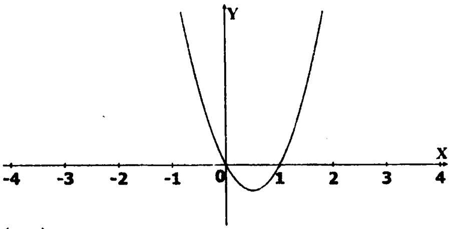
Ответ: $x>1{,}5$.

4. $\frac{(a^{-4})^3\cdot a^6}{a^{-5}}=a^{-12+6+5}=a^{-1}=\frac{1}{a}$

Ответ: $\frac{1}{a}$.

5. $\begin{cases} x^2-8x+15\le 0 \\ 3x-13\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3\le x\le 5 \\ x\le 4\frac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow 3\le x\le 4\frac{1}{3}$. Ответ: $\left[3;4\frac{1}{3}\right]$.

6. $y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$.



$y < 0$ при $x \in (0;2)$.

7. Пусть x дет. — в день должна была сделать бригада по плану. Тогда $\frac{210}{x}$ дн. — плановый срок выполнения задания, $(x+10)$ дет. — изготовляла в день бригада в действительности, $\left(\frac{210}{x} - 1\right)$ дн. — в действительности работала бригада, $(x+10)\left(\frac{210}{x} - 1\right)$ дет. – изготовила бригада или 240 деталей. Получаем уравнение: $(x+10)\left(\frac{210}{x} - 1\right) = 240$;

$210 + \frac{2100}{x} - x - 10 = 240$; $x + 40 - \frac{2100}{x} = 0$; $x^2 + 40x - 2100 = 0$;

$D = 1600 + 4 \cdot 2100 = 10000$ $x_1 = \frac{-40+100}{2} = 30$, $x_2 < 0$ - не удовлетворяет условию задачи. 30дет. – в день должна была сделать бригада по плану.

Вариант 4

1. $\left(\frac{y+1}{y-1} - \frac{y}{y+1}\right) \div \frac{3y+1}{y^2+y} =$

$= \frac{y^2 + 2y + 1 - y^2 + y}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y(y+1)}{3y+1} = \frac{(3y+1) \cdot y}{(y-1)(3y+1)} = \frac{y}{y-1}$.

2. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y^2 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 - y \\ x - y^2 = 3 \end{cases}$; $5 - y - y^2 = 3$; $y^2 + y - 2 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$; $y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_2 = -2$; $x_1 = 5 - 1 = 4$, $x_2 = 5 - (-2) = 7$.

Ответ: $(4;1)$, $(7;-2)$.

3. $x - 2{,}5(2x - 1) > x - 1{,}5$; $x - 5x + 2{,}5 > x - 1{,}5$; $5x < 4$; $x < 0{,}8$.

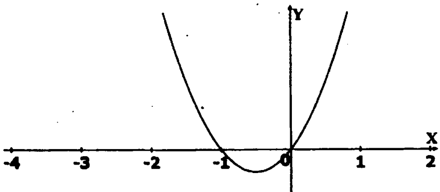
4. $\dfrac{\left(x^{-9}\right)^2 \cdot x^{16.}}{x^{-4}} = x^{-18+16+4} = x^2$

Ответ: x^2.

5. $\begin{cases} x^2 + x - 42 \le 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le 6 \\ x > 1\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1\dfrac{2}{3} < x \le 6$

Ответ: $\left(1\dfrac{2}{3}; 6\right]$.

6. $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$



$y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

7. $S_{AB} = 120$; $v_1 = v_2 + 12$; $\dfrac{S_{AB}}{v^1} = \dfrac{S_{AB}}{v_2} - \dfrac{1}{3}$;

$\begin{cases} v_1 = v_2 + 12 \\ \dfrac{120}{v_1} = \dfrac{120}{v_2} - \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 12 \\ (v_2 + 12)(v_2 - 360) + 360v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 12 \\ v_2^2 + 12v_2 - 4320 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 72 \\ v_2 = 60 \end{cases}$

Ответ: 60 км/ч.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Вариант 1

1. В. **2.** Г. **3.** Б. **4.** $x = \pm 1$ и $x = \pm\dfrac{1}{2}$. **5.** $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$. **6.** Г. **7.** $\varnothing$. **8.** Г. **9.** Г. **10.** Г. **11.** В. **12.** Б.

Вариант 2

1. В. **2.** В. **3.** А. **4.** $x = \pm 1$ и $x = \pm\dfrac{1}{3}$. **5.** $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$. **6.** А. **7.** (8; –3). **8.** Г. **9.** Г. **10.** Г. **11.** Б. **12.** Г.

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПО ТЕМАМ

Функции

1. Функция – такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

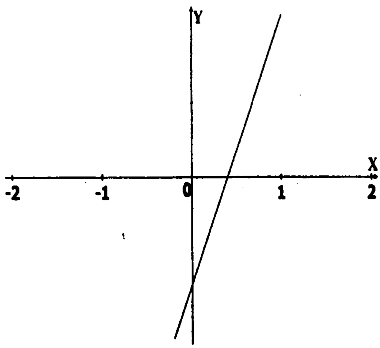
а) $f(x)=\frac{3x}{x+1}$, $f(0)=\frac{3\cdot 0}{0+1}=0$,

$f(5)=\frac{3\cdot 5}{5+1}=\frac{15}{6}=2{,}5$, $f(-1{,}5)=\frac{-3\cdot 1{,}5}{-1{,}5+1}=\frac{4{,}5}{0{,}5}=9$;

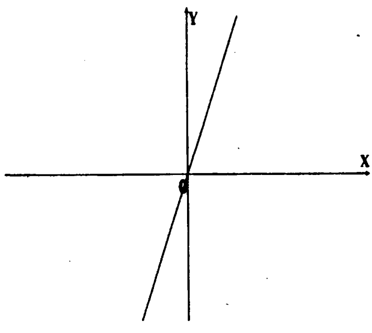
б) $f(x)=2x^2+x-3$; $f(0)=-3$; $f(5)=2\cdot 25+5-3=52$;
$f(-1{,}5)=2\cdot 2{,}25-1{,}5-3=0$.

2. Область определения функции — все значения независимой переменной. Область значения функции — все значения, которые принимает зависимая переменная. График функции — множество всех точек координатной плоскости абсциссы, которых равны значениям аргумента, ординаты равны соответствующим значениям функции.

а)
$y=5x-4$; $D(y)=E(y)=R$;

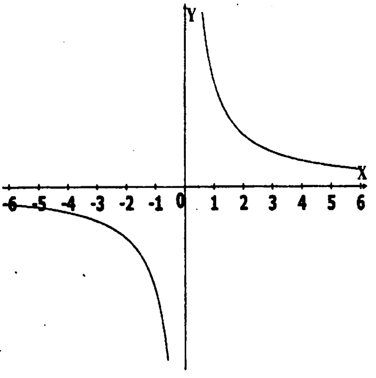


б) $y=3{,}5x$; $D(y)=E(y)=R$;



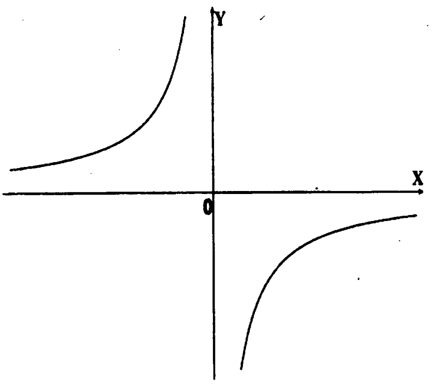
в) $y = \dfrac{6}{x}$;

$D(y) = E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.



г) $y = -\dfrac{8}{x}$.

$D(y) = E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$



3. а) $y = 1{,}7x - 0{,}03$; $D(y) = R$;

б) $y = \dfrac{1{,}6 + x}{0{,}8 - 2x}$;

$0{,}8 - 2x \neq 0$, т.к. знаменатель $x \neq 0{,}4$; $D(y) = (-\infty;0{,}4) \cup (0{,}4;+\infty)$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 4}$;

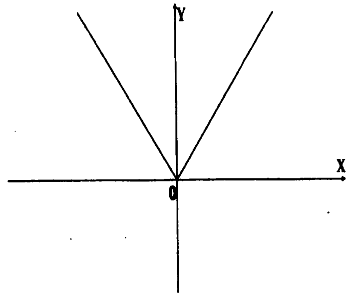
$x^2 - 4 \geq 0$ т.к. $D(\sqrt{x}) = [0;+\infty]$;

$(x-2)(x+2) \geq 0$ $D(y) = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

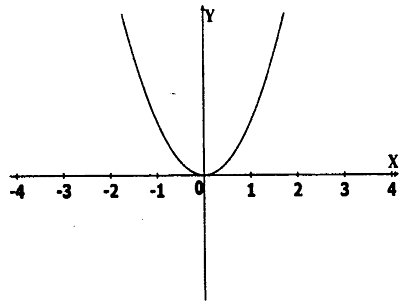
4. Возрастающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

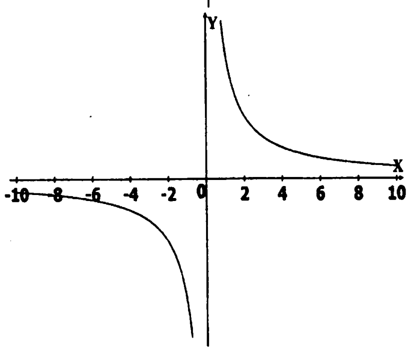
а) $y = |x|$, y возрастающая при $x \geq 0$,
убывающая при $x \leq 0$;



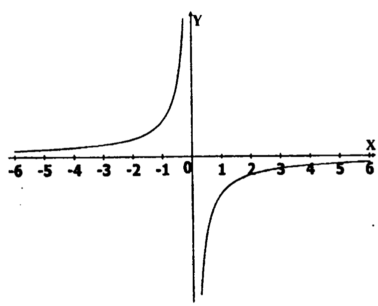
б) $y = x^2$, y возрастающая при $x \geq 0$,
убывающая при $x \leq 0$;



в) $y = \dfrac{12}{x}$,
y убывающая при $x \neq 0$;



г) $y = -\dfrac{4}{x}$,
y возрастающая при $x \neq 0$.



5. $y = x - 4{,}3$ - возрастающая,

$y = -4{,}2x + 8{,}1$; убывающая.

6. Теорема: Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

а) $4x^2 + 11x - 3 = 0$;

$D = 121 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169$; $x_1 = \frac{-11+13}{8} = \frac{1}{4}$, $x_2 = -3$;

$4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x+3) = (4x-1)(x+3)$;

б) $-2x^2 - 9x + 18 = 0$;

$2x^2 + 9x - 18 = 0$; $D = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 18 = 225$; $x_1 = \frac{-9+15}{4} = \frac{3}{2}$, $x_2 = -6$;

$-\left(2x^2 + 9x - 18\right) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+6) = -(2x-3)(x+6) = (3-2x)(x+6)$;

в) $5x^2 - 30x + 45 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$ $x_{1,2} = 3$;

$5x^2 - 30x + 45 = 5(x-3)^2$.

г) $x^2 - 33x + 14 = 0$;

$D = 33^2 - 4 \cdot 18 \cdot 14 = 81 = 9^2 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{33+9}{36} = \frac{7}{6}$ и $x_2 = \frac{33-9}{36} = \frac{2}{3}$

$18x^2 - 33x + 14 = (6x-7)(3x-2)$

7. а) $\frac{2x^2 + 13x - 24}{4x^2 - 9} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+8)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{x+8}{2x+3}$; $2x^2 + 13x - 24 = 0$;

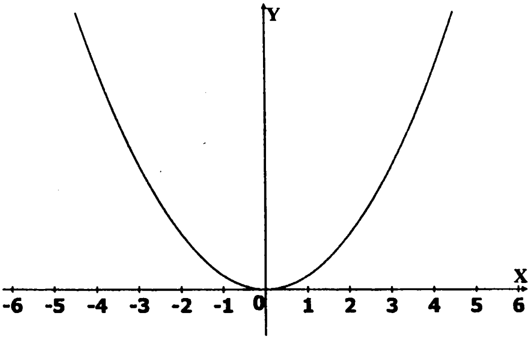
$D = 169 + 4 \cdot 2 \cdot 24 = 361$; $x_1 = \frac{-13+19}{4} = \frac{3}{2}$, $x_2 = -8$;

б) $\frac{5x^2 + 34x - 7}{25x^2 - 10x + 1} = \frac{5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x+7)}{(5x-1)^2} = \frac{x+7}{5x-1}$; $5x^2 + 34x - 7 = 0$;

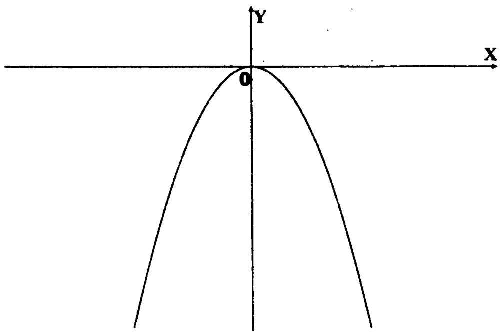
$D = 1156 + 20 \cdot 7 = 36^2$ $x_1 = \frac{-34+36}{10} = \frac{1}{5}$ $x_2 = -7$.

8. Квадратичная функция – функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b, с — некоторые числа, причем $a \neq 0$. График квадратичной функции — парабола.

9. а) $y = 0{,}5x^2$;



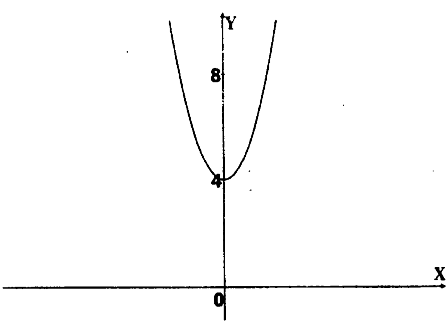
б) $y = -0{,}4x^2$.



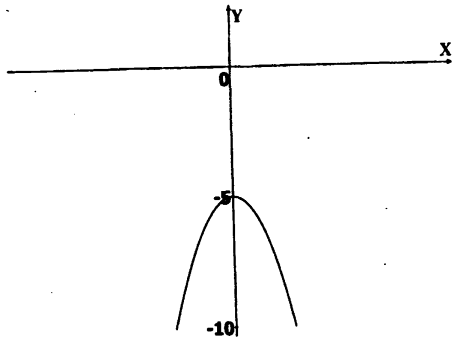
10. Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$: 1. если $x = 0$, то $y = 0$, 2. если $x \neq 0$, то $y > 0$, 3. функция является четной, 4. Функция убывает в промежутке $(-\infty;0]$ и возрастает в промежутке $[0;+\infty)$, 5. $y_{min} = y(0) = 0$, $E(y) = [0;+\infty)$.

11.

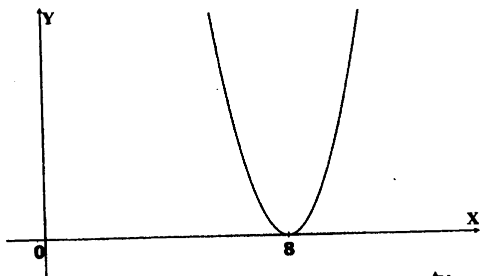
а) I, II - четверти;



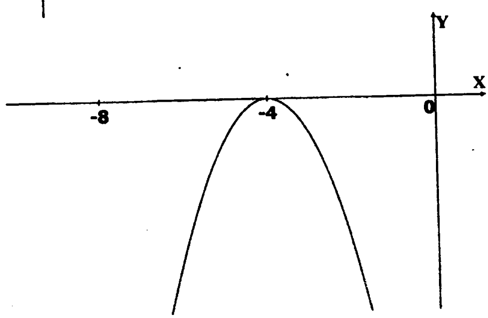
б) III,IY - четверти;



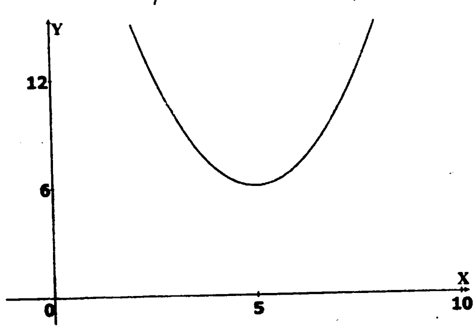
в) I,II - четверти



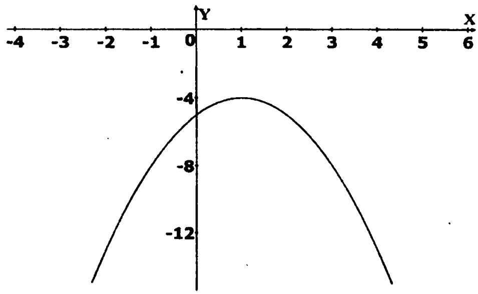
г) III,IY — четверти



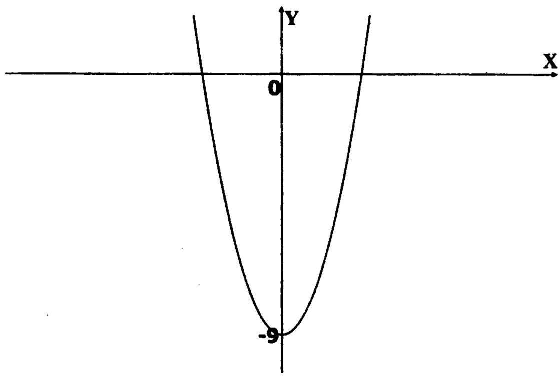
д) I,II - четверти



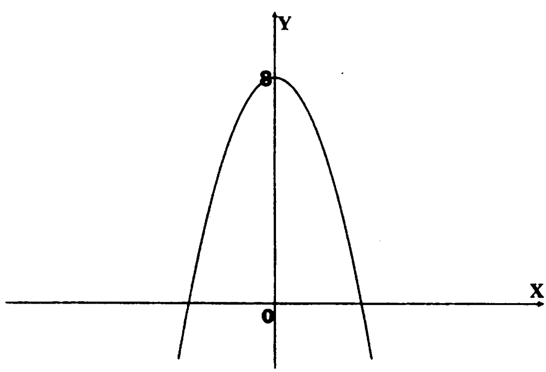
е) III,IY - четверти



12. а) $y = x^2 - 9$;

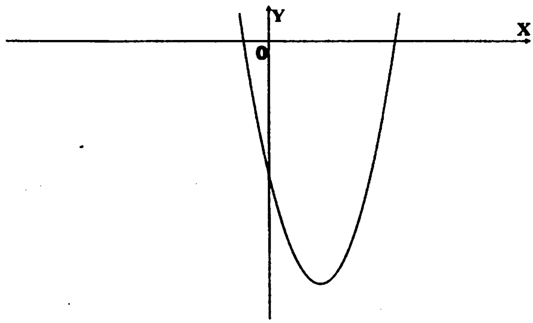


б) $y = -2x^2 + 8$;

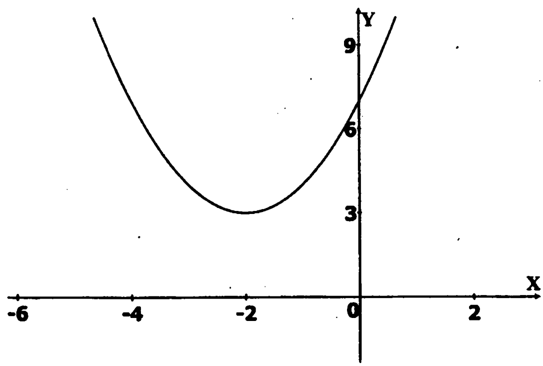


в) $y = 2x^2 - 8x - 10$;

$m = \frac{8}{4} = 2; n = 8 - 16 - 10 = -18$;



г) $y = x^2 + 4x + 7$; $m = -2; n = 3$.



13. $y = x^a$, где $a \in N$;

Например: $y = x^2; y = x^5$.

14. 1. Если $x = 0$, то $y = 0$.

2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$.

3. Функция является четной.

4. Функция возрастает в промежутке $[0;+\infty)$ и убывает в $(-\infty;0]$.

5. Область значения функции есть множество неотрицательных чисел.

15. $f(x) = x^{12}$;

а) $f(-4) > 0$; **б)** $f(0) = 0$; **в)** $f(4) > 0$; **г)** $f(-0{,}05) > 0$.

16. а) $g(5{,}6) < g(7{,}6)$; **б)** $g(10{,}2) < g(10{,}6)$;

в) $g(-2) < g(-4)$ **г)** $g\left(-2\frac{1}{3}\right) > g\left(-2\frac{1}{7}\right)$;

17. 1. Если $x = 0$, то $y = 0$.

2. Если $x > 0$, то $y > 0$ и если $x < 0$, то $y < 0$.

3. Функция является нечетной.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Область значения функции есть множество всех действительных чисел.

18. $f(x)=x^{13}$; **а)** $f(-2{,}5)<0$; **б)** $f(0)=0$; **в)** $f(1{,}5)>0$; **г)** $f(-1{,}5)<0$.

19. а) $f(1{,}4)<f(1{,}6)$; **б)** $f(-3)>f(-5)$; **в)** $f(-1{,}5)<f(0)$; **г)** $f\left(-3\frac{1}{3}\right)>f\left(-3\frac{2}{3}\right)$.

20. Арифметический корень n-ой степени из числа a – неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

а) $\frac{1}{3}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ т.к. $\frac{1}{3}\geq 0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$; **б)** $-\frac{1}{5}\neq\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$ т.к. $\frac{-1}{5}<0$.

21. а) $\sqrt[3]{216}=6$; **б)** $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=-0{,}5$; **в)** $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=1{,}5$;

г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=-1{,}5$; **д)** $-0{,}5\sqrt[4]{81}=-0{,}5\cdot 3=-1{,}5$;

е) $0{,}1\sqrt[6]{64}+0{,}2\sqrt[3]{-27}=0{,}1\cdot 2-0{,}2\cdot 3=-0{,}4$.

Уравнения и неравенства с одной переменной

1. Целое уравнение-уравнение, в котором обе части являются целыми выражениями. Например: $x^4-10x^2+3=0$.

2. Степень целого уравнения – степень многочлена $P(x)$, когда уравнение записано в виде $P(x)=0$; $(x^2-8)(3x^2-4x)=3x^5$;

$3x^5-24x^3-4x^3+32x=3x^5$; $-28x^3+32x=0$, значит, степень уравнения равна трем.

Ответ: 3.

3. а) $(2x+4)(3x-1)-(6x-12)(x+3)=100$;

$(x+2)(3x-1)-(3x-6)(x+3)=50$; $3x^2+5x-2-3x^2-3x+18-50=0$;

$2x=2-18+50$; $x=1-9+25$; $x=17$;

б) $6x(x+1)-(x^2-x-2)=68$;

$6x^2+6x-x^2+x+2-68=0$; $5x^2+7x-66=0$; $D=37^2$;

$x_1=\frac{-7+37}{10}=3; x_2=-4{,}4$.

4. При $D>0$ 2 корня, при $D=0$ 1 корень, при $D<0$ нет корней.

а) $3x^2+kx+12=0$; $D=k^2-144>0$; $(k-12)(k+12)>0$.

Ответ: $(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$.

б) $3x^2+6x+k=0$; $D=36-4\cdot 3\cdot k=0$;
$36=12k, k=3$.

в) $15x^2+kx+60=0$; $D=k^2-4\cdot 15\cdot 60<0$; $(k-60)(k+60)<0$.

5. а) $0{,}28x^4-0{,}07x^2=0$;

$0{,}28x^2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0$; $0{,}28x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

Ответ: $x=0$, $x=\pm\frac{1}{2}$;

б) $3x^3+8x^2-15x-40=0$; $(3x+8)(x^2-5)=0$

Ответ: $x=-\frac{8}{3}$; $x=\pm\sqrt{5}$.

6. а) $(x^2+2x)^2-10(x^2+2x)+21=0$; $x^2+2x=y$; $y^2-10y+21=0$;

$D=100-84=16$, $y_1=\frac{10+4}{2}=7; y_2=3$; $x^2+2x=7$; $x^2+2x-7=0$;

$D=4+4\cdot 7=32; x_{1,2}=\frac{-2\pm 4\sqrt{2}}{2}=-1\pm 2\sqrt{2}$; $x^2+2x=3$;

$x^2+2x-3=0$; $D=4+4\cdot 3=16; x_3=\frac{-2+4}{2}=1; x_4=-3$.

Ответ: $-1\pm\sqrt{2}; 1; -3$.

б) $(x^2+x+1)(x^2+x+4)=50$; $x^2+x+1=y$; $y(y+3)=50$; $D=9+4\cdot 50=209$.

7. Биквадратное уравнение – уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$. Оно может иметь от одного до четырех корней или не иметь корней.

а) $x^4-11x^2-80=0$; $x^2=y\geq 0, y^2-11y-80=0$; $D=121+4\cdot 80=21^2$;

$y_1=\frac{11+21}{2}=16; y_2<0$; $x^2=16; x_{1,2}=\pm 4$.

Ответ: ± 4.

б) $9x^4+17x^2-2=0$; $x^2=y\geq 0, 9y^2+17y-2=0$;

$D=289+4\cdot 9\cdot 2=19^2, y_1=\frac{-17+19}{18}=\frac{1}{9}, y_2<0$; $x^2=\frac{1}{9}; x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$.

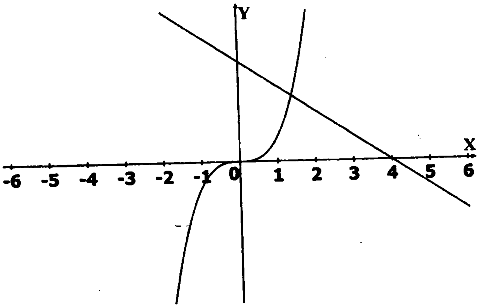
в) $(2x^2-1)(2x^2+1)-12(x^2+7)=131$; $x^2=y\geq 0$;

$(2y-1)(2y+1)-12(y+7)-131=0$; $4y^2-1-12y-84-131=0$;

$4y^2-12y-216=0$; $y^2-3y-54=0, D=15^2$; $y_1=\frac{3+15}{2}=9, y_2<0$;

$x^2=9; x_{1,2}=\pm 3$.

7. $x^3 = 4 - x$; $x \approx 1{,}4$ уточненное значение $x \approx 1{,}38$.



8. Решение системы уравнений с двумя неизвестными x и y — пара чисел (x_0, y_0), при подставлении которой в систему получаются верные равенства.

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 + 3y = 37 \end{cases}$; $\begin{cases} (-5)^2 - 4^2 = 9 \\ (-5)^2 + 3 \cdot 4 = 37 \end{cases}$ — верно, значит, $(-5;4)$ - решение.

б) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 5 \\ xy = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} (-5)^2 + 3(-5) \cdot 4 = 5 \\ -5 \cdot 4 = -20 \end{cases}$ — ложно, значит, $(-5;4)$ - не является решением.

9. а) $\dfrac{2}{1-2x} - \dfrac{2}{1-2x} = \dfrac{4x^2-5}{4x^2-1}$;

$\dfrac{2(2x-1)+2(2x+1)}{4x^2-1} = \dfrac{4x^2-5}{4x^2-1}$;

$\dfrac{4x^2-8x-5}{4x^2-1} = 0$; $4x^2 - 8x - 5 = 0$; $x \neq \pm 0{,}5$

$D = 8^2 + 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 = 12^2$; $x_1 = \dfrac{8+12}{8} = 2{,}5$ и $x_2 = \dfrac{8-12}{8} = -0{,}5$

Ответ: $x = 2{,}5$

б) $\dfrac{2}{5+2x} - \dfrac{2}{5-2x} = \dfrac{4x^2-45}{4x^2-25}$;

$\dfrac{2(2x-5)+2(2x+5)}{4x^2-25} = \dfrac{4x^2-45}{4x^2-25}$;

$\dfrac{4x^2-8x-45}{4x^2-25} = 0$ $4x^2 - 8x - 45 = 0$; $x \neq \pm 2{,}5$

$D = 8^2 + 4 \cdot 4 \cdot 45 = 784 = 28^2$; $x_1 = \dfrac{8+28}{8} = 4{,}5$ и $x_2 = -2{,}5$.

Ответ: $x = 4{,}5$.

10. а) $\frac{1}{x^2+4x-2}-\frac{1}{x^2+4x}=\frac{4}{x^2+4x-3}$;

$t=x^2+4x+4=(x+2)^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{t}-2$;

$\frac{1}{t-6}-\frac{1}{t-4}=\frac{4}{t-7}$; $\frac{2}{(t-4)(t-6)}=\frac{4}{t-7}$;

$\frac{2(t-4)(t-6)-(t-7)}{(t-4)(t-6)(t-7)}=0$; $2t^2-21t+55=0$;

$D=21^2-4\cdot2\cdot55=1$; $t_1=\frac{21+1}{4}=5{,}5$ и $t_2=5$

Ответ: $x=\pm\sqrt{5{,}5}-2$, $x=\pm\sqrt{5}-2$.

б) $\frac{x^2+6}{x}+\frac{x}{x^2+6}=5\frac{1}{5}$;

$t=\frac{x^2+6}{x}$; $t+\frac{1}{t}=5\frac{1}{5}$; $5t^2-26t+5=0$

$D=26^2-4\cdot25=576=24^2$; $t_1=\frac{26+24}{10}=5$ и $t_2=\frac{1}{5}$

$t=5 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ и $x=3$

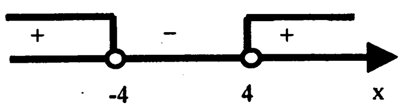
$t=\frac{1}{5} \Rightarrow 5x^2-x+30=0$

$D=1-4\cdot5\cdot30<0$

Ответ: $x=2$ и $x=3$.

11. Г.

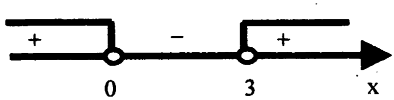
12. а) $x^2-16>0$; $(x-4)(x+4)>0$.



Ответ: $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.

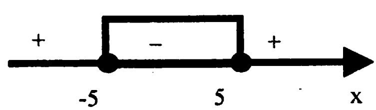
б) $-x^2-12<0$; $x^2+12>0$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

в) $x^2>3x$; $x^2-3x>0$; $x(x-3)>0$.



Ответ: $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

г) $x^2<25$; $(x-5)(x+5)<0$.



Ответ: $[-5;5]$.

д) $x^2-22x+121>0$; $(x-11)^2>0$; $x\neq 11$. Ответ: $x\neq 11$.

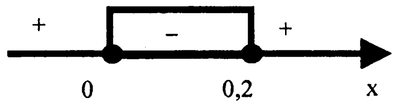
е) $x^2-12x+36<0$; $(x-6)^2<0$.

Ответ: нет решения.

13. а) $y=\sqrt{6x-30x^2}$;

$6x-30x^2\geq 0$; $30x^2-6x\leq 0$;

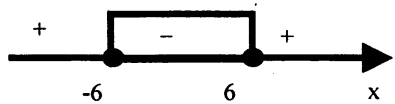
$x^2-\frac{x}{5}\leq 0$; $x\left(x-\frac{1}{5}\right)\leq 0$.



Ответ: $[0;0,2]$

б) $y=\frac{1}{\sqrt{36-x^2}}$; $36-x^2>0$;

$x^2-36<0$; $(x-6)(x+6)<0$.



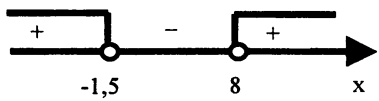
Ответ: $[-6;6]$.

в) $y=\frac{x}{\sqrt{2x^2-13x-24}}$;

$2x^2-13x-24>0$;

$D=169+8\cdot 24=361$;

$x_1=\frac{13+19}{4}=8; x_2=-1,5$.

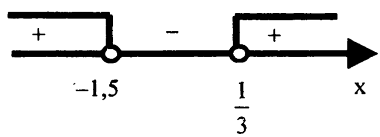


Ответ: $(-\infty;-1,5)\cup(8;+\infty)$.

г) $y=\frac{x-2}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$; $3x^2+2x-1>0$;

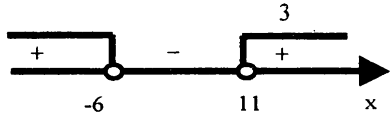
$D=2^2+4\cdot 3=16=4^2$;

$x_1=\frac{-2+4}{6}=\frac{1}{3}$ и $x_2=\frac{-2-4}{6}=-1$



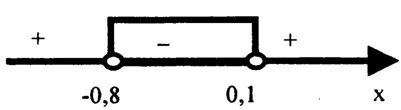
Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

14. а) $(x+6)(x-11)>0$.



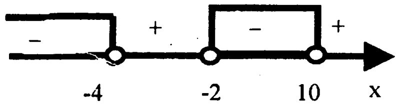
Ответ: $(-\infty;-6)\cup(11;+\infty)$.

б) $(x-0,1)(x+0,8)<0$.



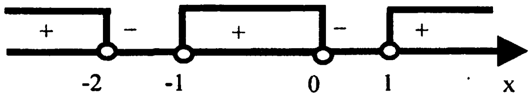
Ответ: $(-0,8;0,1)$.

в) $(x+4)(x+2)(x-10)<0$.



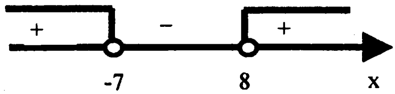
Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-2;10)$

г) $x(x+2)(x+1)(x-1)>0$.



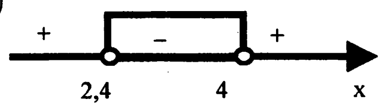
Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

15. а) $(x+7)(x-8)>0$.



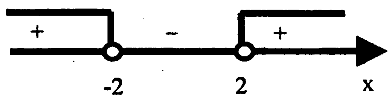
Ответ: $(-\infty;-7)\cup(8;+\infty)$.

б) $(x-4)(5x-12)<0$; $(x-4)\left(x-\dfrac{12}{5}\right)<0$.



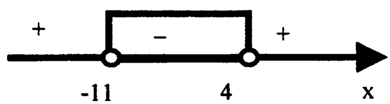
Ответ: $(2{,}4;4)$.

в) $\dfrac{x-2}{3x+6}>0$; $\dfrac{x-2}{x+2}>0$.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

г) $\dfrac{2x-8}{x+11}<0$; $\dfrac{x-4}{x+11}<0$.



Ответ: $(-11;4)$.

16. а) $\begin{cases} x^2+2x-15<0 \\ x^2-16>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<3 \\ |x|>4 \end{cases} \Leftrightarrow -5<x<4$

Ответ: (–5; 4).

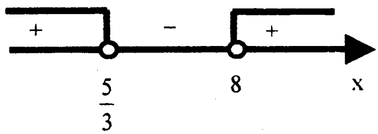
б) $\begin{cases} 3x^2+17x-6>0 \\ 5x^2-11x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{5}<x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}<x<2$

$3x^2+17x-6=0$;

$D=17^2+4\cdot3\cdot6=361=19^2$; $x_1=\dfrac{-17+19}{6}=\dfrac{1}{3}$ и $x_2=\dfrac{-17-19}{6}=-6$

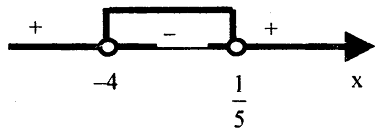
Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};2\right)$.

17. а) $\dfrac{3x-5}{x-8}>0$



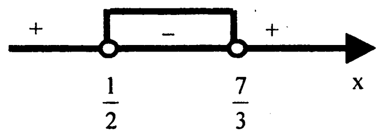
Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)\cup(8;+\infty)$.

б) $\dfrac{5x-1}{x+4}<0$



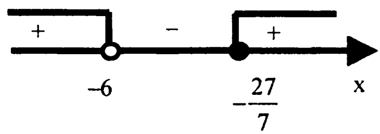
Ответ: $\left(-4;\dfrac{1}{5}\right)$.

в) $\dfrac{6-x}{2x-1}\ge 1$; $\dfrac{3x-7}{2x-1}\le 0$



Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{3}\right]$.

г) $\dfrac{3-2x}{x+6}\le 5$; $\dfrac{7x+27}{x+6}\ge 0$



Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left[-\dfrac{27}{7};+\infty\right)$.

18. а) $\begin{cases}2x^2+7x-4\le 0\\ 9x^2-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le x\le\dfrac{1}{2}\\ |x|\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le x\le-\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$2x^2+7x-4=0$

$D=7^2+4\cdot 2\cdot 4=81=9^2$;

$x_1=\dfrac{-7+9}{4}=\dfrac{1}{2}$ и $x_2=\dfrac{-7-9}{4}=-4$

Ответ: –4, –3, –2, –1.

б) $\begin{cases}3x^2+11x-42\le 0\\ 4x^2-9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6\le x\le 2\dfrac{1}{3}\\ |x|\ge 1\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-6\le x\le-1\dfrac{1}{2}\\ 1\dfrac{1}{2}\le x\le 2\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

$3x^2+11x-42=0$;

$D=11^2+4\cdot 3\cdot 42=625=25^2$;

$x_1=\dfrac{-11+25}{6}=\dfrac{7}{3}$ и $x_2=\dfrac{-11-25}{6}=-6$

Ответ: –6, –5, –4, –3, –2, 2.

Уравнения и неравенства с двумя переменными

1. Решением уравнения $F(x, y) = 0$ является пара чисел (x_0, y_0) такая, что $F(x_0, y_0) = 0$ — это верное числовое равенство.

а) $a^2 + 3 = 7$; $a^2 = 4$; $a = \pm 2$

Ответ: $a = \pm 2$.

б) Не при каких a.

2. График уравнения $F(x, y) = 0$ — это множество точек (x_0, y_0) плоскости O_{xy}, которые являются решением данного уравнения.

Ответ: А.

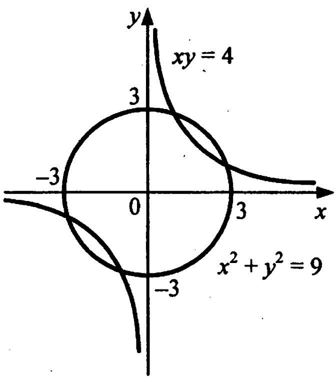
3. а) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4^2$

б) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

4. Решением системы уравнений $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ \ldots \\ F_n(x, y) = 0 \end{cases}$ называется такая пара чисел (x_0, y_0), которая одновременно является решением каждого уравнения $F_i(x, y) = 0$, где $i = 1, \ldots, n$.

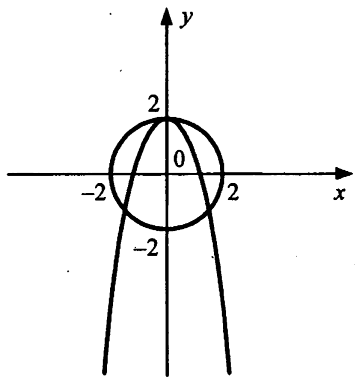
а) да; **б)** нет;

5. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 4 \end{cases}$



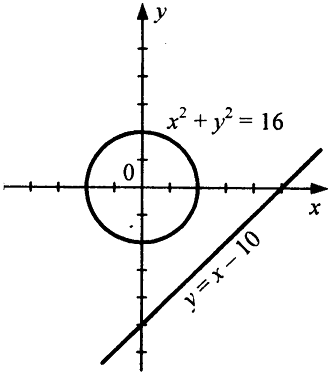
Ответ: $\left(\pm\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ и $\left(\pm\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}\right)$.

б) $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$



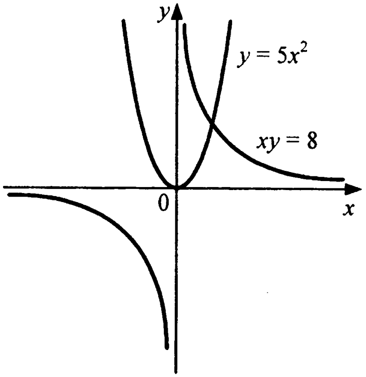
Ответ: $(0; 2)$ и $\left(\pm\sqrt{3}; -1\right)$.

6. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y = 10 \end{cases}$



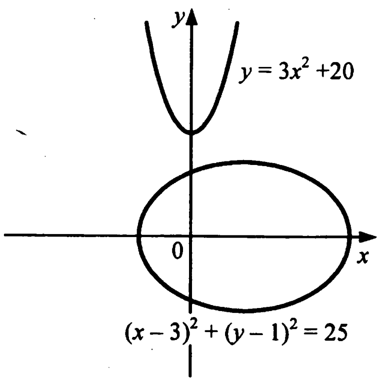
Ответ: нет.

б) $\begin{cases} y = 5x^2 \\ xy = 8 \end{cases}$



Ответ: нет.

в) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ y = 3x^2 + 20 \end{cases}$



Ответ: нет.

7. а) $\begin{cases} 2x - y = 13 \\ x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$; $y = 2x - 13$; $x^2 - (2x-13)^2 = 23$;

$x^2 - 4x^2 + 52x - 169 = 23$; $3x^2 - 52x + 192 = 0$;

$D = 400, x_1 = \frac{52+20}{6} = 12, x_2 = \frac{16}{3}$; $y_1 = 9, y_2 = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $(12;9), \left(\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

б) $\begin{cases} x+3y=5 \\ x^2-xy+y^2=73 \end{cases}$; $x=5-3y$; $25-30y+9y^2-5y+3y^2+y^2-73=0$;

$13y^2-35y-48=0$; $D=61^2, y_1=\dfrac{35+61}{26}=\dfrac{48}{13}; y_2=-1$; $x_1=\dfrac{-79}{13}; x_2=8$.

Ответ: $\left(-\dfrac{79}{13};\dfrac{48}{13}\right),(8;-1)$.

в) $\begin{cases} 2x^2-y^2=23 \\ 2x^2+y^2=41 \end{cases}$; $4x^2=64$ $x^2=16$ $x_{1,2}=\pm4$; $32-y^2=23$;

$y^2=9$; $y_{1,2}=\pm3$. Ответ: $(4;\pm3),(-4;\pm3)$.

г) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$; $y=7-2x$; $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{7-2x}-\dfrac{5}{6}=0$;

$6(7-2x)+6x-5x(7-2x)=0$; $42-12x+6x-35x+10x^2=0$;

$10x^2-41x+42=0$ $D=1, x_1=\dfrac{41+1}{20}=\dfrac{21}{10}=2{,}1; x_2=2$; $y_1=2{,}8; y_2=3$.

Ответ: $(2{,}1;2{,}8),(2;3)$.

8. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м^2 - площадь или 4800м^2, $2(x+y)$м – периметр или 280м. Получаем систему:

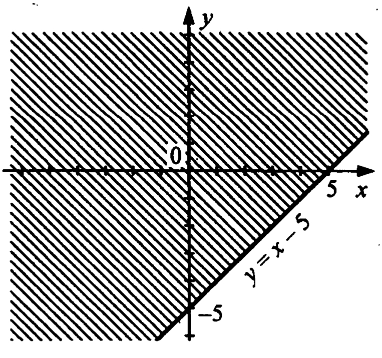
$\begin{cases} xy=4800 \\ 2(x+y)=280 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=4800 \\ x=140-y \end{cases}$; $y(140-y)=4800$;

$y^2-140y+4800=0; D=20^2; y_1=\dfrac{140+20}{2}=80; y_2=60$;

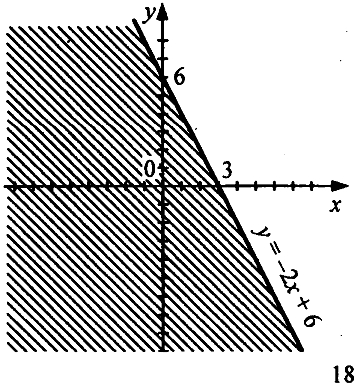
$x_1=60; x_2=80$. Итак, 60м и 80м – стороны прямоугольника.

Ответ: 60м, 80м.

9. а) $y\ge x-5$



б) $y\le -2x+6$

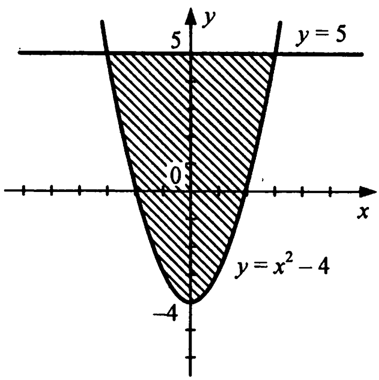


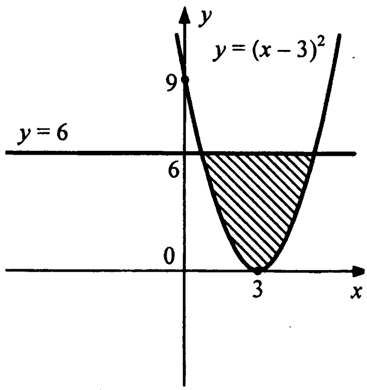
10. а) $x^2+(y-1)^2 \le 25$;

б) $(x+4)^2+(y-2)^2>25$.

11. а) Правый круг; **б)** Нижний полукруг.

12. а) $\begin{cases} y \ge x^2-4 \\ y \le 5 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y \ge (x-3)^2 \\ y \le 6 \end{cases}$





Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. а) 6;12;18;24;30;36; **б)** 1;4;9;16;25;36.

2. а) $a_n = n^2-1$, $a_1=0, a_2=4-1=3, a_3=8, a_4=15, a_5=24$;

б) $a_n=\dfrac{n}{n+2}$, $a_1=0, a_2=1/2, a_3=3/5, a_4=2/3, a_5=5/7$;

в) $a_n=0{,}5^n=2^{n-1}$, $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8, a_5=16$.

г) $a_1=3$, $a_2=10$, $a_3=29$, $a_4=66$, $a_5=127$.

3. а) $a_1=20$; $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$;

$a_2=\dfrac{a_1}{2}=10$; $a_3=\dfrac{a_2}{2}=5$; $a_4=\dfrac{a_3}{2}=2{,}5$; $a_5=\dfrac{a_4}{2}=1{,}25$;

б) $a_1=-3; a_{n+1}=(-1)^n a_n$; $a_2=-a_1=3; a_3=a_2=3; a_4=-a_3=-3; a_5=a_4=-3$.

4. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности.
$a_1=37, d=4$;

$a_2=a_1+d=41; a_3=a_2+d=45; a_4=a_3+d=49; a_5=a_4+d=53$.

5. $a_n = a_1 + d(n-1)$;

6. а) $a_{11} = a_1 + 10d = -3 + 10 \cdot 11 = 107$;

б) $a_{31} = a_1 + 30d = 0{,}8 - 30 \cdot 0{,}2 = -5{,}2$.

7. $12; 17\ \ldots;\ a_1 = 12; d = -5; a_n = a_1 + d(n-1) = 12 - 5(n-1) = 17 - 5n$;

$-58 = 17 - 5n; 5n = 75; n = 15$, значит $-58 = a_{15}$;

$-76 = 17 - 5n;\ 5n = 93;\ n = \frac{93}{5} \notin N$, значит -76 - не член (a_n).

8. $a_n = kn + b$; $a_{n-1} = k(n-1) + b; a_{n+1} = k(n+1) + b; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;

$k_{n+b} = \frac{k(n-1) + b + k(n+1) + b}{2}$ – верно для любого $n \in N$, значит, (a_n) – арифметическая прогрессия, чтд.

а) $a_n = 3n - 1$ – арифметическая прогрессия с $k = 3, b = -1$;

б) $a_{nm} = -n + 16$ – арифметическая прогрессия с $k = -1, b = 16$;

в) $a_n = 0{,}4n$ – арифметическая прогрессия с $k = 0{,}4, b = 0$;

г) $a_n = 14n^2; a_1 = 14; a_2 = 56; a_3 = 126$;

$56 - 14 \neq 126 - 56$, значит (a_n) – не арифметическая прогрессия;

д) $a_n = \frac{n}{4}$ – арифметическая прогрессия с $k = \frac{1}{4}, b = 0$.

е) $a_n = \frac{n-1}{3}$ — арифметическая прогрессия с $k = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$.

9. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

а) $1{,}5;\ 4{,}5;\ 7{,}5; \ldots;\ a_1 = 1{,}5;\ d = 3;\ S_6 = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 54$.

б) $S_6 = \frac{2(-8) + 2 \cdot 5}{2} \cdot 6 = -18$

10. а) $a_1 = -8; d = 5$; $S_{10} = \frac{-16 + 5 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 145$;

б) $a_1 = 0{,}4; d = -0{,}2$; $S_{10} = \frac{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 9}{2} \cdot 10 = -5$.

11. а) $50;\ 51;\ 52; \ldots;\ 70;\ n = 21;\ a_1 = 50;\ d = 1$;

$S_{21} = \frac{100 + 20}{2} \cdot 21 = 1260$.

б) $25;\ 26; \ldots;\ 75;\ n = 51;\ a_1 = 25;\ d = 1;\ S_{51} = \frac{50 + 50}{2} \cdot 51 = 2550$

12. Геометрическая прогрессия – такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. $b_1 = 72, q = 05$;

$b_2 = 72 \cdot 0{,}5 = 36; b_3 = 36 \cdot 0{,}5 = 18; b_4 = 18 \cdot 0{,}5 = 9; b_5 = 9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$.

13. $b_n = b_1 q^{n-1}$; **а)** $b_1 = 2, q = -1, b_5 = 2 \cdot q^4 = 2 \cdot (-1)^4 = 2$;

б) $b_1 = 2,\ q = \sqrt{2},\ b_7 = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^6 = 2 \cdot 2^3 = 16$.

14. $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, при $q \neq 1$; 12; -6; 3; ..... $b_1 = 12$; $q = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2}$;

а) $S_6 = \dfrac{12\left(\dfrac{1}{67} - 1\right)}{-\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{12 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \dfrac{21 \cdot 3}{8} = \dfrac{63}{8}$.

б) $S_6 = (-10)\left(\dfrac{(-2)^6 - 1}{-2-1}\right) = 210$.

15. а) $b_1 = 12, q = -2$; $S_6 = \dfrac{12(64-1)}{-3} = \dfrac{-12 \cdot 63}{3} = -252$;

б) $b_1 = 3, q = \sqrt{3}$; $S_6 = \dfrac{3(27-1)}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{78}{\sqrt{3}-1}$.

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

1. а) Перестановка из n элементов — это упорядоченное множество длины n, составленное из элементов n-элементного множества.

б) Размещение из n элементов по k — это упорядоченное множество длины k, составленное из элементов n-элементного множества.

в) Сочетание из n элементов по k — это k-элементное подмножество n-элементного множества.

2. Б, $C_{24}^4 = \dfrac{24!}{4! \cdot 20!} = 10626$.

3. $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$; наименьшее: 20468; наибольшее: 86420.

4. а) $5C_8^3 = \dfrac{5 \cdot 8!}{3! \cdot 5!} = 280$; **б)** $A_4^3 + A_6^2 = \dfrac{4!}{1!} + \dfrac{6!}{4!} = 54$.

5. а) $84 = 6 \cdot 14 \Rightarrow$ да; **б)** $38 = 2 \cdot 19$; $19 > 14 \Rightarrow$ нет.

6. а) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!} = 380$. $(n+4)(n+3) = 380 = 20 \cdot 19$; $n + 3 = 19$; $n = 16$

б) $\dfrac{(n+6)!}{(n+8)!} = \dfrac{1}{306}$. $(n+8)(n+7) = 306 = 18 \cdot 17$; $n + 7 = 17$; $n = 10$.

7. Существует только 7 способов разместить книги так, чтобы 4 сборника задач стояли рядом, поэтому всего $7\cdot 6!\cdot 4!=120960$ способов.

8. Существует только 8 способов разместить девочек так, чтобы Катя, Вера и Юля сидели рядом, поэтому всего $8\cdot 7!\cdot 2=80640$.

9. Книги можно выбрать $C_{12}^3=\dfrac{12!}{3!\cdot 9!}=220$ способами, а журналы — $C_{10}^2=\dfrac{10!}{2!\cdot 8!}=45$ способами. Всего: $220\cdot 45=9900$ способов.

10. Пусть было отмечено n точек, тогда $C_n^2=3\cdot C_{n-4}^2$.

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}=3\cdot\frac{(n-4)!}{2!(n-6)!};\ n(n-1)=3(n-4)(n-5);$$

$$n^2-13n+30=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n=3\\ n=10\end{array}\right.$$

Ответ: 10.

11. Пусть число учащихся равно n, тогда $C_n^2=1\frac{3}{7}C_{n-4}^2$.

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}=1\frac{3}{7}\cdot\frac{(n-4)!}{2!(n-6)!}$$

$7n(n-1)=10(n-4)(n-5)$; $3n^2-83n+200=0$

$$D=83^2-4\cdot 3\cdot 200=4489=67^2;\ n_1=\frac{83+67}{6}=25 \text{ и } n_2=\frac{83-67}{6}=\frac{8}{3}$$

Ответ: 25.

12. Вероятность случайного события — это частота случаев, в которых оно произошло, т.е. отношение числа таких случаев к общему числу испытаний.

Событие называется невозможным, если ему не благоприятен ни один из возможных исходов. Его вероятность равна 0. Событие называется достоверным, если ему благоприятен любой исход испытания. Его вероятность равна 1.

13. а) Простых чисел 5, поэтому вероятность равна $\dfrac{5}{13}$;

б) таких чисел 4, поэтому вероятность равна $\dfrac{4}{13}$.

14. $P_1=\dfrac{30-27}{30}=\dfrac{3}{30}=\dfrac{1}{10}$; $P_2=\dfrac{30-24}{30}=\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}$;

Да, может.

15. Всего таким образом получится 4! = 24 слова, поэтому вероятность равна $\dfrac{2}{24}=\dfrac{1}{12}$.

16. Всего существует 7! = 5040 способов жеребьевки, из них тех, в которых Игорь будет дежурить в субботу или воскресенье $2-6!=1440$, поэтому вероятность равна $\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$.

17. Всего 4^2 = 16 таких чисел, а тех, у которых цифры совпадают — 4, поэтому вероятность равна $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

18. $S_{ABCD}=a^2$; $S_{EBF}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{8}$; **Вероятность равна** $\frac{S_{EBF}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{8}$.

19. Пусть желтых кружек n, тогда $\frac{n}{n+9}+0{,}15=\frac{n+3}{(n+3)+9}$.

$\frac{n}{n+9}+0{,}15=\frac{n+3}{n+12}$;

$20n(n+12)+3(n+9)(n+12)=20(n+3)(n+9)$; $3n^2+63n-216=0$.

$D=63^2+4\cdot 3\cdot 216=6561=81^2 \Rightarrow n=\frac{-63+81}{6}=3$.

Ответ: 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Осенняя олимпиада

1. Пусть x – цифра десятков, y – цифра единиц, тогда $10x+y$ – данное число.

Получаем уравнение: $10x+y = xy+12$

Перепишем его в виде: $(10-y)(x-1) = 2$

В последнем уравнении слева стоит произведение двух натуральных чисел, значит, возможны два случая:

1) $\begin{cases} 10-y=2;\ y=8 \\ x-1=1;\ x=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 10-y=1;\ y=9 \\ x-1=2;\ x=3 \end{cases}$;

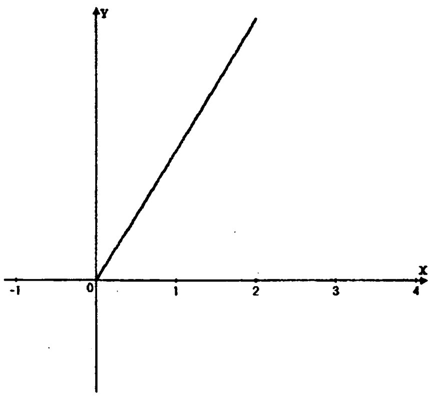
Ответ: 28 или 39.

2.

Предположим, что дробь $\frac{a}{b}$ сократима, т.е. $a = a_1k;\ b = b_1k$, где $k \neq 1$ - натуральное число. Тогда получаем:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a_1k - b_1k}{a_1k + b_1k} = \frac{k(a_1 - b_1)}{k(a_1 + b_1)} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_1}$, т.е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно. Значит, дробь $\frac{a}{b}$ несократима, ч.т.д.

3. $y = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x,\ x \geq 0 \\ x - x = 0,\ x < 0 \end{cases}$.



4. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, ч.т.д.

5. $(1+x^2)^2 = 4x(1-x^2)$; пусть $x^2 = a > 0$, имеем: $x^2 = -1-4x$;

$(1+a)^2 = 4x(1-a)$; $a^2 + (2+4x)a + 1 - 4x = 0$; $D = 16x^2$;

$a_1 = \dfrac{-2-4x+4x}{2} = -1 < 0$; $a_2 = \dfrac{-2-4x-4x}{2} = -1-4x$;

$x^2 + 4x + 1 = 0$; $D = 16 - 4 = 4\cdot 3$; $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $-2 \pm \sqrt{3}$

6. $|x-1| + |x+2| \le 3$. Нули модулей $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

а) $(-\infty;-2]$; $1-x-x-2 \le 3$;
$2x \ge -4$; $x \ge -2$; $x = -2$;

б) $[-2;1]$; $1-x+x+2 \le 3$; $3 \le 3$; $x \in [-2;1]$;

в) $[1;+\infty)$; $x-1+x+2 \le 3$; $2x \le 2$; $x \le 1$; $x = 1$;

Итого, получаем $-2 \le x \le 1$.

Ответ: $-2 \le x \le 1$

7. Пусть $AB = a$ км.

x км/ч, y км/ч – скорости пешехода и велосипедиста соответственно.

Получаем: $\begin{cases} \dfrac{a-6}{y} = \dfrac{6}{x}; \dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{a-6} \\ \dfrac{a}{y} = \dfrac{a-16}{x}; \dfrac{x}{y} = \dfrac{a-16}{a} \end{cases}$; $\dfrac{6}{a-6} = \dfrac{a-16}{a}$;

$a^2 - 22a + 96 = 6a$; $a^2 - 28a + 96 = 0$; $D = 400$;

$a_1 = \dfrac{28+20}{2} = 24$; $a_2 = 4$ - не подходит по условию $AB = 24$ км.

Ответ: 24 км.

8. $x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$; $9x^2 + 4y^2 + 12xy = x^2y^2 + 12xy + 36$;

$(3x+2y)^2 = (xy+6)^2$

$3x + 2y = xy + 6$;	$3x + 2y = -(xy+6)$;
$3x - xy = 6 - 2y$;	$3x + xy = -6 - 2y$;
$x = \dfrac{6-2y}{3-y} = 2$;	$x = \dfrac{-6-2y}{3+y} = -2$;
$y = 3$.	$y = -3$.

Итак, графики уравнения - объединение четырех прямых:
$x = -2$, $x = 2$, $y = -3$, $y = 3$.

Весенняя олимпиада

1. 1. $x^6-x^5+x^3-x+1=x^6-x^5+x^4-x^4+x^3-x^2+x^2-x+1=$

$=x^4\left(x^2-x+1\right)-x^2\left(x^2-x+1\right)+\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

2. $2x^2+2xy+4y^2+2x+6y+5\geq 1$

$x^2+2xy+y^2+x^2+2x+1+3y^2+6y+3=(x+y)^2+(x+1)^2+3(y+1)^2\geq 0$

при любых x и y, значит, исходное неравенство также верно для любых x и y. ч.т.д.

3. $|x|+|y|=1$.

4. а) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$;

$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-2\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}=\sqrt{x}$;

$2x-2\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x}$; $2x=2\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}$;

$4x^2=4x^2-4x+x+4\sqrt{x\left(x^2-x\right)}$; $3x=4\sqrt{x\left(x^2-x\right)}$;

$9x^2=16x\left(x^2-x\right)$

$x_1=0$, $\qquad 9=16(x-1)$; $x_2=1\frac{9}{16}$.

Ответ: $0; 1\frac{9}{16}$.

б) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)}=\sqrt[3]{1-x^2}$;

$\left(1+x^2\right)-3\sqrt[3]{(1+x)^4(1-x)^2}+3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4}-(1-x)^2=1-x^2$.

5. $a_n=7^n+12n=(7^n-1+12n)+1=$

$=\left[6(1+7+\ldots+7^{n-1})+12n\right]-1=6(1+7+\ldots+7^{n-1}+2n)+1$

Остаток от деления 7^k+2 на 3 равен 0, поэтому $7^k+2=3l_k$, где $k=0, \ldots, n-1$.

Тогда $a_n=6\left[(1+2)+(7+2)+\ldots+(7^{n-1}+2)\right]+1=$

$=18(l_0+\ldots+l_{n-1})+1=18\cdot m+1$.

6. $\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}+$

$+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}=$

$=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, ч.т.д.

7. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=$

$=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$.

8. $x^2-y^2=21$; $(x-y)(x+y)=21$; $x>y$;

$(x-y)$, $(x+y)$-натуральные; 21 = 3·7 или 21 = 1·21;

Получаем: $\begin{cases} x-y=3;\ x=3+y \\ x+y=7 \end{cases}$; $3+2y=7$; $2y=4$; $y=2$ $x=5$;

или

$\begin{cases} x-y=1;\ x=y+1 \\ x+y=21 \end{cases}$; $2y=20$; $y=10$ $x=11$.

Ответ: (5;2) или (11; 10).

Справочное издание

Бачурин Владимир Евгеньевич

Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре за 9 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 15295 от 13.04.2011 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *А.Ю. Горелик*
Компьютерная верстка *Е.Ю. Лысова, Д.А. Ярош*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебн

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).